Типовой расчет по теории вероятности за 12 модуль.

Плотников Антон, г. 3743

17 июня 2015 г.

Задача 1

Условие

Система случайных величин (X, Y) равновероятно распределена в треугольнике с вершинами $A(-1,1)\, B(1,2)\, C(1,1)$. Найти плотности компонент X и Y, коэффициент корреляции $r(X,Y)$, регрессию $m_{Y|X}(x)$ и $m_{X|Y}(y)$ изобразить эти линии графически.

Решение

Вычислим плотности вероятностей:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_{\triangle_{ABC}}} = 1, & (x,y) \in \triangle_{ABC} \\ 0, & (x,y) \notin \triangle_{ABC} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int\limits_{1}^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} dy = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int\limits_{2y-3}^{1} dx = 4 - 2y, & y \in [1,2] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Вычислим $r(X,Y)$:

$$\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x)dx = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int\limits_{1}^{2} (2y^2 - 4y)dy = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{E}X^2 = \int\limits_{-1}^{1} (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}Y^2 = \int\limits_{1}^{2} (2y^3 - 4y^2)dy = \frac{11}{6}$$

$$\mathbf{D}X = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} \qquad \sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X} \approx 0.47$$

$$\mathbf{D}Y = \frac{11}{6} - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{18} \qquad \sigma_Y = \sqrt{\mathbf{D}Y} \approx 0.24$$

$$\mathbf{E}(XY) = \int\limits_1^2 \int\limits_{2y-3}^1 xydxdy = \int\limits_1^2 (2y - y^2)dy = \frac{2}{3}$$

$$cov(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$$

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \approx 1.97$$

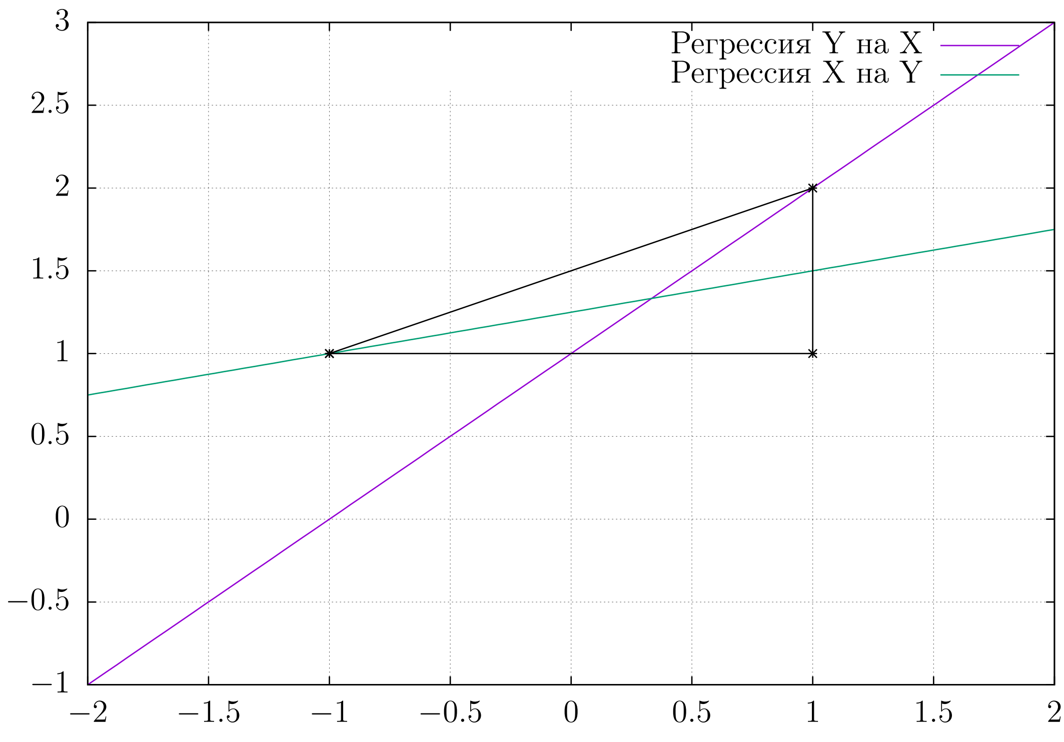
Регрессия :

$$m'_{Y|X} = \mathbf{E}Y + r(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mathbf{E}X) = \frac{4}{3} + 1.97 \cdot \frac{0.24}{0.47}(X - \frac{1}{3}) \approx 1.01X + 1$$

$$m'_{X|Y} = \mathbf{E}X + r(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mathbf{E}Y) = \frac{1}{3} + 1.97 \cdot \frac{0.47}{0.24}(Y - \frac{4}{3}) \approx 3.86Y - 4.81$$

$$m_{Y|X} = \mathbf{E}(Y|X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int\limits_1^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} \frac{y}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}dy = \frac{x+5}{4}$$

$$m_{Y|X} = \mathbf{E}(X|Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dy = \int\limits_{2y-3}^{1} \frac{x}{4-2y}dy = y - 1$$



Задание 2.1

Условие

Методом Монте-Карло оценить объем части тела $F(\overline{x}) \leq 0.94$, заключённой в 5-мерном кубе с ребром $[0, 1]$. Функция имеет вид $F(\overline{x}) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_5)$.Для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объема.

