```haskell
curry :: ((a, b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f = \x -> \y -> f (x, y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a, b) -> c)
uncurry f = \(x, y) -> f x y

misum :: [Float] -> Float
misum s = foldr (\acc x -> acc + x) 0 s

mielem :: Eq a => a -> [a] -> Bool
mielem e s = foldr (\x acc -> acc || e==x) False s

mimasmas :: [a] -> [a] -> [a]
mimasmas s1 s2 = foldr(\x acc -> x:acc) s2 s1

mifilter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
mifilter f s = foldr(\x acc -> if f x  then x:acc else acc)
      [] s

data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)

recAB ::
  b                                   -- Nil
  -> (AB a -> a -> AB a -> b -> b -> b)   -- Bin
  -> AB a
  -> b

recAB z f x = case x of
  Nil -> z
  (Bin l v r) -> f l v r (rec l) (rec r)
  where rec = recAB z f

foldAB ::
  b                     -- Nil
  -> (b -> a -> b -> b)   -- Bin
  -> AB a
  -> b

foldAB z f x = case x of
  Nil -> z
  (Bin l v r) -> f (rec l) v (rec r)
  where rec = foldAB z f

foldAB :: (a -> b -> b -> b) -> b -> AB a -> b
foldAB f1 f2 = recAB (\a _ _ -> f1 a) f2


    esNil :: AB a -> Bool
    esNil x = case x of
      Nil -> True
      _ -> False
```

```haskell
cantNodos :: AB a -> Int
cantNodos = foldAB (const 1) (\ri _ rd -> 1 + ri + rd)

sumatoriaArbol :: AB Int -> Int
sumatoriaArbol = foldAB id (\left r right -> left + r + right)

mejorSegún :: (a -> a -> Bool) -> AB a -> a
mejorSegún f (Bin l v r) = foldAB v (\rl v rr -> (rl `g` v) `g` rr)
(Bin l v r)
  where g x y = if f x y then x else y

esABB :: Ord a => AB a -> Bool
esABB = recAB True (\ l v r rl rr -> (esNil l || mejorSegún (>) l
<= v) && (esNil r || mejorSegún (<) r >= v) && rl && rr)

raíz :: AB a -> a
raíz (Bin l v r) = v

data RoseTree a = Rose a [RoseTree a]

tamaño :: RoseTree a -> Int
tamaño (Rose x hijos) = 1 + sum (map tamaño hijos)
-- tamaño = foldRT (\_ recs -> 1 + sum recs)

foldRT :: (a -> [b] -> b) -> RoseTree a -> b
foldRT f (Rose x hijos) = f x (map (foldRT f) hijos)

data Polinomio a = X
         | Cte a
         | Suma (Polinomio a) (Polinomio a)
         | Prod (Polinomio a) (Polinomio a)

evaluar n poli = case poli of
    X -> n
    Cte k -> k
    Suma p q -> evaluar n p + evaluar n q
    Prod p q -> evaluar n p * evaluar n q


-- flip
flip' :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
-- flip' f y x = f x y
flip' f = \y x -> f x y
```

```
data Componente
= Contenedor
  | Motor
  | Escudo
  | Cañon
  deriving Eq

data NaveEspacial
= Modulo Componente NaveEspacial NaveEspacial
| Base Componente
deriving Eq

recNave :: ( Componente -> NaveEspacial ->
NaveEspacial -> a -> a -> a)
 -> ( Componente -> a ) -> NaveEspacial -> a

recNave f1 f2 n = case n of
        Modulo c n1 n2 -> f1 c n1 n2 ( rec n1 ) ( rec n2
)
        Base c -> f2 c
where rec = recNave f1 f2

foldNave :: ( Componente -> a -> a -> a )
-> ( Componente -> a ) -> NaveEspacial -> a

foldNave f1 f2 = recNave (\ c _ _ -> f1 c ) f2

espejo :: NaveEspacial -> NaveEspacial
espejo = foldNave (\ c r1 r2 -> Modulo c r2 r1 ) Base

esSubnavePropia :: NaveEspacial -> NaveEspacial ->
Bool
esSubnavePropia n1 =
recNave (\ _ sn1 sn2 r1 r2 -> sn1 == n1 ||
sn2 == n1 || r1 || r2 )
( const False )
```

