

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Projekt iz Raspoznavanja uzoraka

Izlučivanje značajki lica Gaborovim filtrom

Tomislav Reicher Krešimir Antolić Igor Belša
Marko Ivanković Ivan Krišto Maja Legac
Tomislav Novak

Zagreb, siječanj 2010.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Teorijska razrada	2
3. Gaborov filter	3
3.1. Valna duljina (λ)	4
3.2. Orijentacija (θ)	5
3.3. Omjer dimenzija (γ)	5
3.4. Standardna devijacija (σ)	5
4. Izlučivanje značajki pomoću Gaborovog filtra	8
5. Klasifikacija	10
5.1. Stroj s potpornim vektorim	10
5.2. Metoda $k - nn$	11
6. Evaluacija	13
7. Zaključak	14
Literatura	15

1. Uvod

Raspoznavanje uzoraka je znanstvena disciplina iz područja računarskih znanosti čiji je cilj klasifikacija ili razvrstavanje objekata u jedan od brojnih razreda ili klasa. Iako su područja uporabe brojna u ovom radu koncentracija je na raspoznavanju vizualnih uzoraka. Točnije, radi se o raspoznavanju lica.

Raspoznavanje lica uključuje računalno prepoznavanje identiteta na temelju značajki dobivenih obradom slike lica. Iako ljudima lak zadatak, prepoznavanje lica i njihovo raspoznavanje je veoma zahtjevan posao za računalo. Zadatak postaje tim zahtjevniji ako su lica slikana pod različitim osvjetljenjem, različitim kutovima ili osobe na slikama imaju različite izraze lica.

Kao osnovna motivacija za korištenje Gaborovog filtra za izvlačenje značajki je veza sa biološkim osobinama vida kod sisavaca čiji su receptori osjetljivi na karakteristične prostorne frekvencije te njihovu orijentaciju. Gaborov filter može iskoristiti vizualne osobine kao što su lokalizacija prostora i selekcija orijentacije pojedine prostorne frekvencije te tako omogućiti lakše raspoznavanje objekata vanjskog svijeta ([Bhuiyan and Liu, 2007](#)).

U 2. poglavlju ukratko je opisana osnovna ideja korištenja Gaborovog filtra u izlučivanju značajki za klasifikaciju lica, u 3. poglavlju prikazan je matematički model dvodimenzionalnog Gaborovog filtra te su navedena objašnjenja i utjecaj pojedinih parametara Gaborovog filtra. U 4. poglavlju opisan je postupak izlučivanja značajki Gaborovim filtrom te su navedeni korišteni parametri. U 5. poglavlju opisana je metoda kojom su lica klasificirana na temelju izlučenih značajki, dok je provedena evaluacija opisana u poglavlju 6. Konačno, na kraju je dan zaključak.

2. Teorijska razrada

Slike lica osoba koje računalni sustav treba raspoznati podložne su različitom šumu kao što su varijacija osvjetljenja, položaj lica, izražaji lica (lice s osmijehom, ozbiljno lice), brkovi i brada kod lica muškaraca, naočale itd. Jedna od metoda izlučivanja značajki koja se pritom koristi kako bi se doskočilo navedenim problemima je izlučivanje značajki Gaborovim filtrom. Osnovna ideja u izlučivanju značajki Gaborovim filtrom je pronaći značajke lica karakterizirane prostornom frekvencijom (engl. *Spatial frequency*), prostornom lokalizacijom (engl. *Spatial locality*) i orijentacijom koje će predstavljati diskriminatorne značajke za raspoznavanje lica različitih osoba. Promatranje slike u frekvencijskoj domeni (engl. *Frequency domain*), gdje je cijela slika predstavljena skupom različitih prostornih frekvencija, omogućuje lakšu manipulaciju različitim informacijama sa slike. Uklanjanjem nekog manjeg skupa frekvencija i prikazom dobivene slike moguće je ukloniti različiti šum na slici. Problem kod prikaza u frekvencijskoj domeni je globalni karakter prikaza, tj. za pojedinu frekvenciju nije moguće odrediti gdje se prostorno na slici ona pojavila. Moguće je samo utvrditi da ona na slici postoji. Gaborov filter rješava upravo navedeni problem prostorne lokalizacije. Pomoću njega moguće je efikasno odrediti da li se u pojedinom dijelu slike pojavila određena frekvencija, koja je amplituda i faza te frekvencije te koji je smjer njenog rasprostiranja.

