Тема 11

Нека $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ е крайно м-во. Елементите му наричаме върхове.
Нека $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ е крайно м-во, елементите на което наричаме ребра.

За нагледност ще изобразяваме върховете като точки, а ребрата като линии между върховете. Рисунката на граф обаче не е граф.

Краен ориентиран мултиграф - на всяко ребро е съпоставена наредена двойка от върхове чрез функцията $\boxed{f_G : E \to V \times V}$. Една двойка наредени върхове може да е съпоставена на повече от едно ребро.

Краен ориентиран граф - релация над декартовото произведение $V \times V$. Тъй като всяко ребро еднозначно се дефинира от двойката върхове, които свързва, не се нуждаем от имена на ребрата. В този случай $E \subseteq V \times V$ и пишем $G(V, E)$.

Връзката между крайните ориентирани мултиграфи и крайните ориентирани графи е както между конфигурациите с наредба и повтаряне и конфигурациите с наредба и без повтаряне.

! Краен неориентиран граф - ако релацията $E \subseteq V \times V$ е антирефлексивна и симетрична, т.е. не се допускат примки (ребро, което свързва един и същи връх)

Краен неориентиран мултиграф - краен неориентиран граф, при който сме позволили повече от едно неориентирано ребро да свързва два върха. Наличието на примки е разрешено.

Връзката между КНМ и КНГ е като между конф. без наредба и с повтаряне (мултимножества) и конф. без наредба и без повтаряне (множества).

Две ребра с общ край наричаме инцидентни.
Върховете $v_i, v_j \in V$ на $G(V, E)$ наричаме съседни, ако $(v_i, v_j) \in E$. Ако графът е ориентиран казваме, че v_i е родител на v_j, а v_j е наследник на v_i.
Броят на ребрата в неориентиран граф $G(V, E)$, на които $v_i \in V$ е край, наричаме степен на v_i и бележим $d(v_i)$. Всяка примка в мултиграф увеличава степента наверка с 2.
Върхове от степен 0 наричаме изолирани върхове.
$d^-(v_i)$ - полустепен на изхода - в ориентиран граф е броят на ребрата, които започват във v_i.
$d^+(v_i)$ - полустепен на входа - в ориент. граф е броят на ребрата, които завършват във v_i.
~~Връх, степента на връх е 1, го наричаме висящ~~

Краен неор. граф, в който вс. върхове са с една и съща степен наричаме регулярен.

Маршрут в G, където $G(V, E, f_G)$ е ориент. мултиграф, се нарича редица от върхове и ребра:
$v_{i_0}, e_{c_1}, v_{i_1}, e_{c_2}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}, e_{c_k}, v_{i_k}$, в която $f_G(e_{c_j}) = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j})$
$j = 1, 2, \dots, k$

Числото k наричаме дължина на маршрута.
Ако $v_{i_k} = v_{i_0}$, то редицата наричаме контур.

Нека $G=(V,E)$ е граф.
Път в G наричаме всяка алтернираща редица от върхове и ребра. Първият и последният връх са краища на пътя. Останалите върхове са вътрешни върхове на пътя. Ако всички върхове и ребра са уникални, то имаме прост път (т.е. няма повтаряне на елементи).
Дължина на пътя е броят на ребрата в него.
Път, на който краищата съвпадат се нарича цикъл.
Всеки цикъл с дължина k има $2k$ различни описания.

Лема за ръкостисканията

Нека върховете са хората, а ребро се поставя когато 2-ма човека са се здрависали. Човек не се здрависва със себе си

$$\forall G=(V,E) \;\; \exists v_1 \neq v_2 \in V : d(v_1) = d(v_2)$$
$$|V| \geq 2$$

Доказателство:

$d(v) \in \{\underbrace{0, 1, \dots, n-1}\}$

$n-1$ стойности,
защото 0 и $n-1$ са несъвместими, т.е. ако някой се здрависал с всички няма как някой с 0.

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Лема за ръкостисканията

Нека $G = (V, E)$ има поне 2 различни върха.
Тогава $\exists$ $u, v \in V$; $u \neq v$, за които $d(u) = d(v)$.

Доказателство:
Нека върховете в графа са n на брой. $n \geq 2$.
Максималната възможна степен на връх е $d_{max} \leq n-1$,
тъй като 1 връх не може да е съседен на себе си.

Нека $u \in V$ - произволен. $\Rightarrow d(u) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1.) Допускаме, че няма изолирани върхове $\Rightarrow d(u) \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
Това са $n-1$ възможности за u. Но върховете са n на брой $\Rightarrow$ по п-па на Дирихле $\exists\ d(u) = d(v)$.

2.) Допускаме, че има поне един изолиран връх, но тогава
$0 \leftrightarrow n-1$ са несъвместими, тъй като няма съседи.
$\Rightarrow d(u) \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Това отново са $n-1$ от. за n върха
$\Rightarrow$ Дирихле: $\exists\ d(u) = d(v)$.

Теорема за броя на маршрутите със зададена дължина в крайни ориентирани мултиграфи.

Нека $G = (V, E, f_G)$ е краен ориент. мултиграф. $M = \|a_{ij}\|$ е матрицата му на съседства
Нека $M^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$ е k-та степен на M при целочисленото умн. на матрици. Тогава $a_{ij}^{(k)}$ е броят на маршрутите с дължина k от v_i до v_j в кр. ор. м-гр. G.

