Taller No. 3
Teoría Electromagnética

Karen Alejandra Freire Rosero
Sonier Andrés Ortiz Castelblanco
Sarah Isabel Tejada García
Santiago Alejandro Pérez Ramos

Asignatura: Teoría Electromagnética
Profesor: Servio Tulio Pérez Merchancano, Ph.D

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Física
Popayán, Cauca
2025

Problema 2.20 Uno de los siguientes es un campo electrostático imposible. ¿Cuál?

(a) $\vec{E} = k(xy\,\hat{x} + 2yz\,\hat{y} + 3xz\,\hat{z})$

(b) $\vec{E} = k(y^2\,\hat{x} + (2xy + z^2)\,\hat{y} + 2yz\,\hat{z})$

Aquí k es una constante con las unidades apropiadas. Para la posible, halla el potencial, utilizando el origen como punto de referencia. Comprueba tu respuesta calculando ∇V [Pista: Debes seleccionar una trayectoria específica para integrar. No importa qué camino elijas, ya que la respuesta es independiente del camino, pero simplemente no puedes integrar a menos que tengas un camino definido en mente].

Solución:

Para un campo electrostático sea físicamente posible este debe ser conservativo, esto es:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

Por lo tanto se procede a realizar el cálculo del rotacional de $\vec{E}$.

Caso (a):

$\vec{E}_1 = k(xy, 2yz, 3xz)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = k \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}_1 &= k[(0-2y)\hat{x} + (0-3z)\hat{y} + (0-x)\hat{z}] \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}_1 &= k[-2y\hat{x} - 3z\hat{y} - x\hat{z}] \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,$\vec{E}_1$ no es conservativo y no es posible que sea un campo electrostático

Caso (b):

$\vec{E}_2 = k(y^2, 2xy + z^2, 2yz)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = k \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & 2xy + z^2 & 2yz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}_2 &= k[(0-0)\hat{x} + (0-0)\hat{y} + (0-0)\hat{z}] \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\vec{E}_1$ es un campo electrostático posible, y se puede encontrar el potencial para este caso.

Para ello se definiera un camino de integración (trayectoria) $(0,0,0) \to (x_0,0,0) \to (x_0,y_0,0) \to (x_0,y_0,z_0)$, como se puede ver en la figura1:

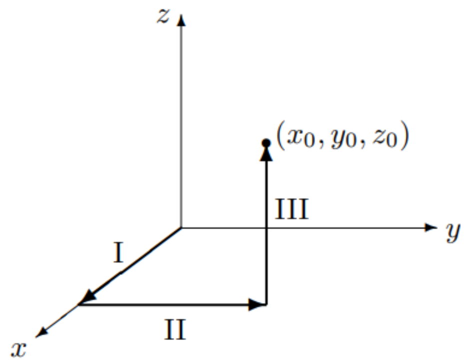

Figure 1: Camino de integración
Imagen tomada de: *Solutions Manual* de Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*.

El potencial esta dado por:

$$V = -\int_0^{(x_0,y_0,z_0)} E \cdot dl$$
$$V = -\int_I E \cdot dl - \int_{II} E \cdot dl - \int_{III} E \cdot dl$$

Calculando $E \cdot dl$

$$E \cdot dl = k[y^2 dx + (2xy + z^2)dy + 2yzdz]$$

Camino I: $(0,0,0) \to (x_0,0,0); y = z = 0; dy = dz = 0$

$$E \cdot dl = k[(0)^2 dx + (2x(0) + (0)^2)(0) + 2(0)(0)(0)]$$
$$E \cdot dl = 0$$
$$\int_I E \cdot dl = 0$$

Camino II: $(x_0,0,0) \to (x_0,y_0,0); x = x_0; z = 0; dx = dz = 0; y : 0 \to y_0$

$$E \cdot dl = k[y^2(0) + (2x_0 y + (0)^2)dy + 2y(0)(0)]$$
$$E \cdot dl = 2kx_0 y dy$$
$$\int_I E \cdot dl = 2kx_0 \int_0^{y_0} y\, dy = kx_0 y_0^2$$

Camino III: $(x_0,y_0,0) \to (x_0,y_0,z_0); x = x_0; y = y_0; dx = dy = 0; z : 0 \to z_0$

$$E \cdot dl = k[y_0^2(0) + (2x_0 y_0 + z^2)(0) + 2y_0 z dz]$$
$$E \cdot dl = 2ky_0 z dz$$
$$\int_I E \cdot dl = 2ky_0 \int_0^{z_0} z\, dz = ky_0 z_0^2$$

Sumando cada una de las contribuciones calculadas se puede obtener el potencial total:

$$\boxed{V(x,y,z) = -k(y^2 x + yz^2)}$$

Verificamos este resultado calculando el gradiente de modo que obtendremos el campo original, $\vec{E} = -\nabla V$.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla V = -ky^2\hat{x} - k(xy + z^2)\hat{y} - k2yz\hat{z}$$
$$\nabla V = -k[y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}] = -E$$

$$\boxed{E = -k[y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}]}$$

Problema 2.22 Halle el potencial a una distancia s de un hilo recto infinitamente largo que lleva una carga lineal uniforme λ. Calcula el gradiente de tu potencial y comprueba que da el campo correcto.

