FUNDAMENTOS DEL ESPACIO-ESTADO

2.1 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO MEDIANTE LAPLACE

Conocido el **modelo** del **sistema** en el **espacio-estado**, y **usando** la **transformada** de **Laplace** se **obtiene** la **ecuación de estado**, **vectores** de **estado** y **vector** de **salida**.

Considere la **ecuación de estado** y la **ecuación de salida**:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2.1}$$

$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \tag{2.2}$$

1. **Tome** la **transformada de Laplace** en **ambos lados** de la **ecuación de estado**:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{2.3}$$

2. **Remplace** $s\mathbf{X}(s)$ con $s\mathbf{I}\mathbf{X}(s)$, donde $\mathbf{I}$ es la **matriz identidad** $n \times n$, y n es el **orden del sistema**. **Agrupar** a **todos** los **términos** de $\mathbf{X}(s)$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{2.4}$$

3. **Resuelva** por $\mathbf{X}(s)$ al **multiplicar ambos lados** de la **ecuación** (2.4) **por** $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces la **solución final** por $\mathbf{X}(s)$ resulta ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ &= \frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)]\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nota: La **matriz adjunta** resulta ser la **transpuesta** de la **matriz cofactores**, C^T. Donde la **matriz de cofactores** se obtiene **utilizando** los **cofactores** $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

4. **Tome** la **transformada de Laplace** de la **ecuación de salida** para **producir**:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{2.6}$$

- **LOS EIGENVECTORES Y POLOS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA**

Si se sabe que los **polos** de la **función de transferencia determinan** la **naturaleza** de la **respuesta transitoria** del **sistema**, entonces, **¿Existe** una **cantidad equivalente** en la **representación espacio-estado que produzca la misma información? Si**. Se va a ver que los **valores característicos** son **iguales** a los **polos** de la **función de transferencia** del **sistema**.

1. Deje que la **salida** $\mathbf{Y}(s)$ y la **entrada** $\mathbf{U}(s)$ **sean cantidades escalares**, $\mathrm{Y}(s)$ y $\mathrm{U}(s)$ respectivamente. Además, de la **definición** de **función de transferencia**, deje que $\mathbf{x}(0)$, el **vector** de **estado inicial**, **sea igual** a $\mathbf{0}$, el **vector nulo**.
2. **Sustituyendo** la ecuación (2.5) en la ecuación (2.6) y **resolviendo** por la **función de transferencia** $\mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s)$, resulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}\left[\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right]\mathbf{B}+\mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}+\mathbf{D}det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \tag{2.7}$$

Las **raíces** del **denominador** de la ecuación (2.7) son los **polos** del **sistema**. Ya que los **denominadores** de las ecuaciones (2.5) y (2.7) son **iguales**, entonces, los **polos** del **sistema** son **iguales** a los **valores propios**. Por tanto, si un **sistema** se **representa** en el **espacio estado**, se pueden **calcular** los **polos** desde el $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$.

Ejemplo 2.1: Solución mediante la transformada de Laplace
Sea el **sistema** representado en el **espacio estado** por las ecuaciones (2.8):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \tag{2.8a}$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x} \tag{2.8b}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.8c}$$

a) **Resolver** la **ecuación** anterior y **obtener la salida** por la **entrada exponencial** dada.
b) **Encontrar** los **valores característicos** y **polos del sistema**.
c) **Resolver** mediante .

Solución:
a) Se resolverá el problema encontrando las partes que componen a la ecuación (2.5) y sustituyendo ese resultado en la ecuación (2.6). Primero se obtienen $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cuando se comparan la ecuación (2.8a) con la ecuación (2.1). Ya que:

$$s\mathbf{I} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Entonces

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Por lo tanto,

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{adj\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+9s+26) & (s+9) & 1 \\ -24 & (s^2+9s) & s \\ -24s & -(26s+24) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24} \tag{2.11}$$

Debido a que $\mathbf{U}(s)$ (la transformada de Laplace por e^{-t}) **es** $1/(s+1)$, entonces, $\mathbf{X}(s)$ se puede calcular. Rescriba la ecuación (2.5) como