Доказателство: Нека $|V| = n$

1.) База. $k = 1$ - очевидно

2.) ИП. Да допуснем за някое $k > 1$, че броят на маршрутите с дълж. $k-1$ е $a_{ij}^{(k-1)}$, $\forall i, j \in I_n$

3.) Разглеждаме $M^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$, $k > 1$

$\boxed{\text{Съгл. правилото за умн. на матрици}}$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i1}^{(k-1)} \cdot a_{1j}^{(1)} + \dots + a_{in}^{(k-1)} \cdot a_{nj}^{(1)}.$$

Разбиваме множеството от вс. маршрути $T_{ij}^{(k)}$ на подм-ва T^{kl} от маршрути с еднакъв предпоследен връх $v_l \in V$, $l \in I_n$. От т-ма на разбиването: $|T_{ij}^{k}| = \sum_{l=1}^{n} |T_{ij}^{kl}|$. Всеки маршрут с дължина k се получава от маршрут от $T_{i,l}^{k-1}$ и маршрут с дължина 1 от T_{lj}.

Съгласно ИП $|T_{i,l}^{k-1}| = a_{il}^{(k-1)}$, а от базата $|T_{lj}^{1}| = a_{lj}^{(1)} \Rightarrow$

От п-па на умножението:

$$|T_{ij}^{kl}| = a_{il}^{(k-1)} a_{lj}^{(1)}$$

$$|T_{ij}^{k}| = \sum_{l=1}^{n} |T_{ij}^{kl}| = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k-1)} a_{lj}^{1} = a_{ij}^{(k)}$$

Тема 12

Подграф.

Нека $G = (V, E)$ е граф.
$G' = (V', E')$ е подграф на G, ако:

1.) $V' \subseteq V$
2.) $E' \subseteq E$ (двата края на реброто трябва да са във V')
3.) G' е граф

Индуциран подграф

Частен случай на подграф. Когато E' съдържа всички ребра от E, двата края на които са във V'.
$G' = (V', E') \Rightarrow E' = \{(u, v) \in E \mid u \in V' \wedge v \in V'\}$

Свързаност и свързани компоненти в неориентирани графи

Граф е свързан, ако $\forall u, v \in V$ $\exists$ път между u и v
Свързана компонента - всеки максимален по включване свързан подграф

Силна и слаба свързаност при ориентирани графи

Слабо свързан - ако $\forall v_i, v_j \in V$, $\exists$ маршрут в G от v_i до v_j или от v_j до v_i
Силно свързан - ако $\forall v_i, v_j \in V$, $\exists$ маршрут в G както от v_i до v_j, така и от v_j до v_i.

Слабо свързани компоненти - ~~получават се от~~ отговарят точно на св. комп. на съответния неориентиран граф G'.

Ако всички върхове на граф са свързани, казваме, че той е свързан.
Свързаните компоненти на графа са максималните по включване свързани подграфи

Силно свързани компоненти - максимални по включване подграфи.

Оцветяване на графи

1. Оцветяване на върхове

Нека $G(V, E)$ е граф, а C - крайно м-во от цветове
$f: V \to C$ наричаме оцветяване на върховете на G, ако $\forall (v_i, v_j) \in E$ е в сила $f(v_i) \neq f(v_j)$
/т.е. няма съседни върхове с еднакъв цвят/

2. Оцветяване на ребра

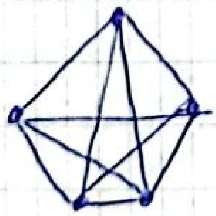
$g: E \to C$ е оцв. на ребрата на G, ако
$\forall (v_i, v_j)$ и $(v_i, v_k) \in E$, $v_j \neq v_k$ е в сила $f(v_i, v_j) \neq f(v_i, v_k)$
/т.е. когато ребрата с общ връх са в разл. цветове/

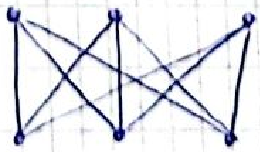
Планарност на графи

G е планарен тстк може да бъде нарисуван в равнината, така че никои 2 ребра да не се пресичат освен в крайните си точки.

Всеки граф, който съдържа в себе си

K_5 или $K_{3,3}$





не е планарен.

Проверка за планарност
m - брой ребра
n - брой върхове

$m \le 3n-6 \Rightarrow$ Е планарен

Забележки:

Релация на достижимост върху G: $Q_G \subseteq V \times V$
$\forall u,v \in V$: $u Q v \leftrightarrow u$ и v са свързани

Свързани компоненти на G са подграфите на G, индуцирани от класовете на еквивалентност на Q_G.

Свързващо ребро (мост) - $e \in E$ е мост, ако при премахването му G има повече св-ни компоненти.

Свързващ връх - при премахването му има повече св-ни комп.

Теорема. Куратовски
$G=(V,E)$ е планарен тстк не съдържа подграфи, които се свиват до $K_{3,3}$ или K_5.

Тема 13

Дърво - свързан граф без цикли

Индуктивна дефиниция за дърво

1. База: Всеки граф с един единствен връх е дърво
2. Стъпка: Нека $T=(V, E)$ е дърво. Нека $v \in V$ и $w \notin V$. Тогава $T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{(v,w)\})$ е дърво
3. Нищо друго не е дърво

Еквивалентност на двете дефиниции

I. Доказателство:
Ще докажем, че всеки индуктивно построен граф е ацикличен.
Базовият случай е очевиден.
Допускаме, че $T=(V, E)$ от ИС е ацикличен.
Ще докажем, че T' е св-н и ацикличен.
За да бъде свързан трябва $\forall x, y \in V(T')$ да е вярно, че има път м/у тях.
$V(T') = V \cup \{w\} \Rightarrow$

1.) $x \neq w$ и $y \neq w \Rightarrow x, y \in V$ и съгласно ИП $\Rightarrow$ $\exists$ път м/у всеки 2 върха на $T \Rightarrow$ в T' има път м/у всеки 2 върха от V

2.) $x = w$, $y \neq w \Rightarrow y \in V$. ~~[illegible]~~
Разглеждаме връх u. Между u и y има път l по ИП. Тогава има път p, e, x.

