Основы теории графов.
Задачи.

Содержание

1 Основы

«*TODO*»...

2 Деревья

«*TODO*»...

3 Эйлеровы графы

«$\mathcal{TODO}$»...

4 Паросочетания I

«$\mathcal{TODO}$»...

5 Гамильтоновы графы

«$\mathcal{TODO}$»...

6 Графы деБрейна

«$\mathcal{TODO}$»...

7 Вершинная связность

«$\mathcal{TODO}$»...

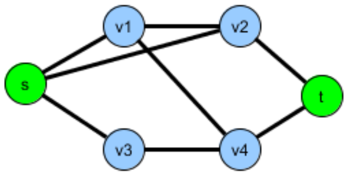
8 Рёберная связность

Зад. 8.1. Рассмотрим граф G с двумя выделенными несмежными вершинами s и t. Множество вершин X, не содержащее вершин s и t, назовём вершинным разрезом, если после его удаления из графа пути между s и t будут отсутствовать.

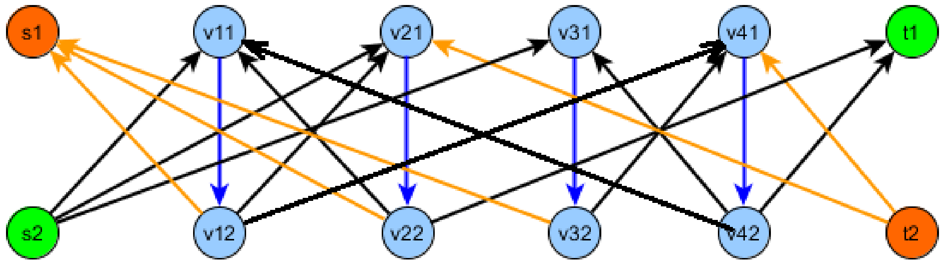
Рассмотрим наряду с графом G граф H, полученный с помощью следующей процедуры. Каждую вершину v_i графа G разделим на две вершины v_{i1} и v_{i2}, которые дополнительно соединим направленным ребром (v_{i1}, v_{i2}) в случае, если v_i отлична от s и от t. Каждое ребро v_i, v_j заменим на два ребра (v_{i2}, v_{j1}) и (v_{j2}, v_{i1}).

Из получившегося графа H получим сеть H', приписав каждому ребру пропускную способность 1, в качестве истока взяв s_2, а в качестве стока — t_1. Докажите, что величина максимального потока в сети H' равна величине минимального вершинного разреза в графе G.

Доказательство. В качестве иллюстрации своих рассуждений приведу пример исходного графа:



и сети, полученной из него по правилам в условии задачи:



Для краткости буду называть вершины сети вида v_{i1} чётными полувершинами (верхний ряд на рисунке), а вершины вида v_{i2} – чётными полувершинами.

Во-первых, заметим, что только у стока (s2) допустим нулевой входной поток, а значит вершину t2 без входящих рёбер можно из рассмотрения выбросить. Поток из неё во все оранжевые рёбра всегда будет нулевым. Аналогично выбрасываем вершину s1 (у неё исходящиё поток тоже ноль) и идущие к ней оранжевые рёбра, т.к. поток через них всегда будет нулевым.

Запустив на нашу сеть алгоритм Форда-Фалкерсона, мы найдём максимальный поток, который определяется (по теореме) минимальным S-T-разрезом. Попробуем угадать, какие рёбра в него войдут. Мы хотим получить разрез с минимальным потоком. Такие разрезы легче найти среди разрезов с минимальной пропускной способностью. Поскольку пропускная способность всех рёбер по правилам задачи одинакова и равна 1, мы ищем разрез с минимальным числом рёбер из S-половины в T-половину, причём рёбра, идущие из T в S (в обратном направлении) в разрезе не учитываются.

Рассмотрим какую-нибудь пару полувершин, например v_{11} и v_{12}. Если бы нечётная полувершина входила во множество T разреза, то мы бы учитывали входящие в неё рёбра из вершин s2, v22, v42. Если бы мы включили её в S-половину разреза вместе с s2, а v22 и v42 в T-половину, то все входящие в неё ребра не учитывались бы (все рёбра из зелёной s2 находятся внутри S-половины, а v22 и v42 были бы "обратными"$T \to S$-рёбрами). Учитывалось бы только единственное исходящее - вертикальное синее ребро $(v_{11} \to v_{12})$.

Так же и в целом по построению сети ситуация такова: только синие рёбра (рёбра вида $v_{i1} \to v_{i2}$) идут сверху вниз, а все остальные снизу вверх. Поэтому минимальный S-T разрез будет иметь вид: S - это какое-то подмножество нечётных полувершин (верхний синий ряд) плюс s2, а T - какое-то подмножество чётных полувершин (нижний синий ряд) плюс t1. Соответственно рёбра в найденном минимальном разрезе будут из подмножества синих рёбер.