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \quad (2.11)$$

Al utilizar $\mathbf{B}$ y $\mathbf{x}(0)$ de las **ecuaciones** (2.8a) y (2.8c), respectivamente, se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+9s+26) & (s+9) & 1 \\ -24 & (s^2+9s) & s \\ -24s & -(26s+24) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+9s^2+26s+24} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} \right]$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} X_1(s) &= \frac{(s^3+10s^2+37s+29)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} && (2.12a) \\ X_2(s) &= \frac{(2s^2-21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} && (2.12b) \\ X_3(s) &= \frac{s(2s^2 \pm 21s-24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} && (2.12c) \end{aligned}$$

La **ecuación de salida** resulta de la ecuación (2.8b). Efectuando la **suma** indicada resulta:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = X_1(s) + X_2(s) \quad (2.13)$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{(s^3+12s^3+16s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{-6.5}{s+2} + \frac{19}{s+3} - \frac{11.5}{s+4} \quad (2.14)$$

Donde el **polo** en -1 canceló a un **cero** en -1. Entonces, **tomando la transformada inversa de Laplace**,

$$y(t) = -6.5e^{-2t} + 19e^{-3t} - 11.5e^{-4t} \quad (2.15)$$

b) El **denominador** de la ecuación (2.11) $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, es también el **denominador** de su **función de transferencia**, entonces, el $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ **genera** los **polos del sistema** y los **valores propios**, es decir:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & s & s & -1 \\ 0 & s & 0 & 0 & s \\ 24 & 26 & 24 & 24 & 26 \end{vmatrix} = s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = (s+2)(s+3)(s+4) = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_1 = -2, \;\; \lambda_2 = -3, \;\; \lambda_3 = -4$$

Por consiguiente, los **polos del sistema** y los **valores propios** son: -2, -3 y -4.

c) Ahora, ustedes aprenderán a cómo **resolver** las **ecuaciones de estados** mediante la **respuesta de salida** utilizando MATLAB y el Symbolic Math Toolbox. El ejemplo 2.1 se resuelve mediante MATLAB con el siguiente programa:

```
'(ch4sp1) Example 4.11'              % Display label.
syms s                               % Construct symbolic object for
                                     % frequency variable 's'.
'a'                                  % Display label.
A=[0 1 0;0 0 1;-24 -26 -9];          % Create matrix A.
B=[0;0;1];                           % Create vector B.
X0=[1;0;2];                          % Create initial condition vector,
                                     % X(0).
U=1/(s+1);                           % Create U(s).
I=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];               % Create identity matrix.
X=((s*I-A)^-1)*(X0+B*U);             % Find Laplace transform of state
                                     % vector.
x1=ilaplace(X(1));                   % Solve for X1(t).
x2=ilaplace(X(2));                   % Solve for X2(t).
x3=ilaplace(X(3));                   % Solve for X3(t).
y=x1+x2;                             % Solve for output, y(t).
y=vpa(y,3);                          % Convert fractions to decimals.
'y(t)'                               % Display label.
pretty(y)                            % Pretty print y(t).
'b'                                  % Display label.
[V,D]=eig(A);                        % Find eigenvalues, which are the
                                     % diagonal elements of D.
'Eigenvalues on diagonal'            % Display label.
D                                    % Display D.
pause
```

∇

Tarea:

Sea el **sistema** representado en el **espacio-estado** por las ecuaciones (2.16),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \tag{2.16a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{2.16b}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.16c}$$

a) **Resolver** por $y(t)$ usando los **métodos espacio-estado** y **transformada de Laplace**.
b) **Determinar** los **eigenvalores** y los **polos del sistema**.

Solución:

∇

2.2 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Ahora en lugar de **utilizar** a la **transformada de Laplace**, las **ecuaciones de estado** se resuelven en el **dominio del tiempo** con un **método** vinculado a la **solución clásica** de las **ecuaciones diferenciales**. Se encontrará que la **solución final consta** de **dos partes** que son **diferentes** a las **respuestas forzada y natural**.

Antes de encontrar una **solución** de **forma cerrada** para las ecuaciones (2.1) y (2.2) por el caso n dimensional, primero se revisa la **solución de la ecuación diferencial escalar de primer orden**.

