Taller No. 3
Teoria Electromagnética

Angie Carolina Chaves
Michel Dayana Bolaños Leon
Elizabeth Muños Buitron
Ivan Dario Mipaz Chamorro

Trabajo escrito de la asignatura:
Teoría Electromagnética

Profesor:
Servio Tulio Perez Merchancano, Ph.D

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, Departamento de Física
Asunción de Popayán, Colombia
2025

Problema 2.20

Uno de estos es un campo electrostático imposible. ¿Cuál?

(a) $\mathbf{E} = k[xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3zx\hat{\mathbf{z}}]$

(b) $\mathbf{E} = k[y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2zx\hat{\mathbf{z}}]$

Donde k es una constante con las unidades adecuadas. Para el campo posible, encuentre el potencial V, usando el origen como unto de referencia. Verifique su respuesta calculando el ∇V y comparando con el campo eléctrico que encontró en el inciso a.(Pista: Debe elegir una trayectoria específica para integrar. La respuesta es independiente de la trayectoria, pero no puede integrar sin definir una.)

Solución:

Para un campo electrostático, el rotacional del campo eléctrico debe ser cero. Por lo tanto, para determinar si un campo es electrostático o no, debemos calcular el rotacional de cada uno de los campos eléctricos propuestos.

Para el campo (a)

Calculo del rotacional el rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ kxy & 2kyz & 3kxz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{d}{dy}(3kxz) - \frac{d}{dz}(2kyz) = 0 - 2ky = -2ky \\
(\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{d}{dz}(kxy) - \frac{d}{dx}(3kxz) = 0 - 3kz = -3kz \\
(\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{d}{dx}(2kyz) - \frac{d}{dy}(kxy) = 0 - kx = -kx
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -2ky\,\hat{\mathbf{x}} - 3kz\,\hat{\mathbf{y}} - kx\,\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$$

$\boxed{\text{El campo (a) es imposible}}$

Para el campo (b)

Calculamos el rotacional:

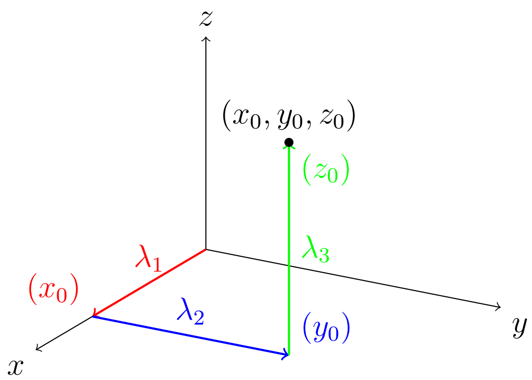
$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ky^2 & k(2xy + z^2) & 2kyz \end{vmatrix}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{d}{dy}(2kyz) - \frac{d}{dz}(kz^2) = 2kz - 2kz = 0$$
$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{d}{dz}(ky^2) - \frac{d}{dx}(2kyz) = 0 - 0 = 0$$
$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{d}{dx}(2kxy) - \frac{d}{dy}(ky^2) = 2ky - 2ky = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Cálculo del potencial para (b)

Integrando a lo largo de la trayectoria $(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$:



Trayectoria (x_0, y_0, z_0)

Parametrizando la trayectoria con respecto a un parametro t

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda[0, r_0] :\longrightarrow \mathbf{R^3}$$
$$\lambda_1 = (t,0,0),\ \lambda_1' = (1,0,0)dt$$
$$\lambda_2 = (0,t,0),\ \lambda_2' = (0,1,0)dt$$
$$\lambda_3 = (0,0,t),\ \lambda_3' = (0,0,1)dt$$
$$V(x,y,z) = -\int_0^{x_0} \mathbf{E} \cdot d\lambda_1' - \int_0^{y_o} \mathbf{E} \cdot d\lambda_2' - \int_0^{z_0} \mathbf{E} \cdot d\lambda_3'$$

Trayectoria λ_1: $(0,0,0) \to (x_0,0,0)$

$$\begin{aligned}\int_0^{x_0} \mathbf{E} \cdot d\lambda_1' &= \int_0^{x} k((0)^2, [2(t)(0) + 0^2], 2(0)) \cdot (1,0,0)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Trayectoria λ_2: $(x_0, 0, 0) \rightarrow (x_0, y_0, 0)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{y_0} \mathbf{E} \cdot d\lambda_2' &= \int_0^{y_0} k((t)^2, [2(x_o)(t) + 0^2], 2(0)(t)) \cdot (0, 1, 0)dt \\
&= \int_0^{y_0} k((t)^2, [2(x_0)(1) + 0^2], 2(0)(t)) \cdot (0, 1, 0)dt \\
&= \int_0^{y_0} 2kx_o t dt \\
&= kx_0 t^2 \Big|_0^{y_0} \\
&= kx_0 y_0^2
\end{aligned}$$

