DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Segundo cuatrimestre 2021 *(dictado a distancia)*

Algoritmos - Complejidad computacional

Técnicas de diseño de algoritmos (1era parte)

Programa

1. Algoritmos:

- Definición de algoritmo. Máquina RAM. Complejidad. Algoritmos de tiempo polinomial y no polinomial. Límite inferior.
- Técnicas de diseño de algoritmos: *divide and conquer*, *backtracking*, algoritmos golosos, programación dinámica.
- Algoritmos aproximados y algoritmos heurísticos.

Programa

2. Grafos:

- Definiciones básicas. Adyacencia, grado de un nodo, isomorfismos, caminos, conexión, etc.
- Grafos eulerianos y hamiltonianos.
- Grafos bipartitos.
- Árboles: caracterización, árboles orientados, árbol generador.
- Planaridad. Coloreo. Número cromático.
- Matching, conjunto independiente. Recubrimiento de aristas y vértices.

Programa

3. Algoritmos en grafos y aplicaciones:

- Representación de un grafo en la computadora: matrices de incidencia y adyacencia, listas.
- Algoritmos de búsqueda en grafos: BFS, DFS.
- Mínimo árbol generador, algoritmos de Prim y Kruskal.
- Algoritmos para encontrar el camino mínimo en un grafo: Dijkstra, Ford, Floyd, Dantzig.
- Algoritmos para determinar si un grafo es planar. Algoritmos para coloreo de grafos.
- Algoritmos para encontrar el flujo máximo en una red: Ford y Fulkerson.
- Matching: algoritmos para correspondencias máximas en grafos bipartitos. Otras aplicaciones.

Programa

4. Complejidad computacional:

- Problemas tratables e intratables. Problemas de decisión. P y NP. Máquinas de Türing determinísticas vs no determinísticas. Problemas NP-completos. Relación entre P y NP.

- Problemas de grafos NP-completos: coloreo de grafos, grafos hamiltonianos, recubrimiento mínimo de las aristas, corte máximo, etc.

Bibliografía

Según orden de utilización en la materia:

1. G. Brassard and P. Bratley, *Fundamental of Algorithmics*, Prentice-Hall, 1996.

2. T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, McGraw-Hill, 2001.

3. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.

4. J. Gross and J. Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999.

5. R. Ahuja, T. Magnanti and J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1993.

6. M. Garey and D. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP- Completeness*, W. Freeman and Co., 1979.

Algoritmos

- ¿Qué es un algoritmo?
- ¿Qué es un buen algoritmo?
- Dados dos algoritmos para resolver un mismo problema, ¿cuál es mejor?
- ¿Cuándo un problema está bien resuelto?

Algoritmos

- Secuencia finita de pasos que termina en un tiempo finito.
- Deben estar formulados en términos de pasos sencillos que sean:
  - precisos: se indica el orden de ejecución de cada paso
  - bien definidos: en toda ejecución del algoritmo se debe obtener el mismo resultado bajo los mismo parámetros
  - finitos: el algoritmo tiene que tener un número determinado de pasos
- Los describiremos mediante *pseudocódigo*.

Pseudocódigo

Encontrar el máximo de un vector de enteros:

maximo(A)

entrada: un vector de enteros A no vacío
salida: el elemento máximo de A

$max \leftarrow A[0]$
para $i = 1$ **hasta** $dim(A) - 1$ **hacer**
si $A[i] > max$ **entonces**
$max \leftarrow A[i]$
fin si
fin para
retornar max

Análisis de algoritmos

En general, analizaremos los algoritmos utilizando como medida de eficiencia su tiempo de ejecución.

Análisis de algoritmos

En general, analizaremos los algoritmos utilizando como medida de eficiencia su tiempo de ejecución.

Análisis empírico: implemetar los algoritmos disponibles en una máquina determinada utilizando un lenguaje determinado, luego ejecutarlos sobre un conjunto de instancias representativas y comparar sus tiempos de ejecución.
Desventajas:

- pérdida de tiempo y esfuerzo de programador
- pérdida de tiempo de cómputo
- conjunto de instancias acotado

Análisis de algoritmos

En general, analizaremos los algoritmos utilizando como medida de eficiencia su tiempo de ejecución.

Análisis empírico: implemetar los algoritmos disponibles en una máquina determinada utilizando un lenguaje determinado, luego ejecutarlos sobre un conjunto de instancias representativas y comparar sus tiempos de ejecución. Desventajas:

- pérdida de tiempo y esfuerzo de programador
- pérdida de tiempo de cómputo
- conjunto de instancias acotado

Análisis teórico: determinar matemáticamente la cantidad de tiempo que llevará su ejecución como una función de la medida de la instancia considerada, independizándonos de la máquina sobre lá cuál es implementado el algoritmo y el lenguaje para hacerlo. Para esto necesitamos definir:

- un modelo de cómputo
- un lenguaje sobre este modelo
- tamaño de la instancia
- instancias relevantes

Modelo de cómputo: Máquina RAM

- Modelan computadoras en las que la memoria es suficiente.
- Los enteros involucrados en los cálculos entran en una palabra.
- La memoria está dividida en celdas que se pueden acceder (leer o escribir) de forma directa.
- Un programa es una sucesión finita de instrucciones.
- El proceso comienza ejecutando la primera instrucción.
- Las instrucciones son ejecutadas secuencialmente (respetando las instrucciones de control de flujo).

Complejidad computacional

Definición informal: La *complejidad* de un algoritmo es una función que representa el tiempo de ejecución en función del tamaño de la entrada del algoritmo.

Complejidad computacional

Definición informal: La *complejidad* de un algoritmo es una función que representa el tiempo de ejecución en función del tamaño de la entrada del algoritmo.

Definición formal?

Una operación es *elemental* si su tiempo de ejecución puede ser acotado por una constante que

- depende sólo de la implementación particular utilizada (la máquina, el lenguaje de programación)
- no depende de la medida de los parámetros de la instancia considerada.

Complejidad en la Máquina RAM

- Cada instrucción tiene un *tiempo de ejecución* asociado.

Complejidad en la Máquina RAM

- Cada instrucción tiene un *tiempo de ejecución* asociado.

- Tiempo de ejecución de un algoritmo A con instancia I, $t_A(I) =$ suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la instancia I.

Complejidad en la Máquina RAM

- Cada instrucción tiene un *tiempo de ejecución* asociado.
- Tiempo de ejecución de un algoritmo A con instancia I, $t_A(I)$ = suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la instancia I.
- Ineteresa *cómo* crece el tiempo de ejecución de un algoritmo cuando el tamaño de las instancias de entrada crece. No interesa el tiempo exacto requerido por cada una de ellas.

Complejidad en la Máquina RAM

- Cada instrucción tiene un *tiempo de ejecución* asociado.
- Tiempo de ejecución de un algoritmo A con instancia I, $t_A(I)$ = suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la instancia I.
- Ineteresa *cómo* crece el tiempo de ejecución de un algoritmo cuando el tamaño de las instancias de entrada crece. No interesa el tiempo exacto requerido por cada una de ellas.
- s sumas, m multiplicaciones y a asignaciones, que consumen t_s, t_m y t_a microsegundos respectivamente. Entonces:

$$t_A(I) \leq st_s + mt_m + at_a \leq max(t_s, t_m, t_a) * (s + m + a)$$

Complejidad en la Máquina RAM

- Cada instrucción tiene un *tiempo de ejecución* asociado.
- Tiempo de ejecución de un algoritmo A con instancia I, $t_A(I)$ = suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la instancia I.
- Ineteresa *cómo* crece el tiempo de ejecución de un algoritmo cuando el tamaño de las instancias de entrada crece. No interesa el tiempo exacto requerido por cada una de ellas.
- s sumas, m multiplicaciones y a asignaciones, que consumen t_s, t_m y t_a microsegundos respectivamente. Entonces:

$$t_A(I) \leq st_s + mt_m + at_a \leq max(t_s, t_m, t_a) * (s + m + a)$$

- Simplificamos asumiendo que toda operación elemental puede ser ejecutada en una unidad de tiempo.