Nakon izlučivanja skupa značajki pomoću Gaborovog filtra lice sa slike raspoznaje se klasifikatorom. Izbor klasifikatora koji se pri tome može koristiti je proizvoljan, a klasifikator koji je korišten u ovom radu je stroj s potpornim vektorima (engl. *Support vector machine, SVM*) uz nelinearno preslikavanje radijalnom baznom funkcijom.

3. Gaborov filter

Jezgra Gaborovog filtra dvodimenzionalna je Gaborova funkcija koju čini kompleksni sinusoidalni val moduliran Gaussovom funkcijom. Gaborova funkcija dana je kao (Petkov and Wieling, 2008):

$$g_{\lambda,\theta,\sigma,\gamma}(x, y) = \exp\left(-\frac{x'^2 + \gamma^2 y'^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(j2\pi \frac{x'}{\lambda}\right), \quad (3.1)$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Ovdje σ označava standardnu devijaciju Gaussove funkcije u x smjeru, γ označava omjer devijacije Gaussove funkcije u x i y smjeru ($\gamma = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$), λ je valna duljina potpornog sinusoidalnog vala, a θ kut smjera rasprostiranja sinusoidalnog vala.

Frekvencija i odabir orijentacije Gaborovog filtra su izražajnije u domeni frekvencijskog prikaza predstavljenog Gaborovom funkcijom (3.2) koja određuje koliko filter utječe na svaku frekvencijsku komponentu ulazne slike.

$$G(u, v) = \exp\left(-\frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{2\sigma_{uv}^2}\right), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{2\pi\sigma}. \quad (3.3)$$

Parametri (u_0, v_0) definiraju prostornu frekvenciju sinusoidalnog vala u ravnini koja također može biti izražena polarnim koordinatama kao radijalna frekvencija r_0 , odnosno valna duljina λ , i orijentacija θ čime dobivamo parametre ovisne o frekvenciji ekvivalentne onima iz Gaborove funkcije u prostornoj domeni:

$$r_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}, \quad (3.4)$$

$$\tan \theta = \frac{v_0}{u_0}, \quad (3.5)$$

$$\lambda = \frac{1}{r_0}. \quad (3.6)$$

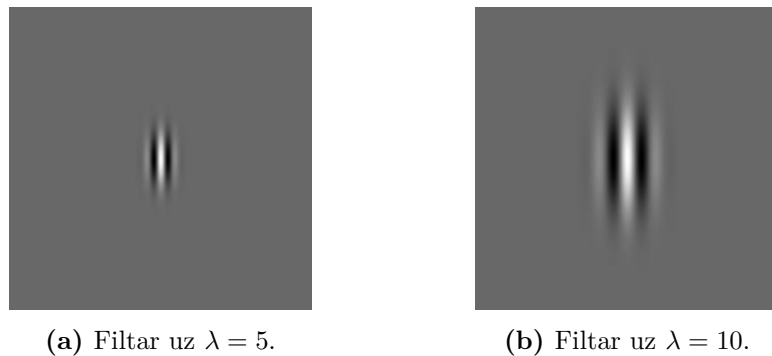
Iz gornje formule možemo vidjeti da je Gaborova funkcija u frekvencijskoj domeni jednaka Gaussovoj funkciji postavljenoj u točki (u_0, v_0) , odnosno (r_0, θ) , te s time na umu Gaborov filtar možemo gledati kao pojasno propusni filtar koji propušta frekvencije u malom pojasu oko centralne frekvencije (u_0, v_0) .