Используя объем выборки $n = 10^4$ и $n = 10^6$ оценить скорость сходимости и показать, что доверительные интервалы пересекаются.

$f(x) = exp(-3x)$

Решение

Геометрическая вероятность $\forall D \in \Omega : p(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)}, \mu(D) = p(D)\mu(\Omega)$

$\hat{\sigma}_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$– несмещенная оценка дисперии

$\mathbf{E}\xi = p; \mathbf{D}\xi = pq; \sigma = \sqrt{pq} \Leftrightarrow \sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)} = \hat{\sigma}_n$

$(\overline{X_n} - \delta_n, \overline{X_n} + \delta_n)$– асимптотически доверительный интервал надежности γ, где

$\delta_n = \dfrac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}$

Код программы на языке Octave:

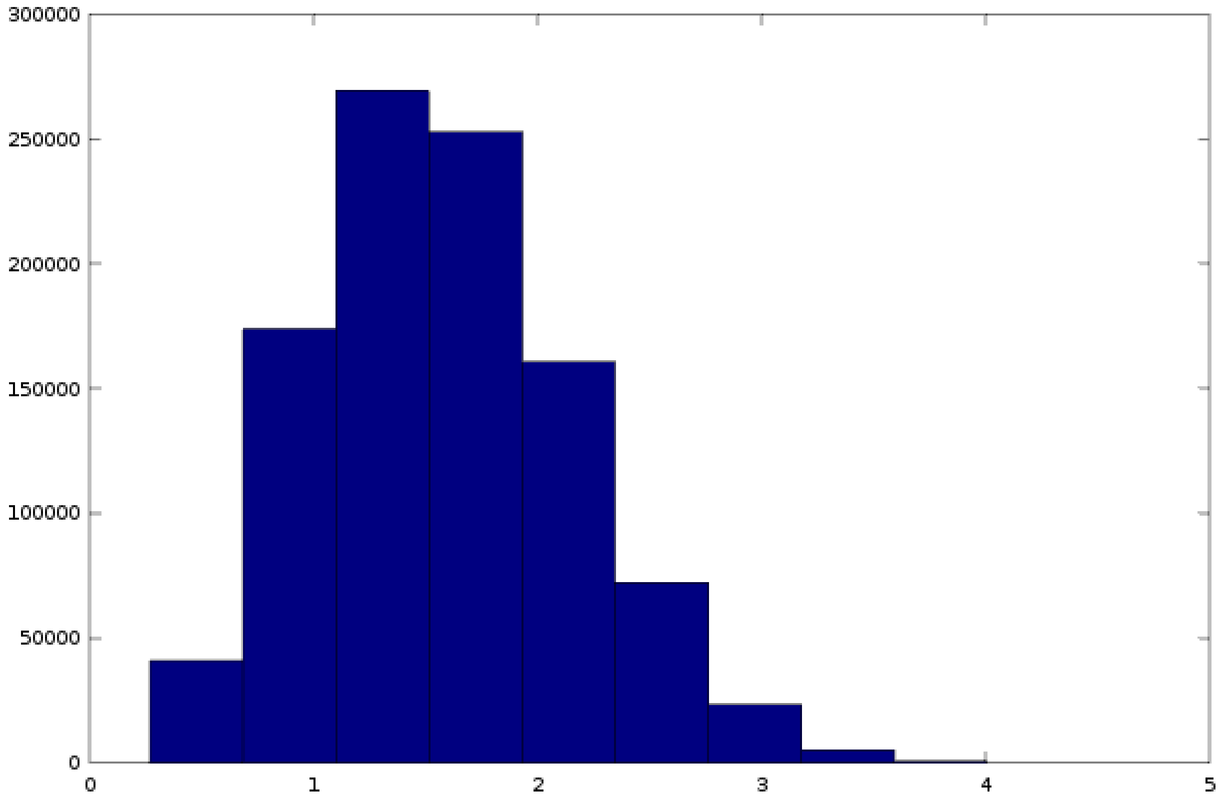
```
clc
global gamma
gamma = 0.98;

global k c a;
k = 5;
c = 0.94;
a = 3;

function evaluate(n)
    global a k gamma c;
    X=rand(n,k);
    F=sum(exp(-a * X)');

    hist(F)
    v = mean(F<c)

    T = norminv((1+gamma)/2)
    d = T*std(F<c)/sqrt(n)
    interval = [v-d, v+d]
end
```



При $n = 10^4$:

$v = 0.13250$
$T = 2.3263$
$d = 0.0078875$
$interval = [0.12461 : 0.14039]$

При $n = 10^6$:

$v = 0.13323$
$T = 2.3263$
$d = 7.9055e - 04$
$interval = [0.13244 : 0.13402]$

Задача 2.2

Условие

Аналогично построить оценку интегралов и для выбранной надежности указать ассимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истиного значения интеграла.

