Series y Sucesiones

Clase 08

11 de mayo de 2020

Profesor Carlos Iván León Coras

Series y Sucesiones

Realizaremos un ejercicio donde podemos verificar los temas anteriores y el cálculo de series

Ejercicio

Dada la siguiente sucesión:

$$5, 9, 13, 17, \ldots$$

Encuentra:

a) El siguiente elemento de la sucesión
b) El elemento a_1 de esta sucesión
c) El valor de b para esta sucesión
d) La fórmula de las sucesiones aritméticas
e) La fórmula de esta sucesión
f) El elemento que se encuentra en la posición 2020 (a_{2020})
g) La posición en la que se encuentra el elemento 101 (n)
h) El valor de la serie de los primeros 150 elementos

Solución:

a)
Nos están solicitando encontrar el siguiente número de la sucesión al ver que la sucesión va de 4 en 4 y que el último número es 17, basta con sumarle 4 a 17 y notar que el siguiente elemento es 21.

b)
Recordemos que el elemento a_1 es el primero elemento de la sucesión, por lo tanto

$$a_1 = 5$$

c)
Recordemos que b es conocido como el salto de la sucesión o "de cuanto en cuanto va", por lo tanto

$$b = 4$$

d)
La fórmula de las sucesiones aritméticas siempre tienen esta forma cuando se cuenta la primera posición desde 1.

$$a_n = a_1 + b(n-1)$$

e)
Para encontrar la fórmula de esta sucesión solo debemos sustituir los valores de a_1 y de b que encontramos en los incisos anteriores en la fórmula de las sucesiones aritméticas

$$a_n = 5 + 4(n-1)$$

f)
Para encontrar el elemento en la posición $n = 2020$ debemos de utilizar la fórmula de esta sucesión y sustituir el valor de n por 2020

$$a_n = 5 + 4(n - 1)$$
$$a_{2020} = 5 + 4(2020 - 1)$$
$$a_{2020} = 5 + 4(2019)$$
$$a_{2020} = 5 + 8076$$
$$a_{2020} = 8081$$

g)
Ahora, en lugar de pedirnos el elemento que se encuentra en cierta posición, nos piden la posición en la cuál se encuentra un elemento. En particular el elemento 101. Usaremos la misma fórmula pero debemos despejar n

$$a_n = 5 + 4(n - 1)$$
$$101 = 5 + 4(n - 1)$$
$$101 = 5 + 4n - 4$$
$$101 - 5 + 4 = 4n$$
$$100 = 4n$$
$$4n = 100$$
$$\mathrm{n} = \frac{100}{4}$$
$$n = 25$$

h)

Finalmente, para calcular el valor de la serie de los primeros 150 elementos, debemos recordar que una serie es la suma de los elementos de una sucesión, por lo que en otras palabras lo que nos están pidiendo es encontrar el valor de la suma de los primeros 150 elementos de la sucesión.

$$\sum_{n=1}^{150} 5+4(n-1)$$

$$=\sum_{n=1}^{150} 5+4n-4$$

$$=\sum_{n=1}^{150} 1+4n$$

$$=\sum_{n=1}^{150} 1+\sum_{n=1}^{150} 4n$$

$$=150+4\sum_{n=1}^{150} n$$

$$=150+4\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$$

$$=150+4\left(\frac{150(150+1)}{2}\right)$$

$$=150+4\left(\frac{150(151)}{2}\right)$$

$$=150+4\left(\frac{22650}{2}\right)$$

$$=150+4(11325)$$

$$=150+45300$$

$$=45450$$

Series y Sucesiones

Realizaremos un segundo ejercicio donde podemos verificar los temas anteriores y el cálculo de series

Ejercicio

Dada la siguiente sucesión:

$$17, 26, 35, 44, \ldots$$

Encuentra:

a) El siguiente elemento de la sucesión
b) El elemento a_1 de esta sucesión
c) El valor de b para esta sucesión
d) La fórmula de las sucesiones aritméticas
e) La fórmula de esta sucesión
f) El elemento que se encuentra en la posición 500 (a_{500})
g) La posición en la que se encuentra el elemento 386 (n)
h) El valor de la serie de los primeros 300 elementos

Solución:

a)
Nos están solicitando encontrar el siguiente número de la sucesión al ver que la sucesión va de 9 en 9 y que el último número es 44, basta con sumarle 9 a 44 y notar que el siguiente elemento es 53.

b)
Recordemos que el elemento a_1 es el primero elemento de la sucesión, por lo tanto

$$a_1 = 17$$

c)
Recordemos que b es conocido como el salto de la sucesión o “de cuanto en cuanto va”, por lo tanto

$$b = 9$$

d)
La fórmula de las sucesiones aritméticas siempre tienen esta forma cuando se cuenta la primera posición desde 1.

$$a_n = a_1 + b(n-1)$$

e)
Para encontrar la fórmula de esta sucesión solo debemos sustituir los valores de a_1 y de b que encontramos en los incisos anteriores en la fórmula de las sucesiones aritméticas

$$a_n = 17 + 9(n-1)$$

f)
Para encontrar el elemento en la posición $n = 500$ debemos de utilizar la fórmula de esta sucesión y sustituir el valor de n por 500

$$a_n = 17 + 9(n-1)$$

$$a_{500} = 17 + 9(500-1)$$

$$a_{500} = 17 + 9(499)$$

$$a_{500} = 17 + 4491$$

$$a_{500} = 4508$$

g)
Ahora, en lugar de pedirnos el elemento que se encuentra en cierta posición, nos piden la posición en la cuál se encuentra un elemento. En particular el elemento 386. Usaremos la misma fórmula pero debemos despejar n

$$a_n = 17 + 9(n-1)$$

$$386 = 17 + 9(n-1)$$

$$386 = 17 + 9n - 9$$

$$386 - 17 + 9 = 9n$$

$$378 = 9n$$

$$9n = 378$$

$$\mathrm{n} = \frac{378}{9}$$

$$n = 42$$

h)

Finalmente, para calcular el valor de la serie de los primeros 300 elementos, debemos recordar que una serie es la suma de los elementos de una sucesión, por lo que en otras palabras lo que nos están pidiendo es encontrar el valor de la suma de los primeros 300 elementos de la sucesión.

$$\sum_{n=1}^{300} 17+9(n-1)$$

$$=\sum_{n=1}^{300} 17+9n-9$$

$$=\sum_{n=1}^{300} 8+9n$$

$$=\sum_{n=1}^{300} 8+\sum_{n=1}^{300} 9n$$

$$=2400+9\sum_{n=1}^{300} n$$

$$=2400+9\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$$

$$=2400+9\left(\frac{300(300+1)}{2}\right)$$

$$=2400+9\left(\frac{300(301)}{2}\right)$$

$$=2400+9\left(\frac{90300}{2}\right)$$

$$=2400+9(45150)$$

$$=2400+406350$$

$$=408750$$