Kako bi bilo moguće odabrati parametre Gaborovog filtra koji će služiti za izlučivanje značajki potrebno je promotriti utjecaj pojedinih parametara na Gaborovu funkciju.

3.1. Valna duljina (λ)

Valna duljina se odnosi na valnu duljinu sinusoidalnog vala u Gaborovoj funkciji kojom se ujedno definira i prostorna frekvencija na koju će sam Gaborov filtar biti osjetljiv. Valna duljina ovdje određuje duljinu ciklusa u slikovnim elementima (engl. *Pixel*) i realan je broj veći ili jednak 2. Prema Nyquist–Shannonovom teoremu uzorkovanja signal koji sadrži frekvencije veće od polovine frekvencije uzorkovanja ne može biti rekonstruiran u potpunosti, stoga je gornja granica frekvencije koju $2D$ slika može sadržavati jednaka $F_{max} = 0.5$ ciklusa/slikovnom elementu, a to upravo znači da će minimalna valna duljina biti veća ili jednaka od 2 slikovna elementa.

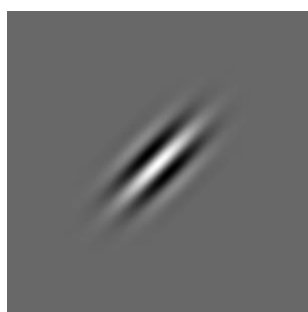
Slike realnih dijelova Gaborovih filtara uz parametre $\theta = 0$, $b = 1$, i $\gamma = 0.5$ mogu se vidjeti na slici 3.1.



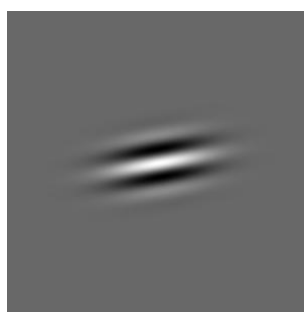
Slika 3.1: Gaborov filtar uz različite valne duljine.

3.2. Orijentacija (θ)

Orijentacija određuje smjer rasprostiranja moduliranog sinusnog signala odnosno kut normale paralelnih pruga Gaborovog filtra. Za potpuno specificiranje prostorne frekvencije, ukoliko se ona prikazuje u polarnom obliku odnosno kao radijalna frekvencija, nije dovoljna samo informacija o valnoj duljini, već je potrebno odrediti i smjer u kojem se ta frekvencija rasprostire. Orijentacija je određena kutom od 0 do 360 stupnjeva odnosno 0 do 2π radijana. Prikaze realnog dijela Gaborovog filtra sa orijentacijama od 45° , 80° i 0° možete vidjeti na slikama 3.2a, 3.2b i 3.1b.



(a) Filtar uz $\theta = 45^\circ$.



(b) Filtar uz $\theta = 80^\circ$.

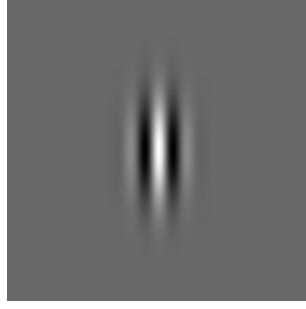
Slika 3.2: Gaborov filtar uz različite orijentacije.

3.3. Omjer dimenzija (γ)

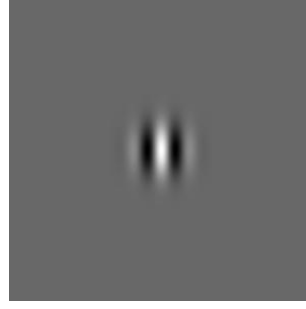
Parametar koji se preciznije naziva prostorni omjer dimenzija, određuje eliptičnost Gaborove funkcije tj. odnos između devijacija Gaussove funkcije u x i y smjeru. Za $\gamma = 1$ eliptičnost se svodi na krug, dok je za $\gamma < 1$ funkcija je izdužena u smjeru paralelnom s paralelnim prugama funkcije. Primjer filtra sa različitim omjerima dimenzija se može vidjeti na slici 3.3.