Operaciones básicas en la práctica

suma(A)

entrada: `arreglo de enteros` A
salida: `suma de los elemento de` A

$resu \leftarrow 0$
para $i = 0$ **hasta** $dim(A) - 1$ **hacer**
    $resu \leftarrow resu + A[i]$
fin para
retornar $resu$

Operaciones básicas en la práctica

suma(A)

entrada: `arreglo de enteros` A
salida: `suma de los elemento de` A

$resu \leftarrow 0$
para $i = 0$ **hasta** $dim(A) - 1$ **hacer**
    $resu \leftarrow resu + A[i]$
fin para
retornar *resu*

El valor de *resu* se mantiene en una medida *razonable* para todas las instancias que esperamos encontrarnos en la práctica.

Operaciones básicas en la práctica

factorial(n)

entrada: $n \in \mathbb{N}$

salida: $n!$

$resu \leftarrow 1$

para $i = 2$ **hasta** n **hacer**

$resu \leftarrow resu * i$

fin para

retornar *resu*

Operaciones básicas en la práctica

factorial(n)
entrada: $n \in \mathbb{N}$
salida: $n!$

$resu \leftarrow 1$
para $i = 2$ **hasta** n **hacer**
$resu \leftarrow resu * i$
fin para
retornar $resu$

Ya para valores relativamente chicos de n, no es para nada realista considerar que la operación $resu \leftarrow resu * i$ puede ser realizada en una unidad de tiempo.

Operaciones básicas en la práctica: modelo uniforme vs modelo logarítmico

- *Modelo uniforme:* Cada operación básica tiene un tiempo de ejecución constante.
  - Consiste en determinar el número total de operaciones básicas ejecutadas por el algoritmo.
  - Es un método sencillo, pero puede generar serias anomalías para valores arbitrariamente grandes de operandos.
  - Apropiado cuando los operandos entran en una palabra.

Operaciones básicas en la práctica: modelo uniforme vs modelo logarítmico

- *Modelo logarítmico:* El tiempo de ejecución de cada operación es función del tamaño (cantidad de bits) de los operandos.
  - Apropiado cuando los operandos crecen arbitrariamente.
  - Una suma proporcional al tamaño del mayor operando.
  - Una multiplicación *ingenua* proporcional al producto de los tamaños
  - Por ejemplo, en el cáculo del factorial los operandos de los cálculos que se realizan cambian de orden de magnitud con respecto al valor de la entrada.

Tamaño de una instancia

Dada una instancia I, se define $|I|$ como el número de símbolos de un alfabeto finito necesarios para codificar I.

Tamaño de una instancia

Dada una instancia I, se define $|I|$ como el número de símbolos de un alfabeto finito necesarios para codificar I.

- Depende del *alfabeto*.

Tamaño de una instancia

Dada una instancia I, se define $|I|$ como el número de símbolos de un alfabeto finito necesarios para codificar I.

- Depende del *alfabeto*.
- Para almacenar $n \in \mathbb{N}$, se necesitan $L(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ dígitos binarios.

Tamaño de una instancia

Dada una instancia I, se define $|I|$ como el número de símbolos de un alfabeto finito necesarios para codificar I.

- Depende del *alfabeto*.
- Para almacenar $n \in \mathbb{N}$, se necesitan $L(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ dígitos binarios.
- Para almacenar una lista de m enteros, se necesitan $L(m) + mL(N)$ dígitos binarios, donde N es el valor máximo de la lista (notar que se puede mejorar!).

Tamaño de una instancia

- Rigurosidad depende del problema que se esté analizando.

Tamaño de una instancia

- Rigurosidad depende del problema que se esté analizando.
- Para conjuntos, arreglos, matrices, grafos, usaremos el número de componentes. Esto modela de forma suficientemente precisa la realidad y facilita el análisis de los algoritmos.

Tamaño de una instancia

- Rigurosidad depende del problema que se esté analizando.
- Para conjuntos, arreglos, matrices, grafos, usaremos el número de componentes. Esto modela de forma suficientemente precisa la realidad y facilita el análisis de los algoritmos.
- Cuando trabajamos con algoritmos que sólo reciben un número fijo de valores como parámetros, esta simplificación hace que carezca de sentido el anánálisis, y entonces debemos alejarnos de esta regla, midiendo el tamaño de la instancia la cantidad de bits necesarios para almacenar los parámetros.

Análisis promedio y peor caso

esta?(*A*, *elem*)

entrada: arreglo de enteros A no vacío,
entero *elem*

salida: *Verdadero* si *elem* se encuentra en A,
Falso en caso contrario

$i \leftarrow 0$
mientras $i < dim(A)$ **y** $elem \neq A[i]$ **hacer**
$i \leftarrow i + 1$
fin mientras
si $i < dim(A)$ **entonces**
retornar *Verdadero*
sino
retornar *Falso*

Análisis promedio y peor caso

- *Complejidad en el peor caso:*
  - Para cada tamaño, instancia que usa mayor cantidad de tiempo.
  - Complejidad de un algoritmo A para las instancias de tamaño n, $T_A(n)$, como:

$$T_A(n) = \text{máx}_{I:|I|=n}\, t_A(I).$$

Análisis promedio y peor caso

- *Complejidad en el peor caso:*
  - Para cada tamaño, instancia que usa mayor cantidad de tiempo.
  - Complejidad de un algoritmo A para las instancias de tamaño n, $T_A(n)$, como:

$$T_A(n) = \text{máx}_{I:|I|=n}\, t_A(I).$$

- *Complejidad en el caso promedio:*
  - Tiempo de ejecución promedio sobre el conjunto de instancias determinado.
  - Este análisis del tiempo de ejecución promedio es más dificíl.
  - Se debe conocer la distribución de las instancias que se resolverán y en muchas aplicaciones esto no es posible.

Análisis promedio y peor caso

- Si no se aclara lo contrario, en la materia siempre consideraremos el análisis del peor caso.

Análisis promedio y peor caso

- Si no se aclara lo contrario, en la materia siempre consideraremos el análisis del peor caso.
- Cuando no haya confusión a qué algoritmo nos estamos referiendo, vamos a obviar el subíndice A, utilizando $T(n)$ en lugar de $T_A(n)$.

Notación $\mathcal{O}$

Dadas dos funciones $T, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

- $T(n) = \mathcal{O}(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$T(n) \leq c\, g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

T no crece más rápido que g, $T \preceq g$.

Notación $\mathcal{O}$

Dadas dos funciones $T, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

- $T(n) = \mathcal{O}(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$T(n) \leq c\, g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

T no crece más rápido que g, $T \preceq g$.

- $T(n) = \Omega(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$T(n) \geq c\, g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

T crece al menos tan rápido como g, $T \succeq g$.

Notación $\mathcal{O}$

Dadas dos funciones $T, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

- $T(n) = \mathcal{O}(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$T(n) \leq c\, g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

  T no crece más rápido que g, $T \preceq g$.

- $T(n) = \Omega(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$T(n) \geq c\, g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

  T crece al menos tan rápido como g, $T \succeq g$.

