

Основы теории графов

1 Basics

Теор. 1.1.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

Опр. 1.1. *Мост* – ребро, при его удалении граф развалится

1.1 Задачи

1.2 Иллюстрации

2 Вершинная связность

Л. 2.0.1 (Хёринг). \max кол-во путей $P(x \rightarrow y)$ (не перес. во внутр. точках) = $|R|$ – \max мн-ва вершин, отделяющих x и y .

Теор. 2.1 (Менгер). Для \forall несмежных вершин $x, y \in V$ $\nexists e(x, y)$ размер мин. **верш.-разделяющего** мн-ва $|R_{\min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ числу простых путей $P(x \rightarrow y)$, отличных во внутренних точках.

Теор. 2.2 (Уитни). G – k -связный $\iff \forall x, y \in V, \exists k$ простых путей $P(x \rightarrow y)$, не пересекающихся во внутренних точках $P_i \neq P_j$ (внут.).

Теор. 2.3. $\exists \kappa$ – вершинная связность, λ – рёберная связность,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

$$\text{где } \delta(G) = \min_V \deg(v)$$

2.1 Задачи

2.2 Иллюстрации

3 Рёберная связность

Теор. 3.1 (Форд-Фалкерсон). \max поток Q через сеть = пропускной способности минимального S - T разреза.

Теор. 3.2 (Менгер “рёберная”). Для \forall несмежных вершин $x, y \in V$ $\nexists e(x, y)$ размер \min **рёберно-разделяющего** мн-ва $|R_{\min}^{\text{edge}}(x \leftrightarrow y)| = \max$ числу простых **рёберно-непересекающихся** путей $P(x \rightarrow y)$.

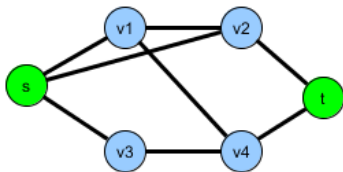
3.1 Задачи

Зад. 3.1. Рассмотрим граф G с двумя выделенными несмежными вершинами s и t . Множество вершин X , не содержащее вершин s и t , назовём вершинным разрезом, если после его удаления из графа пути между s и t будут отсутствовать.

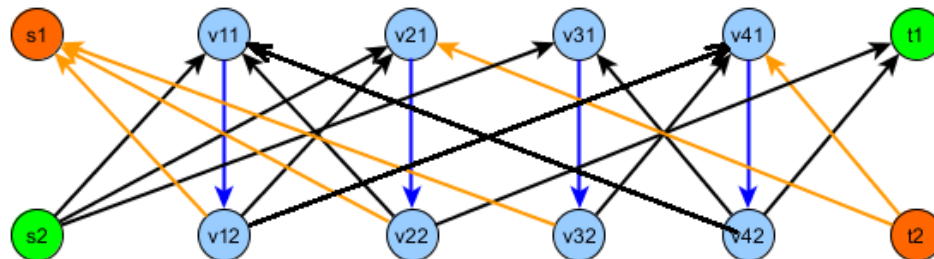
Рассмотрим наряду с графом G граф H , полученный с помощью следующей процедуры. Каждую вершину v_i графа G разделим на две вершины v_{i1} и v_{i2} , которые дополнительно соединим направленным ребром (v_{i1}, v_{i2}) в случае, если v_i отлична от s и от t . Каждое ребро v_i, v_j заменим на два ребра (v_{i2}, v_{j1}) и (v_{j2}, v_{i1}) .

Из получившегося графа H получим сеть H' , приписав каждому ребру пропускную способность 1, в качестве истока взяв s_2 , а в качестве стока — t_1 . Докажите, что величина максимального потока в сети H' равна величине минимального вершинного разреза в графе G .

Доказательство. В качестве иллюстрации своих рассуждений приведу пример исходного графа:



и сети, полученной из него по правилам в условии задачи:



Для краткости буду называть вершины сети вида v_{i1} чётными полувершинами (верхний ряд на рисунке), а вершины вида v_{i2} — чётными полувершинами.

Во-первых, заметим, что только у стока (s_2) допустим нулевой входной поток, а значит вершину t_2 без входящих рёбер можно из рассмотрения выбросить. Поток из неё во все оранжевые рёбра всегда будет нулевым. Аналогично выбрасываем вершину s_1 (у неё исходящий поток тоже ноль) и идущие к ней оранжевые рёбра, т.к. поток через них всегда будет нулевым.