Trayectoria λ_3: $(x_0, y_0, 0) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{z_0} \mathbf{E} \cdot d\lambda_2' &= \int_0^{z_0} k((yo)^2, [2(x_o)(y_0) + t^2], 2(t)(y_0)) \cdot (0, 0, 1)dt \\
&= \int_0^{z_0} k((y_0)^2, [2(x_0)(y_0) + t^2], 2(t)(y_0)) \cdot (0, 0, 1)dt \\
&= \int_0^{z_0} 2ky_o t dt \\
&= ky_0 t^2 \Big|_0^{z_0} \\
&= ky_0 z_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x, y, z) &= -kx_0 y_0^2 - ky_0 z_0^2 \\
&= -k[x_0 y_0^2 + y_0 z_0^2]
\end{aligned}$$

En general

$$\boxed{V(x, y, z) = -k(xy^2 + yz^2)}$$

Verificación, calculando el Gradiente del potencial:

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\
\nabla V &= -k(y^2)\hat{\mathbf{x}} - k(2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} - k(2yz)\hat{\mathbf{z}} \\
\nabla V &= -k\left(y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(x, y, z) = -k(xy^2 + yz^2)}$$

Problema 2.22

Hallar el potencial eléctrico V a una distancia s de un alambre recto infinitamente largo que transporta una carga lineal uniforme λ

Solución:

Para encontrar el potencial V de un campo eléctrico dado, usamos la integral de línea del campo eléctrico sobre una trayectoria que va desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto (x,y,z)

$$V(s) = -\int_{r_o}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

para un alambre recto infinitamente largo, el campo eléctrico es radial y tiene la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{\mathbf{s}}$$

Reemplazando en la integral de línea, tenemos:

$$V(s) = -\int_{s_o}^{s} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} ds$$

$$\boxed{V(s) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_o}}$$

Para comprobar el resultado, calculamos el campo eléctrico a partir del potencial: Además, dado que el sistema esta en coordenadas cilíndricas el campo eléctrico se puede calcular como:

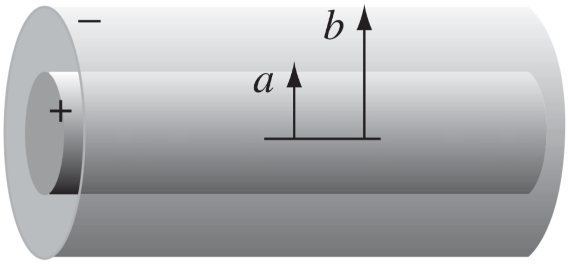
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial s}\hat{s}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_o}\right)$$
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{s}\hat{\mathbf{s}}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{\mathbf{s}}}$$

Problema 2.24

Para la configuración del problema 2.16, calcule la diferencia de potencial entre un punto en el eje y un punto en el cilindro exterior. Observe que no es necesario elegir un punto de referencia específico si se utiliza la ecuación 2.22.

Solución:



Configuración del problema 2.16

Del Problema 2.16 tenemos que el campo eléctrico es:

(a) Para $0 < s < a$ tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho s}{2\epsilon_o}\hat{s}$$

(b) para $a < s < b$ tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_o s}\hat{s}$$

La diferencia de potencial entre un punto en el eje y un punto en el cilindro exterior es:

$$V(b) - V(0) = -\int_0^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Dado el intervalo de integración se puede separar la integral en dos partes:

Desde $a < s < b$ y $0 < s < a$

$$\begin{aligned}
V(b) - V(0) &= -\int_a^b \frac{\rho a^2}{2\epsilon_o s}ds - \int_0^a \frac{\rho s}{2\epsilon_o}ds \\
&= -\left[\frac{\rho a^2}{2\epsilon_o}\ln(s)\right]_a^b - \left[\frac{\rho s^2}{4\epsilon_o}\right]_0^a \\
&= -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_o}\left[\ln(b) - \ln(a)\right] - \left[\frac{\rho a^2}{4\epsilon_o} + 0\right] \\
&= -\left[\frac{\rho a^2}{2\epsilon_o}\ln\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{\rho a^2}{4\epsilon_o}\right] \\
&= -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_o}\ln\frac{b}{a} - \frac{\rho a^2}{4\epsilon_o}
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(b) - V(0) = -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_o}\left(2\ln\frac{b}{a} + 1\right)}$$