- $T(n) = \Theta(g(n))$ si

$$T = \mathcal{O}(g(n)) \text{ y } T = \Omega(g(n)).$$

  T crece al mismo ritmo que g, $T \approx g$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $g(n)$ es $\Omega(T(n))$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $g(n)$ es $\Omega(T(n))$.
- $2n^2 + 10n$ es $\mathcal{O}(n^2)$, porque tomando $n_0 = 0$ y $c = 12$, tenemos que

$$2n^2 + 10n \leq 12n^2.$$

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $g(n)$ es $\Omega(T(n))$.
- $2n^2 + 10n$ es $\mathcal{O}(n^2)$, porque tomando $n_0 = 0$ y $c = 12$, tenemos que

$$2n^2 + 10n \leq 12n^2.$$

  - $2n^2 + 10n$ es $\mathcal{O}(n^3)$, pero nos interesa calcular el orden más ajustado posible.
  - Si una implementación de un algoritmo requiere en el peor caso $2n^2 + 10n$ microsegundos para resolver una instancia de tamaño n, podemos simplificar diciendo que el algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$.
  - El uso de microsegundos es totalmente irrelevante, ya que sólo necesitamos cambiar la constante para acotar el tiempo por años o nanosegundos.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Vamos a demostrarlo por el absurdo.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Vamos a demostrarlo por el absurdo.
  - Supongamos que sí, es decir que 3^n es $\mathcal{O}(2^n)$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Vamos a demostrarlo por el absurdo.
  - Supongamos que sí, es decir que 3^n es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Entonces, por defínción, existirían $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \leq c\, 2^n$ para todo $n \geq n_0$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Vamos a demostrarlo por el absurdo.
  - Supongamos que sí, es decir que 3^n es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Entonces, por defínción, existirían $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \leq c\, 2^n$ para todo $n \geq n_0$.
  - Por lo tanto, $(\frac{3}{2})^n \leq c$ para todo $n \geq n_0$.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- 3^n no es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Vamos a demostrarlo por el absurdo.
  - Supongamos que sí, es decir que 3^n es $\mathcal{O}(2^n)$.
  - Entonces, por defínción, existirían $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \leq c\, 2^n$ para todo $n \geq n_0$.
  - Por lo tanto, $(\frac{3}{2})^n \leq c$ para todo $n \geq n_0$.
  - Esto genera un absurdo porque c debe ser una constante y no es posible que una constante siempre sea mayor que $(\frac{3}{2})^n$ cuando n crece.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, entonces $(\log_a(n))$ es $\Theta(\log_b(n))$.
  Es decir, todas las funciones logarítmicas crecen de igual forma sin importar la base.

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, entonces $(\log_a(n))$ es $\Theta(\log_b(n))$.
  Es decir, todas las funciones logarítmicas crecen de igual forma sin importar la base.
  - Como $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, entonces $(\log_a(n))$ es $\Theta(\log_b(n))$.
  Es decir, todas las funciones logarítmicas crecen de igual forma sin importar la base.
  - Como $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$
  - la constante $\frac{1}{\log_b(a)}$ sirve tanto para ver que $(\log_a(n))$ es $\mathcal{O}(\log_b(n))$

Notación $\mathcal{O}$ - Ejemplos

- Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, entonces $(\log_a(n))$ es $\Theta(\log_b(n))$.
  Es decir, todas las funciones logarítmicas crecen de igual forma sin importar la base.
  - Como $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$
  - la constante $\frac{1}{\log_b(a)}$ sirve tanto para ver que $(\log_a(n))$ es $\mathcal{O}(\log_b(n))$
  - como para $(\log_a(n))$ es $\Omega(\log_b(n))$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = a$ con $0 \leq a < \infty$, significa que $|\frac{T(n)}{g(n)} - a| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, $\frac{T(n)}{g(n)} < \epsilon + a$, donde $\epsilon + a$ es una constante, lo que es equivalente a decir que $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = a$ con $0 \leq a < \infty$, significa que $|\frac{T(n)}{g(n)} - a| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, $\frac{T(n)}{g(n)} < \epsilon + a$, donde $\epsilon + a$ es una constante, lo que es equivalente a decir que $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$.

De forma similar podemos analizar Ω y Θ, llegando a las siguientes propiedades.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = a$ con $0 \leq a < \infty$, significa que $|\frac{T(n)}{g(n)} - a| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, $\frac{T(n)}{g(n)} < \epsilon + a$, donde $\epsilon + a$ es una constante, lo que es equivalente a decir que $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$.

De forma similar podemos analizar Ω y Θ, llegando a las siguientes propiedades.

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in [0, \infty)$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = a$ con $0 \leq a < \infty$, significa que $|\frac{T(n)}{g(n)} - a| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, $\frac{T(n)}{g(n)} < \epsilon + a$, donde $\epsilon + a$ es una constante, lo que es equivalente a decir que $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$.

De forma similar podemos analizar Ω y Θ, llegando a las siguientes propiedades.

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in [0, \infty)$.
- $T(n)$ es $\Omega(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in (0, \infty]$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = a$ con $0 \leq a < \infty$, significa que $|\frac{T(n)}{g(n)} - a| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces, $\frac{T(n)}{g(n)} < \epsilon + a$, donde $\epsilon + a$ es una constante, lo que es equivalente a decir que $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$.

De forma similar podemos analizar Ω y Θ, llegando a las siguientes propiedades.

- $T(n)$ es $\mathcal{O}(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in [0, \infty)$.
- $T(n)$ es $\Omega(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in (0, \infty]$.
- $T(n)$ es $\Theta(g(n))$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} \in (0, \infty)$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k, d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $\mathcal{O}(n^d)$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k, d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $\mathcal{O}(n^d)$.
  - Por la propiedad anterior, sabemos que k^n es $\mathcal{O}(n^d)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n^d} \in [0, \infty)$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k, d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $\mathcal{O}(n^d)$.
  - Por la propiedad anterior, sabemos que k^n es $\mathcal{O}(n^d)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n^d} \in [0, \infty)$.
  - Aplicando l'Hôpial, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n^d} = \infty$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k, d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $\mathcal{O}(n^d)$.
  - Por la propiedad anterior, sabemos que k^n es $\mathcal{O}(n^d)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n^d} \in [0, \infty)$.
  - Aplicando l'Hôpial, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n^d} = \infty$.
  - Entonces, por lo tanto, k^n no es $\mathcal{O}(n^d)$

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (ya vimos que no importa la base), es decir $ln(n) \prec \mathcal{O}(n)$:

$$ln(n) \text{ es } \mathcal{O}(n) \text{ y } n \text{ no es } \mathcal{O}(ln(n))$$

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (ya vimos que no importa la base), es decir $ln(n) \prec \mathcal{O}(n)$:

$$ln(n) \text{ es } \mathcal{O}(n) \text{ y } n \text{ no es } \mathcal{O}(ln(n))$$

  - Nuevamente, operando y aplicando l'Hôpial, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, que es lo mismo que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \infty$.

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (ya vimos que no importa la base), es decir $ln(n) \prec \mathcal{O}(n)$:

$$ln(n) \text{ es } \mathcal{O}(n) \text{ y } n \text{ no es } \mathcal{O}(ln(n))$$

  - Nuevamente, operando y aplicando l'Hôpial, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, que es lo mismo que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \infty$.
  - Lo que implica que $ln(n)$ es $\mathcal{O}(n)$ ($ln(n)$ no crece más rápido que n)

Notación $\mathcal{O}$ usando lím - Ejemplos

- La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (ya vimos que no importa la base), es decir $ln(n) \prec \mathcal{O}(n)$:

$$ln(n) \text{ es } \mathcal{O}(n) \text{ y } n \text{ no es } \mathcal{O}(ln(n))$$

  - Nuevamente, operando y aplicando l'Hôpial, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, que es lo mismo que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \infty$.
  - Lo que implica que $ln(n)$ es $\mathcal{O}(n)$ ($ln(n)$ no crece más rápido que n)
  - y que n no es $\mathcal{O}(ln(n))$ ($ln(n)$ no acota superiormenete el crecimiento de n).

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$, se dice *cuadrático*.

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$, se dice *cuadrático*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^3)$, se dice *cúbico*.

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$, se dice *cuadrático*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^3)$, se dice *cúbico*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, se dice *polinomial*.

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$, se dice *cuadrático*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^3)$, se dice *cúbico*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, se dice *polinomial*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(\log n)$, se dice *logarítmico*.

Notación $\mathcal{O}$

- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n)$, se dice *lineal*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^2)$, se dice *cuadrático*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^3)$, se dice *cúbico*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, se dice *polinomial*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(\log n)$, se dice *logarítmico*.
- Si un algoritmo es $\mathcal{O}(d^n)$, $d \in \mathbb{R}_+$, se dice *exponencial*.

