

# Основы теории графов. Теория.

## 1 Основы

**Опр. 1.1.** Цикл - замкнутый маршрут, **рёбра** не повторяются?????

**Опр. 1.2.** Простой цикл - замкнутый маршрут, **рёбра и вершины** не повторяются

**Теор. 1.1.**

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

**Теор. 1.2.** В дереве  $V = E + 1$

«TODO»...

## 2 Деревья

«TODO»...

## 3 Эйлеровы графы

**Опр. 3.1** (Цикл Эйлера). проходит все **рёбра** по одному разу

**Теор. 3.1.** Цикл Эйлера  $\exists \iff$  степень всех вершин чётная

«TODO»...

## 4 Паросочетания I

«TODO»...

## 5 Гамильтоновы графы

**Опр. 5.1** (Цикл Гамильтона). проходит все **вершины** по одному разу

«TODO»...

## 6 Графы деБрейна

«TODO»...

## 7 Вершинная связность

**Опр. 7.1** (Точка сочленения). если удалить, то распадётся.

**Лемма 7.1** (Хёринг).  $\max$  кол-во путей  $P(x \rightarrow y)$  (не перес. во внутр. точках) =  $|R|$  –  $\max$  мн-ва вершин, отделяющих  $x$  и  $y$ .

**Теор. 7.1** (Менгер). Для  $\forall$  несмежных вершин  $x, y \in V \nexists e(x, y)$  размер мин. **верш.-разделяющего** мн-ва  $|R_{\min}(x \leftrightarrow y)| = \max$  числу простых путей  $P(x \rightarrow y)$ , отличных во внутренних точках.

**Теор. 7.2** (Уитни).  $G - k$ -связный  $\iff \forall x, y \in V, \exists k$  простых путей  $P(x \rightarrow y)$ , не пересекающихся во внутренних точках  $P_i \neq P_j$  (внут.).

**Теор. 7.3.**  $\lceil \kappa - \text{вершинная связность}, \lambda - \text{рёберная связность},$

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

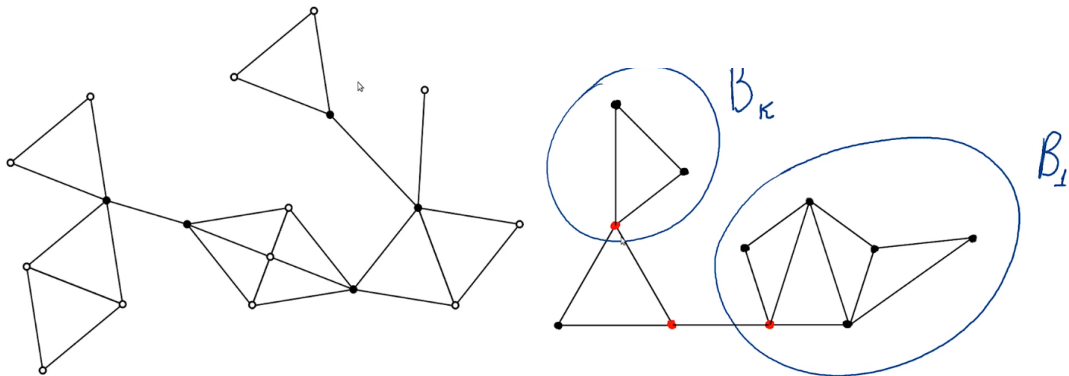
$$\text{где } \delta(G) = \min_V \deg(v)$$

**Лемма 7.2.** Если  $|V| \geq 3$  и граф связный, то след. утв. эквивалентны:

- граф 2-связный
- $\forall 2$  верш. лежат на цикле
- $\forall 2$  ребра лежат на цикле

**Теор. 7.4.** 2-связный граф допускает разложение на цикл и ручки

1-связный граф можно представить в виде дерева блоков (2-связные подмножества и мосты) и точек сочленения.



«TODO»...

## 8 Рёберная связность

**Опр. 8.1.** Мост – ребро, при его удалении граф развалится

**Теор. 8.1** (Форд-Фалкерсон).  $\max$  поток  $Q$  через сеть = пропускной способности минимального  $S$ - $T$  разреза.

**Теор. 8.2** (Менгер “рёберная”). Для  $\forall$  несмежных вершин  $x, y \in V \nexists e(x, y)$  размер  $\min$  рёберно-разделяющего мн-ва  $|R_{\min}^{edge}(x \leftrightarrow y)| = \max$  числу простых рёберно-непересекающихся путей  $P(x \rightarrow y)$ .

«TODO»...