3.4. Standardna devijacija (σ)

Standardna devijacija Gaussove funkcije utječe na dio prostora u kojem će se računati odziv Gaborovog filtra, a jednako tako utječe i na širinu frekvencijskog pojasa kojeg će Gaborov filtar propustiti, stoga je poželjno da omjer standardne devijacije i radijalne frekvencije Gaborove funkcije bude konstantan. Gaborova



(a) Filtar uz $\gamma = 0.5$.



(b) Filtar uz $\gamma = 1$.

Slika 3.3: Gaborov filtar uz različite omjere dimenzija.

funkcija s većom frekvencijom će tako imati manju standardnu devijaciju te time pokrivati manju površinu u prostornoj domeni od Gaborove funkcije s manjom frekvencijom.

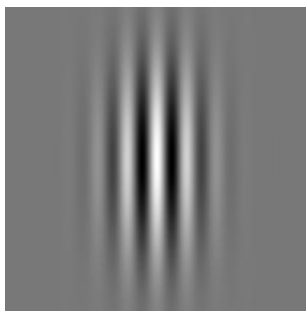
Širina Gaborovog filtra b povezana je s omjerom $\frac{\sigma}{\lambda}$, ($\lambda = \frac{1}{r_0}$) i definirana kao

$$b = \log_2 \left(\frac{\frac{\sigma}{\lambda}\pi + \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}}{\frac{\sigma}{\lambda}\pi - \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}} \right), \quad (3.7)$$

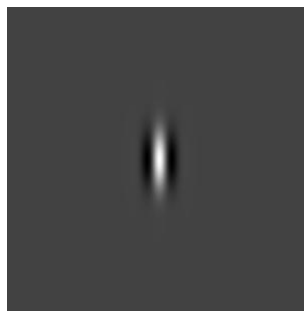
$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \cdot \frac{2^b + 1}{2^b - 1}. \quad (3.8)$$

Prilikom izvedbe filtra vrijednost σ se ne može direktno odrediti, nego se mijenja samo preko vrijednosti širine filtra, b . Uz zadani b i poznati λ , σ se određuje prema gornjoj formuli.

Širina filtra zadana je kao pozitivni realni broj. Što je širina manja, σ je veća i povećava se broj naglašavajućih i prigušavajućih pruga Gaborovog filtra. Primjere realnog dijela filtra s različitim širinama moguće je vidjeti na slikama 3.4a i 3.4b. Na prethodnim primjerima korištena je širina filtra od $b = 1$.



(a) Filtar uz $b = 0.5$.



(b) Filtar uz $b = 2$.

Slika 3.4: Gaborov filter uz različite širine.

4. Izlučivanje značajki pomoću Gaborovog filtra

Izlučivanje značajki sa slika lica provodi se konvolucijom slike sa skupom Gaborovih filtara. Ako je s $I(x, y)$ definirana slika sivih razina, odziv pojedinog Gaborovog filtra i slike računa se konvolucijom:

$$O(x, y, \lambda, \theta) = I(x, y) * g(x, y, \lambda, \theta), \quad (4.1)$$

gdje je $g(x, y, \lambda, \theta)$ Gaborov filter definiran parametrima λ i θ . Rezultantna slika koja nastaje je kompleksna slika s realnim i imaginarnim dijelom. Parametri koji su u ovom radu pri tome korišteni su $\lambda = \{2.5, 4, 5.6568, 8, 11.3137, 16\}$ i $\theta = \{\frac{i\pi}{8} | i = 0 \dots 7\}$ uz ostale parametre filtra $\gamma = 1$ i $b = \pi$ za koje se pokazalo da su uspješni u izlučivanju značajki prilikom klasifikacije lica ([Shen et al., 2007](#)).