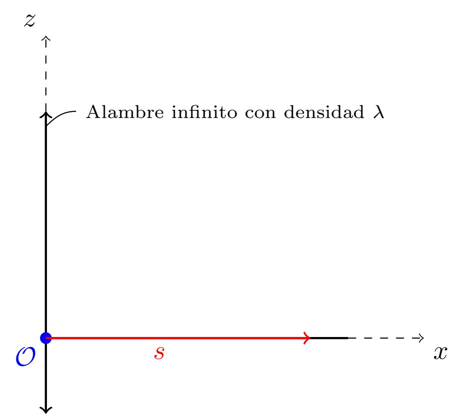

Figure 2: Alambre recto infinitamente largo

Para hallar el potencial a una distancia s del origen ($\mathcal{O}$) se plantea la integral de línea

$$\int_{s_0}^{s} \vec{E} \cdot dl$$

De modo que s_0 es el punto de referencia tal que $V(s_0) = 0$ y el $\vec{E}$ es el campo de un alambre recto infinitamente largo con dirección radial $\hat{s}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{s}\hat{s}$$

Calculando la integral tenemos

$$-\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{s}ds = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

$$\boxed{V = -\tfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\tfrac{s}{s_0}\right)}$$

Para comprobar que este resultado sea correcto calculamos el campo eléctrico usando $\vec{E} = -\nabla V$.

$$\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial s}\hat{s}$$
$$\nabla V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial s}\left(\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right)\hat{s}$$

$$\nabla V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{s_0}{s}\frac{1}{s_0}\right)\hat{s}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V = \tfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\tfrac{1}{s}\right)\hat{s}}$$

Problema 2.24 Para la configuración del Prob. 2.16, encuentre la diferencia de potencial entre un punto del eje y un punto del cilindro exterior. Tenga en cuenta que no es necesario comprometerse con un punto de referencia en particular, si utiliza la Ec. 2.22.

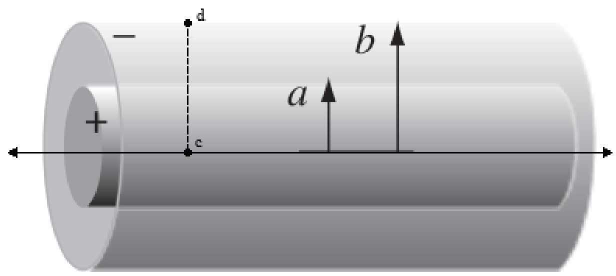

Figure 3: Figura del problema 2.16

Para encontrar la diferencia de potencial entre el punto c en el eje de los cilindros y el punto d en la superficie del cilindro de radio b, se plantea la siguiente integral dada por la ecuación 2.22:

$$V(d) - V(c) = -\int_c^d \vec{E}\cdot dl = -\int_0^d \vec{E}\cdot dl - \int_0^c \vec{E}\cdot dl$$

Sin embargo para el punto se se tiene que $V(c) = V(0) = 0$, por lo tanto para encontrar la diferencia de potencial solo se calcula la integral desde 0 hasta b

$$V(d) - V(0) = -\int_0^d \vec{E}\cdot dl$$

Del problema 2.16 conocemos el campo eléctrico del problema para:

(a) $s < a$

$$\vec{E} = \frac{\rho s}{2\epsilon_0}\hat{s}$$

(b) $a < s < b$

$$\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 s}\hat{s}$$

Por tanto para calcular la integral de $0 \to d$ la dividimos en 2, de $0 \to a$ y $a \to d$:

$$\begin{aligned} -\int_0^d \vec{E}\cdot dl &= -\int_0^a \vec{E}\cdot dl - \int_a^d \vec{E}\cdot dl \\ &= -\int_0^a \frac{\rho s}{2\epsilon_0}ds - \int_a^d \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 s}ds \\ &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[\int_0^a s ds + a^2\int_a^d \frac{1}{s}ds\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[\frac{s^2}{2}\bigg|_0^a + a^2\ln(s)\bigg|_a^b\right] \\
&= -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[\frac{a^2}{2} + a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] \\
&= -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0}\left[1 + 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{V(d) - V(0) = -\tfrac{\rho a^2}{4\epsilon_0}\left[1 + 2\ln\left(\tfrac{b}{a}\right)\right]}$$