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

- Desde un punto de vista teórico, el primero es *asintóticamente* mejor que el segundo

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

- Desde un punto de vista teórico, el primero es *asintóticamente* mejor que el segundo
- Es decir, su performance es mejor sobre todas las instancias suficientemente grandes.

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

- Desde un punto de vista teórico, el primero es *asintóticamente* mejor que el segundo
- Es decir, su performance es mejor sobre todas las instancias suficientemente grandes.
- Sin embargo, desde un punto de vista práctico, seguramente prefiramos el algoritmo cúbico.

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

- Desde un punto de vista teórico, el primero es *asintóticamente* mejor que el segundo
- Es decir, su performance es mejor sobre todas las instancias suficientemente grandes.
- Sin embargo, desde un punto de vista práctico, seguramente prefiramos el algoritmo cúbico.
- Esto sucede porque la constante multiplicativa del primero es muy grande para ser ignorada cuando se consideran intancias de tamaño razonable.

Notación $\mathcal{O}$

Dos algoritmos para resolver el mismo problema. Uno necesita n^2 días y el otro n^3 segundos.

- Desde un punto de vista teórico, el primero es *asintóticamente* mejor que el segundo
- Es decir, su performance es mejor sobre todas las instancias suficientemente grandes.
- Sin embargo, desde un punto de vista práctico, seguramente prefiramos el algoritmo cúbico.
- Esto sucede porque la constante multiplicativa del primero es muy grande para ser ignorada cuando se consideran intancias de tamaño razonable.
- Si bien la diferencia de magnitud de las constantes en este ejemplo fue muy grosera, la intención es remarcar que para instancias de tamaño relativamente pequeño puede que el análisis asintótico no se adecuado.

Complejidad de algoritmos conocidos

- Búsqueda secuencial: $\mathcal{O}(n)$.
- Búsqueda binaria: $\mathcal{O}(\log(n))$.

Complejidad de algoritmos conocidos

- Búsqueda secuencial: $\mathcal{O}(n)$.
- Búsqueda binaria: $\mathcal{O}(\log(n))$.

- Ordenar un arreglo (bubblesort): $\mathcal{O}(n^2)$.
- Ordenar un arreglo (quicksort): $\mathcal{O}(n^2)$ en el peor caso (!).
- Ordenar un arreglo (heapsort): $\mathcal{O}(n \log(n))$.

Complejidad de algoritmos conocidos

- Búsqueda secuencial: $\mathcal{O}(n)$.
- Búsqueda binaria: $\mathcal{O}(\log(n))$.

- Ordenar un arreglo (bubblesort): $\mathcal{O}(n^2)$.
- Ordenar un arreglo (quicksort): $\mathcal{O}(n^2)$ en el peor caso (!).
- Ordenar un arreglo (heapsort): $\mathcal{O}(n \log(n))$.

Es interesante notar que $\mathcal{O}(n \log(n))$ es la complejidad **óptima** para algoritmos de ordenamiento basados en comparaciones.

Ejemplo: Cálculo del promedio de un arreglo

promedio(A)

entrada: arreglo de reales A de tamaño ≥ 1

salida: promedio de los elementos de A

$suma \leftarrow 0$	$\mathcal{O}(1)$
para $i = 0$ **hasta** $dim(A) - 1$ **hacer**	n veces
$\quad suma \leftarrow suma + A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
fin para	
retornar $suma/dim(A)$	$\mathcal{O}(1)$

Ejemplo: Cálculo del promedio de un arreglo

promedio(A)
entrada: arreglo de reales A de tamaño ≥ 1
salida: promedio de los elementos de A

$suma \leftarrow 0$	$\mathcal{O}(1)$
para $i = 0$ **hasta** $dim(A) - 1$ **hacer**	n veces
$\quad suma \leftarrow suma + A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
fin para	
retornar $suma/dim(A)$	$\mathcal{O}(1)$

- Si llamamos $n = dim(A)$, la entrada es $\mathcal{O}(n)$.
- Utilizamos el modelo uniforme, porque asumimos que los valores de *suma* entran en una palabra.
- El algoritmo es lineal en función del tamaño de la entrada.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
        resu ← 1                                  O(1)
        para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
                resu ← resu ∗ k                       O(??)
        fin para
        retornar resu                             O(??)
```

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
        resu ← 1                                  O(1)
        para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
                resu ← resu * k                           O(??)
        fin para
        retornar resu                             O(??)
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
        resu ← 1                                  O(1)
        para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
                resu ← resu ∗ k                       O(??)
        fin para
        retornar resu                             O(??)
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.

Cálculo iterativo de $n!$

factorial(n)	
$resu \leftarrow 1$	$\mathcal{O}(1)$
para $k = 2$ **hasta** n **hacer**	$n-1$ *veces*
$resu \leftarrow resu * k$	$\mathcal{O}(??)$
fin para	
retornar $resu$	$\mathcal{O}(??)$

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu ∗ k                           O(??)
    fin para
    retornar resu                             O(??)
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.

Cálculo iterativo de $n!$

factorial(n)	
$resu \leftarrow 1$	$\mathcal{O}(1)$
para $k = 2$ **hasta** n **hacer**	$n-1$ *veces*
$resu \leftarrow resu * k$	$\mathcal{O}(??)$
fin para	
retornar $resu$	$\mathcal{O}(log_2(n!)) = \mathcal{O}(n * log_2(n))$

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu ∗ k                           O(??)
    fin para
    retornar resu                             O(log2(n!)) = O(n ∗ log2(n))
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.

Cálculo iterativo de $n!$

factorial(n)	
$resu \leftarrow 1$	$\mathcal{O}(1)$
para $k = 2$ **hasta** n **hacer**	$n-1$ *veces*
$resu \leftarrow resu * k$	$\mathcal{O}(??)$
fin para	
retornar $resu$	$\mathcal{O}(log_2(n!)) = \mathcal{O}(n * log_2(n))$

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.
- Es $\mathcal{O}(k\ log_2(k) log_2(k))$ (algoritmo de multiplicación ingenuo).

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu ∗ k                           O(??)
    fin para
    retornar resu                             O(log2(n!)) = O(n ∗ log2(n))
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.
- Es $\mathcal{O}(k\ log_2(k) log_2(k))$ (algoritmo de multiplicación ingenuo).
- Como $k \leq n$ esto es $\mathcal{O}(n * log_2^2(n))$.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu * k                           O(n * log2^2(n))
    fin para
    retornar resu                             O(log2(n!)) = O(n * log2(n))
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.
- Es $\mathcal{O}(k\ log_2(k) log_2(k))$ (algoritmo de multiplicación ingenuo).
- Como $k \leq n$ esto es $\mathcal{O}(n * log_2^2(n))$.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu * k                       O(n * log2^2(n))
    fin para
    retornar resu                             O(log2(n!)) = O(n * log2(n))
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.
- Es $\mathcal{O}(k\ log_2(k) log_2(k))$ (algoritmo de multiplicación ingenuo).
- Como $k \leq n$ esto es $\mathcal{O}(n * log_2^2(n))$.
- Como se ejecuta $n-1$ veces, la complejidad total es $\mathcal{O}(n^2 log_2^2(n))$.

Cálculo iterativo de $n!$