Prije konvolucije Gaborov filter potrebno je normalizirati, odnosno Gaborovu funkciji oduzeti istosmjernu komponentu (engl. *DC component*), kako odziv nebi bio ovisan o varijacijama osvjetljenja izvorne slike, tj. o istosmjernoj komponenti izvorne slike. Nakon što se slika konvoluirala s cijelim skupom Gaborovih filtara dobiveni su odzivi $O(x, y, \lambda_i, \theta_j)$ za sve parametre θ i λ . Za svaki element (x, y) slike kompleksnog odziva $O(x, y, \lambda_i, \theta_j)$ računa se magnituda čime je dobivena nova slika realnih vrijednosti magnitude pri čemu su vrijednosti magnitude unutar slike skalirane na interval $[0, 1]$. Kako su izvorne slike, koje su korištene u raspoznavanju, dimenzija 64×64 sliku magnituda potom svodimo na sliku manjih dimenzija, 8×8 , postupkom rezolucijske piramide: Slikovni element nove slike dobiven je kao srednja vrijednost 8×8 susjednih slikovnih elemenata. Ako je s $O^r(x, y, \lambda_i, \theta_j)$ označena dobivena slika magnituda nakon postupka reduciranja dimenzije, svaka slika se tada pretvara u vektor $V(x, y, \lambda_i, \theta_j)$ tako da se slijepe (engl. *Concatenate*) redovi slike $O^r(x, y, \lambda_i, \theta_j)$. Dobiveni skup vektora se potom slijepe u resultantni vektor X :

$$X = \left(V(x, y, \lambda_1, \theta_1)^T \dots V(x, y, \lambda_i, \theta_j)^T \dots V(x, y, \lambda_m, \theta_n)^T \right) \quad (4.2)$$

gdje je s^T označena operacija transponiranja.

Vektor X je vektor značajki koje se koriste za raspoznavanja lica i on je veličine $8 \times 8 \times 48 = 3072$ jer je nastao povezivanjem reduciranih rezultata konvolucije izvorne slike s 48 različitih Gaborovih filtara. Treba primijetiti da je postupak reduciranja dimenzionalnosti nužan jer bi bez tog koraka dobiveni vektor značajki bio dimenzija $64 \times 64 \times 48 = 196608$ što u pogledu brzine izvođenja predstavlja ozbiljan problem prilikom računanja samog vektora, a i prilikom koraka klasifikacije.

5. Klasifikacija

Prikaz izvorne slike vektorom realnih brojeva omogućava jednostavno korištenje klasifikatora koji traže decizijske funkcije, tj. granice u vektorskom prostoru. Prilikom klasifikacije su tako isprobana dva pristupa: klasifikacija strojem s potpornim vektorima (engl. *Support vector machine*) i klasifikacija metodom k -najbližih susjeda (engl. *k-nearest-neighbor algorithm*).

5.1. Stroj s potpornim vektorim

Izvorno, SVM traži optimalnu linearnu granicu, odnosno hiperravninu, kako bi razdvojio različite razrede predstavljene skupom vektora u vektorskom prostoru. Iskorištavanjem jezgrenog trika (engl. *kernel trick*) isti klasifikator moguće je primijeniti za traženje proizvoljno nelinearne granice između različitih razreda. Pri tome često korištena jezgrena funkcija je radijalna bazna funkcija odnosno Gaussova jezgra:

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2). \quad (5.1)$$

Pokazano je da uz odabir ispravnih parametara (Keerthi and Lin, 2003) linearni SVM predstavlja specijalni slučaj SVM-a s radijalnom baznom funkcijom čime se isključuje potreba za korištenjem linearnog SVM-a kao potencijalnog klasifikatora. Prilikom korištenja radijalne bazne funkcije, a i općenito SVM-a, prije samog postupka učenja podatke je potrebno skalirati kako bi utjecaj svih atributa na klasifikaciju bio jednak, no u spomenutom slučaju klasifikacije lica postupak skaliranja je izostavljen pod pretpostavkom da su područja slike s većim vrijednostima odnosno većim rasponom vrijednosti od veće važnosti od ostalih područja.

