

Taller No. 4

Teoria Electromagnética

Angie Carolina Chaves
Michel Dayana Bolaños Leon
Elizabeth Muños Buitron
Ivan Dario Mipaz Chamorro

Trabajo escrito de la asignatura:
Teoría Electromagnética

Profesor:
Servio Tulio Perez Merchancano, Ph.D

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, Departamento de Física
Asunción de Popayán, Colombia
2025

Problema 2.25:

Usando las Ecs. 2.27 y 2.30, encuentra el potencial a una distancia z sobre el centro de las distribuciones de carga en la Fig. 2.34. En cada caso, calcula el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla V$, y compara tus respuestas con los Ej. 2.1, 2.2 y el Prob. 2.6, respectivamente.

Supón que cambiamos la carga de la derecha en la Fig. 2.34a a $-q$; ¿cuál sería entonces el potencial en P ? ¿Qué campo sugiere eso? Compara tu respuesta con el Prob. 2.2, y explica cuidadosamente cualquier discrepancia.

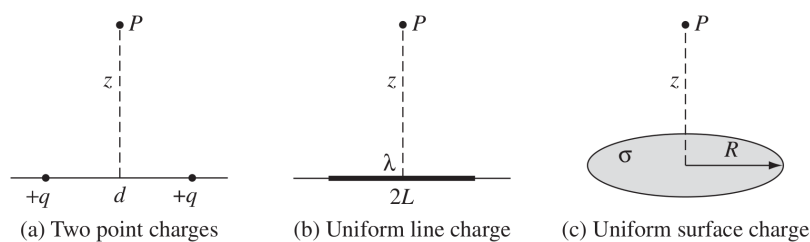


FIGURE 2.34

Solución

- Potencial debido a cargas puntuales (Ec. 2.27):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potencial debido a una distribución continua (Ec. 2.30):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

(a): Dos Cargas Puntuales

Ubicación de las cargas:

$$\mathbf{r}_1 = \left(-\frac{d}{2}, 0, 0\right), \quad \mathbf{r}_2 = \left(+\frac{d}{2}, 0, 0\right)$$

Punto de observación:

$$\mathbf{r} = (0, 0, z)$$

Se tiene:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(d/2)^2 + z^2}}$$

Campo: Se tiene:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Dado que el punto está sobre el eje z , solo se realiza la derivada respecto a z :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{dV}{dz} \\ \mathbf{E} &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{dV}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) \hat{z} \\ \mathbf{E} &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{\left[z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right]^{3/2}} \right) \hat{z} \\ \mathbf{E} &= \frac{qz}{2\pi\epsilon_0 \left[z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right]^{3/2}} \hat{z} \end{aligned}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el ejemplo 2.1

Caso adicional: una carga es $-q$

Supongamos ahora que la carga del lado derecho en el inciso (a) es $-q$. Entonces, el potencial en el eje z es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{z^2 + (d/2)^2}} - \frac{q}{\sqrt{z^2 + (d/2)^2}} \right) = 0$$

Donde:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = 0$$

Pero esto entra en contradicción con la respuesta del Problema 2.2. Para este caso solo se conoce V en el eje z , y con eso no se puede calcular $E_x = -\partial V/\partial x$ ni $E_y = -\partial V/\partial y$.

Esto era aceptable en el caso original (a) porque, por simetría, sabíamos que $E_x = E_y = 0$, y por lo tanto todo el campo apuntaba en la dirección \hat{z} . Sin embargo, al cambiar una de las cargas a $-q$, el sistema ya no es simétrico respecto al eje z , y ahora el campo eléctrico apunta en la dirección x .

(b) Línea de carga uniforme

Elemento de carga:

$$dq = \lambda dx$$

Vector fuente:

$$\mathbf{r}' = (x, 0, 0), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + z^2} \right)$$

Aplicando los límites:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + z^2} \right) \right]_{-L}^L$$
$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(L + \sqrt{L^2 + z^2} \right) - \ln \left(-L + \sqrt{L^2 + z^2} \right) \right]$$

Usando propiedades logarítmicas:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + z^2}}{-L + \sqrt{L^2 + z^2}} \right)$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado:

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + z^2}}{z} \right)$$

Campo Eléctrico:

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Usamos la regla de derivación de un logaritmo de cociente:

$$\frac{d}{dz} \ln \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Donde:

$$f(z) = L + \sqrt{L^2 + z^2} \Rightarrow f'(z) = \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}}$$

$$g(z) = z \Rightarrow g'(z) = 1$$

Entonces:

$$\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{(L + \sqrt{L^2 + z^2})\sqrt{L^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right)$$

Por tanto, el campo eléctrico en la dirección \hat{z} es:

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{(L + \sqrt{L^2 + z^2})\sqrt{L^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right) \hat{z}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el ejemplo 2.2

(c): Disco con Carga Superficial Uniforme

Elemento de carga:

$$dA = r dr d\phi$$

$$dq = \sigma dA = \sigma r dr d\phi$$

Punto de observación: $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ Vector fuente: $\mathbf{r}' = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Potencial:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma r dr d\phi}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r d\phi dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Sustituyendo:

$$u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow r dr = \frac{du}{2}$$

$$V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R u^{-1/2} \frac{du}{2r}$$

$$V = \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R u^{-1/2} du$$

$$V = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} [2u^{1/2}]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} - z]$$

Campo:

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

$$E = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \right]$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{d}{dz} \sqrt{z^2 + R^2} - \frac{d}{dz} z \right)$$