3.) $x = y = w \Rightarrow$ Очевидно има път с дълж. 0

Ацикличност:

1.) Връх w е от степен 1, а в цикъл върховете имат степен поне 2. Останалите върхове от T' са върхове от T, а по ИП този граф е ацикличен => Добавянето на ребро (u, w) не може да създаде цикъл.

Теорема за връзката м/у броя на ребрата и на върховете

За всяко дърво е вярно, че $m = n - 1$

Доказателство: $\boxed{\text{По def 2}}$ Индукция!

1. База: $m = 0$, $n = 1$ => $m = 1 - 1 = 0$ ✓
2. Нека твърдението е вярно за дърво T от ИС, т.е. допускаме $|E(T)| = |V(T)| - 1$
3. Ще докажем, че $|E(T')| = |V(T')| - 1$

$$|E(T')| = |E(T)| + 1$$
$$|V(T')| = |V(T)| + 1 \quad \checkmark$$

Теорема за единствеността на пътя между 2 върха на дърво

Граф е дърво тстк м/у всеки 2 негови върха има точно един път.

Доказателство:

Разглеждаме произволен граф G, в който м/у всеки 2 върха има единствен път. => графът е свързан.

Ако допуснем, че G има поне един цикъл веднага следва, че в G има поне 2 върха м/у които има 2 различни пътя. Но това противоречи на допускането => G е ацикличен => G е свързан и ацикличен, което значи, че е дърво.

Коренови дървета

Def. Нека $T = (V, E)$ е дърво. Избираме произволен връх $u \in V$ и го правим "корен".

Краищата на най-дългите пътища, завършващи в корена са листа.

Височина: Максималното разстояние от корена до кое да е листо.

Разклоненост: Макс. # деца на връх

Теорема | Всяко дърво с корен е дърво

Кореново дърво - индуктивна дефиниция

1.) База: Единствен връх е кореново дърво с корен този връх.

2.) ИС: Нека $T_1 = (V_1, E_1)$ и $T_2 = (V_2, E_2)$ са дървета без общи върхове, с корени съотв. r_1 и r_2, множ. от листа съотв. W_1 и W_2, разклонености b_1 и b_2 и височини h_1 и h_2.

Нека $v \in V_1$ и има f_v наследници и дълбочина t_v. Тогава

$$T = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(v, r_2)\})$$ е

кореново дърво с корен r_1.

Множеството от листата на T е $(W_1 \setminus \{v\}) \cup W_2$, разклонеността му е $\max\{b_1, b_2, f_v + 1\}$, а височината му е $\max\{h_1, t_v + 1 + h_2\}$

Представяния на дървета

- чрез масив от предшественици
- ~~чр~~ чрез рисунка на граф

Покриващо дърво свързан

Def. Нека $G = (V, E)$ е граф, а $D(V, E')$, $E' \subseteq E$ е дърво. Тогава D наричаме покриващо дърво

Теорема. Графът $G=(V,E)$ има покриващо дърво тстк е свързан.

Доказателство:

1. Ако G има покриващо дърво, то очевидно G е свързан.
2. Нека G е свързан

(*) Ако G няма цикли, върни G и край
В противен случай нека c е произволен цикъл от G и нека e е произв. ребро от c.
$G \leftarrow G - e$
goto (*)

Изтриването на ребро от цикъл не променя свързаността $\Rightarrow$ Алгоритъмът връща свързан ацикличен граф със същите върхове като първоначалния, т.е. покриващо дърво.

Тема 14

Обхождания на графи

1. Обхождане в ширина (BFS)

```
BFS (G, s)   , където s е стартовият връх
dist [1...n]
colour [1...n]
π [1...n]
Q : queue of verts
V = {1,...,n}
for i ← 1 to n
    dist[i] ← ∞
    colour[i] ← white
    π[i] ← Nil
dist[s] ← 0
colour[s] ← grey
Enqueue (Q, s)
while NotEmpty(Q)
    colour[x] ← grey
    x ← Dequeue (Q)
    for y ∈ Adj(x)
        if colour[y] = white
            colour[y] ← grey
            π[y] ← x
            dist[y] ← dist[x] + 1
            Enqueue (Q, y)
    colour[x] ← black
```

$O(V+E)$

2. Обхождане в дълбочина (DFS)

```
DFS(G,s)
col[1...n]
π[1...n]
for i ← 1 to n
    π[i] ← Nil
    col[i] ← white
col[s] ← grey
DFS_VISIT(G,x)
  for y ∈ Adj(x)
    if col[y] = white
      col[y] ← grey
      π[y] ← x
      DFS_VISIT(G,y)
  col[x] ← black
```

$O(V+E)$

Недостатъци на алгоритмите

BFS: Трябва да се помнят всички обходени върхове, за да може да се построи следващото ниво

DFS: Ако се търси връх с определени свойства на ниво с малък номер, DFS е бавен.

$\boxed{\text{Дърво на обхождането}}$ – строи ПД

Нека имаме свързан граф $G=(V,E)$

Ще построим покриващо дърво $D=(V,E')$ на G

~~Алгоритъм:~~

~~База: Нека корен r е начален връх на обхождането $\Rightarrow D_0(V_0,E_0)$~~

~~ИП: Нека е построено дърво $D_i=(V_i,E_i)$~~

~~Търсим $v \notin V_i$, такъв че $(r,v) \in E$ и:~~

~~а) ако има такъв построяваме $D_{i+1}=(V_{i+1},E_{i+1})$.~~

Алгоритъм:

①
корен r - начален връх
Образуваме дървото $D_0=(V_0, E_0)$.
$E_0=\emptyset$. Нека $t=r$, $i=0$ и $p(t)$ е неопределен.

