МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа технологий искусственного интеллекта

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Теория автоматического управления
Расчетное задание №1

Студент,
группы 5130201/40003 (группа №4) ________________ Четвергов И. С.

Преподаватель ________________ Суханов А. А.

«_____»________________ 2025 г.

Санкт-Петербург, 2025, осенний семестр

Расчётное задание. Вариант 20

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 3i \end{pmatrix}$, где i - номер в списке.

A^{-1}, λ, x - ? + Проверка

б) $\ddot{x} + k^2 x = a \cdot \sin wt$; $i \% 2 = 1$ | НУ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = V_0$

$\ddot{x} + k^2 x = a \cdot \cos wt$; $i \% 2 = 0$

№1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}$. $\det A = 1\cdot 60 - 40\cdot 40 = -1540$; $\det A \neq 0$

1) Найдем A^{-1} методом искл. Гаусса. $(A|E) \to (E|A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 40 & 60 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 0 & -1540 & -40 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/77 & -1/1540 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/77 & 2/77 \\ 0 & 1 & 2/77 & -1/1540 \end{array}\right)$$

$40/1540 = 20(2/77)$

$1 - 40\cdot\frac{2}{77} = 1 - \frac{80}{77} = -\frac{3}{77}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/77 & 2/77 \\ 2/77 & -1/1540 \end{pmatrix}$$

$Ax_i = e_i$

Проверим результат по т. Крамера. $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ $\Delta_i = ||b_i||$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}$ $\det b_1 = 60 - 40 = 20$ $x_1 = \frac{20}{-1540} = \frac{-3}{77}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}$ $\det b_2 = -40$ $x_2 = \frac{-40}{-1540} = \frac{2}{77}$

$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 40 \\ 1 & 60 \end{pmatrix}$ $\det b_3 = -40$ $x_3 = \frac{2}{77}$

$b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 40 & 1 \end{pmatrix}$ $\det b_4 = 1 - 0 = 1$ $x_4 = \frac{-1}{1540}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/77 & 2/77 \\ 2/77 & -1/1540 \end{pmatrix}$ Матрица A^{-1} совпала.

2) Найдем собств. числа λ и собств. в-ы x.

$Ax = \lambda x$; $(A - \lambda E)x = 0$ $\det(A - \lambda E) = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 40 \\ 40 & 60-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $(1-\lambda)(60-\lambda) - 40^2 = 0$

$\lambda^2 - 61\lambda - 1540 = 0$

$$D = 61^2 - 4\cdot(-1540) = 3751 + 6120 = 9881$$ 3

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{61-\sqrt{9881}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{61+\sqrt{9881}}{2} \end{array}\right.$$

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$
$$(A-\lambda_i I)x_i = 0$$

$$\exists x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1c_1 + 40c_2 \\ 40c_1 + 60c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \\ \lambda_1 c_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} (1-\lambda_1)c_1 + 40c_2 = 0 \\ \cancel{40c_1 + (60-\lambda)c_2 = 0} \end{array}$$

$$c_1 = \frac{40}{\lambda_1 - 1}c_2. \quad \underset{9801}{99^2} < 9881 < \underset{10000}{100^2}; \ \sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a}$$

$$\sqrt{9881} \approx 99 + \frac{80}{2\cdot 99} = 99 + \overset{\sim 0{,}4}{\frac{80}{198}} = 99{,}4$$

$$x_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 40 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ \dfrac{61 - 99{,}4 - 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -19{,}7 \end{pmatrix}$$

$$x_2(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 40 \\ \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ \dfrac{61 + 99{,}4 - 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 79{,}7 \end{pmatrix}$$

Проверка:

1) $\operatorname{tr} A = 61$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 61$ ✓

2) $\det A = -1540$; $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{61^2 - 9881}{4} = -1540$ ✓

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/77 & 2/77 \\ 2/77 & -1/1540 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \dfrac{61-\sqrt{9881}}{2}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ -19{,}7 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \dfrac{61+\sqrt{9881}}{2}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 79{,}7 \end{pmatrix}$

