Resumen de los principales tipos de recursión

- **Estructural:** permite acceder a los argumentos no recursivos de los constructores, y a los resultados de la recursión para las subestructuras.
- **Primitiva:** como la estructural, pero además permite acceder a las subestructuras.
- **Global:** como la primitiva, pero además permite acceder a los resultados de las recursiones anteriores.

Por ejemplo:

```
longitud [] = 0
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs

insertarOrdenado e [] = [e]
insertarOrdenado e (x:xs) = if e < x then e:x:xs
                                     else x:(insertarOrdenado e xs)

elementosEnPosicionesPares [] = []
elementosEnPosicionesPares (x:xs) = if null xs then [x]
                                    else x:elementosEnPosicionesPares (tail xs)
```

1. La recursión de `longitud` es estructural, porque hace recursión sobre la cola de la lista (`xs`) pero no accede a la cola en sí, ni a resultados de recursiones anteriores.
2. La recursión de `insertarOrdenado` es primitiva porque accede directamente a `xs` (además de hacer recursión), pero no accede a los resultados anteriores.
3. La recursión de `elementosEnPosicionesPares` es global, ya que accede a un resultado anterior: el de la recursión sobre la cola de la cola de la lista (es decir `tail xs`).

Deducción natural

Reglas básicas

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \mathsf{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$$

Lógica intuicionista

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Lógica clásica

Deducción natural

Reglas derivadas

Reglas intuicionistas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \mathsf{MT}$$

Reglas clásicas

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \mathsf{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \mathsf{LEM}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\ ax_{\text{true}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}\ ax_{\text{false}}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ ax_v$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma}\ \text{if}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau} \to_e$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{zero} : \mathsf{Nat}}\ ax_{\mathsf{zero}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{succ}(M) : \mathsf{Nat}}\ \mathsf{succ} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{pred}(M) : \mathsf{Nat}}\ \mathsf{pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{Nat}}{\Gamma \vdash \mathsf{isZero}(M) : \mathsf{Bool}}\ \mathsf{isZero}$$

Intérprete con estrategia Call By Name (CBN)

$$\frac{\Gamma' \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma, x = \langle M, \Gamma' \rangle, \Delta \vdash x \hookrightarrow V} \; x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.M \hookrightarrow \langle x, M, \Gamma \rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = \langle N, \Gamma \rangle \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M\,N \hookrightarrow V}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{True} \hookrightarrow \mathsf{True}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{False} \hookrightarrow \mathsf{False}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathsf{True} \quad \Gamma \vdash N_1 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathsf{False} \quad \Gamma \vdash N_2 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma, x = \langle \mu x.M, \Gamma \rangle \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mu x.M \hookrightarrow V}$$

Intérprete con estrategia Call By Value (CBV)

$$\frac{}{\Gamma, x = V, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\; x \notin \mathsf{D}(\Delta) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \mu y.M \to V}{\Gamma, x = \langle \mu y.M, \Gamma' \rangle, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\; x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.M \hookrightarrow \langle x, M, \Gamma \rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow W \quad \Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = W \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M N \hookrightarrow V}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{True} \hookrightarrow \mathsf{True}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{False} \hookrightarrow \mathsf{False}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathsf{True} \quad \Gamma \vdash N_1 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathsf{False} \quad \Gamma \vdash N_2 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma, x = \langle \mu x.M, \Gamma \rangle \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mu x.M \hookrightarrow V}$$

Extensión de los intérpretes con números naturales

CBN y CBV

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} \hookrightarrow \text{zero}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{zero}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) \hookrightarrow \text{zero}} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{zero}}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) \hookrightarrow \text{True}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) \hookrightarrow \text{succ}(V)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{succ}(V)}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{succ}(V)}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) \hookrightarrow \text{False}}$$

Semántica denotacional del Cálculo Lambda (sin error)

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]_v &= v(x) \\
[\![\lambda x{:}\tau.M]\!]_v &= V^{[\![\tau]\!]} \mapsto [\![M]\!]_{v,x=V} \\
[\![M\,N]\!]_v &= [\![M]\!]_v [\![N]\!]_v \\
[\![\mathsf{True}]\!]_v &= \mathsf{true} \\
[\![\mathsf{False}]\!]_v &= \mathsf{false} \\
[\![0]\!]_v &= 0 \\
[\![\mathsf{succ}(M)]\!]_v &= [\![M]\!]_v + 1
\end{aligned}
$$

$$
[\![\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ O]\!]_v = \begin{cases} [\![N]\!]_v & \text{si } [\![M]\!]_v = \mathsf{true} \\ [\![O]\!]_v & \text{si } [\![M]\!]_v = \mathsf{false} \\ \bot & \text{si } [\![M]\!]_v = \bot \end{cases}
$$

$$
[\![\mathsf{pred}(M)]\!]_v = \begin{cases} 0 & \text{si } [\![M]\!]_v = 0 \\ [\![M]\!]_v - 1 & \text{si no} \end{cases}
$$

$$
[\![\mathsf{isZero}(M)]\!]_v = \begin{cases} \mathsf{true} & \text{si } [\![M]\!]_v = 0 \\ \mathsf{false} & \text{si } [\![M]\!]_v = n \neq 0 \\ \bot & \text{si } [\![M]\!]_v = \bot \end{cases}
$$

$$
[\![\mu x{:}\tau.M]\!]_v = \mathsf{FIX}(V^{[\![\tau]\!]} \mapsto [\![M]\!]_{v,x=V})
$$