②
Нека е построено дървото $D_i=(V_i, E_i)$
~~$V_{i+1}=V_i\cup\{v\}$~~
~~$E_{i+1}=E_i\cup\{(t,v)\}$~~
~~сега $p(v)=t$, $t=v$, $i=i+1$~~

Търсим $v\notin V_i$, такъв че $(t,v)\in E$ и:
а) Ако има такъв построяваме $D_{i+1}=(V_{i+1}, E_{i+1})$
$V_{i+1}=V_i\cup\{v\}$, $E_{i+1}=E_i\cup\{(t,v)\}$
$p(v)=t$, $t=v$ и $i=i+1$
Връщаме се на ②
б) Ако $t\neq r \Rightarrow t=p(t)$ и ②
в) Иначе - край.
Търсеното покриващо дърво е D_i.

Ойлерови обхождания

Ойлеров път - в свързан мултиграф $G=(V,E)$ е път, който минава еднократно през всяко ребро на мултиграфа.

Ойлеров цикъл - Ойлеров път, чието начало и край съвпадат.

Ойлеров мултиграф - мултиграф, ребрата на който образуват Ойлеров цикъл.

НДУ (Ойлеров цикъл)

Свързаният мултиграф е Ойлеров тогк всеки връх е с четна степен.

Доказателство:

Допускаме, че графът $G = (V, E)$ е Ойлеров $\Rightarrow$ съдържа ойлеров цикъл. Тогава всеки връх има четна степен, защото на всяко ребро, ~~[illegible]~~ което „влиза" във $v_i \in V$ трябва и да „излиза" от него, а цикълът съдържа всички ребра точно по 1 път.

НДУ (Ойлеров път)

Свързаният мултиграф $G = (V, E)$ съдържа Ойлеров път, който не е Ойлеров цикъл тогк има точно 2 върха с нечетна степен.

Доказателство:

1) Нека v_i и v_j са върхове с нечетна степен (първият и последният). Добавяме ребро $e \notin E$, така че $f_{G'}(e) = (v_i, v_j)$. Полученият мултиграф е Ойлеров $\Rightarrow$ можем да построим Ойлеров цикъл. Изтривайки добавеното ребро получаваме път, който съдържа всички върхове по веднъж $\Rightarrow$ е Ойлеров път.

2) Нека ребрата на $G = (V, E)$ образуват Ойлеров път от v_i до v_j. С добавяне на ребро между тях пътят се превръща в цикъл $\Rightarrow$ всички върхове в него са от четна степен. Добавянето на ребро е увеличило степента на v_i и v_j с по 1. $\Rightarrow$ Всички върхове освен тези двата са били с четна степен.

def Крайният ориентиран мултиграф $G=(V,E,f_G)$ е Ойлеров точк за всеки връх полустепените на входа и изхода съвпадат.

def КОМ съдържа Ойлеров път точк само за 2 от върховете му полустепените на входа и изхода не съвпадат, като в единия връх полустепента на изхода е с 1 по-голяма от полустепента на входа, а при другия обратно.

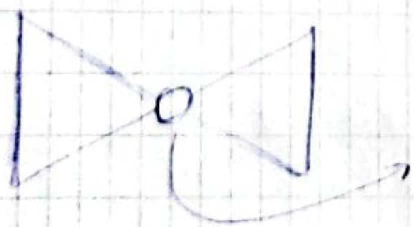
Хамилтонови обхождания

Хамилтонов път – в свързан граф $G=(V,E)$, той минава еднократно през всеки връх на графа.

Хамилтонов цикъл – Хамилтонов път, на който началото и краят съвпадат

Хамилтонов граф – граф, който съдържа Хамилтонов цикъл.

От хамилтоновия цикъл следва, че графът има хамилтонов път, но обратното не е вярно.



Ако има такъв свързващ връх графът няма хамилтонов цикъл.

Тема 15

Нека $G=(V,E)$ е свързан граф и $\omega: E \to R$ е функция с реални стойности, дефинирана по ребрата на графа. Стойността $\omega(e)$, $e \in E$, наричаме цена или тегло на реброто e.

Тегло на дърво - сумата от теглата на ребрата му.

~~Покриващо дърво - T' е покриващо дърво на T, ако w(T') ≤ w(T) ... функция за цената~~

(*)

МПД - свойство

Нека $G=(V,E)$ е свързан граф

E'_{min} - ребрата с най-малко тегло, пресичащи среза

E' - м-вото от вс. ребра, пресичащи среза

$\Rightarrow \forall e \in E'_{min}: \exists$ МПД T, т.че $e \in E(T)$

Доказателство:

Допускаме противното, т.е.

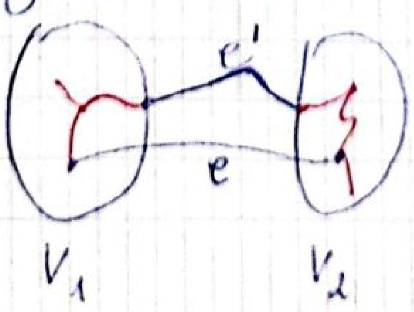
$\exists$ G неор. св-н граф

$\exists$ поне една тегловна ф-я в/у него (ω в/у G)

$\exists$ срез V_1 и V_2

$\exists$ min e през среза, т.че e не принадлежи на никое МПД на G

Нека T е произволно МПД на G



$T + e$ е уницикличен граф (дърво + ребро, което не принадлежи на него се получава уницикличен граф)
Нека c е този цикъл и поне 1 връх на c принадлежи на V_1 и поне 1 връх на c принадл. на V_2.

