Тема 1

Логиката е наука за правенето на валидни изводи и правилни разсъждения. Дали даден извод е валиден зависи от формата му, а не от истинността на съставящите го изречения.
Съждителната логика (Propositional Logic) разглежда съждения, при които не се допуска частична истинност, т.е. те са или верни, или грешни. Простото съждение е просто разказвателно изречение, ~~[illegible]~~ още може да бъде наричано логическа променлива. Съжденията могат да бъдат и ~~[illegible]~~ съставни. Те са ~~[illegible]~~ образувани от прости съждения, а може и от други съставни съждения и логически константи, които са свързани чрез логически съюзи.

Видове логически съюзи:
Нека p и q са съждения.
1. Конюнкция - Бележи се с '$\wedge$'. Съответства на 'и' от естествения език, но няма темпорален аспект. Конюнкцията е истина само когато и двете съждения са истина.
2. Дизюнкция - Бележи се с '$\vee$'. Съответства на 'или' от естествения език и е истина когато поне 1 съждение е истина.
3. Изключващо или - Бележи се с '$\oplus$'. За да е истина се изисква точно едно съждение да е истина, а другото да е лъжа.
4. Импликация - Бележи се с '$\rightarrow$'. При нея има причинно следствена връзка. Отговаря на "ако..., то..." както обещание и изпълнение. Ако имаме $p \rightarrow q$, то p е антецедент,

а q - консеквент. Можем да възприемаме $p \to q$ като „достатъчно условие за q е p".

5. Би-импликация - Бележи се с '$\leftrightarrow$'. Истина когато двете съждения имат една и съща логическа стойност и лъжа в противен случай.

6. Отрицание (негация) - Бележи се с '$\neg$'. Тя се прилага върху едно съждение, обръщайки стойността му.

<u>Приоритет на логическите съюзи в низходящ ред</u>

1. негация
2. конюнкция
3. дизюнкция
4. импликация
5. би-импликация

<u>Свойства на логическите съюзи:</u>

1. Свойства на константите

$p \wedge T \equiv p \qquad p \vee T \equiv T$

$p \wedge F \equiv F \qquad p \vee F \equiv p$

2. Свойства на отрицанието

$p \wedge \neg p \equiv F$

$p \vee \neg p \equiv T$

3. Закон на двойното отрицание

$\neg(\neg p) \equiv p$

4. Комутативност

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \oplus q \equiv q \oplus p$

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

Импликацията не е комутативна.

5. Асоциативност

$p \wedge q \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ($\vee$ – асоциативно)

($\rightarrow$ → НЕ!)

6. Дистрибутивност

Конюнкцията е дистрибутивна спрямо дизюнкцията

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Дизюнкцията е дистрибутивна спрямо ~~дизюнкцията~~ конюнкцията

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

7. De Morgan

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

8. Свойство на импликацията

$\boxed{p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q}$

9. Свойство на би-импликацията

$\boxed{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$

10. Поглъщане

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

11. Идемпотентност

$p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p$

Таблиците на истинност представляват таблици 2^n реда, където n е броят на простите съждения. Редовете са 2^n, защото това е броят на валюациите (раздаването на стойности на променливите – T и F). За всяка валюация на простите съждения, стойността на съставното е точно определена.
Съставни съжд., чиято стойност е T(F) за всяка валюация на простите съжд. се нар. тавтология (противоречие). Ако има поне едно T и поне едно F, то съст. съжд. е условност.

Еквивалентност на ~~[illegible]~~ съставни съждения.

Еквивалентността се бележи с '≡', но това не е логически съюз.

Булева оценка – стойност лъжа или истина на дадените съждения

Еквивалентността може да се провери чрез таблица за истинност или чрез еквивалентни преобразувания. Първият метод е прост, но при по-голям брой прости съжд. бързо нараства възможността за грешка, докато вторият начин изисква досетливост. Преобразуването чрез него става като на първи ред пишем едно от съжденията, след него поставяме знака за еквивалентност и в скоби основанието за еквивалентността.

Предикатна логика

Думата предикат идва от латинското „praedicatum", което значи "това, което можем да кажем (за подлога)".

Едноместен предикат - твърдение, в което има празно място, на което се слага обект от предварително зададена област, наречена домейн. За всеки обект на домейна предикатът е истина или лъжа. Предикатът сам по себе си не е нито истина, нито лъжа.

Многоместен предикат - когато има повече от едно място за попълване.

Универсален квантор ($\forall$) - когато предикатът е истина за всеки обект от домейна

Екзистенциален квантор ($\exists$) - когато има поне 1 обект от домейна, за който предикатът е истина.

Ако обектите от домейна са краен брой, например $x_1, \ldots, x_n$, то:

$$\exists x\, P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$
$$\forall x\, P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$$

Отрицания на изрази с едноместни предикати се случва като универсалният кв. се превърне в екзистенциален и обратно.

Свойство на отрицанието: $\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$

Еднотипни квантори могат да бъдат разменяни без да се отразява на истинността ако са един до друг, но разнотипни - не.

Тема 2

Понятието множество е първично и за него не се дава дефиниция.
Множествата се изграждат с помощта на реални или въображаеми обекти, които наричаме праелементи.
Никое м-во не е праелемент.
Множеството е зададено, ако са определени обектите, от които е съставено. Тях ще наричаме негови елементи.
Допустими обекти са праелементите и самите м-ва.

Фамилия от множества наричаме множество от множества.

Множествата означаваме с главни латински букви, а елементите им с малки (обикновено).

