№1 Расчетка №1. Вар. 20. Четвергов Иван Гр 4. 5130201/40003.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}$. $\det A = 1\cdot 60 - 40\cdot 40 = -1540$; $\det A \neq 0$

1) Найдем A^{-1} методом исключ. Гаусса. $(A|E) \to (E|A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 40 & 60 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 0 & -1540 & -40 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 40 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/77 & -1/1540 \end{array}\right) \to$$

$40/1540 = 20(2/77)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/77 & 2/77 \\ 0 & 1 & 2/77 & -1/1540 \end{array}\right)$$

$1 - 40\cdot\frac{2}{77} = 1 - \frac{80}{77} = -\frac{3}{77}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/77 & 2/77 \\ 2/77 & -1/1540 \end{pmatrix}$$

$Ax_i = e_i$.

Проверим результат по т. Крамера. $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ $\Delta_i = ||B||$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}$ $\det b_1 = 60 - 40 = 20$ $x_1 = \frac{20}{-1540} = \frac{-3}{77}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}$ $\det b_2 = -40$ $x_2 = \frac{-40}{-1540} = \frac{2}{77}$

$b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 40 \\ 1 & 60 \end{pmatrix}$ $\det b_3 = -40$ $x_3 = \frac{2}{77}$

$b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 40 & 1 \end{pmatrix}$ $\det b_4 = 1 - 0 = 1$ $x_4 = \frac{-1}{1540}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/77 & 2/77 \\ 2/77 & -1/1540 \end{pmatrix}$$ Матрица A^{-1} совпала.

2) Найдем собств. числа λ и собств. в-ы x.

$Ax = \lambda x$; $(A - \lambda E)x = 0$ $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 40 \\ 40 & 60-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)(60-\lambda) - 40^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 61\lambda - 1540 = 0$$

$$D = 61^2 - 4\cdot(-1540) = 3751 + 6120 = 9881$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{61 - \sqrt{9881}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{61 + \sqrt{9881}}{2} \end{cases} \qquad Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$(A - \lambda_i \bar{1})\, x_i = 0$$

$$\exists x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1c_1 + 40c_2 \\ 40c_1 + 60c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \\ \lambda_1 c_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} (1-\lambda_1)c_1 + 40c_2 = 0 \\ 40c_1 + (60-\lambda_1)c_2 = 0 \end{matrix}$$

$$c_1 = \frac{40}{\lambda_1 - 1} c_2. \qquad \underset{9801}{99^2} < 9881 < \underset{10000}{100^2}; \quad \sqrt{N} \approx a + \frac{N - a^2}{2a}$$

$$\sqrt{9881} \approx 99 + \frac{80}{2\cdot 99} = 99 + \frac{\overset{0,4}{\sim}}{198} = 99{,}4$$

$$X_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 40 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ \frac{61 - 99{,}4 - 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -19{,}7 \end{pmatrix}$$

$$X_2(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 40 \\ \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ \frac{61 + 99{,}4 - 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 79{,}7 \end{pmatrix}$$

Проверка: Нормировать не буду!

1) $\mathrm{tr}A = 61$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 61$ ✓

2) $\det A = -1540$; $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{61^2 - 9881}{4} = -1540$ ✓

№2. Ур-ие гармон. осциллятора с вынужд. силой.

а) $x'' + k^2 x = \cos \omega t$ (1) $\quad x(0) = x_0$, $x'(0) = V_0$

I - реш. одн. ур.

x^*: $x'' + k^2 x = 0$

$x^* = e^{\lambda t} \quad x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{e^{\lambda t}}$ т.к $e^{\lambda t} \neq 0$

$\lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm ik$

$x_1 = e^{ikt} \quad x_2 = e^{-ikt}$

$x^* = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$

$x^* = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$

ф. Эйлера: $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$.

II - реш. частн. сл. неодн.

$\nexists\ \omega \neq k$

x^{**}: $A\cos \omega t + B \cos \omega t$

$x^{**''} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$. Подставим в (1)

$(-A\omega^2 + k^2 A)\cos \omega t + (-B\omega^2 + k^2 B)\sin \omega t = \cos \omega t$

$(k^2 - \omega^2)A = 1, \quad (k^2 - \omega^2)B = 0$

$A = \frac{1}{k^2 - \omega^2}, \; B = 0; \qquad x^{**} = \frac{\cos \omega t}{k^2 - \omega^2}$

III. общ реш. неодн.

$x = x^* + x^{**}$

$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{\cos \omega t}{k^2-\omega^2}$

Задача Коши.

1) $x(0) = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) + \frac{\cos(0)}{k^2-\omega^2} = x_0$

$C_1 = x_0 - \frac{1}{k^2-\omega^2}$

2) $x'(t) = -C_1 k\cdot\sin kt + C_2 k\cos kt - \frac{\omega}{k^2-\omega^2}\sin \omega t$

$x'(0) = -C_1 k\cdot 0 + C_2 k\cdot 1 - \frac{\omega}{k^2-\omega^2}\cdot 0 = v_0$

$C_2 = \frac{v_0}{k}$

б) Вернемся к реш. соб резонанса.

$x = \frac{\cos \omega t}{k^2-\omega^2}$. $\quad x_k(t) = \lim_{\omega \to k} x_\omega(t)$. $\quad \Pi$

$x_\omega(t) = \frac{\cos \omega t - \cos kt + \cos kt}{k^2-\omega^2} =$

$= \frac{\cos \omega t - \cos kt}{k^2-\omega^2} + \frac{\cos kt}{k^2-\omega^2}$ / → однород реш. Включим в $C_1\cos kt$

$\exists z_\omega(t) = \frac{\cos \omega t - \cos kt}{k^2-\omega^2} = -\frac{\cos \omega t - \cos kt}{(\omega-k)(k+\omega)}$

$$\lim_{w\to k} z_w(t) = -\frac{\lim_{w\to k}\frac{\cos wt-\cos kt}{w-k}}{k+w} = -\frac{-t\sin kt}{2k} = \frac{t}{2k}\sin kt.$$

$$\lim_{w\to k}\frac{\cos wt-\cos kt}{w-k} = \frac{d\cos wt}{dw}\Big|_{w=k} = -t\sin t$$

по пр. Лопиталя

Итого получаем для $k=w$:

$$x(t) = \frac{t}{2k}\cdot\sin kt$$