Запустив на нашу сеть алгоритм Форда-Фалкерсона, мы найдём максимальный поток, который определяется (по теореме) минимальным S-T-разрезом. Попробуем угадать, какие рёбра в него войдут. Мы хотим получить разрез с минимальным потоком. Такие разрезы легче найти среди разрезом с минимальной пропускной способностью. Поскольку пропускная способность всех рёбер по правилам задачи одинакова и равна 1, мы ищем разрез с минимальным числом рёбер из S-половины в T-половину, причём рёбра, идущие из T в S (в обратном направлении) в разрезе не учитываются.

Рассмотрим какую-нибудь пару полувершин, например v_{11} и v_{12} . Если бы нечётная полувершина входила во множество T разреза, то мы бы учитывали входящие в неё рёбра из вершин s_2 , v_{22} , v_{42} . Если бы мы включили её в S-половину разреза вместе с s_2 , а v_{22} и v_{42} в T-половину, то все входящие в неё рёбра не учитывались бы (все рёбра из зелёной s_2 находятся внутри S-половины, а v_{22} и v_{42} были

бы "обратными" $T \rightarrow S$ -рёбрами). Учитывалось бы только единственное исходящее - вертикальное синее ребро ($v_{11} \rightarrow v_{12}$).

Так же и в целом по построению сети ситуация такова: только синие рёбра (рёбра вида $v_{i1} \rightarrow v_{i2}$) идут сверху вниз, а все остальные снизу вверх. Поэтому минимальный S-T разрез будет иметь вид: S - это какое-то подмножество нечётных полувершин (верхний синий ряд) плюс s_2 , а T - какое-то подмножество чётных полувершин (нижний синий ряд) плюс t_1 . Соответственно рёбра в найденном минимальном разрезе будут из подмножества синих рёбер.

Теперь заметим, что каждое синее ребро взаимно однозначно соответствует чётно-нечётной паре полувершин в H , т.е. их вершине-прототипу в G , и его удаление соответствует удалению этой вершины (т.е. удаление некоторого $(v_{i1} \rightarrow v_{i2})$ в H однозначно соответствует удалению v_i в G), а минимальный рёберный разрез по синим рёбрам в H соответствует минимальному разделяющему множеству вершин в G .

Найденный алгоритмом Форда-Фалкерсона максимальный поток – это поток через минимальный рёберный разрез в H' (какой бы он ни был, он будет среди синих рёбер) и соответствует такому набору рёбер в H , что при его удалении путей между s_2 и t_1 не останется. Таким образом, максимальный поток в H' даст нам размер минимального вершинно-разделяющего множества в G . \square

3.2 Иллюстрации

4 Паросочетания

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	α	α'	max
покрытие	β	β'	min
	вершинное	п-сочетание	

Св. 4.0.1. Если S – независ.мн-во вершин, то \bar{S} – покрытие (необязательно max).
Замечание: это неверно для рёбер.

Теор. 4.1 (Галаи).

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

Теор. 4.2 (Кёниг). В \forall 2-дольном графе $B(m,n)$: $\beta = \alpha'$

Опр. 4.1. Кубический граф – регулярный ($\deg v_i = \text{const}$) граф: $\deg = 3$

Св. 4.1.1. В кубическом графе $|V|$ – чётное

Теор. 4.3 (Татт). \exists совершенное п.с. \iff при удалении $\forall S \subset V$ образуется нечётных компонент

$$C_o(G \setminus S) \leq |S|$$

Сл. 4.3.1 (Петерсен). В кубическом графе \exists с.п.с., если $N(\text{мостов}) \leq 2$

Св. 4.1.2. В чётном графе если $C_o(G \setminus S) \geq |S|$ то $C_o(G \setminus S) \geq |S| + 2$

Опр. 4.2. Дефицит – число вершин, не покрытых максимальным п.с.

$$\text{def}(G) = |V| - 2 \max |M|$$

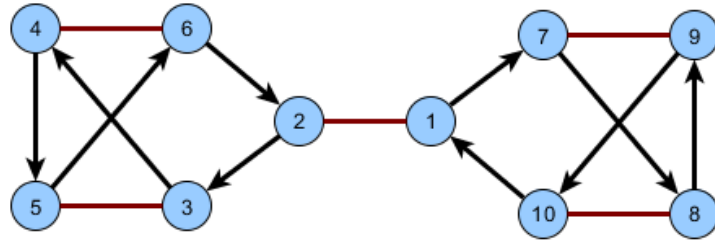
Теор. 4.4 (Татта-Бержа). $\text{def}(G) = \max_{S \subset V} (C_o(G \setminus S) - |S|)$

Сл. 4.4.1. $\text{def} \equiv |V| \pmod{2}$

4.1 Задачи

Зад. 4.1. Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, можно покрыть путями длины 3, не пересекающимися по рёбрам.