Dada una nave y un numero natural n, devuelve una nave con los niveles 0 a n de la original, siendo el nivel 0 la ra´ız.

```
truncar :: NaveEspacial -> Integer -> NaveEspacial
```

```
truncar =
   foldNave (\ c r1 r2 -> \ i ->
         if i == 0
         then ( Base c )
         else ( M ´o dulo c ( r1 (i -1) ) ( r2 (i -1) ) ) )
      (\ c -> \ i -> Base c )
```

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash p \;\text{ax} \quad \neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash\sigma \;\text{ax}}{\neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash p\wedge\sigma}\wedge i \quad \neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash\neg(p\wedge\sigma)\;\text{ax}}{\neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash\bot}\neg e$$

$$\dfrac{\neg(p\wedge\sigma),p\vdash\sigma\vee\neg\sigma\;\text{LEM} \quad \neg(p\wedge\sigma),p,\sigma\vdash\neg p\vee\neg\sigma\;\bot e \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(p\wedge\sigma),p,\neg\sigma\vdash\neg\sigma}\text{ax}}{\neg(p\wedge\sigma),p,\neg\sigma\vdash\neg p\vee\neg\sigma}\vee i_2}{\neg(p\wedge\sigma),p\vdash\neg p\vee\neg\sigma}\vee e$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p\wedge\sigma)\vdash p\vee\neg p\;\text{LEM} \quad \neg(p\wedge\sigma),p\vdash\neg p\vee\neg\sigma \quad \dfrac{\neg(p\wedge\sigma),\neg p\vdash\neg p\;\text{ax}}{\neg(p\wedge\sigma),\neg p\vdash\neg p\vee\neg\sigma}\vee i_1}{\neg(p\wedge\sigma)\vdash\neg p\vee\neg\sigma}\vee e}{\vdash\neg(p\wedge\sigma)\Rightarrow(\neg p\vee\neg\sigma)}\Rightarrow i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\vdash p\wedge\sigma\;\text{ax}}{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\vdash p}\wedge e_1 \quad \Gamma=\{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\}\vdash\neg p}{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\vdash\bot}\neg e}{\dfrac{\neg p\vee\neg\sigma\vdash\neg(p\wedge\sigma)}{\vdash(\neg p\vee\neg\sigma)\Rightarrow\neg(p\wedge\sigma)}\Rightarrow i}\neg i$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash\neg p\vee\neg\sigma\;\text{ax} \quad \Gamma,\neg p\vdash\neg p\;\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\neg\sigma\vdash p\wedge\sigma\;\text{ax}}{\Gamma,\neg\sigma\vdash\sigma}\wedge e_2 \quad \Gamma,\neg\sigma\vdash\neg\sigma\;\text{ax}}{\Gamma,\neg\sigma\vdash\bot}\neg e}{\Gamma,\neg\sigma\vdash\neg p}\bot e}{\Gamma\vdash\neg p}\vee e$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma=\{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\}\vdash\neg p\vee\neg\sigma\;\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma,\neg p\vdash p\wedge\sigma\;\text{ax}}{\Gamma,\neg p\vdash p}\wedge e_1 \quad \Gamma,\neg p\vdash\neg p\;\text{ax}}{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma,\neg p\vdash\bot}\neg e \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma,\neg\sigma\vdash p\wedge\sigma\;\text{ax}}{\Gamma,\neg\sigma\vdash\sigma}\wedge e_2 \quad \Gamma,\neg\sigma\vdash\neg\sigma\;\text{ax}}{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma,\neg\sigma\vdash\bot}\neg e}{\neg p\vee\neg\sigma,p\wedge\sigma\vdash\bot}\vee e}{\neg p\vee\neg\sigma\vdash\neg(p\wedge\sigma)}\neg i}{\vdash(\neg p\vee\neg\sigma)\Rightarrow\neg(p\wedge\sigma)}\Rightarrow i$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash M:Cola_\tau \quad \Gamma\vdash N:\sigma \quad \Gamma\cup\{c:Cola_\tau,\,x:\tau\}\vdash O:\sigma}{\Gamma\vdash \text{case } M \text{ of } \langle\rangle\rightsquigarrow N;\, c\bullet x\rightsquigarrow O:\sigma}$$

Se desea extender el Cálculo Lambda tipado con colas bidireccionales (también conocidas como *deque*).