А) $\int\limits_1^3 \frac{log(4-x)}{(x+2)}dx$

$$\int\limits_1^3 \frac{log(4-x)}{(x+2)}dx = (b-a)\left(\frac{1}{(b-a)}\int\limits_1^3 \frac{log(4-x)}{(x+2)}dx\right) = (b-a)\mathbf{E}\left(\frac{log(4-x)}{(x+2)}dx\right)$$

Листинг решения:

```
function y = solve_a(n)
    global gamma
    a = 1;
    b = 3;
    l = b-a;
    X = rand(n,1) * (b - a) + a;
    Y = arrayfun(@(x) log(4-x)/(x+2), X);
    hist(Y)

    M = mean(Y);
    T = norminv((1+gamma)/2);
    S = std(Y);
    dM = T * S/sqrt(n)
    I = l * M
    dL = S * dM
    mean (dL)
    interval = [(I - dL), (I + dL)]
end
```

При $n = 10^4$:

$$dM = 0.0020001$$
$$I = 0.35549$$
$$dL = 2.0411e-04$$
$$ans = 2.0411e-04$$
$$interval = [0.35528 : 0.35569]$$

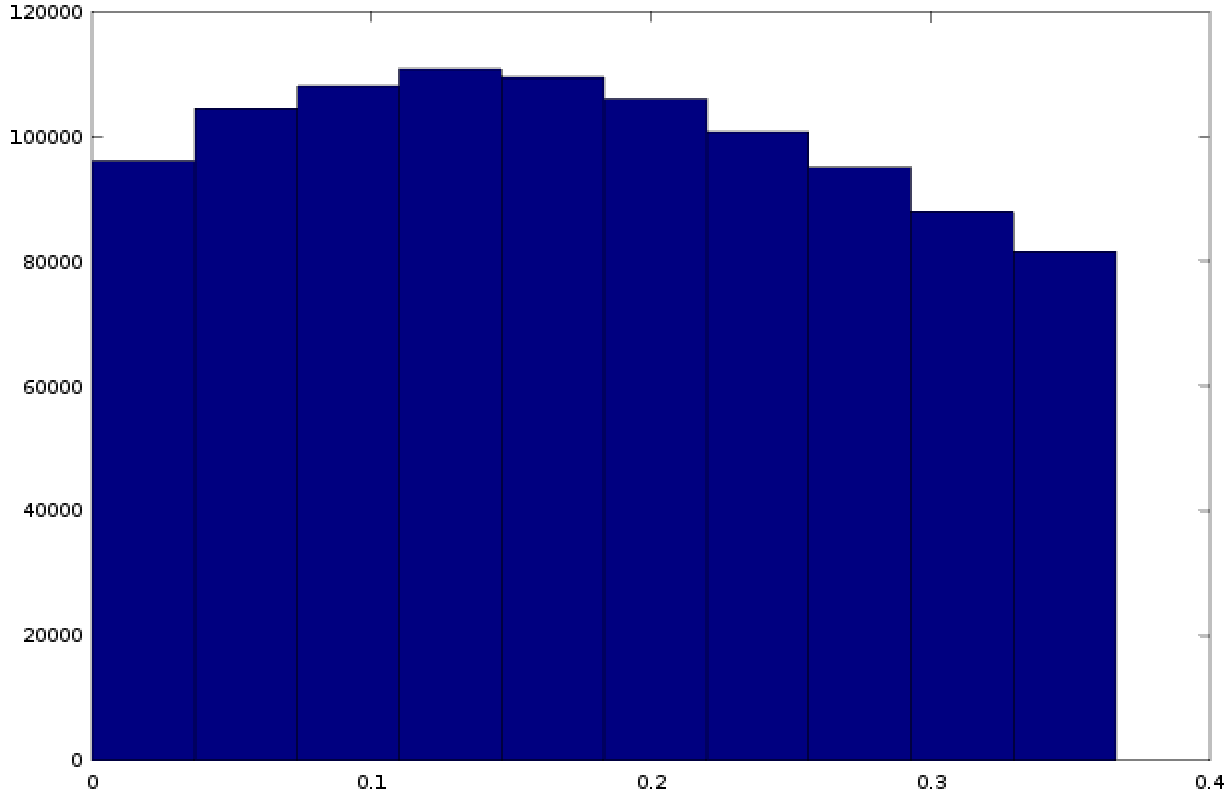
При $n = 10^6$:

$$dM = 2.0020e-04$$
$$I = 0.35349$$
$$dL = 2.0449e-05$$
$$ans = 2.0449e-05$$
$$interval = [0.35347 : 0.35351]$$