<u>Аксиома за обема</u> - Всяко м-во се определя напълно и еднозначно от принадлежността на някакви елементи към него. Формален запис: $\forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B) \Rightarrow A = B$.
Аксиомата ни позволява да задаваме м-ва, описвайки всичките им елементи. От аксиомата следва, че в м-вото няма повтаряне и наредба.

<u>Аксиома за отделянето</u> - От елементите на м-во M можем да образуваме ново м-во M' с помощта на свойство $\pi(x)$ такова, че $\forall x \in M$ можем да проверим дали е в сила $\pi(x)$.
Формален запис: $M' = \{x \mid x \in M, \pi(x)\}$.
$M' \subseteq M$ (M' е подмножество на M).
$M \supseteq M'$ (M е надмн-во на M').

Има 2 частни случая с постоянни вероятностни значения: $t(x)=true$ и $f(x)=false$, $\forall x \in M$.
Тогава получаваме $\forall M (M \subseteq M)$ и $\forall M (\emptyset \subseteq M)$, респективно.
Ако $M' \subseteq M$ и $M' \neq M$, казваме, че M' е същинско подмн-во и означаваме $M' \subset M$.

<u>Минималност и максималност по включване</u>

Нека $\pi(x)$ е св-во, верността на което е проверима $\forall X \subseteq M$.
Казваме, че м-вото $M_1 \subseteq M$ е минимално по включване със свойство π, ако $\pi(M_1)=true$ и $\forall M_2 \subset M_1$, $\pi(M_2)=false$.
Казваме, че м-вото $M_1 \subseteq M$ е максимално по включване със св-во π, ако $\pi(M_1)=true$ и $\forall M_2 \supset M_1$, $M \supseteq M_2$, $\pi(M_2)=false$.

<u>Аксиома за степента</u> Съвкупността от всички подм-ва на M е множество.
Формален запис: $2^M = \{M' \mid M' \subseteq M\}$. 2^M е степен на M.

U - универсум - м-во, което е надм-во на всички, интересуващи ни м-ва.

<u>Операции върху множества</u> A и $B :=$ м-ва

1. Обединение
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$
2. Сечение
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$
3. Разлика
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$
4. Симетрична разлика
$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\}$$
5. Допълнение
$$\overline{M}^U := (U \setminus M)$$

Основни свойства на операциите върху множества

1. Комутативност: $\cup, \cap, \Delta$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. Асоциативност: $\cup, \cap, \Delta$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Дистрибутивност

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4. Идемпотентност

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

5. Свойства на празното и универсалното м-во

$A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cup U = U$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cap U = A$

6. Свойства на допълнението

$A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $\overline{\overline{A}} = A$

7. De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. Други свойства

а) $A \subseteq A \cup B$

б) $(A \cap B) \subseteq A$ и $(A \cap B) \subseteq B$

в) $A \cup (A \cap B) = A$

г) $A \cap (A \cup B) = A$

д) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

е) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

Тема 3

<u>Индуктивно дефиниране на м-ва</u> е способ за построяване на м-ва. За да построим м-во M, са необходими непразно м-во M_0 и м-во от операции F.

1. База. Включваме в M елементите от M_0 (базови елементи)
2. Индукционно предположение. Нека в M вече са включени някакви елементи (поне тези от M_0)
3. Индукционна стъпка. В M включваме всеки елемент, който е резултат на някоя от операциите в F, изпълнена върху елементи, вече включени в M.
4. Заключение. В M няма други ел. освен базовите и включените по индукция. $M = \langle M_0, F \rangle$ е м-во.

<u>Доказателство по индукция</u>

<u>Теорема</u>. За всеки елемент x на индуктивно дефинираното м-во M е в сила $\pi(x)$.

Доказателство:

1. База. За всеки базов елемент $x_0 \in M$ проверяваме верността на $\pi(x)$
2. Инд. предп. Допускаме, че $\pi(x)$ е в сила за всеки елемент x, включен до определен момент в м-вото M.
3. ИС. Показваме, че при направеното предположение, за всеки построен с помощта на операциите от F елемент y на M, също е в сила $\pi(y)$.
4. Заключение. π е в сила за всеки ел. от м-вото M.

<u>Наредена двойка</u> (a, b), където a и b са произволни елементи, а м-вото им е $\{a, \{a, b\}\}$.

Декартово произведение

Нека A и B са м-ва.
М-вото $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ и $b \in B\}$ се нарича декартово произведение.

Покриване на множество

Нека $S :=$ м-во
Фамилията $F = \{A_1, \dots, A_k\}$ е покриване на S, ако:

1. $A_i \subseteq S$, $\forall i$
2. $A_i \neq \emptyset$, $\forall i$
3. $\bigcup_i A_i = S$

Разбиване на множество

Фамилията $F = \{A_1, \dots, A_k\}$ е разбиване на м-во S, ако:

1. $A_i \subseteq S$, $\forall i$
2. $A_i \neq \emptyset$, $\forall i$
3. $\bigcup_i A_i = S$
4. $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
   $1 \leq i, j \leq k$

Тема 4

Релацията е подмножество на декартовото произведение. Ако $A_1 \dots A_n$ са множества (A_1 - първи домейн, ..., A_n - n-ти домейн). Ако $n=2$ релацията се нарича двуместна (бинарна, двоична).

Релация на $A_1 \dots A_n$ е всяко $R \subseteq \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$
Релация над декартов квадрат е $R \subseteq A \times A$ ($R \subseteq A^2$).
Релацията представлява множество от наредени n-орки.