Se extenderán los tipos y términos de la siguiente manera:

$\tau ::= \cdots \mid \text{Cola}_\tau$

$M ::= \cdots \mid \langle\rangle_\tau \mid M \bullet M \mid \text{próximo}(M) \mid \text{desencolar}(M)$
$\mid \text{case } M \text{ of } \langle\rangle \rightsquigarrow M;\, c \bullet x \rightsquigarrow M$

donde $\langle\rangle_\sigma$ es la cola vacía en la que se pueden encolar elementos de tipo σ; $M_1 \bullet M_2$ representa el agregado del elemento M_2 al **final** de la cola M_1; los observadores próximo(M_1) y desencolar(M_1) devuelven, respectivamente, el primer elemento de la cola (el primero que se encoló), y la cola sin el primer elemento (estos dos últimos solo tienen sentido si la cola no es vacía); y el observador case M_1 of $\langle\rangle \rightsquigarrow M_2;\, c \bullet x \rightsquigarrow M_3$ permite operar con la cola en sentido contrario, accediendo al último elemento encolado (cuyo valor se ligará a la variable x en M_3) y al resto de la cola (que se ligará a la variable c en el mismo subtérmino).

1. Introducir las reglas de tipado para la extensión propuesta.
2. Definir el conjunto de valores y las nuevas reglas de reducción. Pueden usar los conectivos booleanos de la guía. **No es necesario escribir las reglas de congruencia,** basta con indicar cuántas son. **Pista:** puede ser necesario mirar más de un nivel de un término para saber a qué reduce.
3. Mostrar paso por paso cómo reduce la expresión: case $\langle\rangle_{\text{Nat}} \bullet \underline{1} \bullet 0$ of $\langle\rangle \rightsquigarrow$ próximo$(\langle\rangle_{\text{Bool}})$; $c \bullet x \rightsquigarrow$ isZero(x)
4. Definir como macro la función `último`$_\tau$, que dada una cola devuelve el último elemento que se encoló en ella. Si la cola es vacía, puede colgarse o llegar a una forma normal bien tipada que no sea un valor. Dar un juicio de tipado válido para esta función (no es necesario demostrarlo)

$$\dfrac{}{\Gamma\vdash\langle\rangle_\sigma:Cola_\sigma}\text{Ax-Vacío}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash M:Cola_\sigma \quad \Gamma\vdash N:\sigma}{\Gamma\vdash M\bullet N:Cola_\sigma}\text{T-enc}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash M:Cola_\sigma}{\Gamma\vdash Prox(M):\sigma}$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash M:Cola_\sigma}{\Gamma\vdash desencolar(M):Cola_\sigma}$$

$V ::= \ldots \mid \langle\rangle_\sigma \mid V \cdot V$

$$\frac{}{\mathrm{prox}(\langle\rangle_\sigma \cdot V_1) \to V_1}$$

$$\frac{}{\mathrm{prox}((V_1 \cdot V_2) \cdot V_3) \to \mathrm{prox}(V_1 \cdot V_2)}$$

$$\frac{}{\mathrm{desencolar}(\langle\rangle_\sigma \cdot V_1) \to \langle\rangle_\sigma}$$

$$\frac{}{\mathrm{desencolar}(V_1 \cdot V_2 \cdot V_3) \to \mathrm{desencolar}(V_1 \cdot V_2) \cdot V_3}$$

$$\frac{}{\mathrm{case}\ \langle\rangle_\sigma\ \mathrm{of}\ \langle\rangle \rightsquigarrow M \,;\, c \cdot x \rightsquigarrow N \to M}$$

$$\frac{}{(\mathrm{case}\ V_1 \cdot V_2\ \mathrm{of}\ \langle\rangle \rightsquigarrow M \,;\, c \cdot x \rightsquigarrow N)}\ \text{case No 9}$$