Učenjem SVM-a traže se parametri pretpostavljenog oblika decizijske funkcije, koja će ispravno klasificirati sve uzorke u skupu za učenje, što ponekad zbog šuma u podacima ili njihove distribucije u prostoru nije moguće. Rješenje tog problema nalazi se u korištenju SVM klasifikatora s mekim granicama definiranim

parametrom C koji dozvoljava odstupanja od ispravne klasifikacije svih podataka u skupu za učenje s ciljem bolje generalizacije nad još neviđenim skupom podataka. Parametri SVM-a koji utječu na moć generalizacije nad neviđenim skupom za ispitivanje su tako C (parametar meke granice) i γ (parametar radijalne bazne funkcije). Oni zajedno čine prostor parametara čijom je pretragom potrebno pronaći vrijednosti parametara, tj. odabrati onaj model, koji će dati SVM klasifikator s najmanjom pogreškom generalizacije.

Pretraga parametra odvija se odabirom modela s parametrima (C, γ) iz skupa $(C = 2^{-5}, 2^{-4}, \dots, 2^{15}, \gamma = 2^{-15}, 2^{-14}, \dots, 2^3)$ (Chang and Lin, 2001) koji daju najveću točnost klasifikacije u procesu cross-validacije nad skupom za učenje. Točnost klasifikacije mjeri se formulom:

$$acc = \frac{n_c}{N}, \quad (5.2)$$

pri čemu je n_c broj točno klasificiranih slika lica, a N ukupan broj slika lica nad kojima je provedeno testiranje. Nakon što su pronađeni parametri modela (C, γ) , koji daju najveću točnost, klasifikator s navedenim parametrima ponovo se uči na potpunom skupu za učenje. Parametri SVM klasifikatora korišteni u ovom radu su $C = 2^{12}$ i $\gamma = 2^{-11}$.

5.2. Metoda $k - nn$

Metoda $k - nn$ je jednostavna neparametarska metoda koja radi na principu promatranja klasifikacije k najbližih susjeda nepoznatog uzorka koji se klasificira. Primjere za učenje moguće je predstaviti točkama u n -dimenzionalnom prostoru R^n . Nepoznati uzorak se klasificira tako da se u navedenom n -dimenzionalnom prostoru pronađe njemu k najbližih susjeda iz skupa za učenje te se uzorku dodijeli većinska klasifikacija od k susjeda. Za pronalazak najbližih susjeda koristi se euklidska metrika. Moguće je korištenje i drugih metrika, ovisno o domeni problema.

Primjer x opisan je vektorom značajki:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (5.3)$$

Euklidska udaljenost dva vektora x i y je:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (5.4)$$

Valja primjetiti da za $k-nn$ metodu nije potrebno izračunavati punu euklidsku udaljenost. Kako je operacija kvadratnog korijena jedna od računalno skupljih operacija zgodno je iskoristiti sljedeću relaciju:

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2 \quad \forall a, b \geq 0 \quad (5.5)$$

Vidimo da izračun kvadratnog korijena ne utječe na relativni odnos parova, što je jedina bitna informacija za $k-nn$ metodu.

U algoritmu klasifikacije, primjeru x_q pridjeljuje se klasifikacija koju ima najviše njegovih k najbližih susjeda, prema formuli:

$$f(x_q) = \arg \max_{v \in V} \sum_{i=1}^k \delta(v, f(x_i)) \quad (5.6)$$

gdje je δ kroneckerov simbol (vrijednost je 1 ako su oba argumenta jednaka).

Lijene metode poput $k-nn$ klasifikatora konstruiraju različitu aproksimaciju ciljne funkcije za svaki različiti novi uzorak koji treba biti klasificiran. Umjesto procjene ciljne funkcije jednom za cijeli prostor, procjenjuje se ciljna funkcija samo lokalno, u okolini novog uzorka što je pogodno u slučaju kompleksnih ciljnih funkcija. Velika prednost u korištenju metode $k-nn$ je njezina jednostavnost zbog toga što se sam postupak učenja svodi na pamćenje uzoraka i osim vrijednosti k nije potrebno podešavati nikakve dodatne parametre. Nedostatak je visoka cijena klasificiranja svakog novog primjera jer se mora računati njegova udaljenost od svih uzoraka u skupu za učenje.