Теперь заметим, что каждое синее ребро взаимно однозначно соответствует чётно-нечётной паре полувершин в H, т.е. их вершине-прототипу в G, и его удаление соответствует удалению этой вершины (т.е. удаление некоторого $(v_{i1} \to v_{i2})$ в H однозначно соответствует удалению v_i в G), а минимальный рёберный разрез по синим рёбрам в H соответствует минимальному разделяющему множеству вершин в G.

Найденный алгоритмом Форда-Фалкерсона максимальный поток – это поток через минимальный рёберный разрез в H' (какой бы он ни был, он будет среди синих рёбер) и соответвествует такому набору рёбер в H, что при его удалении путей между $s2$ и $t1$ не останется. Таким образом, максимальный поток в H' даст нам размер минимального вершинно-разделяющего множества в G. ■

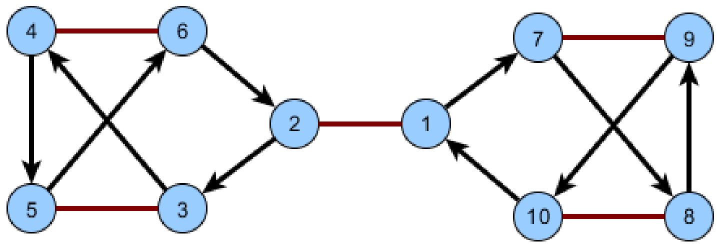
«$\mathcal{TODO}$»...

9 Паросочетания

9.1 Задачи

Зад. 9.1. Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, можно покрыть путями длины 3, не пересекающимися по рёбрам.

Доказательство. В таком графе найдётся совершенное паросочетание. Удаляя его, мы получаем некоторый подграф. Каждая вершина в нём имеет степень 2. Значит, подграф состоит из циклов. Сориентируем рёбра каждого цикла графа в одном направлении:



У каждой вершины будет одно входящее, одно исходящее и одно удалённое “совершенное” ребро. Пути длины 3 строим так: ребро $u{,}v \in M$, ребро исходящее из v, ребро исходящее из u. ■

Зад. 9.2. Назовём граф критическим, если в нём нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иначе говоря, для любой вершины в графе есть паросочетание, покрывающее все вершины, кроме неё. Докажите, что $c_o(G \setminus S) - |S| \leqslant -1$ для любого непустого множества S вершин критического графа.

Доказательство. Рассмотрим произвольное произвольное непустое множество S в графе G и выделим произвольную (возможно, единственную, если $|S| = 1$) вершину $x \in S$. Обозначим $G' = G \setminus x$ и $S' = S \setminus x$. Заметим, что $|S| = |S'| + 1$. Тогда: $G \setminus S = G \setminus (S' \cup x) = (G \setminus x) \setminus S' = G' \setminus S'$. По условию задачи, в G' всегда найдётся совершенное паросочетание, а значит: $\operatorname{def}(G') = \max\limits_{\forall S'' \subset V'(G')} \left[C_o(G' \setminus S'') - |S''|\right] = 0$. Соединяя вместе эти формулы, получаем: $C_o(G \setminus S) - |S| = C_o(G' \setminus S') - (|S'| + 1) = \left[C_o(G' \setminus S') - |S'|\right] - 1 \leqslant \max\limits_{\forall S'' \subset V'(G')} \left[C_o(G' \setminus S'') - |S''|\right] - 1 = \operatorname{def}(G') - 1 = 0 - 1 = -1$
Что и требовалось доказать. ■

«$\mathcal{TODO}$»...

