6. AVL-дерево. Основные операции.

Теорема о высоте AVL-дерева.

<u>AVL-дерево</u> - это сбалансированное двоичное дерево поиска, в котором поддерживается след. свойство: для каждой его вершины высота её двух поддеревьев различается не более чем на один

AVL дерево с n ключами имеет высоту $h = O(\log n)$

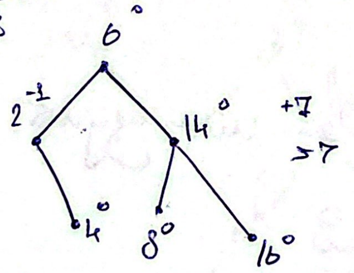
Для каждого узла необходимо хранить balance. В балансированном у всех узлов balance = 1, -1, или 0. В другом случае перебалансируем.

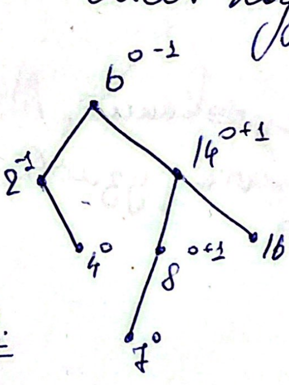
-1 – в правом поддереве больше высота

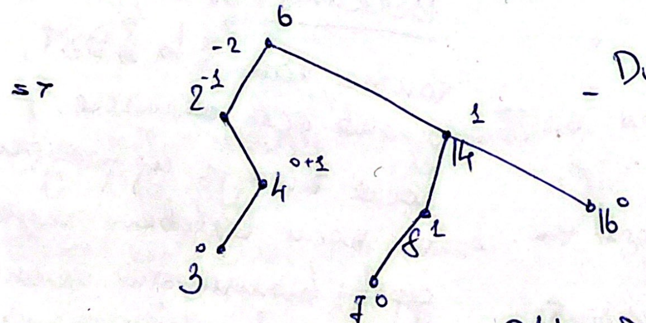
0 – поддеревья одинаковой высоты

+1 – в левом поддереве больше высота

Balance – разница высот поддеревьев







– Дисбаланс, т.к. -2.

$$AVL(x) \Leftrightarrow |height(x.left) - height(x.right)| \le 1 \text{ and } AVL(x.left) \text{ and } AVL(x.right)$$

в худший случай это $O(\log n)$

<u>Док-во</u> теоремы:

Пусть высота поддерева с корнем x будем обозначать как $h(x)$, высоту поддерева T как $h(T)$

m_h - мин. число вершин в AVL-дереве высоты $h \Rightarrow m_{h+2} = m_{h+1} + m_h + 1$

$m_h = F_{h+2} - 1$

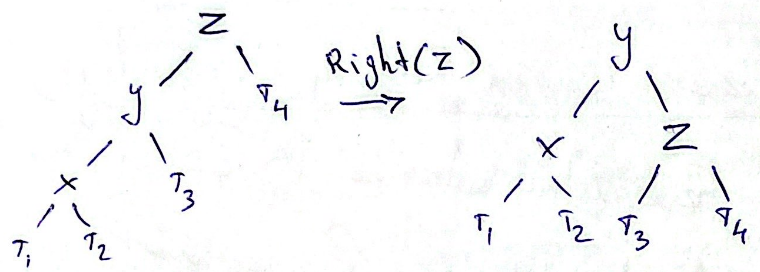
$m_1 = F_{h+2} - 1$ — верно ⇒ допустим, что $m_h = F_{h+2} - 1$ верно ⇒

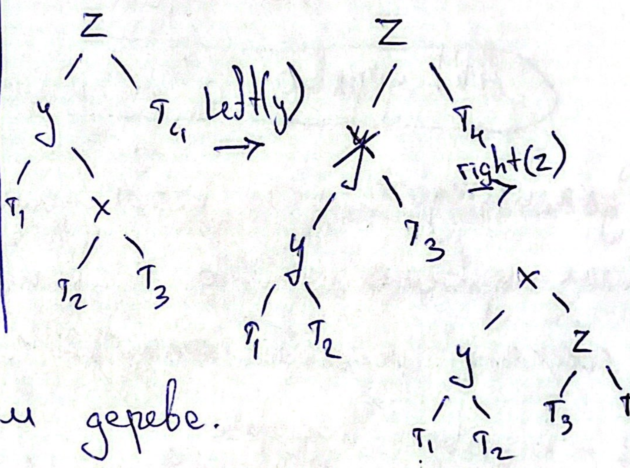
$m_{h+1} = m_h + m_{h-1} + 1 = F_{h+2} - 1 + F_{h+1} - 1 + 1 = F_{h+3} - 1$ ⇒ доказано

$m_h = F_{h+2} - 1$

$F_h = \Omega(\varphi^h)$, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ⇒ логарифмируя по основанию получим, $n \geq \varphi^h$, $\log_\varphi n \geq h$ ⇒ высота AVL-дерева — $O(\log n)$

Поворот трёх узлов





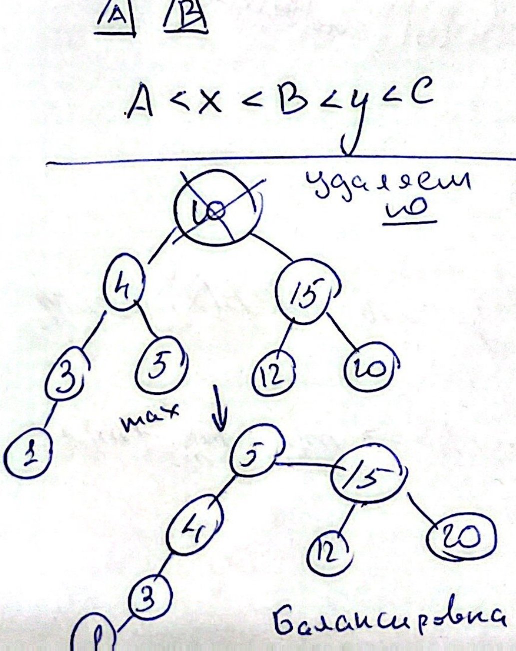
Операции:

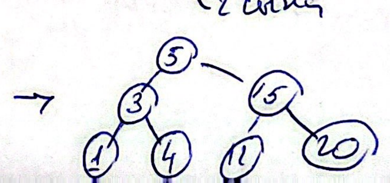
Поиск как в стандартном двоичном дереве.

Для балансирования AVL-дерева используют повороты вокруг тех или иных узлов.

Левый Правый

$A < x < B < y < C$





Удаление выглядит похоже на BST, с учетом того, что нужно будет балансировать дерево

3 случая — нет сыновей
— 1 сын
— 2 сына

Вставка выглядит также, как и в BST, однако есть отличие. После выхода из рекурсии, т.е. после вставки элемента ~~дерево~~ выполняется балансировка внешнего узла. Доказывается, что при такой вставке дисбаланс не превышает двух ⇒ применение функции вставки — корректно