```
factorial(n)
    resu ← 1                                  O(1)
    para k = 2 hasta n hacer                  n − 1 veces
        resu ← resu * k                           O(n * log2²(n))
    fin para
    retornar resu                             O(log2(n!)) = O(n * log2(n))
```

- El tamaño de la entrada es $t = log_2(n)$.
- Modelo logarítmico, porque los operandos crecen factorialmente.
- En la iteración k-ésima, los operandos de $resu \leftarrow resu * k$ son:
  - $resu$ vale $(k-1)!$, ocupa $log_2((k-1)!)$ que es menor que $k * log_2(k)$.
  - el otro operando es k, que requiere $log_2(k)$ bits.
- Es $\mathcal{O}(k\ log_2(k) log_2(k))$ (algoritmo de multiplicación ingenuo).
- Como $k \leq n$ esto es $\mathcal{O}(n * log_2^2(n))$.
- Como se ejecuta $n-1$ veces, la complejidad total es $\mathcal{O}(n^2 log_2^2(n))$.
- El algoritmo es $\mathcal{O}(t^2 4^t)$, exponencial en el tamaño de la entrada.

Algoritmos eficientes vs no eficientes

Tiempos insumidos sobre por la misma máquina (en seg. suponiendo 0.001 miliseg por operación):

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$

Algoritmos eficientes vs no eficientes

Tiempos insumidos sobre por la misma máquina (en seg. suponiendo 0.001 miliseg por operación):

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$\log(n)$	0.000001	0.000001	0.000001	0.000002	0.000002
n	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004	0.00005
$n \log(n)$	0.00001	0.000026	0.000044	0.000064	0.000085
n^2	0.0001	0.0004	0.0009	0.0016	0.0025
n^3	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125
n^5	0.1	3.2	24.3	1.7 min	5.2 min
2^n	0.001	1.0	17.9 min	12.7 días	35.6 años
3^n	0.59	58 min	6.5 años	3855 siglos	2 E+8 siglos
$n!$	3.63	771 siglos	8.4 E+16	2.5 E+32 siglos	9.6 E+48 siglos

Algoritmos eficientes vs no eficientes

Tiempos insumidos sobre por la misma máquina (en seg. suponiendo 0.001 miliseg por operación):

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
$\log(n)$	0.000001	0.000001	0.000001	0.000002	0.000002
n	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004	0.00005
$n \log(n)$	0.00001	0.000026	0.000044	0.000064	0.000085
n^2	0.0001	0.0004	0.0009	0.0016	0.0025
n^3	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125
n^5	0.1	3.2	24.3	1.7 min	5.2 min
2^n	0.001	1.0	17.9 min	12.7 días	35.6 años
3^n	0.59	58 min	6.5 años	3855 siglos	2 E+8 siglos
$n!$	3.63	771 siglos	8.4 E+16	2.5 E+32 siglos	9.6 E+48 siglos

- Datos del Garey y Johnson, 1979 (máquina muy vieja).
- ¿Qué pasa si tenemos una máquina 1000 veces más rápida? ¿Un millón de veces más rápida?
- ¿Cuál será el tamaño del problema que podemos resolver en una hora comparado con el que podemos resolver ahora?

Algoritmos eficientes vs no eficientes

Tamaño de las instancias que podríamos resolver en 1 hora con una máquina 1000 veces más rápida:

	actual	1000 veces mas rápida
$\log n$	N1	$N1^{1000}$
n	N2	1000 N2
n^2	N3	31.6 N3
n^3	N4	10 N4
n^5	N5	3.98 N5
2^n	N6	N6 + 9.97
3^n	N7	N7 + 6.29

- Obviamente, el tamaño de las instancias incrementa
- Pero para las complejidades exponenciales, n^2 y n^3, el incremento es muy pequeño.
- Entonces, ¿cuándo un algoritmo es bueno o eficiente?

Algoritmos eficientes vs no eficientes

POLINOMIAL = “bueno”

EXPONENCIAL = “malo”

Algoritmos eficientes vs no eficientes

POLINOMIAL = “bueno”

EXPONENCIAL = “malo”

Conclusión: Los algoritmos polinomiales se consideran satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), y los algoritmos supra-polinomiales se consideran no satisfactorios.

Problemas bien resueltos

- Pero, ¿siempre será posible contar con algoritmos polinomiales para resolver un determinado problema?

Problemas bien resueltos

- Pero, ¿siempre será posible contar con algoritmos polinomiales para resolver un determinado problema?
- Existen problemas para los cuales no se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo, aunque tampoco se ha probado que estos no existan.

Problemas bien resueltos

- Pero, ¿siempre será posible contar con algoritmos polinomiales para resolver un determinado problema?
- Existen problemas para los cuales no se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo, aunque tampoco se ha probado que estos no existan.
- Sobre esto hablaremos hacia el final del curso.

Problemas bien resueltos

- Pero, ¿siempre será posible contar con algoritmos polinomiales para resolver un determinado problema?
- Existen problemas para los cuales no se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo, aunque tampoco se ha probado que estos no existan.
- Sobre esto hablaremos hacia el final del curso.
- Por ahora nos conformamos sólo con la idea de que un problema está *bien resuelto* si existe un algoritmo de complejidad polinomial para resolverlo.

Resumen I

- Vamos a describir nuestro algoritmos mediante pseudocódigo.

Resumen I

- Vamos a describir nuestro algoritmos mediante pseudocódigo.
- Usaremos el análisis teórico. En el labo lo validarán con el análisis empírico.

Resumen I

- Vamos a describir nuestro algoritmos mediante pseudocódigo.
- Usaremos el análisis teórico. En el labo lo validarán con el análisis empírico.
- En general, vamos a utilizar el modelo uniforme.

Resumen I

- Vamos a describir nuestro algoritmos mediante pseudocódigo.
- Usaremos el análisis teórico. En el labo lo validarán con el análisis empírico.
- En general, vamos a utilizar el modelo uniforme.
- Cuando los operandos de las operaciones intermedias crezcan *mucho*, para acercarnos a modelar la realidad, usaremos el modelo logarítmico.

Resumen II

- En el caso de arreglos, matrices, grafos, como tamaño de entrada generalemente usaremos la cantidad de componentes de la instancia.

Resumen II

- En el caso de arreglos, matrices, grafos, como tamaño de entrada generalemente usaremos la cantidad de componentes de la instancia.

- En el caso de algoritmos que reciben como parámetros sólo una cantidad fija de números, como tamaño de entrada usaremos la cantidad de bits necesarios para su representación.

Resumen II

- En el caso de arreglos, matrices, grafos, como tamaño de entrada generalemente usaremos la cantidad de componentes de la instancia.
- En el caso de algoritmos que reciben como parámetros sólo una cantidad fija de números, como tamaño de entrada usaremos la cantidad de bits necesarios para su representación.
- En general, calcularemos la complejidad de un algoritmo para el peor caso.

Resumen II

- En el caso de arreglos, matrices, grafos, como tamaño de entrada generalemente usaremos la cantidad de componentes de la instancia.
- En el caso de algoritmos que reciben como parámetros sólo una cantidad fija de números, como tamaño de entrada usaremos la cantidad de bits necesarios para su representación.
- En general, calcularemos la complejidad de un algoritmo para el peor caso.
- Consideraremos que los algoritmos polinomiales son satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), mientras que los algoritmos supra-polinomiales son no satisfactorios.

Algunas dudas...

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?

Algunas dudas...

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ¿Cómo se comparan $\mathcal{O}(n^{85})$ con $\mathcal{O}(1{,}001^n)$?

Algunas dudas...

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ¿Cómo se comparan $\mathcal{O}(n^{85})$ con $\mathcal{O}(1{,}001^n)$?
- ¿Puede pasar que un algoritmo de peor caso exponencial sea eficiente en la práctica? ¿Puede pasar que en la práctica sea *el mejor*?

Algunas dudas...

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ¿Cómo se comparan $\mathcal{O}(n^{85})$ con $\mathcal{O}(1{,}001^n)$?
- ¿Puede pasar que un algoritmo de peor caso exponencial sea eficiente en la práctica? ¿Puede pasar que en la práctica sea *el mejor*?
- ¿Qué pasa si no encuentro un algoritmo polinomial?

Técnicas de diseño de algoritmos

- Fuerza bruta
- Búsqueda con retroceso (*backtracking*)
- Algoritmos golosos
- Recursividad
- *Dividir y conquistar* (*divide and conquer*)
- Programación dinámica
- Heurísticas y algoritmos aproximados

Fuerza bruta

Idea: El método consiste en analizar *todas* las posibilidades.

Fuerza bruta

Idea: El método consiste en analizar *todas* las posibilidades.

- Fáciles de inventar.
- Fáciles de implementar.
- Siempre *funcionan*.
- Generalmente muy ineficientes.

Fuerza bruta - Problema de las n reinas

Problema: Hallar todas las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna reina amenace a otra.

Fuerza bruta - Problema de las n reinas

Problema: Hallar todas las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna reina amenace a otra.

- Solución por FB: hallar *todas* las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.

Fuerza bruta - Problema de las n reinas

Problema: Hallar todas las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna reina amenace a otra.

- Solución por FB: hallar *todas* las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.
- En cada configuración tenemos que elegir las n posiciones donde ubicar a las reinas de los n^2 posibles casilleros.

Fuerza bruta - Problema de las n reinas

Problema: Hallar todas las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna reina amenace a otra.

- Solución por FB: hallar *todas* las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.
- En cada configuración tenemos que elegir las n posiciones donde ubicar a las reinas de los n^2 posibles casilleros.
- Entonces, el número de configuraciones que analizará el algoritmo es:

$$\binom{n^2}{n} = \frac{n^2!}{(n^2-n)!n!}$$