Свойства на релациите над декартов квадрат

1. Рефлексивност $[2.2^{n^2-n}]$
   $\forall a \in A: aRa$
2. Антирефлексивност
   $\forall a \in A: a \not R a$
3. Симетричност $\left[2^{\frac{n^2+n}{2}}\right]$
   $\forall a, b \in A (a \neq b): aRb \Rightarrow bRa$
4. Антисиметричност $\left[3^{\binom{n}{2}}.2^n\right]$
   $\forall a, b \in A (a \neq b): aRb \Rightarrow b \not R a$ || Ако $aRb \Rightarrow bRa \Rightarrow a=b$
5. Силна антисиметричност
   $\forall a, b \in A (a \neq b): aRb \oplus bRa$
6. Транзитивност
   $\forall a, b, c \in A: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

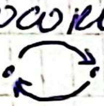
За нагледност релациите могат да бъдат представени чрез матрици и диаграми. Ако разглеждаме релация над декартов квадрат, и n елемента в домейна, то матрицата се рисува с n реда и n колони $\Rightarrow n^2$ клетки, които се запълват с 0 или 1. Представянето с диаграма става чрез добавяне или не на стрелки между елементи-те, които се рисуват като точки, в зависимост от това дали те са в релация. Тоест, ако имаме $a_i R a_j \Rightarrow$ a_i a_j

. Примка: $a_i R a_i \Rightarrow a_i$ (когато елементът е в релация със себе си)

Чрез матричното представяне лесно виждаме, че #възм. рел. е 2^{n^2}

Чрез тези 2 типа представяне могат да се разгледат и свойствата на релациите над декартов квадрат

1. Рефлексивност
 * само единици по главния диагонал
 - всеки образ има примка
2. Антирефлексивност
 * само нули по главния диагонал
 - никой образ няма примка
3. Симетричност
 * симетрична относно главния диагонал
 - между два образа има стрелки и в двете посоки

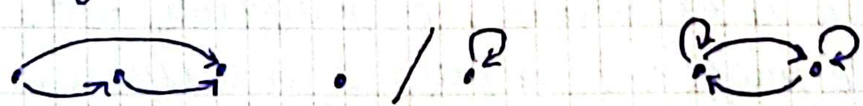


4. Антисиметричност
 * разрешени комбинации: $0\backslash 0$ $0\backslash 1$ $1\backslash 0$
 * забранени: $1\backslash 1$
 - разрешени: . .

 - забранени:

5. Силна антисиметричност
 * забранени: $0\backslash 0$ $1\backslash 1$
 - забранени: . .

6. Транзитивност
 -



$a \neq b \neq c$ $a = b = c$ $a = b \neq c$

Затваряния на релации Нека $R \subseteq A^2$

* Рефлексивно затваряне на R е релацията $R' \subseteq A^2$ такава, че $R \subseteq R'$ и R' е минимално по включване (т.е. има най-малък брой наредени двойки) и е рефлексивна.

$R = R'$ тогава R е рефлексивна по начало.

* Симетрично затваряне на R е релацията $R' \subseteq A^2$ такава, че $R \subseteq R'$ и R' е минимална по включване и симетрична.

* Транзитивно затваряне на R е релацията $R' \subseteq A^2$ такава, че $R \subseteq R'$ и R' е транзитивна и минимална по включване с исканите свойства.

Релации на еквивалентност $R \subseteq A^2$ е такава, ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна

Теорема.

Нека $R \subseteq A \times A$ е рел. на еквивалентност.

$a \in A$ и $[a] = \{b \mid b \in A, aRb\}$

Нека фамилията $F = \{[a_i], i \in I\}$ се състои от всички различни м-ва $[a_i]$ където I е подходящо индексно множество.

Тогава F е разбиване на A.

Доказателство:

Очевидно $[a_i] \subseteq A$, $\forall i \in I$.

Остава да докажем, че са в сила трите изисквания от дефиницията за разбиване.

1. $\forall i \in I ([a_i] \neq \emptyset)$, защото R е рефлексивна, тоест $a_i R a_i \Rightarrow a_i \in [a_i]$
2. $[a_i] \neq [a_j] \Rightarrow [a_i] \cap [a_j] = \emptyset$.

Действително да допуснем противното, т.е.

$[a_i] \neq [a_j] \Rightarrow [a_i] \cap [a_j] \neq \emptyset$

Следователно $\exists b \in [a_j] \cap [a_i]$, т.е. $b \in [a_i]$ и $b \in [a_j]$.

От дефиницията на $[a_i]$ и $[a_j]$ получаваме $a_i R b$ и $a_j R b$.

От симетричността на $R \Rightarrow b R a_j$, а от транзитивността ѝ – $a_i R a_j$. Нека $b' \in [a_j]$, т.е. $a_j R b'$.

От $a_i R a_j$ и $a_j R b' \Rightarrow a_i R b' \Rightarrow b' \in [a_i]$.

Последното е в сила за всеки елемент на $[a_j] \Rightarrow [a_j] \subseteq [a_i]$.

Аналогично се доказва и $[a_i] \subseteq [a_j]$.

Следователно $[a_j] = [a_i]$. $\lightning \Rightarrow [a_i] \cap [a_j] = \emptyset$ за $[a_i] \neq [a_j]$

3. Ще покажем, че $\bigcup\limits_{i \in I} [a_i] = A$

Действително, за кой и да е елемент $a \in A$ имаме $a \in [a] = [a_j]$ за някое $j \in I$.

Следователно $a \in \bigcup\limits_{i \in I} [a_i]$ и следователно $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} [a_i]$.

Но $[a_j] \subseteq A$, $\forall j \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} [a_i] \subseteq A \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} [a_i] = A$.