## 9 Паросочетания II

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	$\alpha$	$\alpha'$	$\max$
покрытие	$\beta$	$\beta'$	$\min$
	вершинное	п-сочетание	

**Св-во.** Если  $S$  – независ.мн-во вершин, то  $\bar{S}$  – покрытие (необязательно  $\max$ ).  
Замечание: это неверно для рёбер.

**Теор. 9.1** (Галаи).

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

**Теор. 9.2** (Кёниг). В  $\forall$  2-дольном графе  $B(m, n)$ :  $\beta = \alpha'$

**Опр. 9.1** (Кубический граф). регулярный ( $\deg v_i = \text{const}$ ) граф:  $\deg = 3$

**Св-во.** В кубическом графе  $|V|$  – чётное

**Теор. 9.3** (Татт).  $\exists$  совершенное п.с.  $\iff$  при удалении  $\forall S \subset V$  образуется нечётных компонент

$$C_o(G \setminus S) \leq |S|$$

**Сл-е** (Петерсен). В кубическом графе  $\exists$  с.п.с., если  $N(\text{мостов}) \leq 2$

**Св-во.** В чётном графе если  $C_o(G \setminus S) \geq |S|$  то  $C_o(G \setminus S) \geq |S| + 2$

**Опр. 9.2** (Дефицит). число вершин, не покрытых максимальным п.с.

$$\text{def}(G) = |V| - 2 \max |M|$$

**Теор. 9.4** (Татта-Бержа).  $\text{def}(G) = \max_{S \subset V} (C_o(G \setminus S) - |S|)$

**Сл-е.**  $\text{def} \equiv |V| \pmod{2}$

## 10 Раскраски

**Опр. 10.1.**  $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$

**Св-во.** chromatic number  $\mathcal{X}(G) \leq \Delta + 1$  (оценка жадного алгоритма)

- деревья:  $\mathcal{X} = 2$
- двудольные графы  $B(m, n)$ :  $\mathcal{X} = 2$
- полные графы  $K_n$ :  $\Delta = n - 1$ ,  $\mathcal{X} = n$
- циклы чётной длины  $C_{2n}$ :  $\Delta = 2$ ,  $\mathcal{X} = 2$
- циклы нечётной длины  $C_{2n+1}$ :  $\Delta = 2$ ,  $\mathcal{X} = 3$

**Теор. 10.1** (Брукс).  $\mathcal{X}(G) \leq \Delta$  для всех графов кроме полных и нечётных циклов

**Опр. 10.2** (Клика). полный подграф

**Опр. 10.3** (Кликовое число).  $\omega(G) = \max_{K_n \subseteq G} n$

**Св-во.**  $\mathcal{X}(G) \geq \omega(G)$

**Св-во.**  $K_n$  содержит  $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots, K_3$  (треугольники)

**Теор. 10.2** (Мицельский).  $\forall n \in \mathbb{N} \exists G : \mathcal{X}(G) = n, G \not\supset K_3$  (свободен от треугольников, т.е.  $\omega(G) = 2$ )

**Опр. 10.4** (Обхват).  $\Omega(G) = \min_{C_n \subseteq G} n$ ,  $C_n$  — простой цикл

**Теор. 10.3** (Эрдёш).  $\forall k, m \in \mathbb{N} \exists G : \mathcal{X}(G) = k, \Omega(G) \geq m$

**Опр. 10.5.**  $P_G(k)$  — число способов раскрасить  $G$  в  $k$  цветов,  $P_G(k) = 0$  при  $k < \mathcal{X}(G)$

- полный граф  $K_n$   $P_{K_n}(z) = z(z-1) \cdots (z-n+1)$
- пустой граф  $\bar{K}_n$   $P_{\bar{K}_n}(z) = z^n$
- дерево  $T_n$   $P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}$
- лес  $T_{n,k}$  из  $k$  деревьев и  $n = n_1 + \dots + n_k \geq k$  вершин  $P_{T_{n,k}}(z) = z^k(z-1)^{n-k}$
- цикл  $C_n$   $P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$

**Св-во.** Если в графе есть кратные рёбра, то это никак не влияет на раскраску

**Теор. 10.4.**  $P_G(z) = 1z^n - C_{n-1}z^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n$ ,  $C_i \geq 0$ , причём

- $C_{n-1} = |E(G)|$
- $G = \{G_1, \dots, G_m\}$  (связные компоненты)  $\implies P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{G_m}(z)$

**Лемма 10.1.**  $(G - e)$  — удаление ребра  $e$ ,  $(G \sim e)$  — “стягивание” ребра  $e$

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \sim e}(z)$$

Доказательство.