Доказательство. В таком графе найдётся совершенное паросочетание. Удаляя его, мы получаем некоторый подграф. Каждая вершина в нём имеет степень 2. Значит, подграф состоит из циклов. Сориентируем рёбра каждого цикла графа в одном направлении:



У каждой вершины будет одно входящее, одно исходящее и одно удалённое “совершенное” ребро. Пути длины 3 строим так: ребро $u, v \in M$, ребро исходящее из v , ребро исходящее из u . \square

Зад. 4.2. Назовём граф критическим, если в нём нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иначе говоря, для любой вершины в графе есть паросочетание, покрывающее все вершины, кроме неё. Докажите, что $c_o(G \setminus S) - |S| \leq -1$ для любого непустого множества S вершин критического графа.

Доказательство. Рассмотрим произвольное непустое множество S в графе G и выделим произвольную (возможно, единственную, если $|S| = 1$) вершину $x \in S$. Обозначим $G' = G \setminus x$ и $S' = S \setminus x$. Заметим, что $|S| = |S'| + 1$. Тогда: $G \setminus S = G \setminus (S' \cup x) = (G \setminus x) \setminus S' = G' \setminus S'$. По условию задачи, в G' всегда найдётся совершенное паросочетание, а значит: $\text{def}(G') = \max_{S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S''] = 0$.

Соединяя вместе эти формулы, получаем: $C_o(G \setminus S) - |S| = C_o(G' \setminus S') - (|S'| + 1) = [C_o(G' \setminus S') - |S'|] - 1 \leq \max_{S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S''] - 1 = \text{def}(G') - 1 = 0 - 1 = -1$

Что и требовалось доказать. \square

4.2 Иллюстрации

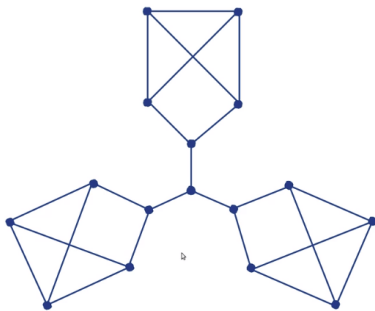


Рис. 1: Кубический граф

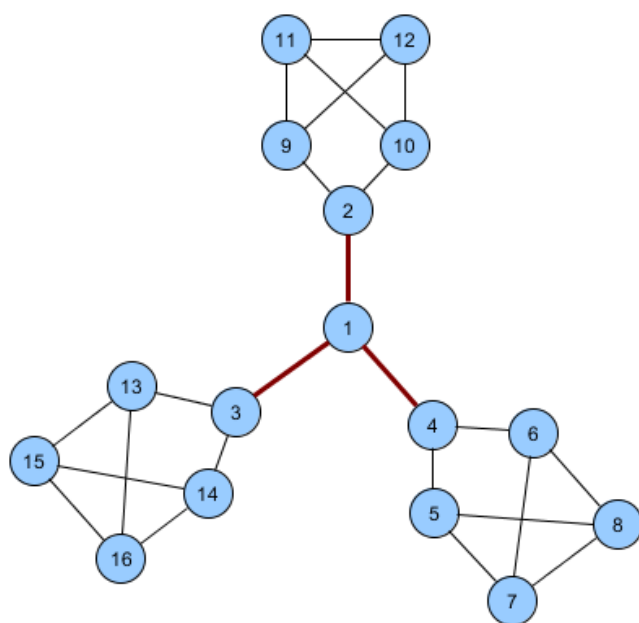


Рис. 2: Мин. (16 вершин) кубический граф с 3 мостами (сов.п.с. \nexists)

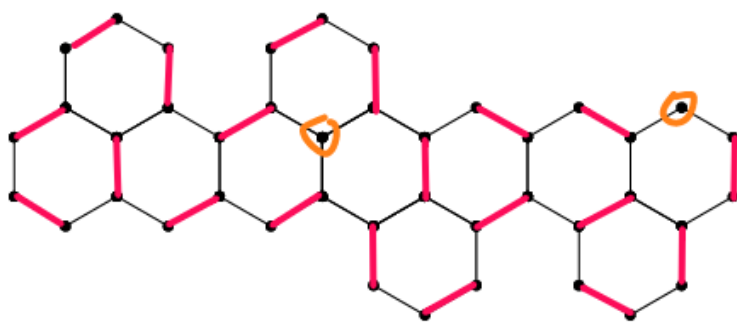


Рис. 3: Дефицит графа