Определените от тази теорема м-ва $[a_i]$ наричаме класове на еквивалентност на R.

Ако $a_i R a_j$, казваме, че a_i е еквивалентен на a_j или че a_i и a_j са еквивалентни по отношение на R.

Тема 5

Релация $R \subseteq A \times A$ е частична наредба ттк тя е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Частична наредба $R \subseteq A \times A$ е пълна (линейна), ако е силно антисиметрична.

$A = \{a_1 \dots a_n\}$ има $n!$ линейни наредби.
R има $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$ наредени двойки.

Верига - м-во от елементи, които са сравними.
(Редицата $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}$, $\ell \geq 1$, в която $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$, $\forall j \in J_\ell$)
Контур - верига, при която $\ell \geq 2$ и $a_{i_\ell} R a_{i_0}$, т.е. верига, в която първия и последния елемент са свързани.

В частична наредба веригата е м-во от елементи, които са 2×2 сравними.

Антиверига е м-во от елементи, на което никои 2 елемента не са сравними.

<u>Теорема за контурите</u>
Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна.
Необходимо и достатъчно условие R да е частична наредба е да не съдържа контур.
Доказателство:
1. Необходимост.
Нека R е частична наредба $\Rightarrow$ R е антисиметрична

Да допуснем, че в R съществува контур $a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_k} = a_{i_0}$.
От транзитивността на релацията и $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$, $\forall j \in J_e$ получаваме, че $a_{i_0} R a_{i_{k-1}}$. Но $a_{i_{k-1}} R a_{i_0} = a_{i_k}$, а това противоречи на антисиметричността на релацията
$\Rightarrow$ ↯ и R няма контури.

2. Достатъчност

Нека R не съдържа контури.
Да допуснем, че R не е антисиметрична.
Следователно $\exists a_i, a_j \in A$, $a_i \neq a_j$ и $a_j R a_i$ и $a_i R a_j$.
Но тогава $a_i a_j a_i$ е контур. ↯
$\Rightarrow R$ е антисиметрична и R е частична наредба

Частична наредба $R \subseteq A \times A$ е вложена в пълната $R' \subseteq A \times A$, ако $R \subseteq R'$.

Релация без контури наричаме преднаредба.

Тема 6

Функцията е вид релация

$f: X \to Y$ X, Y: множества

домейн кодомейн

Частична функция е релацията $f \subseteq X \times Y$ е такова, че $\forall a \in X$ $\exists$ не повече от едно $b \in Y$ такова, че $(a, b) \in f$.

Тотална функция е когато $\forall a \in X$ $\exists$ точно едно $b \in Y$, такова че $(a, b) \in f$.

Инекция (еднозначна) е f, ако $\forall x_1 \neq x_2 \in X$, $f(x_1) \neq f(x_2)$

Сюрекция е f, ако $\forall b \in Y$ $\exists a \in X$, $f(a) = b$

Биекция е f, ако е инекция и сюрекция.

Ако $f: X \to Y$ е биекция, тогава еднозначно е определена биекцията $f^{-1}: Y \to X$, такова че $\forall b' \in Y$ е в сила $f^{-1}(b') = a'$, такова че $f(a') = b'$.

f^{-1} наричаме обратна функция на f.

Множество A е крайно, ако $A = \emptyset$ или $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ и биекция $f: A \to I_n$

Броят на елементите на A се нарича кардиналност:

$|A| = 0$, ако $A = \emptyset$

$|A| = n$, в противен случай

Изброимо ~~[illegible]~~ безкрайно м-во A е такова, ако $\exists$ биекция $f: A \to \mathbb{N}$. A е ~~[illegible]~~ изброимо, ако е крайно или изброимо безкрайно.

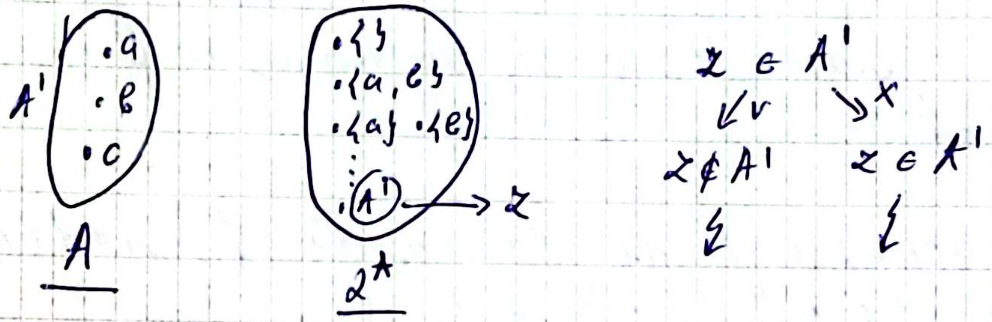
Теорема за съществуването на неизброимо (безкрайно) множество.

<u>Нека A е изброимо безкрайно. Тогава 2^A не е изброимо.</u>

Доказателство:

Да допуснем противното.

$\exists$ ~~сюрекция~~ биекция $f: A \to 2^A$.



$A' = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$

$\neg\exists$ биекция $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$

Тема 7

Теорема за декартовото произведение на 2 изброимо безкрайни множества

Нека $R \subseteq A \times A$, $R' \subseteq A' \times A'$ и $f: A \to A'$ е такава, че $(f(a), f(b)) \in R' \longleftrightarrow (a, b) \in R$

Тогава f наричаме хомоморфизъм на R в R'.

Ако f е биекция, тогава f е изоморфизъм на R и R'.