$e' \neq e$, но $e' \in E(T)$
$(T+e) - e' \Rightarrow$ получаваме дърво D

$\omega(D) = \omega(T) + \omega(e) - \omega(e')$

I. $\omega(e) = \omega(e') \Rightarrow \boxed{\omega(D)} = \omega(T)$ } $\omega(T)$ не е МПД ↯.
II. $\omega(e') > \omega(e)$
III. $\omega(e) > \omega(e')$

Алгоритъм на Прим

Строи МПД на G (неор., св.)

Дадено: Св. гр. $G=(V, E)$ [illegible]
и ф-ия $w: E \to \mathbb{R}$, задаваща тегл. на ребрата [illegible]

1. Построяваме $D_0=(V_0, E_0)$, $V_0=\{r\}$, $E_0=\emptyset$
2. Нека сме построили $D_k=(V_k, E_k)$. Търсим ребро $e=(v_i, v_j)$, $v_i \in V_k$, $v_j \notin V_k$ с миним. тегло и постр. $D_{k+1}=(V_{k+1}, E_{k+1})$. $V_{k+1}=V_k \cup \{v_j\}$, $E_{k+1}=E_k \cup \{e\}$.
3. Ако $V_k = V \to$ край, else $\to$ 2.

[illegible]

Доказателство: (за коректност)

T не може да има цикли, защото когато се вкара връх не може да се вземе ребро до друг вкаран връх.
T е ПД на G, защото в него уч. вс. върхове на G, а

$E(T) \subseteq E(G)$.

T е МПД - защото взима най-леките ребра м/у върховете

Алгоритъм на Крускал

Даден е свързан граф $G=(V, E)$ и функция $\omega: E \to R$, задаваща тегла на ребрата му.

1.) Sort E by weight
2.) От всеки връх v на графа образуваме тривиално дърво $D_v(\{v\}, \emptyset)$
3.) За всяко ребро e в сортираната последователност ⇒ Нека $e=(u,v)$. Ако u и v са от разл. дървета T' и T'' сливаме $T' + T'' + e$. Ако не са → прескачаме e.
4.) Връщаме останалото дърво

$\boxed{\text{Ако тегл. на ребр. са 2x2 разл, то МПД-то е само едно}}$

Доказателство:

Допускаме, че алг. не е коректен, т.е. съществува дърво с по-малка тегловност.
Нека алгоритъмът бърка за реброто e_t.
e_t е било добавено и свързва две дървета T' и T''. Алгоритъмът е взел това ребро, защото няма такова с по-малка тегловност. ↯.

Ако $w(e_i) \neq w(e_j)$ за всяко $i \neq j \Rightarrow \exists$ единствено МПД.

Ако има ребра с еднаква тежест, може да има множество от МПД-та.

(*) Нека $G=(V,E)$ е свързан граф.
Покриващо дърво - $T=(V,E)'$ е ПД на G, ако $E' \subseteq E$

<u>Минимално покриващо дърво на тегловен граф</u>

ПД $D=(V,E')$ на $G=(V,E)$ е минимално, ако $w(D) \leq w(D')$, където $D'=(V,E')$ е всяко друго ПД на G

Тема 16

Най-къс път в граф.

Нека $G=(V,E)$ е свързан граф, а $\omega: E \to R^+$ е теглова функция на ребрата.

Претеглена дължина на пътя $\pi = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_e}$ в графа ще наричаме $\omega(\pi) = \sum_{j=0}^{e-1} \omega(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$

Пътят от v_{i_0} до v_{i_e} с най-малка претеглена дължина наричаме <u>най-къс път</u> от v_{i_0} до v_{i_e}.

Пътят от v до v има дължина 0.

Най-късият път е структура, която се състои от подструктури. Тези подструктури са най-къси пътища.

<u>Теорема</u>. Нека $G=(V,E)$ е св. граф с тегловна функция $\omega(e)=1$, $\forall e \in E$. Нека D е покриващо дърво на G с корен v_0, построено в ширина. **Пътищата в D от корена до останалите върхове на G са най-къси пътища.**

Доказателство:

1. Дължината на най-късия път от v_0 до v_0 е 0, тъй като той е единствен на ниво L_0.

2. Допускаме верността на твърдението за нива $L_0, L_1, \dots, L_i$

3. Ще покажем, че всички най-къси пътища от v_0 до върховете от ниво L_{i+1} в покриващото дърво са с дължина $i+1$.

Допускаме, че $\exists v \in L_{i+1}$, такъв че $v_0, \dots, w, v$ е най-къс път от v_0 до v с дължина $k < i+1$. Тогава $v_0, \dots, w$ е най-къс път от v_0 до w и дължината му е $k-1 < i$. Съгласно ИП трябваше за $v \in L_k$ да имаме $k < i+1$, но това е противоречие с $v \in L_{i+1} \Rightarrow$ Твърдението е в сила и за L_{i+1}.

