1. Теорема об оценке времени сортировок, использующих сравнение с элементом

<u>Теор.</u>

В худшем случае любой алгоритм сортировки сравнения выполняет $\Omega(n \log n)$ сравнений, где n - число сортируемых элементов

сравнение элементов, при этом не используем данную их внутреннюю структуру

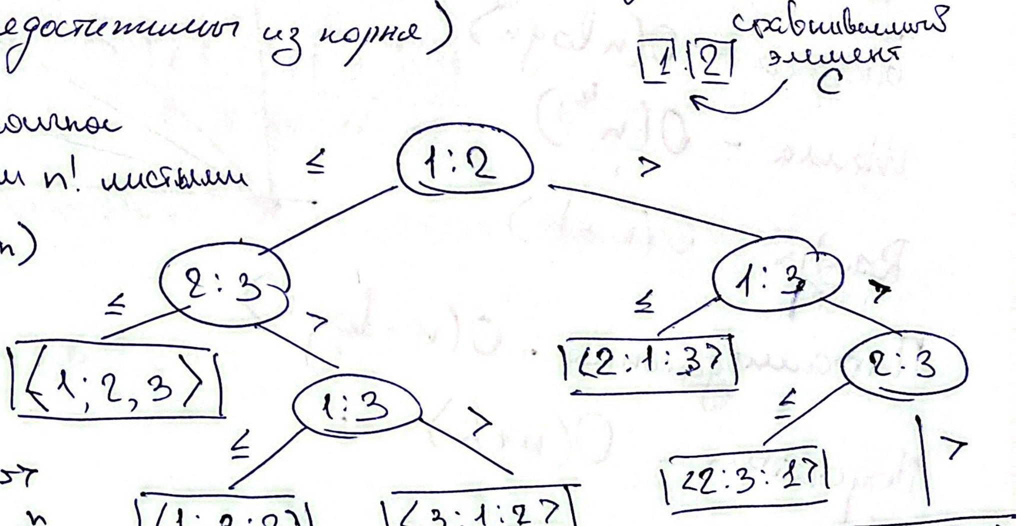
<u>Док-во:</u>

Сортировка сравнение - это дерево. В нем узлами выступают операции сравнения элементов, ребрами - переходы между состояниями алгоритма, а листьями - конечные перестановки элементов

<u>Док-ть, что высота такого дерева - это $\Omega(n \log n)$</u>

Сравним 2 элемента, возможны 2 исхода ($a_i \le a_j$ и $a_i > a_j$) $\Rightarrow$ каждый узел дерева имеет не более 2-х сыновей. Всего существует $\underline{n!}$ различных перестановок $\underline{n}$ элементов $\Rightarrow$ число ~~элементов~~ листьев не менее $\underline{n!}$ (в противном случае, некоторые перестановки были бы недостижимы из корня)

Теперь докажем, что двоичное дерево с не менее, чем $n!$ листьями имеет глубину $\Omega(n \log n)$



двоичное дерево высоты h имеет не более чем 2^h листьев $\Rightarrow$ имеем неравенство $n! \le l \le 2^h$, где l - число листьев. Прологарифмируем его и получим:

$$h \ge \log_2 n! = \log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n \ge \frac{n}{2}\log_2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}(\log_2 n - 1) = \Omega(n \log n) \Rightarrow$$

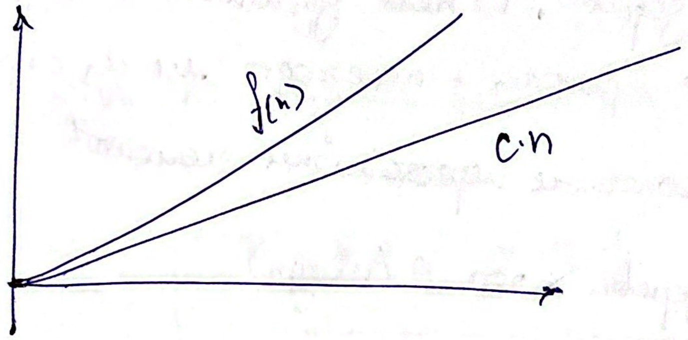
для любого алгоритма сравнений сущ. такая перестановка, на которой он выполнит $\Omega(n \log n)$ число сравнений

$f(n) \in O(g(n))$ – асимптотически верхняя граница

$\exists \begin{smallmatrix} c>0 \\ n_0>0 \end{smallmatrix}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$

$f(n) \in \Omega(g(n))$ – асимптотически нижняя граница

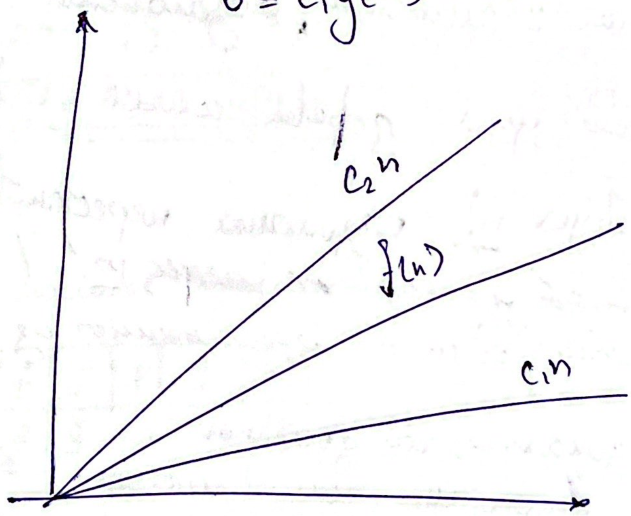
$\exists \begin{smallmatrix} c>0 \\ n_0>0 \end{smallmatrix}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$



$f(n) \in \Theta(g(n))$ – асимптотически точная граница

$\exists \begin{smallmatrix} c_1>0 \\ c_2>0 \\ n_0>0 \end{smallmatrix}, \forall n \geq n_0 :$

$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$



Выборка – $O(n^2)$

Пузырек – $O(n^2)$

Слияние – $O(n \log n)$

Быстрая – $O(n \log n)$

Шелла – $O(n^{4/3})$

Radix – $O(n+k)$

Пирамидальная – $O(n \cdot \log n)$

Подсчетом – $O(n+k)$