Fuerza bruta - Problema de las n reinas

Problema: Hallar todas las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna reina amenace a otra.

- Solución por FB: hallar *todas* las formas posibles de colocar n reinas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.
- En cada configuración tenemos que elegir las n posiciones donde ubicar a las reinas de los n^2 posibles casilleros.
- Entonces, el número de configuraciones que analizará el algoritmo es:

$$\binom{n^2}{n} = \frac{n^2!}{(n^2-n)!n!}$$

- Pero fácilmente podemos ver que la mayoría de las configuraciones que analizaríamos no cumplen las restricciones del problema y que trabajamos de más.

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

- A estas configuraciones las llamaremos *soluciones válidas*.

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

- A estas configuraciones las llamaremos *soluciones válidas*.
- Puede utilizarse para resolver problemas de factibilidad (donde se quiere encontrar cualquier solución válida o todas ellas) o problemas optimización (donde de todas las configuraciones válidas se quiere la *mejor*).

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

- A estas configuraciones las llamaremos *soluciones válidas*.
- Puede utilizarse para resolver problemas de factibilidad (donde se quiere encontrar cualquier solución válida o todas ellas) o problemas optimización (donde de todas las configuraciones válidas se quiere la *mejor*).
- Ya vimos el método de fuerza bruta, pero, excepto para instancias muy pequeñas, su costo computacional es prohibitivo.

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

- A estas configuraciones las llamaremos *soluciones válidas*.
- Puede utilizarse para resolver problemas de factibilidad (donde se quiere encontrar cualquier solución válida o todas ellas) o problemas optimización (donde de todas las configuraciones válidas se quiere la *mejor*).
- Ya vimos el método de fuerza bruta, pero, excepto para instancias muy pequeñas, su costo computacional es prohibitivo.
- *Backtracking* es una modificación de esa técnica que aprovecha propiedades del problema para evitar analizar todas las configuraciones.

Backtracking

Idea: Técnica para recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones.

- A estas configuraciones las llamaremos *soluciones válidas*.
- Puede utilizarse para resolver problemas de factibilidad (donde se quiere encontrar cualquier solución válida o todas ellas) o problemas optimización (donde de todas las configuraciones válidas se quiere la *mejor*).
- Ya vimos el método de fuerza bruta, pero, excepto para instancias muy pequeñas, su costo computacional es prohibitivo.
- *Backtracking* es una modificación de esa técnica que aprovecha propiedades del problema para evitar analizar todas las configuraciones.
- Para que el algoritmo sea correcto debemos estar seguros de no dejar de examinar configuraciones que estamos buscando.

Backtracking

- Habitualmente, utiliza un *vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece a un dominio/conjunto finito A_i.

Backtracking

- Habitualmente, utiliza un *vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece a un dominio/conjunto finito A_i.
- El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Backtracking

- Habitualmente, utiliza un *vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece a un dominio/conjunto finito A_i.
- El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$.
- En cada paso se extienden las soluciones parciales $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $k < n$, agregando un elemento más, $a_{k+1} \in S_{k+1} \subseteq A_{k+1}$, al final del vector a.

Backtracking

- Habitualmente, utiliza un *vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece a un dominio/conjunto finito A_i.
- El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$.
- En cada paso se extienden las soluciones parciales $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $k < n$, agregando un elemento más, $a_{k+1} \in S_{k+1} \subseteq A_{k+1}$, al final del vector a.
- Las nuevas soluciones parciales son sucesoras de la anterior.

Backtracking

- Habitualmente, utiliza un *vector* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece a un dominio/conjunto finito A_i.
- El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$.
- En cada paso se extienden las soluciones parciales $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $k < n$, agregando un elemento más, $a_{k+1} \in S_{k+1} \subseteq A_{k+1}$, al final del vector a.
- Las nuevas soluciones parciales son sucesoras de la anterior.
- Si el conjunto de soluciones sucesoras es vacío, esa rama no se continua explorando.

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.
- Un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.
- Un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.
- La raíz del árbol se corresponde con el vector vacío (la solución parcial vacía).

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.
- Un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.
- La raíz del árbol se corresponde con el vector vacío (la solución parcial vacía).
- Los vértices del primer nivel del árbol serán las soluciones parciales que ya tienen defenidas el primer elemento. Los de segundo nivel las que tiene los dos primeros y así siguiendo.

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.
- Un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.
- La raíz del árbol se corresponde con el vector vacío (la solución parcial vacía).
- Los vértices del primer nivel del árbol serán las soluciones parciales que ya tienen defenidas el primer elemento. Los de segundo nivel las que tiene los dos primeros y así siguiendo.
- Si el vértice x corresponde a la solución parcial $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, por cada valor posible que puede tomar a_{k+1} se ramifica el árbol, generando tantos hijos de x como posibilidades haya para a_{k+1}.

Backtracking

- Se puede pensar este espacio de búsqueda como un árbol dirigido donde cada vértice representa una solución parcial.
- Un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.
- La raíz del árbol se corresponde con el vector vacío (la solución parcial vacía).
- Los vértices del primer nivel del árbol serán las soluciones parciales que ya tienen defenidas el primer elemento. Los de segundo nivel las que tiene los dos primeros y así siguiendo.
- Si el vértice x corresponde a la solución parcial $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, por cada valor posible que puede tomar a_{k+1} se ramifica el árbol, generando tantos hijos de x como posibilidades haya para a_{k+1}.
- Las soluciones completas (cuandos todos los a_i tienen valor) corresponden a las hojas del árbol.

Backtracking

- El proceso de backtracking recorre este árbol en profundidad.

Backtracking

- El proceso de backtracking recorre este árbol en profundidad.
- Cuando podemos deducir que una solución parcial no nos llevará a una solución válida, no es necesario seguir explorando esa rama del árbol de búsqueda (se *poda* el árbol) y se retrocede hasta encontrar un vértice con un hijo válido por donde seguir la exploración.

Backtracking

- El proceso de backtracking recorre este árbol en profundidad.
- Cuando podemos deducir que una solución parcial no nos llevará a una solución válida, no es necesario seguir explorando esa rama del árbol de búsqueda (se *poda* el árbol) y se retrocede hasta encontrar un vértice con un hijo válido por donde seguir la exploración.
- Esta poda puede ser por:
  - Factibilidad: ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución válida del problema.
  - Optimalidad (en problemas de optimización): ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución del problema óptima.

Backtracking

- El proceso de backtracking recorre este árbol en profundidad.
- Cuando podemos deducir que una solución parcial no nos llevará a una solución válida, no es necesario seguir explorando esa rama del árbol de búsqueda (se *poda* el árbol) y se retrocede hasta encontrar un vértice con un hijo válido por donde seguir la exploración.
- Esta poda puede ser por:
  - Factibilidad: ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución válida del problema.
  - Optimalidad (en problemas de optimización): ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución del problema óptima.
- De esta poda depende el éxito del método aplicado a un problema.

Backtracking

- El proceso de backtracking recorre este árbol en profundidad.
- Cuando podemos deducir que una solución parcial no nos llevará a una solución válida, no es necesario seguir explorando esa rama del árbol de búsqueda (se *poda* el árbol) y se retrocede hasta encontrar un vértice con un hijo válido por donde seguir la exploración.
- Esta poda puede ser por:
  - Factibilidad: ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución válida del problema.
  - Optimalidad (en problemas de optimización): ninguna extensión de la solución parcial derivará en una solución del problema óptima.
- De esta poda depende el éxito del método aplicado a un problema.
- Para poder aplicar la poda por factibilidad, la representación de las soluciones debe cumplir que, si una solución parcial $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ no cumple las propiedades deseadas, tampoco lo hará cualquier extensión posible de ella (propiedad dominó).

Backtracking: Esquema General - Todas las soluciones