- **SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO TIEMPO INVARIANTE**

➢ Solución de las ecuaciones de estado para el caso homogéneo

a) Caso escalar:

Sea la siguiente **ecuación diferencial escalar**:

$$\dot{x(t)} = ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.17}$$

Para **resolver** esta **ecuación**, se **supone** una **solución exponencial definida** por una **serie de potencia infinita**, es decir:

$$x(t) = e^{at}x(0) \tag{2.18}$$

Donde

$$e^{at} = \left(1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \frac{1}{(k+1)!}a^{k+1}t^{k+1} + \cdots\right) \tag{2.19}$$

b) **Caso matricial:**

Suponga una **ecuación de estado homogénea** de la **forma**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \tag{2.20}$$

Debido a que se quiere **resolver** por $\mathbf{x}$, se **supone** una **solución serie**, justo como se hizo con las **ecuaciones diferenciales escalares elementales**. Entonces,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{2.21}$$

Donde

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}t^{k+1} + \cdots\right) \tag{2.22}$$

c) **La matriz de transición de estados**

Considere la **ecuación de estados homogénea**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \tag{2.23}$$

Se puede escribir su **solución** como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}(0) \tag{2.24}$$

Donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es una **matriz** $n \times n$ llamada la **matriz transición de estados** o **matriz fundamental**, y es la **solución** única del sistema:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$$

Para **verificar** esto, se observa que:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(\mathrm{t})\mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Por lo tanto se confirma que la ecuación (2.24) es la **solución** de la ecuación (2.23).

Además, haciendo uso de las **ecuaciones** $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(t) = \mathfrak{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)]$ y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}(0)$, resulta:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathfrak{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right]$$

También, se observa que:

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(-t)$$

La **solución** $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}(0)$, de la **ecuación** $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$, es **solo** una **transformación de la condición inicial**. Por esto, a la **matriz única** $\mathbf{\Phi}(t)$ se le llama **matriz de transición de estados** y contiene toda la información sobre el **movimiento libre del sistema** definido por la **ecuación de estados**.

<u>Ejemplo 2.2</u>:
Obtenga la **matriz de transición de estados** $\mathbf{\Phi}(t)$ del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Además, obtenga la inversa de la **matriz de transición de estados** $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

Solución:
Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

La **matriz de transición de estados** $\mathbf{\Phi}(t)$ resulta ser:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathfrak{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

Como

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

La **inversa** de $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ se obtiene mediante:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathfrak{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta que $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$, entonces se obtiene la **inversa de la matriz de transición de estados del modo** siguiente:

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

∇

<u>Tarea</u>: La matriz de transición de estado vía la transformada de Laplace
Encontrar la matriz de transición del ejemplo anterior usando $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>:

∇

➢ <u>Solución de las ecuaciones de estado para el caso no homogéneo</u>

a) <u>Caso escalar:</u>

Considere el **sistema de una dimensión** representado por la **ecuación diferencial**:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \tag{2.25}$$

Donde a y b son **escalares constantes** y $u(t)$ es una **señal de entrada escalar** dada. Un **método tradicional** para **calcular** una fórmula **solución** por el **estado escalar** $x(t)$ es **multiplicar ambos lados** de la **ecuación diferencial por** el ***factor integrante*** $e^{-a(t)}$ para obtener:

$$e^{-a(t)}\dot{x}(t) - e^{-a(t)}ax(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-a(t)}x(t)\right) = e^{-a(t)}bu(t)$$

Integrando de 0 hasta t y **aplicando** el **teorema fundamental del cálculo**, resulta:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{-a(\tau)}x(\tau)\right)d\tau = e^{-a(t)}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a(\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

Haciendo **operaciones**, se obtiene:

$$x(t) = e^{a(t)}x(0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t)}\,bu(\tau)d\tau$$

Esta **expresa** la **respuesta del estado** $x(t)$ como **una suma de términos**:

1) El **primero** pertenece al **estado inicial** dado $x(0)$ y el **segundo** pertenece a la **señal de entrada estado** $u(t)$. Note que este **componente caracteriza** la **respuesta del estado** cuando la **señal de entrada es cero**. Se refiere como el **componente** de la ***respuesta entrada cero***.
2) De forma similar, el **segundo componente caracteriza** la **respuesta del estado** para el **estado inicial cero**. Se refiere como el **componente** de la ***respuesta estado cero***.

