Типовой расчет по теории чисел.

Плотников Антон, г. 3743

5 июня 2015 г.

Задача 1

A.

$$5x \equiv 15(mod\,28)$$
$$x \equiv 3(mod\,28)$$

B.

$$14x \equiv 41(mod\,198)$$
$$(14, 221) = 1$$
$$\frac{221}{14} = 15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$
$$x \equiv (-1)^n p_{n-1} b = 41 \cdot 79(mod\,221) = 145(mod\,221)$$

C.

$$2x \equiv 3(mod\,15)$$
$$2^{\varphi(15)} \equiv 2^8(mod\,15)$$
$$2^{-1} \equiv 2^7(mod\,15)$$
$$x \equiv 3 * 2^7(mod\ 15)$$
$$x \equiv 9(mod\ 15)$$

D.

$$\begin{cases} x \equiv 8(mod\,15) & (1) \\ x \equiv 9(mod\,13) & (2) \\ x \equiv 5(mod\,14) & (3) \end{cases}$$

Подставим (1) уравнение в (2):

$$x = 15a + 8 \qquad (*)$$
$$15a + 8 \equiv 9(mod\,13)$$
$$2a \equiv 1(mod\,13)$$
$$a \equiv 7(mod\,13) \Leftrightarrow a = 13b + 7$$

Подставим a в $(*)$:

$$x = 15 \cdot 13b + 15 \cdot 7 + 8 \qquad (**)$$

Подставим $(**)$ в (3):

$$15 \cdot 13b + 15 \cdot 7 + 8 \equiv 5(mod\, 14)$$
$$15(13b + 7) \equiv 11(mod\, 14)$$
$$b \equiv 10(mod\, 14) \Leftrightarrow b = 14c + 10$$

Подставим c в $(**)$:

$$x = 15 \cdot 13 \cdot 14c + 15 \cdot 13 \cdot 10 + 15 \cdot 7 + 8 \Leftrightarrow$$
$$x \equiv 15 \cdot 130 + 15 \cdot 7 + 8(mod\, 15 \cdot 13 \cdot 14)$$
$$x \equiv 2063(mod\, 2730)$$

Задача 2

A. $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $n^2(n^2-5)(n^2+5) : 12$

Для того, чтобы доказать делимость на 12 необходимо доказать делимость на 3 и на 4.

Возможные остатки при делении четного n на $4 : 0, 1, 2, 3$, тогда остатки при делении n^2 на 4 $: 0, 1$. Если в остатке 0, то очевидно, что число делится на 4. Если в остатке от деления 1, то n^2 - нечетное и $n^2 \pm 5$ - четные, а значит число делится на 4 всегда.

Возможные остатки при делении четного n на $3 : 0, 1, 2$, тогда остатки при делении n^2 на 3 $: 0, 1$. Если в остатке 0, то очевидно, что число делится на 3. Если в остатке от деления 1, то $n^2 = 3a + 1$ и $n^2 + 5 = 3a + 6 \, : 3$, значит число делится на 3 всегда.

Значит число делится на 12.

B. Найти все целые неотрицательные t, при которых: $t^3 + 7 \,\vdots\, t - 3$

В столбик разделим $t^3 + 7$ на $t - 3$.

$$(t-3)(t^2 + 3t + 9) + 34 \,\vdots\, t - 3 \Leftrightarrow 34 \,\vdots\, t - 3$$

Переберем все делители числа 34 (1, 2, 17, 34). Отсюда все возможные целые положительные значения t: 4, 5, 20, 37.

C. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$. Доказать, что если $a^2 + b^2 \,\vdots\, 11$, то $(a+b)^3 + 2(a^3 + b^3) \,\vdots\, 3993$

$$(a+b)^3 + 2(a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2a^3 + 3b^3 =$$
$$= 3(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2) = 3((a^2 + b^2)(a + b))$$

$$(a^2 + b^2)(a + b) \,\vdots\, 1221 = 11^3$$

Задача 3

A. Вычислить функцию Эйлера $\varphi(5005)$

Для вычисления воспользуемся свойством мултипликативности и разложим 5005 на степени простых множителей.

$$5005 = 13 * 11 * 7 * 5 \Leftrightarrow$$
$$\varphi(5005) = \varphi(13)\varphi(11)\varphi(7)\varphi(5) = 12 * 10 * 6 * 4 = 2880$$

