Taller No. 4
Teoria Electromagnética

Angie Carolina Chaves
Michel Dayana Bolaños Leon
Elizabeth Muños Buitron
Ivan Dario Mipaz Chamorro

Trabajo escrito de la asignatura:
Teoría Electromagnética

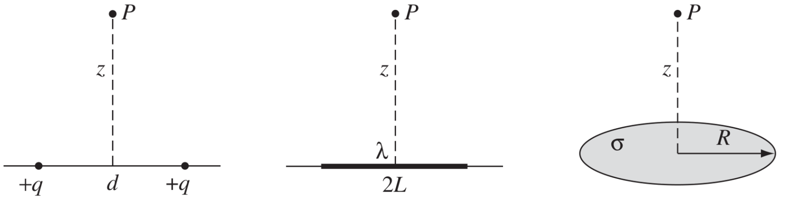
Profesor:
Servio Tulio Perez Merchancano, Ph.D

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, Departamento de Física
Asunción de Popayán, Colombia
2025

Problema 2.25:

Usando las Ecs. 2.27 y 2.30, encuentra el potencial a una distancia z sobre el centro de las distribuciones de carga en la Fig. 2.34. En cada caso, calcula el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla V$, y compara tus respuestas con los Ej. 2.1, 2.2 y el Prob. 2.6, respectivamente.

Supón que cambiamos la carga de la derecha en la Fig. 2.34a a $-q$; ¿cuál sería entonces el potencial en P? ¿Qué campo sugiere eso? Compara tu respuesta con el Prob. 2.2, y explica cuidadosamente cualquier discrepancia.



(a) Two point charges (b) Uniform line charge (c) Uniform surface charge

FIGURE 2.34

Solución

- Potencial debido a cargas puntuales (Ec. 2.27):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potencial debido a una distribución continua (Ec. 2.30):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d\tau'$$

(a): Dos Cargas Puntuales

Ubicación de las cargas:

$$\mathbf{r}_1 = \left(-\frac{d}{2}, 0, 0\right), \quad \mathbf{r}_2 = \left(+\frac{d}{2}, 0, 0\right)$$

Punto de observación:

$$\mathbf{r} = (0, 0, z)$$

Se tiene:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}\right)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{(d/2)^2 + z^2}}$$

Campo: Se tiene:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Dado que el punto está sobre el eje z, solo se realiza la derivada respecto a z:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

Entonces:

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

$$\mathbf{E} - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dV}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}\right)\hat{z}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\left[z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right)\hat{z}$$

$$\mathbf{E} = \frac{qz}{2\pi\varepsilon_0\left[z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\hat{z}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el ejemplo 2.1

Caso adicional: una carga es $-q$

Supongamos ahora que la carga del lado derecho en el inciso (a) es $-q$. Entonces, el potencial en el eje z es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{z^2 + (d/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{z^2 + (d/2)^2}}\right) = 0$$

Donde:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = 0$$

Pero esto entra en contradicción con la respuesta del Problema 2.2.Para este caso solo se conoce V en el eje z, y con eso no se puede calcular $E_x = -\partial V/\partial x$ ni $E_y = -\partial V/\partial y$.

Esto era aceptable en el caso original (a) porque, por simetría, sabíamos que $E_x = E_y = 0$, y por lo tanto todo el campo apuntaba en la dirección $\hat{z}$. Sin embargo, al cambiar una de las cargas a $-q$, el sistema ya no es simétrico respecto al eje z, y ahora el campo eléctrico apunta en la dirección x.