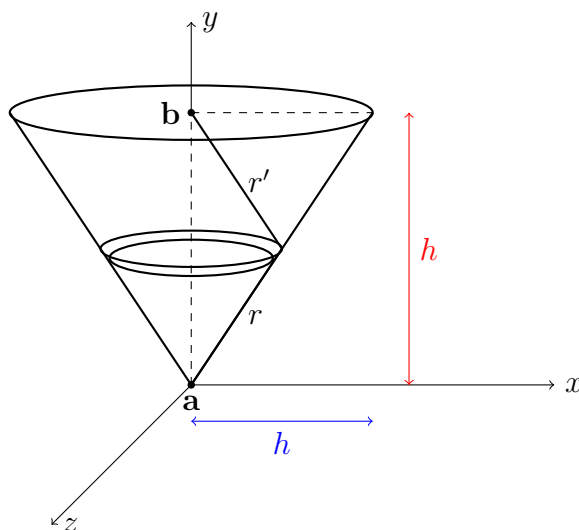
$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{z}$$

Se puede ver que el resultado concuerda con el problema 2.6

Problema 26

Una superficie cónica (como un cono de helado vacío) tiene una densidad superficial de carga uniforme σ . La altura del cono es h , al igual que el radio de la parte superior. Encuentra la diferencia de potencial entre los puntos a (el vértice del cono) y b (el centro de la parte superior).



Superficie cónica

Solución

El potencial eléctrico debido a una distribución superficial de carga es:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma da}{r},$$

donde r es la distancia desde el elemento de área da hasta el punto P .

Sea R la longitud de la generatriz del cono:

$$R = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + h^2} = h\sqrt{2}.$$

El elemento diferencial de área da en coordenadas esféricas es:

$$da = (r \sin \theta) dr d\phi = \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\phi$$

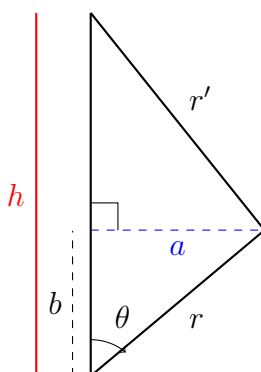
Potencial en el vértice a

En el vértice a , la distancia desde un elemento da hasta a es r .

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\sigma (r \sin \theta) dr}{r} \\ &= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R dr \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} R, \text{ Donde } R = \sqrt{2}h \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} h\sqrt{2} \\ &= \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Potencial en el centro de la base b

En el centro de la base b , situado sobre el eje del cono a una distancia h del vértice, la distancia a un punto de la superficie es:



Triángulo con lados r , h y r' , y sus proyecciones a y b .

En el triángulo superior de la se tiene un ángulo recto en, luego por pitàgoras

$$r'^2 = a^2 + (h - b)^2.$$

Definición de proyecciones en el triángulo

$$a = r \sin \theta \quad \text{y} \quad b = r \cos \theta.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} r'^2 &= (r \sin \theta)^2 + (h - r \cos \theta)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta + h^2 + r^2 \cos^2 \theta - 2hr \cos \theta \\ &= r^2 + h^2 - 2hr \cos \theta, \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia r' entre el punto b y un elemento de carga da en la superficie del cono es: $r'^2 = r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta$.

$$r' = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \cos \theta}, \quad \theta = \pi/4$$

$$r'(r) = \sqrt{r^2 + h^2 - \sqrt{2} h r}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma (2\pi r \sin \theta) dr}{r'(r)} \\ &= \frac{\sigma \sin \theta}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \sqrt{2} h r + h^2}}. \end{aligned}$$

Para evaluar la integral, completamos el cuadrado:

$$r^2 - \sqrt{2} h r + h^2 = \left(r - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{h^2}{2}.$$

Con el cambio $u = r - \frac{h}{\sqrt{2}}$, $dr = du$, $u \in [-h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}]$,

$$\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{(r - \frac{h}{\sqrt{2}})^2 + \frac{h^2}{2}}} = \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \frac{u + \frac{h}{\sqrt{2}}}{\sqrt{u^2 + \frac{h^2}{2}}} du = I_1 + I_2,$$

Resolviendo la integral I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \frac{h^2}{2}}} \\ &= \left[\sqrt{u^2 + h^2/2} \right]_{-h/\sqrt{2}}^{h/\sqrt{2}} \\ &= h - h \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la integral I_2 :

$$I_2 = \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{h}{\sqrt{2}}}^{+\frac{h}{\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

Sea

$$u = \frac{h}{\sqrt{2}} \tan \theta, \quad du = \frac{h}{\sqrt{2}} \sec^2 \theta, \quad \sqrt{u^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{h}{\sqrt{2}} \sec \theta,$$

$$\theta_1 = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \arctan(+1) = +\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{h}{\sqrt{2}} \sec^2 \theta d\theta}{\frac{h}{\sqrt{2}} \sec \theta} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec \theta d\theta \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} \left[\ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} \left(\ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(\sqrt{2} - 1) \right) \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} \ln((\sqrt{2} + 1)^2) \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$I_2 = \frac{2h}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Por tanto

$$V(b) = \frac{\sigma \sin \theta}{2\varepsilon_0} I_2 = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Diferencia de potencial

Finalmente

$$V(a) - V(b) = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$V(a) - V(b) = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \left(1 - \ln(\sqrt{2} + 1) \right).$$