Si el **sistema de primer orden** tiene **asociada** una **señal de salida escalar** $y(t)$ definida por la **relación algebraica**:

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

Entonces, simplemente **sustituya** la **respuesta de estado** para obtener

$$y(t) = ce^{at}x(0) + \int_0^t ce^{a\tau}\,bu(\tau)d\tau + du(t)$$

Esta también admite una descomposición en componentes de la **entrada cero** y **estado cero**.

b) <u>Caso matricial:</u>

Se va a resolver el problema de la ecuación forzada o no homogénea. Dada la **ecuación de estado no homogénea (forzada)**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.26}$$

Rearregle y **multiplique** ambos lados por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.27}$$

Comprendiendo que el **lado izquierdo es igual a la derivada del producto** $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$, de manera similar al caso escalar, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.28}$$

Integrando ambos lados de 0 a t, resulta

$$[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)]\Big|_0^t = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2.29}$$

Resolviendo por $\mathbf{x}(t)$ y como $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$, la **solución en el dominio del tiempo** resulta ser

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2.30}$$

Donde $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ por **definición**, y es la **matriz de transición del estado**. Además,

1. El **primer término** del lado derecho es la **respuesta** debido al **vector de estado inicial** $\mathbf{x}(0)$, la **respuesta de entrada cero**, porque es la respuesta total si la entrada fuera cero. **Término dependiente** del vector de estado inicial y **no de la entrada**.
2. El **segundo término** llamado la **convolución integral**, depende de la entrada $\mathbf{u}$, de la matriz de entrada $\mathbf{B}$ y no del vector $\mathbf{x}(0)$. Se le llama a esta parte, la **respuesta de estado cero**, porque es la respuesta total si el vector de estado inicial fuera cero.

<u>Ejemplo 2.3</u>: Solución en el dominio del tiempo.
Sean las **ecuaciones**: **ecuación de estado** y **vector de estado inicial**, donde $u(t)$ es un **escalón unitario**, calcule la **matriz de transición del estado** y **resuelva** por $\mathbf{x}(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \tag{2.33a}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.33b}$$

<u>Solución:</u>
Como la **ecuación de estado** está de la **forma** siguiente, se **calculan** los **eigenvalores** utilizando el $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Por consiguiente, $s^2 + 6s + 8 = 0$ implica que $s_1 = -2$ y $s_2 = -4$. Ya que cada **término** de la **matriz de transición de estado** es la **suma** de las **respuestas generadas por los polos** (eigenvalores), se supone a una **matriz de transición de estado** de la forma:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t}) & (K_3 e^{-2t} + K_4 e^{-4t}) \\ (K_5 e^{-2t} + K_6 e^{-4t}) & (K_7 e^{-2t} + K_8 e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Para poder encontrar los **valores** de las **constantes**, se hace uso de las **propiedades** de la **matriz de transición de estado**. Debido a que:

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} (K_1 e^{0} + K_2 e^{0}) & (K_3 e^{0} + K_4 e^{0}) \\ (K_5 e^{0} + K_6 e^{0}) & (K_7 e^{0} + K_8 e^{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$K_1 + K_2 = 1 \tag{2.36a}$$
$$K_3 + K_4 = 0 \tag{2.36b}$$
$$K_5 + K_6 = 0 \tag{2.36c}$$
$$K_7 + K_8 = 1 \tag{2.36d}$$

Además, como $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi(0) = I}$, entonces

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \Rightarrow \dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} (-2K_1 e^{-2t} - 4K_2 e^{-4t}) & (-2K_3 e^{-2t} - 4K_4 e^{-4t}) \\ (-2K_5 e^{-2t} - 4K_6 e^{-4t}) & (-2K_7 e^{-2t} - 4K_8 e^{-4t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Entonces

$$-2K_1 - 4K_2 = 0 \tag{2.38a}$$
$$-2K_3 - 4K_4 = 1 \tag{2.38b}$$
$$-2K_5 - 4K_6 = -8 \tag{2.38c}$$
$$-2K_7 - 4K_8 = -6 \tag{2.38d}$$