(b) Línea de carga uniforme

Elemento de carga:

$$dq = \lambda\, dx$$

Vector fuente:

$$\mathbf{r}' = (x, 0, 0), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right)$$

Aplicando los límites:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L+\sqrt{L^2+z^2}\right) - \ln\left(-L+\sqrt{L^2+z^2}\right)\right]$$

Usando propiedades logarítmicas:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{-L+\sqrt{L^2+z^2}}\right)$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado:

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{z}\right)$$

Campo Eléctrico:

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Usamos la regla de derivación de un logaritmo de cociente:

$$\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Donde:
$f(z) = L+\sqrt{L^2+z^2} \Rightarrow f'(z) = \frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}}$
$g(z) = z \Rightarrow g'(z) = 1$
Entonces:

$$\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{(L+\sqrt{L^2+z^2})\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{1}{z}\right)$$

Por tanto, el campo eléctrico en la dirección $\hat{z}$ es:

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{(L+\sqrt{L^2+z^2})\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{1}{z}\right)\hat{z}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el ejemplo 2.2

(c): Disco con Carga Superficial Uniforme

Elemento de carga:

$$dA = r\,dr\,d\phi$$

$$dq = \sigma\,dA = \sigma r\,dr\,d\phi$$

Punto de observación: $\mathbf{r} = (0, 0, z)$
Vector fuente: $\mathbf{r}' = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\sigma\,r\,dr\,d\phi}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\phi\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\pi r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Sustituyendo:

$$u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr \Rightarrow r\,dr = \frac{du}{2}$$

$$V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R u^{-1/2}\frac{du}{2r}$$

$$V = \frac{\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R u^{-1/2}\,du$$

$$V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[2u^{1/2}\right]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2} - z\right]$$

Campo:

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

$$E = -\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)\right]$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{dz}\sqrt{z^2+R^2} - \frac{d}{dz}z\right)$$

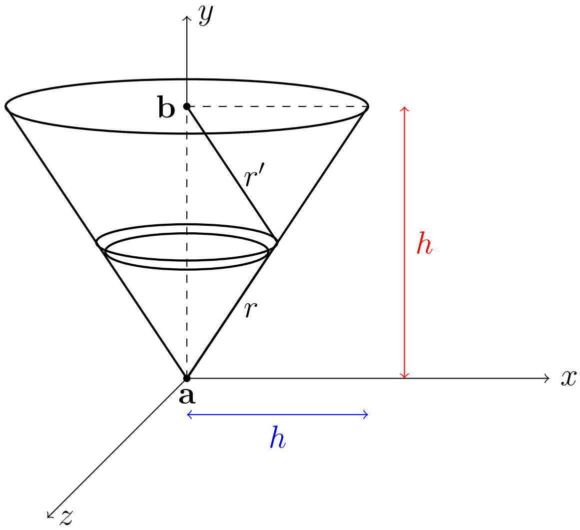
$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{z}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el problema 2.6

Problema 26

Una superficie cónica (como un cono de helado vacío) tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. La altura del cono es h, al igual que el radio de la parte superior. Encuentra la diferencia de potencial entre los puntos a (el vértice del cono) y b (el centro de la parte superior).



Superficie cónica

Solución

El potencial eléctrico debido a una distribución superficial de carga es:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma\, da}{r},$$

donde r es la distancia desde el elemento de área da hasta el punto P.

Sea R la longitud de la generatriz del cono:

$$R = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + h^2} = h\sqrt{2}.$$

El elemoto diferencial de area da en coordenadas esféricas es:

$$da = (r \sin\theta)\, dr d\phi = \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr d\phi$$

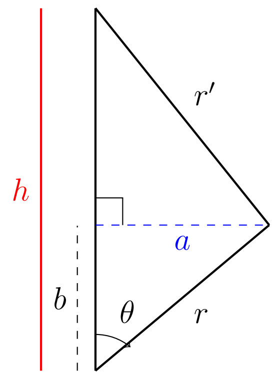
Potencial en el vértice a

En el vértice a, la distancia desde un elemento da hasta a es r.

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\sigma\,(r\sin\theta)\,dr}{r} \\
&= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R dr \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}R \ \ , Donde\, R = \sqrt{2}h \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\,h\sqrt{2} \\
&= \frac{\sigma\, h}{2\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

Potencial en el centro de la base b

En el centro de la base b, situado sobre el eje del cono a una distancia h del vértice, la distancia a un punto de la superficie es:



Triángulo con lados r, h y r', y sus proyecciones a y b.