Алгоритъм на Дейкстра

Нека $G=(V, E)$ е свързан с тегловна функция $w: E \to R^+$

Резултат: Дърво на минималните пътища от v_0 до всички останали върхове на G

Алгоритъм:

```
U ← {s}
for i ← 1 to n
    d[i] ← ∞
    π[i] ← Nil
d[s] ← 0
foreach y ∈ Adj(s)
    d[y] ← w(s, y)
    π[y] ← s
while ∃ връх във V\U с d-стойност < ∞
    x ← връх от V\U с min d-стойност
    U ← U ∪ {x}
    foreach y ∈ Adj(x)
        if d[y] > d[x] + w(x,y)
            d[y] ← d[x] + w(x,y)
            π[y] ← x
```

Тема 17

Булева функция е всяка функция от вида $f: J_2^n \to J_2$, за $n \in \mathbb{N}$, където n е броят на променливите и $J_2 = \{0, 1\}$, т.е. имаме $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Броят на тоталните ф-ии $f: X \to Y$ е $|X|^{|Y|}$ и в случая това е 2^{2^n} => това е броят на всички булеви функции на n променливи.

Нека $n=2 \Rightarrow \# 2^{2^2} = 16$

xy	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x,y) = \tilde{0}$ - константата 0

$f_1(x,y) = x \wedge y = xy$ - конюнкция

$f_2(x,y) = \overline{x \to y}$, но няма общо прието име

$f_3(x,y) = id(x)$

$f_4(x,y) = \overline{y \to x}$, но няма общо прието име

$f_5(x,y) = id(y)$

$f_6(x,y) = x \oplus y$ - сума по модул 2 $[\, x_1 + x_2 \pmod 2 \,]$

$f_7(x,y) = x \vee y$ - дизюнкция

$f_8(x,y) = x \downarrow y$ - стрелка на Пърс [NOR]

$f_9(x,y) = x \equiv y$ - еквивалентност

$f_{10}(x,y) = \bar{y}$

$f_{11}(x,y) = y \to x$

$f_{12}(x,y) = \bar{x}$

$f_{13}(x,y) = x \to y$

$f_{14}(x,y) = x \mid y$ - черта на Шефер [NAND]

$f_{15}(x,y) = \tilde{1}$ - константа 1

Съществени и несъществени променливи

фиктивна (несъществена) променлива - ако тя не оказва влияние във функцията, т.е. ако

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

то x_i е фиктивна променлива

Например при $n=2 \Rightarrow$

x е фиктивна в f_0, f_5, f_{10}, f_{15}

y е фиктивна в f_0, f_3, f_{12}, f_{15}

За коя и да е фикт. пр. броят на ф-иите е $2^{2^{n-1}}$ - нея, тъй като за стойностите на в-ра няма зн. i-тата позиция

Композиция на функции

Нека са дадени ф-иите

$f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)$ $[n]$ - # променливи

$g(y_1, \dots, y_m)$, $[m]$

които имат елементи от един и същи тип.

Ако разгледаме ф-ията

$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(y_1, \dots, y_m), x_{i+1}, \dots, x_n)$, $[n+m-1]$

то това е композиция на f и g

Формула над множество булеви функции

Формула - синтактично понятие
Формула наричаме всеки валиден стринг, изграден от дадена азбука.
Азбука - бележим със Σ. В Σ включваме и празния стринг - ε.
Σ^* - м-вото от всички стрингове, които могат да се образуват от тази азбука - те са безкрайни
$\Sigma^+ : \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$

Език на формулите: $\Sigma = \{f, x, (,), ,, 0, \dots, 9\}$

$\tilde{\Sigma}$ - м-вото от вс. стрингове, които са валидни записи на числа в десетична бр. система над $\{0, 1, \dots, 9\}$

$\iota : \tilde{\Sigma} \to N$

Изброимо безкр. м-во от булеви променливи: $\{x_0, x_1, \dots\}$
Изброяване на F_2: 0, 1,
00, 01, 10, 11,
0000, 0001, 0010, ..., 1111,
00000000, ..., 11111111,

$t : F_2 \to N$

Образуване на **синтаксис**:
База: x_α е формула, $\forall \alpha \in \tilde{\Sigma}$
ИС: Нека $\phi_1, \dots, \phi_n$ са формули.
Тогава формула е $f_\alpha(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, $\alpha \in \tilde{\Sigma}$
$t^{-1}(\iota(\alpha))$ има точно n променливи. [$t^{-1} : N \to F_2$]

Дълбочина: $D(fL(\phi 1, \phi 2, \dots, \phi n)) = 1 + \max\{D(\phi 1), \dots, D(\phi n)\}$
$D(x\lambda) = 0$

Семантика:

Семантика на $x\lambda$ е булевата пром. $x_{L(\lambda)}$

Семантиката на формула с дълбочина 1 е:

$$f_{L(\lambda)}(x_{L(p_1)}, \dots, x_{L(p_n)})$$

Else, семантиката е композиция на семантиките $\phi 1, \dots, \phi n$ на 1во, 2ро, ..., $n^{\text{о}}$ то място във $f_{L(\lambda)}$.

Всяка ϕ има съответна булева ф-ия.
Този запис е нечитаем, затова ползваме читаемия код от ф-иите, които вече сме дефинирали:

$$f14(f7(x1, f7(x2, x3)), f4(X4)) \equiv (x_1 x_2 x_3) \vee (\overline{x4})$$

Семантиката се оценява отвътре навън.