Б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|}exp(\frac{-(x+1)^2}{2})dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|}exp(\frac{-(x+1)^2}{2})dx = \sqrt{2\pi}\mathbf{E}(\sqrt{|x|}), \qquad X \sim N(1,-1)$$

Листинг решения:




```
function y = solve_b(n)
    global gamma;
    c = sqrt(2 * pi);
    a = -1;
    s = 1;
    N = randn(n,1);
    X = a + s * N;
    Y = arrayfun(@(x) sqrt(abs(x)), X);
    M = mean(Y);
    S = std(Y);
    T = norminv((1+gamma)/2)
    dM = T * S/sqrt(n);
    hist(Y)
    I = c * M
    dI = c * dM
    mean(dI)
    interval = [I-dI, I+dI]
end
```

При $n = 10^4$:

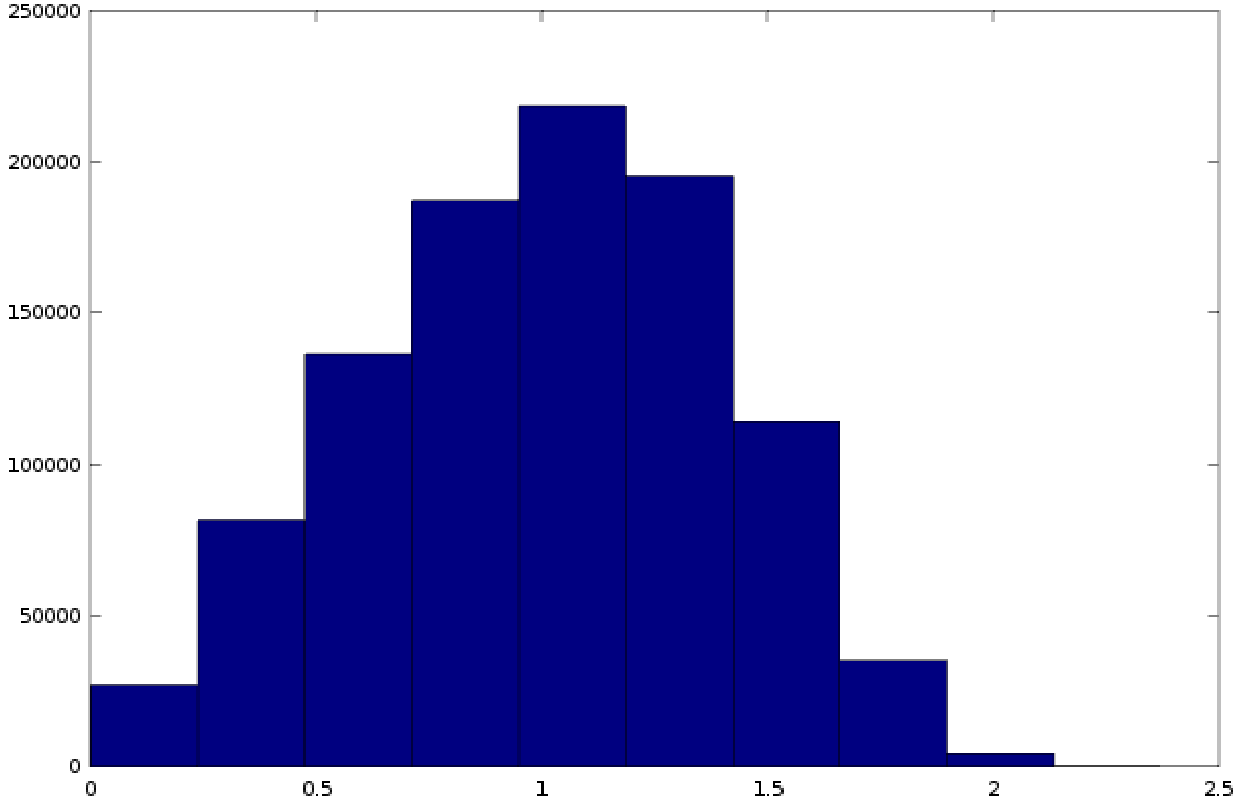
$$T = 1.9600$$

$$I = 2.5169$$

$$dI = 0.019378$$

$$ans = 0.019378$$

$$interval = [2.4975 : 2.5362]$$



При $n = 10^6$:

$T = 1.9600$
$I = 2.5193$
$dI = 0.0019467$
$ans = 0.0019467$
$interval = [2.5173 : 2.5212]$