$\to N\{c := V_1 \,;\, x := V_2\}$

$\boxed{\text{CBV}}$

$V ::= \ldots \mid \mathrm{left}(V) \mid \mathrm{right}(V)$

$$\frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow V}{\Gamma \vdash \mathrm{left}(M) \Rightarrow \mathrm{left}(V)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow V}{\Gamma \vdash \mathrm{right}(M) \Rightarrow \mathrm{right}(V)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow \mathrm{left}(V) \qquad \Gamma, x = V \vdash N \Rightarrow V'}{\Gamma \vdash \mathrm{case}\ M\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}(x) \rightsquigarrow N \parallel \mathrm{right}(y) \rightsquigarrow O \Rightarrow V'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow \mathrm{right}(V) \qquad \Gamma, y = V \vdash O \Rightarrow V'}{\Gamma \vdash \mathrm{case}\ M\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}(x) \rightsquigarrow N \parallel \mathrm{right}(y) \rightsquigarrow O \Rightarrow V'}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \mathrm{zero} \Rightarrow \mathrm{zero}}}{\vdash \mathrm{succ}(\mathrm{zero}) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{zero})}}{\vdash \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{zero})) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{zero}))}}{\vdash \mathrm{pred}(\underline{2}) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{zero})}}{\vdash \mathrm{left}(\mathrm{pred}(\underline{2})) \Rightarrow \mathrm{left}(\underline{1})} \qquad \cfrac{\cfrac{}{x = \underline{1} \vdash x \Rightarrow \underline{1}}}{x = \underline{1} \vdash \mathrm{isZero}(x) \Rightarrow \mathrm{false}}$$

$$\frac{}{\vdash \mathrm{case}\ \mathrm{left}(\mathrm{pred}(\underline{2}))\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}\ x \rightsquigarrow \mathrm{isZero}(x) \parallel \mathrm{right}\ y \rightsquigarrow \mathrm{true} \Rightarrow \mathrm{false}}$$

$\to \mathrm{isZero}(0) \to \mathrm{True}$

E-case No 9

$\mathrm{ultimo}_\tau := \lambda q : \mathrm{Cola}_\tau .\ \mathrm{case}\ q\ \mathrm{of}$
$\quad \langle\rangle \rightsquigarrow \mathrm{prox}(\langle\rangle_\tau)$
$\quad c \cdot v \rightsquigarrow v$

$\Gamma \vdash \mathrm{ultimo}_\tau : \mathrm{Cola}_\tau \to \tau$

Extender los intérpretes CBN y CBV para tipos suma. Luego, evaluar la siguiente expresión:

$$\mathrm{case}\ \mathrm{pred}(\underline{2})\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}(x) \rightsquigarrow \mathrm{isZero}(x) \parallel \mathrm{right}(y) \rightsquigarrow \mathrm{True}$$

$\boxed{\text{CBN}}$ $V ::= \ldots \mid \langle \mathrm{left}(M), \Gamma \rangle \mid \langle \mathrm{right}(M), \Gamma \rangle$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{left}(M) \Rightarrow \langle \mathrm{left}(M), \Gamma \rangle} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{right}(M) \Rightarrow \langle \mathrm{right}(M), \Gamma \rangle}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow \langle \mathrm{left}(M'), \Gamma' \rangle \qquad \Gamma, x = \langle M', \Gamma' \rangle \vdash N \Rightarrow V}{\Gamma \vdash \mathrm{case}\ M\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}\ x \rightsquigarrow N \parallel \mathrm{right}\ y \rightsquigarrow O \Rightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \Rightarrow \langle \mathrm{right}(M'), \Gamma' \rangle \qquad \Gamma, y = \langle M', \Gamma' \rangle \vdash O \Rightarrow V}{\Gamma \vdash \mathrm{case}\ M\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}\ x \rightsquigarrow N \parallel \mathrm{right}\ y \rightsquigarrow O \Rightarrow V}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash \mathrm{zero} \Rightarrow \mathrm{zero}}}{\vdash \mathrm{succ}(\mathrm{zero}) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{zero})}}{\vdash \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{zero})) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{zero}))}}{\vdash \mathrm{pred}(\underline{2}) \Rightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{zero})}}{x = \langle \mathrm{pred}(\underline{2}), \emptyset \rangle \vdash x \Rightarrow \underline{1}}$$

(*) $x = \langle \mathrm{pred}(\underline{2}), \emptyset \rangle \vdash \mathrm{isZero}(x) \Rightarrow \mathrm{false}$

$$\frac{}{\vdash \mathrm{left}(\mathrm{pred}(\underline{2})) \Rightarrow \langle \mathrm{left}(\mathrm{pred}(\underline{2})), \emptyset \rangle} \qquad (*)$$

$$\vdash \mathrm{case}\ \mathrm{left}(\mathrm{pred}(\underline{2}))\ \mathrm{of}\ \mathrm{left}\ x \rightsquigarrow \mathrm{isZero}(x) \parallel \mathrm{right}\ y \rightsquigarrow \mathrm{true} \Rightarrow \mathrm{false}$$