En el triángulo superior de la se tiene un ángulo recto en, luego por pitàgoras

$$r'^2 \ = \ a^2 + (h - b)^2.$$

Definición de proyecciones en el triángulo

$$a \ = \ r\sin\theta \quad \text{y} \quad b \ = \ r\cos\theta.$$

Sustituyendo,

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= \ (r\sin\theta)^2 + \big(h - r\cos\theta\big)^2 \\
&= \ r^2\sin^2\theta + h^2 + r^2\cos^2\theta - 2hr\cos\theta \\
&= \ r^2 + h^2 - 2\,h\,r\cos\theta,
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la distancia r' entre el punto b y un elemento de carga da en la superficie del cono es: $r'^2 = r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta$.

$$r' = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\theta}, \quad \theta = \pi/4$$

$$r'(r) = \sqrt{r^2 + h^2 - \sqrt{2}\,h\,r}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma\,(2\pi\,r\sin\theta)\,dr}{r'(r)} \\ &= \frac{\sigma\sin\theta}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \sqrt{2}\,h\,r + h^2}}. \end{aligned}$$

Para evaluar la integral, completamos el cuadrado:

$$r^2 - \sqrt{2}\,h\,r + h^2 = \left(r - \tfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{h^2}{2}.$$

Con el cambio $u = r - \frac{h}{\sqrt{2}}$, $dr = du$, $u \in [-h/\sqrt{2},\, h/\sqrt{2}]$,

$$\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{(r - \frac{h}{\sqrt{2}})^2 + \frac{h^2}{2}}} = \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \frac{u + \frac{h}{\sqrt{2}}}{\sqrt{u^2 + \frac{h^2}{2}}}\,du = I_1 + I_2,$$

Resolviendo la integral I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 + \frac{h^2}{2}}} \\ &= \left[\sqrt{u^2 + h^2/2}\right]_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \\ &= h - h \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la integral I_2:

$$I_2 = \frac{h}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{h}{\sqrt{2}}}^{+\frac{h}{\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Sea

$$u = \frac{h}{\sqrt{2}}\tan\theta, d\ \ u = \frac{h}{\sqrt{2}}\sec^2\theta, d\ \ \theta \quad \sqrt{u^2 + \left(\tfrac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{h}{\sqrt{2}}\sec\theta,$$

$$\theta_1 = \arctan\!\big(-1\big) = -\tfrac{\pi}{4}, \theta_2 = \arctan\!(+1) = +\tfrac{\pi}{4},$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{h}{\sqrt{2}} \sec^2\theta \, d\theta}{\frac{h}{\sqrt{2}} \sec\theta} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec\theta \, d\theta \\
&= \frac{h}{\sqrt{2}} \Big[\ln\big|\sec\theta + \tan\theta\big|\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2}} \Big(\ln\big(\sqrt{2}+1\big) - \ln\big(\sqrt{2}-1\big)\Big) \\
&= \frac{h}{\sqrt{2}} \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2}} \ln\big((\sqrt{2}+1)^2\big)
\end{aligned}
$$

Se obtiene:

$$I_2 = \frac{2h}{\sqrt{2}} \ln\Big(\sqrt{2}+1\Big).$$

Por tanto

$$V(b) = \frac{\sigma \sin\theta}{2\varepsilon_0} I_2 = \frac{\sigma\, h}{2\varepsilon_0} \ln\Big(\sqrt{2}+1\Big).$$

Diferencia de potencial

Finalmente

$$V(a) - V(b) = \frac{\sigma\, h}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma\, h}{2\varepsilon_0} \ln\Big(\sqrt{2}+1\Big)$$

$$\boxed{V(a) - V(b) = \frac{\sigma\, h}{2\varepsilon_0}\Big(1 - \ln\Big(\sqrt{2}+1\Big)\Big).}$$