```
BT(a, k)
entrada: a = (a_1, ..., a_k) solución parcial
salida: se procesan todas las soluciones válidas

salida: se procesan todas las soluciones válidas

si k == n + 1 entonces
        procesar(a)
        retornar
sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a, k)
                BT(a', k + 1)
        fin para
fin si
retornar
```

Backtracking: Esquema General - Una solución

$BT(a, k)$

entrada: $a = (a_1, \ldots, a_k)$ `solución parcial`
salida: $sol = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ `solución válida`
si $k == n + 1$ **entonces**
    $sol \leftarrow a$
    $encontro \leftarrow$ **true**
sino
    para cada $a' \in$ `Sucesores`(a, k)
        `BT`$(a', k + 1)$
        si *encontro* **entonces**
            retornar *sol*
        fin si
    fin para
fin si
retornar

- *sol* variable global que guarda la solución.
- *encontro* variable booleana global que indica si ya se encontró una solución. Inicialmente está en **false**.

Backtracking

- Para demostrar la correctitud de un algoritmo de backtracking, debemos demostrar que se enumeran todas las posibles configuraciones válidas. Es decir, que las ramificaciones y podas son correctas.

Backtracking

- Para demostrar la correctitud de un algoritmo de backtracking, debemos demostrar que se enumeran todas las posibles configuraciones válidas. Es decir, que las ramificaciones y podas son correctas.

- Para el cálculo de la complejidad debemos acotar la cantidad de vértices que tendrá el árbol y considerar el costo de procesar cada uno.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

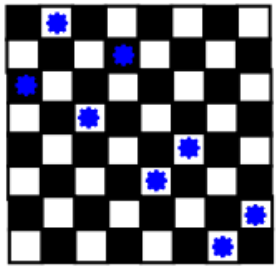
- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina.
- Una solución puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_8)$, con $a_i \in \{1, \ldots, 8\}$ indicando la columna de la reina que está en la fila i.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

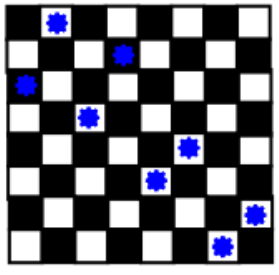
- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina.
- Una solución puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_8)$, con $a_i \in \{1, \ldots, 8\}$ indicando la columna de la reina que está en la fila i.
-  está representada por $(2, 4, 1, 3, 6, 5, 8, 7)$.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

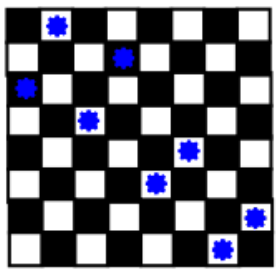
- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina.
- Una solución puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_8)$, con $a_i \in \{1, \ldots, 8\}$ indicando la columna de la reina que está en la fila i.
-  está representada por $(2, 4, 1, 3, 6, 5, 8, 7)$.
- Cada solución parcial puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

Problema: Ubicar 8 reinas en el tablero de ajedrez (8×8) sin que ninguna *amenace* a otra.

- ¿Cuántas combinaciones del tablero hay que considerar?

$$\binom{64}{8} = 442616536$$

- Sabemos que cada fila debe tener exactamente una reina.
- Una solución puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_8)$, con $a_i \in \{1, \ldots, 8\}$ indicando la columna de la reina que está en la fila i.
-  está representada por $(2, 4, 1, 3, 6, 5, 8, 7)$.
- Cada solución parcial puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$.
- Tenemos ahora $8^8 = 16777216$ combinaciones.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Una misma columna debe tener exactamente una reina.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Una misma columna debe tener exactamente una reina.

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Una misma columna debe tener exactamente una reina.

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- No todas estas configuraciones serán solución de nuestro problema, ya que falta verificar que no haya reinas que se amenacen por estar en la misma diagonal.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Una misma columna debe tener exactamente una reina.

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- No todas estas configuraciones serán solución de nuestro problema, ya que falta verificar que no haya reinas que se amenacen por estar en la misma diagonal.

- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$, tiene reinas que se amenazan, entonces toda extensón de ella seguro tendrá reinas que se amenazan.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Una misma columna debe tener exactamente una reina.

  Se reduce a $8! = 40320$ combinaciones.

- No todas estas configuraciones serán solución de nuestro problema, ya que falta verificar que no haya reinas que se amenacen por estar en la misma diagonal.

- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$, tiene reinas que se amenazan, entonces toda extensón de ella seguro tendrá reinas que se amenazan.

- Por lo tanto es correcto podar una solución parcial que tiene reinas que se amenzan.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Dada una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$ (sin reinas que se amenacen), construiremos el conjunto de sus vértices hijos, `Sucesores`(a, k), asegurando que siga sin haber reinas que se amenacen.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Dada una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$ (sin reinas que se amenacen), construiremos el conjunto de sus vértices hijos, `Sucesores`(a, k), asegurando que siga sin haber reinas que se amenacen.

- Entonces la nueva reina, la (k)-ésima (correspondiente a la fila k), no podrá estar ubicada en ninguna de las columnas ni en ninguna de las diagonales donde están ubicadas las k anteriores.

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Dada una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$ (sin reinas que se amenacen), construiremos el conjunto de sus vértices hijos, $\texttt{Sucesores}(a, k)$, asegurando que siga sin haber reinas que se amenacen.

- Entonces la nueva reina, la (k)-ésima (correspondiente a la fila k), no podrá estar ubicada en ninguna de las columnas ni en ninguna de las diagonales donde están ubicadas las k anteriores.

$$\texttt{Sucesores}(a, k) = \{(a, a_k) : a_k \in \{1, \ldots, 8\}, |a_k - a_j| \notin \{0, k - j\} \forall\, j \in \{1, \ldots, k-1\}\}.$$

Backtracking - Problema de las 8 reinas

- Dada una solución parcial $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$ (sin reinas que se amenacen), construiremos el conjunto de sus vértices hijos, $\texttt{Sucesores}(a, k)$, asegurando que siga sin haber reinas que se amenacen.

- Entonces la nueva reina, la (k)-ésima (correspondiente a la fila k), no podrá estar ubicada en ninguna de las columnas ni en ninguna de las diagonales donde están ubicadas las k anteriores.