Las constantes se resuelven tomando dos ecuaciones simultáneas 4 veces. Por ejemplo, se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones (2.36a) con la (2.38a), que producen los valores de $K_1 \; y \; K_2$. Procediendo similarmente, se pueden calcular todas las demás constantes. Por consiguiente,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Además,

$$\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(2e^{-2(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}\right) & \left(\frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2} e^{-4(t-\tau)}\right) \\ \left(-4e^{-2(t-\tau)} + 4e^{-4(t-\tau)}\right) & \left(-e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-4(t-\tau)}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2} e^{-4(t-\tau)}\right) \\ \left(-e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-4(t-\tau)}\right) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Por lo tanto, el **primer término** de la ecuación (2.30) es:

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \left(2e^{-2(t)} - e^{-4(t)}\right) \\ \left(-4e^{-2(t)} + 4e^{4(t)}\right) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

El **último término** de la **ecuación** (2.30) es,

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \\ -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\,d\tau + 2e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Vea, que en la ecuación (2.42), la **respuesta del estado cero**, contiene **no solo** a la **respuesta forzada** $\frac{1}{8}$, si no también a los **términos** de la **forma** Ae^{-2t}y Be^{-4t} que son parte de lo que antes se llamó la **respuesta natural**. Sin embargo, los **coeficientes** A y B **no son dependientes** de las **condiciones iniciales**.
El **resultado final** se encuentra **sumando** las ecuaciones $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$ y $\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\,\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$, es decir, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$, por consiguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \left(2e^{-2(t)} - e^{-4(t)}\right) \\ \left(-4e^{-2(t)} + 4e^{4(t)}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}+\frac{7}{4}e^{-2t}-\frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t}+\frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Ahora, **utilizando MATLAB** y el **Symbolic Math Toolbox**, se **resuelve** el ejemplo 2.4 por medio del siguiente programa:

```
'(ch4sp2) Example 4.12/4.13'          % Display label.
Syms s t tau                          % Construct symbolic object for
                                      % frequency variable 's', 't',
                                      % and 'tau'.
'a'                                   % Display label.
A=[0 1;-8 -6]                         % Create matrix A.
B=[0;1]                               % Create vector B.
X0=[1;0]                              % Create initial condition vector,
                                      % X(0).
U=1                                   % Create u(t).
I=[1 0;0 1];                          % Create identity matrix.
'E=(s*I-A)^-1'                        % Display label.
E=((s*I-A)^-1)                        % Find Laplace transform of state-
                                      % transition matrix, (sI-A)^-1.
Fi11=ilaplace(E(1,1));                % Take inverse Laplace transform
Fi12=ilaplace(E(1,2));                % of each element
Fi21=ilaplace(E(2,1));                % of (sI-A)^-1
Fi22=ilaplace(E(2,2));                % to find state-transition matrix.
'Fi(t)'                               % Display label.
Fi=[Fi11 Fi12;Fi21 Fi22];             % Form state-transition matrix,
                                      % Fi(t).
pretty(Fi)                            % Pretty print state-transition
                                      % matrix, Fi(t).
Fitmtau=subs(Fi,t,t-tau);             % Form Fi(t-tau).
'Fi(t-tau)'                           % Display label.
pretty(Fitmtau)                       % Pretty print Fi(t-tau).
X=Fi*X0+int(Fitmtau*B*1,tau,0,t);     % Solve for x(t).
X=simple(x);                          % Collect terms.
X=simplify(x);                        % Simplify x(t).
'x(t)'                                % Display label.
pretty(x)                             % Pretty print x(t).
pause
```

∇

Ejercicio:
Sea el **sistema representado** en el **espacio-estado** por las ecuaciones (2.58):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \quad (2.58a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.58b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.58c)$$

a) Resolver por la matriz de transición estado.
b) Resolver por el vector estado usando la convolución integral.
c) Encontrar la salida $y(t)$.

Solución:

∇