Нека A е изброимо безкр. ~~множество~~ м-во и B е изброимо безкрайно м-во. $A \neq B$.

Ще докажем, че $\tilde{A} = A \cup B = \bigcup \{a_{ij} \mid a_{ij} \in A \vee a_{ij} \in B, j \in N\}$ е изброимо безкрайно.

Достатъчно е да посочим биекцията $f: N \times N \to N$, съпоставяща на всяка двойка индекси (i, j) единствен елемент от N.

A: $a_{00}, a_{01}, a_{02}, \underline{a_{03}}, \ldots, a_{0n}, \ldots$

B: $a_{10}, a_{11}, \underline{a_{12}}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots$

$$f(i,j) = \begin{cases} 0, & i=0, j=0 \\ 1+2+\ldots+(i+j)+j, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

$f^{-1}: N \to N \times N$ намираме по следния алгоритъм

Дадено е $n \in N$

1.) Ако $n = 0$, тогава $i = 0$, $j = 0$. Край

2.) $k = 1$. Докато $n > k$

$\{ n = n - k;$

$k = k + 1; \}$

3.) $j = n$; $i = k - j$; Край.

Теорема за мощността на степенното множество на изброимо безкрайно множество.

Нека A е изброимо безкрайно м-во. Тогава 2^A не е изброимо.

Доказателство:

$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

2^A не е изброимо, но да допуснем противното, т.е.

$2^A = \{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\}$

За всяко подмножество A_i определяме характеристичната редица $(b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \dots)$, в която $b_{im} \in \{0, 1\}$ и ако $b_{im} \in A_i$, тогава $b_{im} = 1$, иначе е 0.

Всяка характеристична редица еднозначно определя подмножество на A (защото е биекция).

$$\begin{array}{lllll}
A_0 : & b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \dots \\
A_1 : & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots \\
A_2 : & b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \dots \\
 & & & & \ddots
\end{array}$$

$$\overline{b_{ii}} = \begin{cases} 1, & \text{ако } b_{ii} = 0 \\ 0, & \text{ако } b_{ii} = 1 \end{cases}$$

Според допускането всички подмножества на A са в редицата $(A_0, A_1, \dots) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} (\overline{A} = A_n)$. Но това е противоречие, защото редиците $\overline{A}$ и A_n се разл. в n-тата позиция $\Rightarrow 2^A$ не е изброимо

Лема: Всяка крайна частична наредба има минимален и максимален елемент

Доказателство:

Нека $R \subseteq A^2$ е крайна частична наредба.

Б.о.о. ще докажем за минимален елемент.

$\exists A$ - крайно $\exists R \subseteq A^2$, R - частична наредба.

Допускаме, че в R няма минимален елемент.

Разглеждаме произволен $a_1 \in A$

$a_1 \neq min \Rightarrow \exists a_2 \in A : a_2 \neq a_1$ и $a_2 R a_1$

$a_2 \neq min \Rightarrow \exists a_3 \in A : a_3 \neq a_1$ и $a_3 R a_2$

$\vdots$

Но по този начин ще построим верига, за която

$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \dots a_p\ \bar{a}_q \dots a_t$

т.е. е по-дълга от $|A|$.

$t > n$. Съгласно принципа на Дирихле влече съществуването на повтарящи се елементи (*), но в частична наредба няма контури $\Rightarrow$ ↯.

(*) $a_i = a_j$, $i < j \leq p$, за които $a_i R a_j \Rightarrow$ образуват контур

Всяка крайна частична наредба се влага в пълна

Алгоритъм: Топологическо сортиране

Дадени: М-во $A = \{a_1, \dots a_n\}$ и част. нар. $R \subseteq A^2$

Резултат: Наредена n-торка $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ от разл. ел. на A, задаваща пълна наредба $R' \subseteq A \times A$, $R \subseteq R'$ по следния начин:

$\boxed{\forall m \in I_n,}\ \forall k \in I_n,\ m \leq k \Rightarrow (a_{i_m}, a_{i_k}) \in R$

$\boxed{\text{Алгоритъм}}$ 0. Нека $i \leftarrow 1$.

(*) 1. Ако R е празна, то край

2. В противен случай a е произволен мин. ел. на A спрямо R

3. $B[i] \leftarrow a$

4. $i \leftarrow i+1$

5. Махаме a от R

6. goto (*)

Тема 8

Обектите на комбинаториката се наричат комбинаторни конфигурации.

Принцип на Dirichlet.

Нека X и Y са крайни м-ва и $|X| > |Y|$.
Тогава за всяка функция $f: X \to Y$ съществуват $a_i \neq a_j \in X$: $f(a_i) = f(a_j)$

Принцип на биекцията

Нека X и Y са крайни м-ва
$\exists$ биекция $f: X \to Y$ тстк $|X| = n$ и $|Y| = m$ и $n = m$.

Доказателство:
Нека $\exists$ биекция $f: X \to Y$.
Да допуснем, че $n > m$.
(съгласно Dirichlet) $\Rightarrow \forall g: X \to Y$, $\exists b \in Y$, $\exists a_i \neq a_j \in X$:
$$g(a_i) = g(a_j) = b.$$
Същото е в сила за f, което противоречи на факта, че f е биекция.
Аналогично се доказва за $m > n$ (чрез f^{-1}).
$\Rightarrow n = m$.

Принцип на събирането

Нека X е крайно м-во
$\{A_1, \dots, A_k\}$ е разбиване на X.
Тогава $|X| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$

Доказателство:
$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ означава, че всеки елемент участва в някое A_i и

следователно е преброен, а $S_i \cap S_j = \emptyset$ и $i \neq j$ означава, че никой елемент не е преброен повече от 1 път.