№2. Ур-ие гармон. осциллятора 4

а) $\ddot{x} + k^2 x = a\cdot\cos\omega t$ (1) $x(0)=x_0$
$x'_t(0)=V_0$

I – реш. одн. ур.

x^*: $\ddot{x} + k^2 x = 0$

$x^* = e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \,\Big|\cdot \frac{1}{e^{\lambda t}}$ т.к $e^{\lambda t} \neq 0$

$\lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm ik$

$x_1 = e^{ikt}$ $x_2 = e^{-ikt}$

ф. Эйлера:
$e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt.$

$x^* = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$

$x^* = c_1\cdot\sin kt + c_2\cos kt$

II – реш. частн. сл. неод.

Δ $\omega \neq k$

x^{**}: $A\cos\omega t + B\cos\omega t$

$x^{**''} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$. Подставим в (1)

$(-A\omega^2 + k^2 A)\cos\omega t + (-B\omega^2 + k^2 B)\sin\omega t = a\cdot\cos\omega t$

$(k^2-\omega^2)A = 1$, $(k^2-\omega^2)B = 0$

$A = \frac{1}{k^2-\omega^2}$, $B=0$; $x^{**} = \frac{a\cdot\cos\omega t}{k^2-\omega^2}$

III. общ реш. неод.

$x = x^{*} + x^{**}$

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{a\cdot\cos\omega t}{k^2-\omega^2}$$

Задача Коши.

1) $x(0) = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) + \dfrac{a\cdot\cos(0)}{k^2-\omega^2} = x_0$

$$C_1 = x_0 - \frac{a}{k^2-\omega^2}$$

2) $x'(t) = -C_1k\cdot\sin kt + C_2k\cos kt - \dfrac{a\omega}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$

$$x'_t(0) = -C_1k\cdot 0 + C_2k\cdot 1 - \frac{a\omega}{k^2-\omega^2}\cdot 0 = V_0$$

$$C_2 = \frac{V_0}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{k^2-\omega^2}\right)\cos kt + \frac{V_0}{k}\cdot\sin kt + \frac{a\cdot\cos\omega t}{k^2-\omega^2}$$

б) Вернемся к реш. сост резонанса. $(\omega = k)$

$x = \dfrac{\cos\omega t}{k^2-\omega^2}$. $\qquad x_k(t) = \lim\limits_{\omega\to k} x_\omega(t)$.

$$x_\omega(t) = \frac{\cos\omega t - \cos kt + \cos kt}{k^2-\omega^2} =$$

$$= \frac{\cos\omega t - \cos kt}{k^2-\omega^2} + \frac{\cos kt}{k^2-\omega^2}$$

однород реш / включим в $C_1\cos kt$

$$\text{Э}z_\omega(t) = \frac{\cos\omega t - \cos kt}{k^2-\omega^2} = -\frac{\cos\omega t - \cos kt}{(\omega-k)(k+\omega)}$$

$$\lim_{w\to k} z_w(t) = -\frac{\lim_{w\to k}\frac{\cos wt-\cos kt}{w-k}}{k+w} = -\frac{-t\sin kt}{2k} = \frac{t}{2k}\sin kt.$$

$$* \lim_{w\to k}\frac{\cos wt-\cos kt}{w-k} = \frac{d\cos wt}{dw}\Big|_{w=k} = -t\sin t$$ По пр. Лопиталя

Итого получаем для $k=w$:

$$x(t) = \frac{t}{2k}\cdot\sin kt$$

Ответ: ОР: $x = c_1\cos kt + c_2\sin kt + \frac{a\cdot\cos wt}{k^2-w^2}$

ЗК: $x(t) = \left(x_0 - \frac{a}{k^2-w^2}\right)\cos kt + \frac{v_0}{k}\cdot\sin kt + \frac{a\cdot\cos wt}{k^2-w^2}$