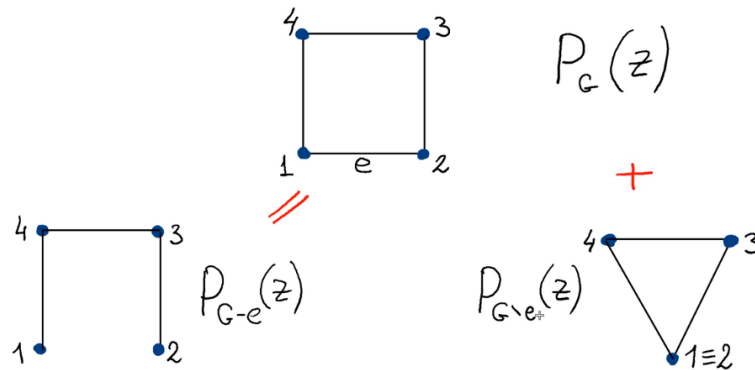


Рис. 1: chromatic polynome rule

□

## 11 Планарные графы I

**Опр. 11.1** (Планарный). можно правильно уложить в плоскость/сферу

**Св-во.** Непланарные –  $K_5$ ,  $K_{3,3}$

**Опр. 11.2** (Грань  $f_i$ ). ...

Уложив планарный граф в сферу и поворачивая сферу можно  $\forall$  заданную вершину уложить во внешнюю грань.

**Св-во.**  $\sum \deg(f_i) = 2|E| \quad \dots = \sum \deg(v_i)$

**Теор. 11.1.** Граница  $\forall$  грани 2-связного плоского графа — простой цикл

**Сл-е.** Вершины, смежные с  $\forall$  вершиной 3-связного плоского графа – лежат на простом цикле

**Опр. 11.3** (Дуальный граф плоского графа). грани  $\longrightarrow$  вершины; соединяем дуальные вершины ребром, если исходные грани смежны (т.е. отделены 1 ребром)

**Св-во.** Дуальный граф всегда связан; вершины  $\longleftrightarrow$  грани (с сохранением степеней)

**Теор. 11.2** (Формула Эйлера для выпуклых многогранников и связанных планарных графов).

$$V + F = E + 2$$

**Св-во.** В простом плоском графе  $\deg(f_i) \geq 3$

- $\deg(f_i) = 1 \implies$  петля
- $\deg(f_i) = 2 \implies$  мультиребро

**Сл-е.** В простом плоском графе  $E \leq 3V - 6$ ; если равенство, то это **max** планарный граф

**Теор. 11.3** (Фэри / Fary).  $\forall$  планарный граф можно так уложить в плоскость, что все рёбра – прямые отрезки

**Теор. 11.4** (о 4 красках). Для правильной раскраски граней плоского графа (без мостов) хватит 4 цветов

**Сл-е.** Плоский граф  $\longrightarrow$  дуальный (грани  $\Leftrightarrow$  вершины), а вершины плоского дуального графа  $\Leftrightarrow$  вершинам его планарного. Так что задача  $\equiv$  правильной раскраске **вершин** планарного графа

**Теор. 11.5** (Коши??). если точка  $A$  лежит внутри замкнутого контура, а  $B$  – вне его, то любой путь  $(A, B)$  пересечёт контур минимум 1 раз

## 12 Планарные графы II

**Теор. 12.1.** Если 2-связные графы в дереве блоков 1-связного графа планарны, то и весь граф планарный

*Доказательство.* (по индукции по точкам сочленения). □

**Опр. 12.1** (подразбиение графа). добавление вершин  $\deg = 2$  внутри рёбер

**Теор. 12.2** (критерий Куратовского). граф планарный  $\iff$  он не содержит подразбиение  $K_5$  или  $K_{3,3}$

**Теор. 12.3** (Татт).  $\forall$  3-связный планарный граф можно вложить на плоскость так, что  $\forall$  внутренняя грань будет выпуклым многоугольником

**Опр. 12.2** (Минор). получен из графа удалением или стягиванием рёбер

**Св-во.** минор планарного графа будет планарным

**Теор. 12.4** (Вагнер). граф планарный  $\iff$  не содержит миноров  $K_5$  или  $K_{3,3}$

**Опр. 12.3.** вложение графа в поверхность рода  $g$  правильное, если при разрезании на грани получатся (криволинейные) многоугольники (а не цилиндры итд), т.е. получится карта

**Св-во.** Род поверхности для сферы  $g = 0$ , род тора  $g = 1$  (одна дырка).

**Теор. 12.5** (Эйлера). Характеристика Эйлера для карты (укладки графа):  $\chi(M) = V + F - E$ . Если  $\chi(M) = 2 - 2g$  (2 на сфере, 0 на торе), то укладка (вложение) правильная, иначе – нет.

$K_5$  и  $K_{3,3}$  можно вложить в тор.

«TODO»...