Принцип на изваждането

X - м-во, U - универсум

$|X| = |U| - |\overline{X}|$

Принцип на умножението

X, Y: м-ва (крайни)

$|X| = n$, $|Y| = m$

$|X \times Y| = |X| . |Y| = n.m$

$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| . |A_2| . \ldots . |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Доказателство:

1.) Нека $n = 0$, т.е. $X = \emptyset$.

Тогава $X \times Y = \emptyset$ и $|X \times Y| = 0 = n.m$

2.) Нека $m \neq 0$ и $n \neq 0$.

$X = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$Y = \{b_1, \ldots, b_m\}$

$\forall a_i \in X$ дефинираме м-вото $S a_i = \{(a_i, b) \mid b \in Y\}$.

$R = \{S a_1, S a_2, \ldots, S a_n\}$

От естествената биекция $f: X \to R$

$f(a_i) = S a_i \Rightarrow |R| = |X| = n$

Дефинираме биекцията $g_i : S a_i \to Y$

$g_i(a_i, b) = b \Rightarrow |S a_i| = |Y| = m$

Но R е разбиване на $X \times Y$, защото

1.) $|S a_i| = m \neq 0 \Rightarrow S a_i \neq \emptyset$

2.) $S a_i \cap S a_j = \emptyset$, $a_i \neq a_j$

3.) $\bigcup_{i \in I_n} S a_i = X \times Y$

От принципа на разбиването получаваме

$$|X \times Y| = \sum_{i \in I_n} |Sa_i| = \sum_{i \in I_n} m = nm = |X||Y|$$

<u>Принцип на делението</u>

X: крайно множество

$R \subseteq X^2 \to$ рел. на еквивалентност

Нека всеки клас на екв. има мощност k и са l на брой.

Тогава броя на класовете е $\frac{|X|}{l}$ и имат мощност $\frac{|X|}{k}$.

<u>Принцип на включването и изключването</u>

Нека A е крайно множество и $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$

Тогава:

$$|\overline{A_1}^A \cap \overline{A_2}^A \cap \ldots \cap \overline{A_n}^A| = |A| - \sum_{\{i\} \subseteq I_n} |A_i| + \sum_{\{i,j\} \subseteq I_n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{\{i,j,k\} \subseteq I_n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Доказателство: Индукция по n

1.) $n = 1$

$|\overline{A_1}^A| = |A| - |A_1|$, т.е. $|A \setminus A_1| = |A| - |A_1|$, но от п-па на изваждането. ✓

2.) Допускаме, че тв. е в сила за $n-1$, т.е.

$$\left|\overline{A_1}^A \cap \overline{A_2}^A \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}^A\right| = A - \sum_{\{i\} \subseteq I_{n-1}} |A_i| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}|$$

3.) Ще докажем, че е вярно и за n

От п-па на разбиването:

$$\left|\overline{A_1}^A \cap \overline{A_2}^A \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}^A\right| = \left|\overline{A_1}^A \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}^A \cap \overline{A_n}^A\right| +$$

$$+ \left|\overline{A_1}^A \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}^A \cap A_n\right|,$$

защото вс. ел. на първото м-во или е или не е елемент на A_n.

Чрез комутативност и асоциативност:

$$\overline{A_1}^A \cap \overline{A_2}^A \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}^A \cap A_n = (\overline{A_1}^A \cap A_n) \cap \ldots \cap (\overline{A_{n-1}}^A \cap A_n)$$

Но $\overline{A_i}^A \cap A_n = A_n \setminus A_i = \overline{A_i \cap A_n}^{A_n}$, $\forall i \in I_{n-1}$

$\Rightarrow$ От ИП

$$\left|\overline{A_1 \cap A_n}^{A_n} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1} \cap A_n}^{A_n}\right| = |A_n| - \sum_{\{i\} \subseteq I_{n-1}} |A_i \cap A_n| + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Тема 9

Обектите на комбинаториката се наричат комбинаторни конфигурации. Строим ги от елементите на някое крайно множество (опорно множество), комбинирайки ги по зададени правила.

~~Непредвиждане на елементи~~

Комбинаторни конфигурации с наредба и повтаряне

$K_{н,п}(n, m) = |A^m| = n^m$

n → брой елементи на A (мощност)

m → големина на комбинаторната конфигурация

Конфигурациите са вектори с дължина m.

$K_{н,п}$ → м-во, в което всеки елемент е наредена m-орка с елементи от образуващото м-во, като един елемент може да участва произволен брой пъти в m-орката.

Пр.: $A = \{0, 1\}$
$K_{н,п}(2, 3) = \{000, 001, 010, \dots, 111\}$

Комбинаторни конфигурации с наредба без повторение

$K_{н}(n, m) = n(n-1)\dots(n-(m-1)) = n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!} = \prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$

n — мощността на образуващото множество

m — големина на комбинаторните конфигурации

$n^{\underline{m}}$ — падащо m; отн на инекциите

При $m > n$ ⇒
$K_{н}(n, m) = \emptyset$

За първия елемент – (n) възможности
За втория елемент – (n-1) възможности
За последния елемент – (n-m+1) възможности
↳ защото е последен иначе се губи 1 възможност

$K_H(n, m)$ - м-во от наредени m-торки с елементи от образуващото множество, в които вс. ел. участва не повече от 1 път.

