Практическое задание

Урок 3. Множество. Последовательность. Часть 2

1) Пусть x_n = $n^{(-1)^n}$. Доказать, что последовательность {x_n}:

а) неограниченная

x_n= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

x_1 = 1.0

x_2 = 0.5

x_3 = 0.333

x_4 = 0.25

x_5 = 0.2

x_6 = 0.167

x_7 = 0.143

x_8 = 0.125

x_9 = 0.111

x_{10} = 0.1

последовательность $\{x_n\}$ - ограничена, так как 0 < $\{x_n\}$ <= 1

б) не является бесконечно большой

последовательность $\{x_n\}$ является не является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$

2) Доказать, что последовательность {sin n} расходится

Необходимо доказать, что последовательность не является фундаментальной. Предположим противное, что {sin n} – фундаментальная.

Тогда если $\forall$ ε > 0 $\exists$ *N*, $\forall$ *n* >*N* и $\forall$ натурального *p*: $|x_{n+p}-x_n| = |\sin(n+p) - \sin n| <$ ε. Возьмем *p* = 2.

$$\left|\sin(n+2) - \sin n\right| < 2\sin 1\cdot\left|\cos(n+1)\right| < \varepsilon.$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N,\ \forall\ n > N:\ \left|\cos(n+1)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sin 1}.$$

=> $\{\cos n\}$ - бесконечно малая, то есть $\cos n \to 0$ при $n \to \infty$.

$$\cos(n+1) = \cos n\cdot\cos 1 - \sin n\cdot\sin 1.$$

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1}(\cos n\cdot\cos 1 - \cos(n+1)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$\cos n \to$ и $\sin n \to 0$ при $n \to \infty$. Но это противоречит тому, что $\cos^2 n + \sin^2 n$ =1.

Таким образом, полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

3) Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10\,\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{1-\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \infty$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n(1-2\cdot 3^{-n})} = 5\cdot\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 5$

4) Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+\ n} - n = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(-n^2)(\sqrt{n^2+n})^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

5) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$

$-1 \le \cos n \le 1$

$$-\frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = 0$$