<u>Булева функция на 1 променлива</u>

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 - \tilde{0}$
$f_1 - id(x)$
$f_2 - \overline{x}$
$f_3 - \tilde{1}$

Свойства на функциите на една и две променливи

1.) Комутативност: $\wedge, \vee, \oplus$

$$x \vee y = y \vee x$$

2.) Асоциативност: $\wedge, \vee, \oplus$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

3.) Дистрибутивни свойства:

$$x(y \vee z) = xy \vee xz$$
$$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$$
$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

4.) Идемпотентност $\wedge, \vee, \oplus$

$$x \wedge x = x$$
$$x \vee x = x$$
$$\boxed{x \oplus x = \tilde{0}}$$

5.) Свойства на отрицанието

$$x \wedge \bar{x} = \tilde{0}$$
$$x \vee \bar{x} = \tilde{1}$$
$$x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$$
$$\bar{\bar{x}} = x$$

6.) Свойства на константите

$$x \wedge \tilde{0} = \tilde{0} \qquad x \oplus \tilde{0} = x \qquad x \vee \tilde{0} = x$$
$$x \wedge \tilde{1} = \tilde{1} \qquad \boxed{x \oplus \tilde{1} = \bar{x}} \qquad x \vee \tilde{1} = 1$$

7.) Де Морган

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

CamScanner

Тема 18

Множеството $F \subseteq F_2$ е пълно, ако $[F] = F_2$, където F_2 са БФ, а $[F]$ е затварянето на F спрямо някакви операции

Литерал - формула, която се състои от име на променлива или име на променлива с черта.

Конюнктивна клауза е конкатенация на 2x2 различни литерала, но без такива на една и съща променлива.

ДНФ е конкатенация на една или повече съществено различни конюнктивни клаузи, свързани с 'v'.

$\cancel{x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3}$

z.B. $x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_4 \overline{x_5}$

Пълна конюнктивна клауза - в нея участват имената на всички променливи ($x_i \oplus \overline{x_i}$) [$2^n$ на брой]

СъвДНФ: ДНФ от съществено различни пълни конюнктивни клаузи [# $2^{2^n} - 1$]

празен стринг

Колко ДНФ?

3 състояния

1.) $\overline{x_1}$

2.) x_1 $\Rightarrow 2^{3^n - 1} - 1$

3.) * - няма x_1

Теорема на Бул

Множеството $\{\wedge, \vee, \neg\}$ е пълно.
$(\forall n \geq 0\ \forall f \in F_2^n,\ f$ има ф-ла над $\{\wedge, \vee, \neg\})$

Доказателство:
Нека $f \in F_2^n$ е произволна булева ф-ия
Ще покажем, че f има ф-ла над $\{\wedge, \vee, \neg\}$ при $f \in [\{\wedge, \vee, \neg\}]$

1.) Нека $f = \tilde{0}$. Тогава $f(x_i) = x_i . \overline{x_i}$, т.е. е изпълнено
2.) Нека $f \neq \tilde{0}$. Тогава тя има поне една единица

2.1. В/у всеки ред, в/у който $f = 1$
$\exists$ пълна кон. кл.: вс. литерали са 1
и за този ред слагаме пълна конюнктивна клауза, като негираме всяка променлива, която има стойност 0 в реда.

2.2. В/у всеки ред, в/у който $f = 0$
$\forall$ кл. $\exists$ литерал, който е 0.

Пълнота на м-во БФ чрез свеждане до известно пълно м-во.

Ако не успеем да докажем, че дадено м-во е пълно, това не значи, че то е непълно.

$[\{\wedge, \vee, -\}] = F_2$
$G \subseteq F_2$
$[G] \subseteq [\{\wedge, \vee, -\}]$

Нека $G = [\{\wedge, -\}]$

Трябва да докажем, че G е пълно.

Ако $\forall f \in F : f \in [G]$, то G е пълно $\left[\begin{array}{l} F \subseteq F_2; \\ G \subseteq F_2; F\text{-пълно}; G? \end{array} \right]$

Тъй като $[G]$ и $[\{\wedge, \vee, -\}]$ имат сечение, е достатъчно да изразим елементите на $[\{\wedge, \vee, -\}]$, които НЕ принадлежат в $[G]$ чрез дадените в G.

Полиноми на Жегалкин

Всяка булева ф-ия има единствен полином на Жегалкин
Полином на Жегалкин е всяка формула от вида:

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus a_{n+1} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus a_k x_{n-1} x_n \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus a_q x_1 x_2 \ldots x_n$$

където $a_i \in \{0, 1\}$

ПЖ се нарежда спрямо броя на променливите на дадените елементарни конюнкции.

Ако $\forall a_i, i \in I : a_i = 0 \Rightarrow ПЖ = \tilde{0}$

Всеки от коеф може да приема стойност от $\{0, 1\} \Rightarrow$ # ПЖ на n променливи е 2^{2^n}

Алгоритми за получаване

I. Чрез еквивалентни преобразувания

Дадените операции се заместват с техните съответни от $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$

пример: импликация 1101

$$x \to y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{\overline{\overline{x} \vee y}} \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \equiv \overline{x \wedge \overline{y}} \equiv$$

св-во на имп.; двойно отрицание; де Морган; двойно отр.; св-во на +

$$\equiv 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 + x + xy$$

II. Чрез СъвДНФ (за БФ $f \neq \tilde{0}$)

В СъвДНФ заместваме всяко $\overline{x_i}$ с $x_i + 1$, а всички дизюнкции-със събиране по модул 2. Други правила:

1.) $\underbrace{xy + xy}_{\text{Ч2п}} = 0$

2.) $0 . x . y \to$ отпада

3.) $1 . x . y \to xy$

4.) има подредба в имената

5.) разкр. скоби

6.) $xxyz = xyz$

7.) $0 \to$ отпада

III. Чрез определяне на коефициентите

$a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy = x \vee y \,/\, x \to y /$..

Заместваме в ур-нето със стойност и съотв. стойности на променливите.

e.g. $x \vee y = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$

$$0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 0$$
$$1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \cdot 0$$
$$1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 0$$
$$1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 1$$

Тема 19

Функционални елементи

def.