Вариации на n ел. от m-ти клас – V_n^m. Пермутациите са частен случай на вариациите, при който m=n. => В този случай комб. конф. са векторите, които се съпоставят на биекцията $f: A \to A$. $K_H(n, n) = n!$

<u>Комбинаторни конфигурации без наредба и без повторение</u>

$$K(n, m) = \boxed{\frac{K_H(n, m)}{m!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

↳ тази ф-ла се извежда съгласно комбинаторния п-п на делението

Отсъствието на наредба и повторение означава, че разглеждаме конфигурации, които са m-елементни подмножества на опорното множество.

Над $K_H(n, m)$ се въвежда R. $R \subseteq K_H(n, m) \times K_H(n, m)$ => $a, b \in K_H(n, m)$: aRb → има едни и същи елементи.
=> R е рел. на екв. Всеки клас на екв. на R има мощност m! (толкова са възможностите за ротация за получаване на дадения клас.)

Комбинаторни конфигурации без наредба и с повторение

$$K_{\Pi}(n, m) = \frac{(m+n-1)!}{m!(m+n-1-m)!} = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Получените конфигурации са мултимножества

Разяснение на формулата

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
m - елементи на конф.
n - 1 - брой на запетайките

Общ брой на кутийките за пост. на елементите: $m+n-1$

Представяме си полученото м-во като масив от m елемента и n-1 запетайки. Когато даден елемент липсва поставяме ',', също и м/у 2 разл. елемента.

1	,	,	3	3	,	4	4	,	5

$= [1, 3, 3, 4, 4, 5]$

2-ката липсва; 1 и 3 са разл.; 3 и 4 са различни; 4 и 5 са различни

Броят на конфигурациите е равен на броя на различните начини, по които можем да изберем мястото на n-1 запетайки в m + n - 1 различни кутийки.

Биномен коефициент

$$\binom{n}{m} = \frac{(n-m+1)\cdot\ldots\cdot n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{0}$$
$$\binom{n}{1}$$
$$\binom{n}{2}$$
$$\vdots$$
$$\binom{n}{n-2}$$
$$\binom{n}{n-1}$$
$$\binom{n}{n}$$

симетрия

Теорема на Нютон. За всяко естествено число n и реални x и y е в сила

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$$

Доказателство:

При повдигане на бинома $x+y$ на n-та степен всеки едночлен от вида $x^m y^{n-m}$ ще се получи толкова пъти, колкото можем да изберем m множителя измежду n-те от които взимаме x (от останалите $n-m$ избираме y), а това е точно броят на ненаредените конфигурации без повторение $\binom{n}{m}$.

Броят на всички подмножества на множество с n елемента можем да изразим като сума като сума на броя на m-елементните му подмножества ($m = 0, 1, \dots, n$)

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}$$

Свойства на биномния коефициент

Теорема 1

Нека $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$.

Тогава $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

Доказателство:

A - опорно м-во

$|A| = n$

Избираме 2 подмножества:

K_1 - конфигурациите, които не съдържат елемента с номер n

K_2 - тези, които го съдържат

$|K_1| = \binom{n-1}{m}$ защото премахваме този елемент и правим възможните m-елементни конфигурации

$|K_2| = \binom{n-1}{m-1}$ Към всяка конф. от $m-1$ елемента без n добавяме точно този елемент.

$$\Rightarrow \binom{n}{m} = |K(n,m)| = |K_1| + |K_2| = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Теорема 2

Нека $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$

Тогава $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, т.е.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

I. Доказателство:

$\binom{2n}{n}$ е броят на n-елементните подмножества на $2n$-елементно множество. Разделяме множеството на 2 части с по n елемента и от тях образуваме трето. От първото взимаме k елемента, от второто $n-k$.

II. Доказателство:

На всяко подмножество A' на A, където $|A'| = m$ еднозначно съответства подмножество $A \setminus A'$ с $(n-m)$ елемента и прилагайки принципа на биекцията получаваме $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

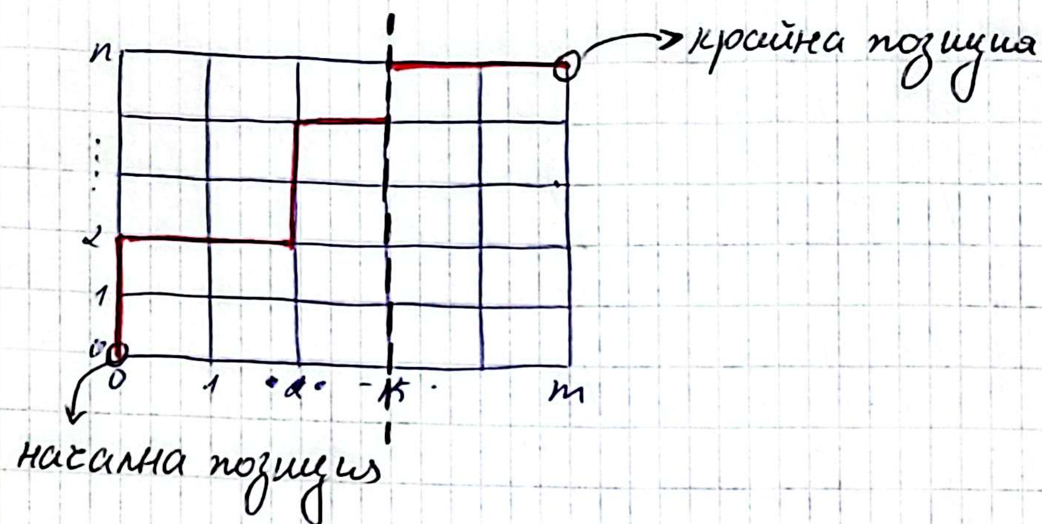
Теорема 3

Нека $n, m \in \mathbb{N}$

Тогава $\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$

Доказателство:

Нека имаме правоъгълна мрежа с n реда и m колони. $(n > m)$



Разрешени движения: ⊛ 1 нагоре
⊛ 1 надясно

⇒ Трябва да направим общо m движения надясно и n движения нагоре ⇒ Общо n+m движения.

