Типовой расчет по теории вероятности за 11 модуль.

Плотников Антон, г. 3743

16 июня 2015 г.

Задача 1

Условие

Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \sqrt{x}$ и $Z = -2X + 3$ являются функцими от случайной величены X.

1. Найти плотность рспределения $f_Y(v)$
2. Найти моменты EZ, DZ, $cov(X, Z)$

Решение

Найти плотность рспределения $f_Y(v)$:

$$D_v = \{x : \sqrt{x} < v\}$$

При $v < 0$ $D_Y = 0$ следовательно $F_Y = P\{Y \in D_v\} = 0$ и $f_y(v) = F'_Y(v) = 0$
При $v > 0$ $D_v = \{x : x < v^2\}$

$$F_Y(v) = P\{X < v^2\} = F_X(v^2) = 1 - exp(-3v^2),$$
$$f_y(v) = F'_y(v) = 6v \cdot exp(-3v^2)$$

Таким обазом

$$F_Y(v) = \begin{cases} 1 - exp(-3v^2), & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

$$f_y(v) = \begin{cases} 6v \cdot exp(-3v^2), & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Найти моменты EZ**,** DZ**,** $cov(X, Z)$**:**

$$\mathbf{E}X = \int\limits_0^\infty x \cdot 3e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$$
$$\mathbf{E}X^2 = \int\limits_0^\infty x^2 \cdot 3e^{-3x} dx = \frac{2}{9}$$
$$\mathbf{D}X = \frac{2}{9} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$$
$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}[-2X + 3] = -2\mathbf{E}X + 3 = \frac{7}{3}$$
$$\mathbf{D}Z = \mathbf{D}[-2X + 3] = 4\mathbf{D}X = \frac{4}{9}$$
$$cov(X, Z) = cov(X, -2X + 3) = -2 \cdot cov(X, X) = -2 \cdot \mathbf{D}X = -\frac{2}{9}$$

Задача 2

Условие

Распределение системы дискретных случайных величин (X, Y) задано таблицей

Y \ X	-2	-1	1
-1	0.1	0.15	0.15
0	0.05	0.15	0.2
2	0	0.1	0.1

Найти условное математическое ожидание $\mathbf{E}(X|Y)$ и $\mathbf{E}(Y|X)$, найти математическое ожидание этих случайных величин, проверить формулу полного математического ожидания. Построить линейную регрессию X на Y и Y на X и вычислить значение этих функций в точках x_i, y_j.

Решение

Условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}(X|Y = y_1), \ldots, \mathbf{E}(X|Y = y_4)$$
$$\mathbf{E}(X|Y = y_i) = \sum_{j=1}^{3} x_j \cdot \mathbf{P}(X = x_j|Y = y_i) = \sum_{j=1}^{3} x_j \cdot \frac{\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_i)}{\mathbf{P}(Y = y_i)}$$
$$\mathbf{E}(X|Y = -1) = \frac{0.1 \cdot -2 + 0.15 \cdot -1 + 0.15 \cdot 1}{0.1 + 0.15 + 0.15} = -\frac{0.2}{0.4}$$
$$\mathbf{E}(X|Y = 0) = \frac{0.05 \cdot -2 + 0.15 \cdot -1 + 0.2 \cdot 1}{0.05 + 0.15 + 0.2} = -\frac{0.05}{0.4}$$
$$\mathbf{E}(X|Y = 2) = \frac{-2 \cdot 0 + 0.1 \cdot -1 + 0.1 \cdot 1}{0 + 0.1 + 0.1} = 0$$
$$\mathbf{E}(Y|X) = \mathbf{E}(Y|X = x_1), \ldots, \mathbf{E}(Y|X = x_3)$$
$$\mathbf{E}(Y|X) = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_i) = \sum_{j=1}^{4} y_j \cdot \frac{\mathbf{P}(Y = y_i, X = x_j)}{\mathbf{P}(X = x_i)}$$
$$\mathbf{E}(Y|X = -2) = \frac{-1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0}{0.1 + 0.05 + 0} = \frac{-0.1}{0.15}$$

$$\mathbf{E}(Y|X=-1) = \frac{-1\cdot 0.15 + 0\cdot 0.15 + 2\cdot 0.1}{0.15+0.15+0.1} = \frac{0.05}{0.4}$$
$$\mathbf{E}(Y|X=1) = \frac{-1\cdot 0.15 + 0\cdot 0.2 + 2\cdot 0.1}{0.15+0.02+0.1} = \frac{0.05}{0.45}$$

Математическое ожидание X и Y

$$\mathbf{E}(X) = -2\cdot(0.1+0.05+0) - 1\cdot(0.15+0.15+0.1) + 1\cdot(0.15+0.2+0.1) = -0.25$$
$$\mathbf{E}(Y) = -1\cdot(0.1+0.15+0.15) + 0\cdot(0.05+0.15+0.2) + 2\cdot(0+0.1+0.1) = 0$$

Проверка формулы полного математического ожидания

Согласно формуле полного математического ожидания:

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(A|B)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X|Y=y_i)\mathbf{P}(Y=y_i) = \mathbf{E}(A)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|Y)] = -\frac{0.2}{0.4}\cdot 0.4 - \frac{0.05}{0.4}\cdot 0.4 = -0.25 = \mathbf{E}(X)$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(Y|X)] = -\frac{0.1}{0.15}\cdot 0.15 + \frac{0.05}{0.4}\cdot 0.4 + \frac{0.05}{0.45}\cdot 0.45 = 0 = \mathbf{E}(Y)$$

Регрессия

$$cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{i,j} - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0.2$$
$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 4\cdot(0.1+0.05) + 1\cdot(0.15+0.15+0.1)$$
$$+1\cdot(0.15+0.2+0.1) - (-0.25)^2 = 1.3 - 0.0625 = 1.2375$$
$$\mathbf{D}Y = 1\cdot(0.1+0.15+0.15) + 4\cdot(0.1+0.1) - 0^2 = 1.2$$
$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X} = 1.11243$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\mathbf{D}Y} = 1.095445$$
$$r_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{0.2}{1.11243\cdot 1.095445} = 0.164122$$

Линейная среднеквадратичная регрессия Y на X

$$Y = \alpha + \beta X, \text{где } \alpha = \mathbf{E}Y - r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mathbf{E}X, \quad \beta = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

$$Y = 0.404 + 0.162X$$
$$Y = 0.404 + 0.162(-2) = 0.08$$
$$Y = 0.404 + 0.162(-1) = 0.242$$
$$Y = 0.404 + 0.162(1) = 0.566$$

Линейная среднеквадратичная регрессия X на Y

$$X = \alpha + \beta Y, \text{где } \alpha = \mathbf{E}X - r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mathbf{E}Y, \quad \beta = r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

$X = -0.25 + 0.167Y$

$X = -0.25 + 0.167(-1) = -0.417$

$X = -0.25 + 0.167(0) = -0.25$

$X = -0.25 + 0.167(2) = 0.048$