Vrijednost parametra k odabrana u ovom radu je $k = 3$ zbog činjenice da je u skupu za učenje svaka osoba predstavljena s 5 različitih slika lica pa korištenje veće vrijednosti k ne bi pridonjelo uspješnijoj klasifikaciji.

6. Evaluacija

Za evaluaciju korištena je baza slika lica veličine 64×64 piksela. Nad slikama je provedena geometrijska i svjetlosna normalizacija.

U bazi se nalazi ukupno 295 razreda (osoba) te 2360 uzoraka (slika) sa jednolikom razdiobom (8 slika po razredu). Skup je podijeljen *holdout* metodom uzimajući 5 slika za učenje i 3 slike za testiranje.

U tablici 6.1 prikazana je uspješnost klasifikacije u ovisnosti o izboru parametara Gaborovog filtera te klasifikatora¹. U tablici se nalaze vrijednosti omjera dimenzija (γ) i širine filtra (b). Orijentacija je fiksirana na $\theta = \{\frac{i\pi}{8} | i = 0 \dots 7\}$, a faze su 0 i $\frac{\pi}{2}$. Za valnu duljinu su korištene vrijednosti $\lambda = \{2.5, 4, 5.6568, 8, 11.3137, 16\}$ (Shen et al., 2007).

Tablica 6.1: Rezultati evaluacije

Klasifikator	γ	b	Ispravnih	Neispravnih	Točnost	Trajanje (min)
k -nn	0.5	π	776	109	87.6%	>120
SVM	0.5	π	812	73	91.7%	23
SVM	0.7	1.5	823	62	92.9%	32
SVM	0.5	1.5	823	62	92.9%	23
SVM	1	π	811	74	91.6%	20
SVM	0.7	π	812	73	91.7%	20
SVM	1	1.5	822	63	92.8%	36

¹Za k -nn je dan samo jedan očite manje uspješnosti i izrazito dužeg vremena izvršavanja.

7. Zaključak

Korištenje Gaborovog filtra ima dobru podlogu u biološkim osnovama vida sisavaca te se očekivalo da će se njegovom upotrebom u klasifikaciji lica postići zadovoljavajući rezultati. Uspješnost raspoznavanja lica od $p\%$ dobivena u ovom radu potvrđuje navedena očekivanja. Iako su rezultati odlični, korišteni parametri i oblik izlučenih značajki predstavljaju samo jedan od mnogobrojnih mogućih načina korištenja Gaborovog filtra te je moguće da se korištenjem drugih parametara i drugačijim predstavljanjem izlučenih značajki mogu postići još bolji rezultati. Upravo u navedenoj činjenici vidi se prilika za daljnji nastavak istraživanja primjene Gaborovog filtra u izradi sustava za računalno raspoznavanje lica.

LITERATURA

Al-Amin Bhuiyan and Chang Liu, Hong. On face recognition using gabor filters. *World Academy of Science, Engineering and Technology 28 2007*, 2007.

Chih-Chung Chang and Chih-Jen Lin. *LIBSVM: a library for support vector machines*, 2001. Software available at <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.

J.G. Daugman. Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(7):1160–1169, 1985.

S.S. Keerthi and C.J. Lin. Asymptotic behaviors of support vector machines with Gaussian kernel. *Neural Computation*, 15(7):1667–1689, 2003.

Nicolai Petkov and Martijn Wieling. *Gabor filter for image processing and computer vision*. University of Groningen, 2008. http://matlabserver.cs.rug.nl/edgedetectionweb/web/edgedetection_params.html.

L.L. Shen, L. Bai, and M. Fairhurst. Gabor wavelets and general discriminant analysis for face identification and verification. *Image and Vision Computing*, 25(5):553–563, 2007.