Ако определим едните движения, то другите ще са останалите, затова

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$$

За да излезем за първи път на n-тия ред на разст. k от 0, трябва да сме били преди това на (n-1)-вия на |k| от 0, защото иначе ще сме достигнали n-тия ред преди k-тата колона.

⇒ Придвижванията с параметър k (k е стълб) са

$$\binom{n+k-1}{k}$$ ⇒ Щом k е стълб, $k \in [0, m]$ ⇒

От п-па на разбиването получаваме

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$$

$\boxed{\text{Тема 10}}$

Рекурентното уравнение е синтактичен обект. За да осъществува рекурентно отношение са необходими уравнение за изчисляване на n-тия елемент чрез по-малък и едно или повече начални условия. Функцията, която намира решението на рекурентното уравнение е неговата семантика. Тоест можем да кажем, че на синтактичния обект рекурентно уравнение съответства функция $f: N \to N$, която задава числова редица.

Рекурентните отношения са рекурсивни само в програмистких смисъл! В математическия смисъл, рекурсивна функция е функция, която е изчислима.

Да се реши рекурентно уравнение означава да се намери еквивалентен израз от дясната страна, който не съдържа функционалния смисъл.

<u>Примери за броене в комбинаториката чрез рек. ур-е</u>

I. На колко района най-много можем да разделим равнината с n прави?

$n = 0 \Rightarrow 1$

$n = 1 \Rightarrow 2$

$n = 2 \Rightarrow 4$

$n = 3 \Rightarrow 7$

Забелязваме тенденцията и дефинираме рек. отношение:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_n = \alpha_{n-1} + n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Нека намерим за $\alpha_4 = \alpha_3 + 4 = \alpha_2 + 3 + 4 = \alpha_1 + 2 + 3 + 4 = \alpha_0 + 1 + 2 + 3 + 4$
$= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$

II. На колко района най-много се разделя универсума от n окръжности?

Нека окръжностите се секат в 2 точки (за максимизиране).
M_i - i-броят на окръжностите
↳ броят на районите за съотв. бр. окръжности

$$M_0 = 1 \quad M_1 = 2 \quad M_2 = 4 \quad M_3 = 8$$

$$\left.\begin{matrix} M_n = M_{n-1} + 2(n-1) \\ M_1 = 2 \\ M_0 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n^2-n+2, & n>0 \end{cases}$$

Линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти и крайна история

1. Хомогенни

Нека редицата $\{a_n\}$ е зададена с линейно рекурентно отношение:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + \underbrace{c_k}_{\neq 0} \cdot a_{n-k}$$

k - const $\leq n$

c_i - const

$1 \leq i \leq k$

$c_k \neq 0 \quad \forall k \leq n$

k е редът на рекурентното уравнение
Рекурентното уровнение трябва да има k на брой начални условия.

Решаване

1. Съставяне на характеристично уравнение

2. Решаване на характ. ур-е (т.е. получаване на мултимн.)
3. Съставяне на „общо решение"
4. Съставяне на пълно решение

$f_n = n \, f_{n-1}$ НЕ е хомогенно, тъй като $n \neq const$

1.)
$$x^n = c_1 . x^{n-1} + \dots + c_k . x^{n-k} \quad / : x^{n-k}$$
$$x^k = c_1 . x^{k-1} + \dots + c_k . x^0$$

2.)
Получавме $\{ \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_k}_{k \text{ корена}} \}$

Пример

$F_n = 1 . F_{n-2} + 1 . F_{n-1}$

Начални условия: $F_0 = 0$

$F_1 = 1$

Характеристично уравнение: $x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

Корени: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}_M$

Общо решение: $F_n = A . \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B . \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$\left| \begin{array}{l} F_0 = A + B \\ F_0 = 0 \text{ (нач. усл.)} \end{array} \right\} \rightarrow A = -B$$

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ F_1 = 1 \text{ (нач. усл.)} \end{array} \right\} \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Пълно решение: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

2. Нехомогенни

$$a_n = \underbrace{c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n) b_1^n + p_2(n) \cdot b_2^n + \ldots + p_m(n) b_m^n}_{\text{нехомогенна част}}$$

$b_1 \ldots b_m$: const (2×2 различни)
m = const

Алгоритъм за решаване:
1. Игнорираме нехом. част и получ. мултимножество от корени
2. Към това м-во добавяме $\{b_1 \ldots b_1, \ldots, b_m \ldots b_m\}_M$, където b_i се появява толкова пъти, колкото е $deg(p_i)+1$
3. Съставя се общо решение съгласно увеличилото се множество
4. Намират се неизв. конст. от стъпка (3) ч/з добавяне на началните условия
5. Пълно решение

<u>Пример</u> (Ханойските кули)

$H_n = 2 \cdot H_{n-1} + \boxed{1^n \cdot n^0}$
$H_1 = 1, \quad H_2 = 3$ ↳ степента на полинома е 0

Хар. ур-ие: $x - 2 = 0$
Мултим-во: $\{2\}_M \cup \{1\}_M = \{1, 2\}_M$
Общо решение: $H_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$

$$\begin{cases} H_1 = A + 2B = 1 \\ H_2 = A + 4B = 3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

$H_n = 2^n - 1$