$$\texttt{Sucesores}(a, k) = \{(a, a_k) : a_k \in \{1, \ldots, 8\}, |a_k - a_j| \notin \{0, k - j\} \forall\, j \in \{1, \ldots, k-1\}\}.$$

- Ahora ya estamos en condición de implementar un algoritmo para resolver el problema.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.
- Es decir, el vector a contiene los elementos del subconjunto de C que representa.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.
- Es decir, el vector a contiene los elementos del subconjunto de C que representa.
- En este caso, todos los vértices de árbol corresponden a posibles soluciones (no necesariamente válidas), no sólo las hojas. Hay que adaptar a esto el esquema general que presentamos previamente.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.
- Es decir, el vector a contiene los elementos del subconjunto de C que representa.
- En este caso, todos los vértices de árbol corresponden a posibles soluciones (no necesariamente válidas), no sólo las hojas. Hay que adaptar a esto el esquema general que presentamos previamente.
- Como las soluciones son conjuntos, no nos interesa el orden en que los elementos fueron agregados a la solución.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.
- Es decir, el vector a contiene los elementos del subconjunto de C que representa.
- En este caso, todos los vértices de árbol corresponden a posibles soluciones (no necesariamente válidas), no sólo las hojas. Hay que adaptar a esto el esquema general que presentamos previamente.
- Como las soluciones son conjuntos, no nos interesa el orden en que los elementos fueron agregados a la solución.
- Entonces (c_4, c_5, c_2) y (c_2, c_4, c_5) representarían la misma solución, el subconjunto $\{c_2, c_4, c_5\}$.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Problema: Dado un conjunto de naturales $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (sin valores repetidos) y $k \in \mathbb{N}$, queremos encontrar un subconjunto de C (o todos los subconjuntos) cuyos elementos sumen k.

- Una solución puede estar representada por $a = (a_1, \ldots, a_r)$, con $r \leq n$, $a_i \in C$ y $a_i \neq a_j$ para $0 \leq i, j \leq r$.
- Es decir, el vector a contiene los elementos del subconjunto de C que representa.
- En este caso, todos los vértices de árbol corresponden a posibles soluciones (no necesariamente válidas), no sólo las hojas. Hay que adaptar a esto el esquema general que presentamos previamente.
- Como las soluciones son conjuntos, no nos interesa el orden en que los elementos fueron agregados a la solución.
- Entonces (c_4, c_5, c_2) y (c_2, c_4, c_5) representarían la misma solución, el subconjunto $\{c_2, c_4, c_5\}$.
- Queremos evitar esto porque estaríamos agrandando aún más el árbol de búsqueda.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Los vértices de nivel 1 del árbol de búsqueda se corresponderán a las n soluciones de subconjuntos de un elemento, (c_i), para $i = 1, \ldots, n$.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Los vértices de nivel 1 del árbol de búsqueda se corresponderán a las n soluciones de subconjuntos de un elemento, (c_i), para $i = 1, \ldots, n$.

- En el segundo nivel, no quisiera generar los vectores (c_i, c_j) y (c_j, c_i), sino sólo uno de ellos porque representan la misma solución.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Los vértices de nivel 1 del árbol de búsqueda se corresponderán a las n soluciones de subconjuntos de un elemento, (c_i), para $i = 1, \ldots, n$.

- En el segundo nivel, no quisiera generar los vectores (c_i, c_j) y (c_j, c_i), sino sólo uno de ellos porque representan la misma solución.

- Para esto, para la solución parcial (c_i) podemos sólo crear los hijos (c_i, c_j) con $j > i$. Así evitaríamos una de las dos posibilidades.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Los vértices de nivel 1 del árbol de búsqueda se corresponderán a las n soluciones de subconjuntos de un elemento, (c_i), para $i = 1, \ldots, n$.

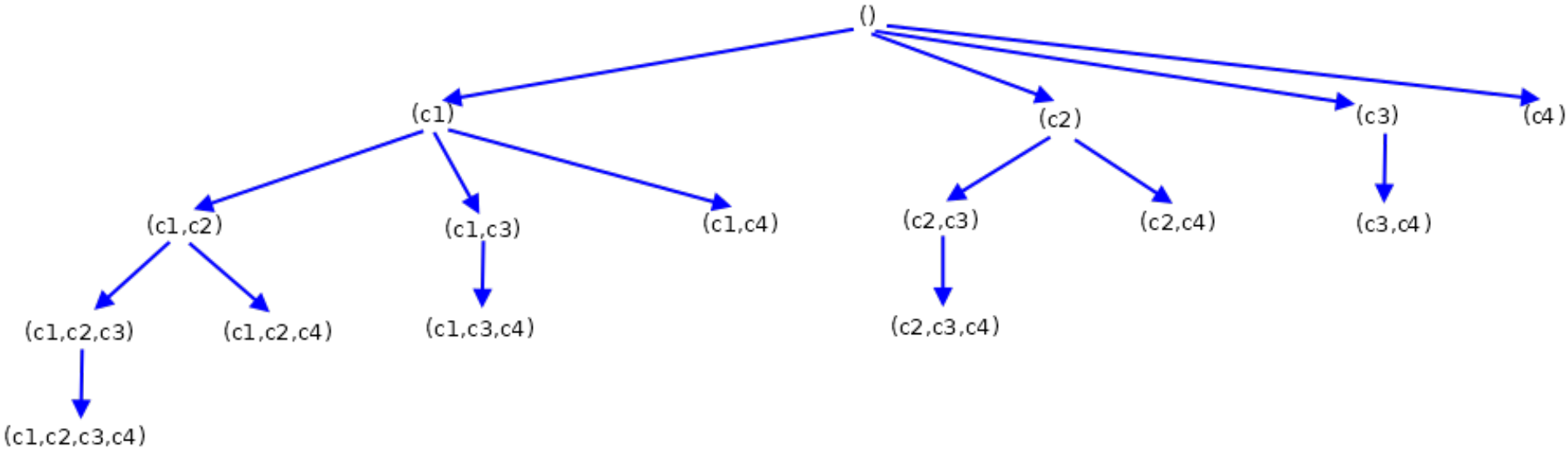
- En el segundo nivel, no quisiera generar los vectores (c_i, c_j) y (c_j, c_i), sino sólo uno de ellos porque representan la misma solución.

- Para esto, para la solución parcial (c_i) podemos sólo crear los hijos (c_i, c_j) con $j > i$. Así evitaríamos una de las dos posibilidades.

- De forma general, cuando extendemos una solución, podemos pedir que el nuevo elemento tenga índice mayor que el último elemento de a.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Si $n = 4$, el árbol de búsqueda es:



Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.

- Si encontramos un vértice que sume k, la solución correspondiente será una solución válida.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.

- Si encontramos un vértice que sume k, la solución correspondiente será una solución válida.

- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_r)$ suma más que k, entonces toda extensión de ella seguro también sumará más que k. Es decir, las soluciones no se *arreglan* al extenderlas.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.
- Si encontramos un vértice que sume k, la solución correspondiente será una solución válida.
- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_r)$ suma más que k, entonces toda extensión de ella seguro también sumará más que k. Es decir, las soluciones no se *arreglan* al extenderlas.
- Esto no sería cierto si hay elementos negativos en C.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.
- Si encontramos un vértice que sume k, la solución correspondiente será una solución válida.
- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_r)$ suma más que k, entonces toda extensión de ella seguro también sumará más que k. Es decir, las soluciones no se *arreglan* al extenderlas.
- Esto no sería cierto si hay elementos negativos en C.
- Si la suma excede k, esa rama se puede podar, ya que los elementos de C son positivos.

Backtracking - Suma de subconjuntos

- Para cada vértice del árbol podemos ir guardando la suma de los elementos que están en la solución.
- Si encontramos un vértice que sume k, la solución correspondiente será una solución válida.
- Se cumple la propiedad dominó: Si una solución parcial $(a_1, \ldots, a_r)$ suma más que k, entonces toda extensión de ella seguro también sumará más que k. Es decir, las soluciones no se *arreglan* al extenderlas.
- Esto no sería cierto si hay elementos negativos en C.
- Si la suma excede k, esa rama se puede podar, ya que los elementos de C son positivos.

Backtracking - Suma de subconjuntos

Podemos definir los sucesores de una solución como:

$$\texttt{Sucesores}(a, k)$$
$$= \{(a, a_k) : a_k \in \{c_{s+1}, \ldots, c_n\}, \text{ si } a_{k-1} = c_s \text{ y } \sum_{i=1}^{k} a_i \leq k\}.$$