B. Найти остаток от деления 333^{111} на 12

$$333^{111} \equiv x (mod\, 12)$$
$$9^{111} \equiv x (mod\, 12)$$
$$\text{Пусть: } 3y = x \text{ ,тогда } 9^{111} \equiv 3y (mod\, 12)$$
$$3 \cdot 9^{110} \equiv y (mod\, 4)$$

Так как $(4, 9) = 1$, то имеет место теорема Эйлера: $9^2 \equiv 1 (mod\, 4)$

$$3 \cdot (9^2)^{55} \equiv 3 (mod\, 4)$$
$$x = 9$$

Задача 4

$$\begin{cases} [a, b] = 520 \\ a + b = 7(a, b) \end{cases}$$
$$\text{Пусть } (a, b) = d, a = dx, b = dy, \text{где, очевидно } (x, y) = 1$$
$$\begin{cases} [a, b] = \frac{ab}{(a,b)} = \frac{dx \cdot dy}{d} = dxy = 520 \\ d(x + y) = 7d \end{cases}$$
$$\begin{cases} dxy = 520 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Разложим 520 на простые делители и подберем все возможные решения для последней системы: $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$. Очевидно что решения: $\{x = 5, y = 2\}$ и $\{x = 2, y = 5\}$, где $d = 52$.

Тогда решение изначальной системы запишется в виде:

$$\begin{cases} a = 52 \cdot 5 = 260 \\ b = 52 \cdot 2 = 104 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = 104 \\ b = 260 \end{cases}$$

Задача 5

A. Доказать, что $40^{30} - 5^{12}$ составное

$$40^{30} - 5^{12} = (40^{15} - 5^6)(40^{15} + 5^6)$$

Значит число составное.

B. Доказать, что $4^{34} + 2^{35} + 1$ составное

$$4^{34} + 2^{35} + 1 = (2^{34})^2 + 2 \cdot 2^{34} + 1 = (2^{34} + 1)^2$$

Значит число составное.

C. Доказать, что $4n^4 + 81$ составное

$$4n^4 + 81 = (2n^2 + 9)^2 - 2 \cdot (2n^2) \cdot 9 = (2n^2 + 9)^2 - (3 \cdot 2n)^2 = (2n^2 + 9 - 3 \cdot 2n)(2n^2 + 9 + 3 \cdot 2n)$$

Значит число составное.

Задача 7

Пусть $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами и $f(4)$ – нечетно. Доказать, что $f(x)$ не имеет четных корней.

Для того чтобы были целые корни необходимо, чтобы $f(a) - f(b) \vdots (a - b)$, но тогда, если a - корень, то $f(a) = 0$. И $f(a) - f(4)$ - нечетное, а $a - 4$ - четное. В таком случае не выполняется необходимое условие, а значит все корни нечетные.

Задача 8

A. Решить в целых числах $37x + 7y = 31$

$$y = \frac{31 - 37x}{7}$$

Переберем все возможные остатки от деления на 7:

$$\begin{array}{lll}
0: & \frac{31}{7} & \notin \mathbb{Z} \\
1: & -\frac{6}{7} & \notin \mathbb{Z} \\
2: & -\frac{-43}{7} & \notin \mathbb{Z} \\
3: & -\frac{80}{7} & \notin \mathbb{Z} \\
4: & -\frac{117}{7} & \notin \mathbb{Z} \\
5: & -\frac{154}{7} = -22 & \in \mathbb{Z} \\
6: & -\frac{191}{7} & \notin \mathbb{Z}
\end{array}$$

Отсюда следует, что:

$$\begin{cases} y = -22(mod\,7) = 6(mod\,7) \\ x = 5(mod\,7) \end{cases}$$

Задача 9

B. Решить в целых числах $xy = -5x + y + 20$

$$y = \frac{-5x + 20}{x - 1} = 5(x - 1) + 15 \Rightarrow \begin{cases} y = 5(n - 1) + 15 \\ x = n \end{cases} \quad n \neq 1, n \in \mathbb{Z}$$

Задача 10

Доказать, что $35a^2 - 21 = 12b^2$ не имеет решения в целых числах

Решим диафантово уравнение относительно квадратов:

$$35x - 12y = 12$$

Методом перебора, частное решение: $\{x = 3, y = 7\}$

$$35(x - 3) - 12(y - 7) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 + 12k \\ y = 7 + 35k \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{3 + 12k} \\ b = \sqrt{7 + 35k} \end{cases}$$