Resolución para lógica de primer orden

Entrada: una fórmula σ de la lógica de primer orden.
Salida: un booleano indicando si σ es válida.
Si σ es válida, el método siempre termina.
Si σ no es válida, el método puede no terminar.

Método de resolución de primer orden (Procedimiento de semi-decisión)

1. Escribir $\neg\sigma$ como un conjunto $\mathcal{C}$ de **cláusulas**.
2. Buscar una **refutación** de $\mathcal{C}$.
   Si existe alguna refutación, el método encuentra alguna.
   Si no existe una refutación, el método puede "colgarse".

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Una fórmula se pasa a forma clausal aplicando las siguientes reglas.

Paso 1. Deshacerse del conectivo "$\Rightarrow$":

$$\sigma \Rightarrow \tau \quad \longrightarrow \quad \neg\sigma \vee \tau$$

La fórmula resultante sólo usa los conectivos $\{\neg, \vee, \wedge, \forall, \exists\}$.

Paso 2. Empujar el conectivo "$\neg$" hacia adentro:

$$\begin{array}{lcl}
\neg(\sigma \wedge \tau) & \longrightarrow & \neg\sigma \vee \neg\tau \\
\neg(\sigma \vee \tau) & \longrightarrow & \neg\sigma \wedge \neg\tau \\
\neg\neg\sigma & \longrightarrow & \sigma \\
\neg\forall \mathtt{X}.\, \sigma & \longrightarrow & \exists \mathtt{X}.\, \neg\sigma \\
\neg\exists \mathtt{X}.\, \sigma & \longrightarrow & \forall \mathtt{X}.\, \neg\sigma
\end{array}$$

La fórmula resultante está en **forma normal negada** (NNF):

$$\begin{array}{lcl}
\sigma_{\mathrm{nnf}} & ::= & \mathbf{P}(t_1, \ldots t_n) \mid \neg\mathbf{P}(t_1, \ldots t_n) \mid \sigma_{\mathrm{nnf}} \wedge \sigma_{\mathrm{nnf}} \mid \sigma_{\mathrm{nnf}} \vee \sigma_{\mathrm{nnf}} \\
& \mid & \forall \mathtt{X}.\, \sigma_{\mathrm{nnf}} \mid \exists \mathtt{X}.\, \sigma_{\mathrm{nnf}}
\end{array}$$

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Paso 3. Extraer los cuantificadores ("$\forall/\exists$") hacia afuera.
Se asume siempre $\mathtt{X} \notin \mathsf{fv}(\tau)$:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
(\forall \mathtt{X}.\, \sigma) \wedge \tau & \longrightarrow & \forall \mathtt{X}.\, (\sigma \wedge \tau) & \quad & \tau \wedge (\forall \mathtt{X}.\, \sigma) & \longrightarrow & \forall \mathtt{X}.\, (\tau \wedge \sigma) \\
(\forall \mathtt{X}.\, \sigma) \vee \tau & \longrightarrow & \forall \mathtt{X}.\, (\sigma \vee \tau) & \quad & \tau \vee (\forall \mathtt{X}.\, \sigma) & \longrightarrow & \forall \mathtt{X}.\, (\tau \vee \sigma) \\
(\exists \mathtt{X}.\, \sigma) \wedge \tau & \longrightarrow & \exists \mathtt{X}.\, (\sigma \wedge \tau) & \quad & \tau \wedge (\exists \mathtt{X}.\, \sigma) & \longrightarrow & \exists \mathtt{X}.\, (\tau \wedge \sigma) \\
(\exists \mathtt{X}.\, \sigma) \vee \tau & \longrightarrow & \exists \mathtt{X}.\, (\sigma \vee \tau) & \quad & \tau \vee (\exists \mathtt{X}.\, \sigma) & \longrightarrow & \exists \mathtt{X}.\, (\tau \vee \sigma)
\end{array}
$$

Todas las reglas transforman la fórmula en otra equivalente.

La fórmula resultante está en **forma normal prenexa**:

$$\sigma_{\mathrm{pre}} ::= \mathcal{Q}_1 \mathtt{X}_1.\, \mathcal{Q}_2 \mathtt{X}_2.\, \ldots\, \mathcal{Q}_n \mathtt{X}_n.\, \tau$$

donde cada $\mathcal{Q}_i$ es un cuantificador $\{\forall, \exists\}$
y τ representa una fórmula en NNF libre de cuantificadores.

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Paso 4. Deshacerse de los cuantificadores existenciales ($\exists$).
Para ello se usa la siguiente técnica de Herbrand y Skolem:

Lema (Skolemización)

$$
\begin{array}{rcl}
\forall \mathtt{X}.\, \exists \mathtt{Y}.\, \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \text{ es sat.} & \text{sii} & \forall \mathtt{X}.\, \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{f}(\mathtt{X})) \text{ es sat.} \\
\forall \mathtt{X}_1 \mathtt{X}_2.\, \exists \mathtt{Y}.\, \mathbf{P}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2, \mathtt{Y}) \text{ es sat.} & \text{sii} & \forall \mathtt{X}_1 \mathtt{X}_2.\, \mathbf{P}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2, \mathtt{f}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2)) \text{ es sat.} \\
 & \vdots & \\
\forall \vec{\mathtt{X}}.\, \exists \mathtt{Y}.\, \mathbf{P}(\vec{\mathtt{X}}, \mathtt{Y}) \text{ es sat.} & \text{sii} & \forall \vec{\mathtt{X}}.\, \mathbf{P}(\vec{\mathtt{X}}, \mathtt{f}(\vec{\mathtt{X}})) \text{ es sat.}
\end{array}
$$

El lado izquierdo es una fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}$.
El lado derecho es una fórmula el lenguaje $\mathcal{L} \cup \{\mathtt{f}\}$.