Устройство с n двоични входа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и един двоичен изход y, такова че за всеки вектор $\alpha \in J_2^n$, подаден на входа, на изхода се получава $f(\alpha)$ за някоя ф-ия $f \in F_2^n$

Схема от ФЕ

def.

~~Нека $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\} \subseteq F_2$ и $E_F = \{e_{f_1}, e_{f_2}, \dots\}$ са съответните им ФЕ.~~

Над $\{\wedge, \vee, \neg\}$

Фиксираме крайно м-во от булеви променливи $X = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$

Схема от ФЕ над X е ориентиран граф без контури, в който всеки връх има някой от следните типове:

- "вход". Всеки такъв връх има $d^- = 1$ и $d^+ = 0$ и е маркиран с точно една променлива от X
- "изход". Има точно един такъв връх. $d^+ = 1$, $d^- = 0$
- "функция". Всеки връх е маркиран с 1 ф-ия от множеството $\{\wedge, \vee, \neg\}$. $d^+ = \#$ променливите
  $d^- = 1$
- "разклонение". $d^+ = 1$
  $d^- = 2^+$

Не може да има "висящи" изходи/входове.

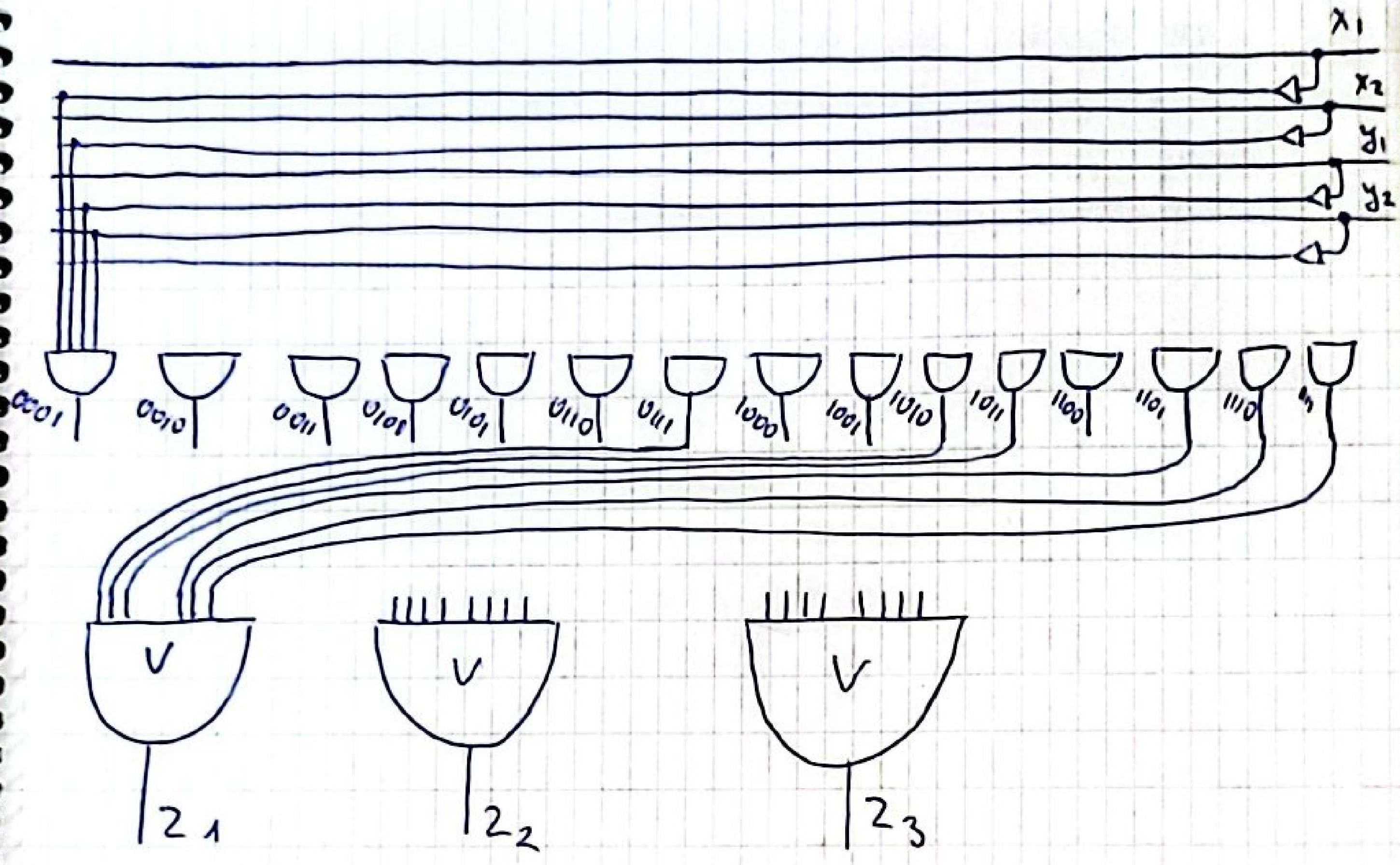
Двоичен суматор (Binary addition)

x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

$$z_1 = \bar{x}_1 x_2 y_1 y_2 \vee x_1 \bar{x}_2 y_1 \bar{y}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee x_1 x_2 \bar{y}_1 y_2 \vee x_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 \vee x_1 x_2 y_1 y_2$$

$$z_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2 \vee x_1 x_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee x_1 x_2 y_1 y_2$$

$$z_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2 \vee x_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee x_1 x_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee x_1 x_2 y_1 \bar{y}_2$$



x1
x2
y1
y2
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
V
V
V
Z1
Z2
Z3

CamScanner