Identidades de Cálculo Vectorial

(1) $\nabla(g^2)$

$$\nabla(g^2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(g^2),\ \frac{\partial}{\partial y}(g^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(g^2) \right).$$

Usando la regla de la derivada,

$$\frac{\partial}{\partial x}(g^2) = 2\,g\,\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(g^2) = 2\,g\,\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(g^2) = 2\,g\,\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla(g^2) = 2\,g\,\nabla g.$$

QED.

(2a) $\nabla \cdot (\lambda\,\mathbf{A})$

Sea λ una función escalar y $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ un campo vectorial. Entonces,

$$\nabla \cdot (\lambda\,\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda A_z).$$

Aplicando la regla del producto en cada término:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A_x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\,A_x + \lambda\,\frac{\partial A_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda A_y) = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\,A_y + \lambda\,\frac{\partial A_y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\lambda A_z) = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\,A_z + \lambda\,\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Sumando,

$$\nabla \cdot (\lambda\,\mathbf{A}) = \lambda\,(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \lambda).$$

QED.

(2b) $\nabla \times (\lambda\, \mathbf{A})$

Para el rotacional de un producto escalar con un vector:

$$\nabla \times (\lambda\, \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \lambda A_x & \lambda A_y & \lambda A_z \end{vmatrix}.$$

Nuevamente, al desarrollar se ve que cada término produce una parte con $\nabla\lambda \times \mathbf{A}$ y otra con $\lambda\, (\nabla \times \mathbf{A})$, por lo que:

$$\nabla \times (\lambda\, \mathbf{A}) = \nabla\lambda \times \mathbf{A} + \lambda\, \big(\nabla \times \mathbf{A}\big).$$

QED.

(3) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

Si $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, entonces:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Esta es la conocida identidad que relaciona la divergencia de un producto cruzado con rotacionales:

QED.

(4) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

La identidad estándar para el rotacional de un producto cruzado es:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\, \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\, \mathbf{B} + \mathbf{A}\, (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}\, (\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

QED.

(5) $\nabla \times \big[f\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\big]$

Sea f un escalar y $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ campos vectoriales.