Caso particular cuando $|\vec{\mathtt{X}}| = 0$

$$\exists \mathtt{Y}.\, \mathbf{P}(\mathtt{Y}) \text{ es sat.} \quad \text{sii} \quad \mathbf{P}(\mathtt{c}) \text{ es sat.}$$

El lenguaje se extiende con una nueva constante c.

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

La Skolemización preserva la **satisfactibilidad**.
Pero no siempre produce fórmulas equivalentes.
Es decir **no preserva la validez**.

Ejemplo — la Skolemización no preserva la validez

$$\underbrace{\exists \mathtt{X}.\,(\mathbf{P}(0) \Rightarrow \mathbf{P}(\mathtt{X}))}_{\text{válida}} \qquad \underbrace{\mathbf{P}(0) \Rightarrow \mathbf{P}(\mathtt{c})}_{\text{inválida}}$$

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Dada una fórmula en forma normal prenexa, se aplica la regla:

$$\forall \mathtt{X}_1. \dots \forall \mathtt{X}_n. \exists \mathtt{Y}. \sigma \quad \longrightarrow \quad \forall \mathtt{X}_1. \dots \forall \mathtt{X}_n. \sigma\{\mathtt{Y} := \mathtt{f}(\mathtt{X}_1, \dots, \mathtt{X}_n)\}$$

donde $\mathtt{f}$ es un símbolo de función nuevo de aridad $n \geq 0$.

La fórmula resultante está en **forma normal de Skolem**:

$$\sigma_{\mathrm{Sk}} ::= \forall \mathtt{X}_1 \mathtt{X}_2 \dots \mathtt{X}_n. \tau$$

donde τ representa una fórmula en NNF libre de cuantificadores.

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Paso 5. Dada una fórmula en forma normal de Skolem:

$$\forall \mathtt{X}_1 \mathtt{X}_2 \ldots \mathtt{X}_n . \tau \quad (\tau \text{ libre de cuantificadores})$$

se pasa τ a forma normal conjuntiva usando las reglas ya vistas:

$$\begin{array}{rcl} \sigma \vee (\tau \wedge \rho) & \longrightarrow & (\sigma \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \rho) \\ (\sigma \wedge \tau) \vee \rho & \longrightarrow & (\sigma \vee \rho) \wedge (\tau \vee \rho) \end{array}$$

El resultado es una fórmula de la forma:

$$\forall \mathtt{X}_1 \ldots \mathtt{X}_n . \left(\begin{array}{ll} & (\ell_1^{(1)} \vee \ldots \vee \ell_{m_1}^{(1)}) \\ \wedge & (\ell_1^{(2)} \vee \ldots \vee \ell_{m_2}^{(2)}) \\ \ldots & \\ \wedge & (\ell_1^{(k)} \vee \ldots \vee \ell_{m_k}^{(k)}) \end{array} \right)$$

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Paso 6. Empujar los cuantificadores universales hacia adentro:

$$\forall \mathtt{X}_1 \ldots \mathtt{X}_n. \left(\begin{array}{ll} & (\ell_1^{(1)} \vee \ldots \vee \ell_{m_1}^{(1)}) \\ \wedge & (\ell_1^{(2)} \vee \ldots \vee \ell_{m_2}^{(2)}) \\ \ldots & \\ \wedge & (\ell_1^{(k)} \vee \ldots \vee \ell_{m_k}^{(k)}) \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ll} & \forall \mathtt{X}_1 \ldots \mathtt{X}_n.(\ell_1^{(1)} \vee \ldots \vee \ell_{m_1}^{(1)}) \\ \wedge & \forall \mathtt{X}_1 \ldots \mathtt{X}_n.(\ell_1^{(2)} \vee \ldots \vee \ell_{m_2}^{(2)}) \\ \ldots & \\ \wedge & \forall \mathtt{X}_1 \ldots \mathtt{X}_n.(\ell_1^{(k)} \vee \ldots \vee \ell_{m_k}^{(k)}) \end{array} \right)$$

Por último la **forma clausal** es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\ell_1^{(1)}, \ldots, \ell_{m_1}^{(1)}\}, \\ \{\ell_1^{(2)}, \ldots, \ell_{m_2}^{(2)}\}, \\ \vdots \\ \{\ell_1^{(k)}, \ldots, \ell_{m_k}^{(k)}\} \end{array} \right\}$$

Pasaje a forma clausal en lógica de primer orden

Ejemplo — pasaje a forma clausal

Queremos ver que $\sigma \equiv \exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X}))$ es válida.
Primero la negamos: $\neg\sigma \equiv \neg\exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X}))$.
Pasamos $\neg\sigma$ a forma clausal:

$$
\begin{array}{rl}
 & \neg\exists \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \Rightarrow \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \neg\exists \mathtt{X}. (\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \vee \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. \neg(\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \vee \forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. (\neg\neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \neg\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \exists \mathtt{Y}. \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. \exists \mathtt{Y}. (\forall \mathtt{Y}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. \exists \mathtt{Y}. \forall \mathtt{Z}. (\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{Y}, \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. (\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})) \\
\to & \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. \mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z}) \wedge \forall \mathtt{X}. \forall \mathtt{Z}. \neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})
\end{array}
$$

La forma clausal es:

$$\{\{\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Z})\}, \{\neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{X}), \mathtt{X})\}\} \equiv \{\{\mathbf{P}(\mathtt{X}, \mathtt{Y})\}, \{\neg\mathbf{P}(\mathtt{f}(\mathtt{Z}), \mathtt{Z})\}\}$$