9.2 Иллюстрации

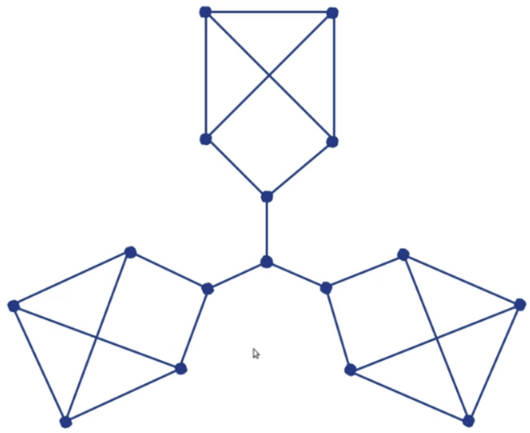


Рис. 9.1: Кубический граф

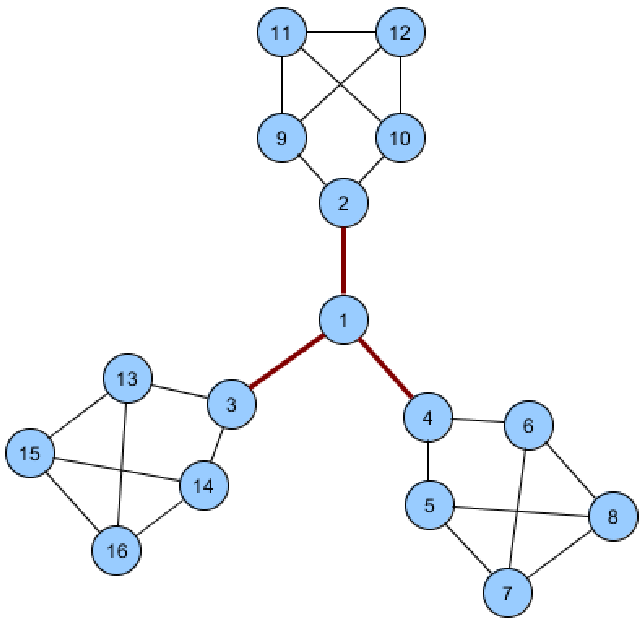


Рис. 9.2: Мин. (16 вершин) кубический граф с 3 мостами (сов.п.с. $\nexists$)

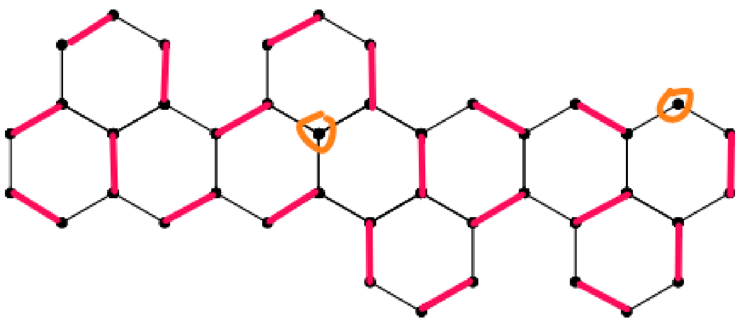


Рис. 9.3: Дефицит графа

10 Раскраски

10.1 Хроматическое число

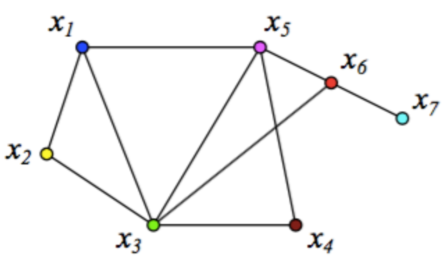
Зад. 10.1. Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\mathcal{X}(G)$ цветов.

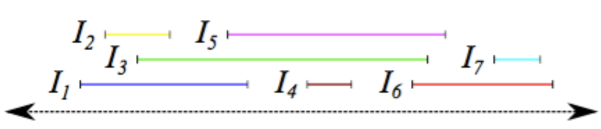
Доказательство. Выделяем в графе максимальное независимое множество вершин S_1. Они несмежны между собой и получат один цвет C_1. Теперь выбираем среди оставшихся вершин графа вершины, смежные с S_1 и среди них выбираем максимально независимое множество S_2. Опять, их цвет $C2$ одинаковый в силу несмежности, но отличается от C_1 в силу смежности с S_1. Среди оставшихся выбираем вершины, смежные с $S_1 \cup S_2$, а среди них - максимальное независимое множество S_3. Они получат новый цвет C_3 итд до S_q. В силу максимальности независимых множеств на каждом этапе их общее число q минимально, т.е. равно хроматическому числу $q = \mathcal{X}(G)$.

Теперь расставим все вершины по порядку так: сначала вершины из S_1 в любом порядке (номера 1,2,...,$|S_1|$), потом из S_2 в любом порядке ($|S_1| + 1$, $|S_1| + 2$, ..., $|S_1| + |S_2|$) итд до S_q. При проходе в таком порядке жадный алгоритм будет замечать смежность вершин очередного множества S_i только с предыдущими $S_{j<i}$ (поскольку последующие еще не раскрашены) и выдаст ту же раскраску $C_1 ... C_q$. ■

Зад. 10.2 (ссылка). Граф G называется совершенным, если $\mathcal{X}(G) = \omega(G)$, где $\omega(G)$ – его кликовое число.

Рассмотрим n замкнутых интервалов $I1$,$I2$,...,In на вещественной оси. Построим для этих интервалов граф G на n вершинах x_1,...,x_n, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j \neq \varnothing$. Такой граф G называется интервальным графом (см. рис.).





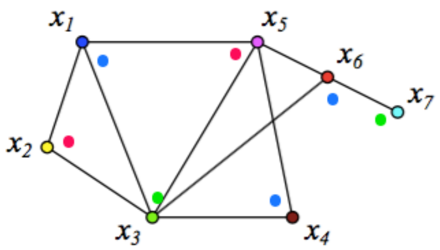
Доказать, что любой интервальный граф является совершенным.

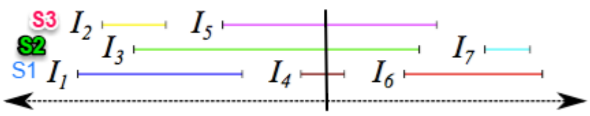
Эталонное доказательство. «$\mathcal{TODO}$»...

Будем раскрашивать вершины интервального графа жадным алгоритмом, упорядочив их предварительно по возрастанию левых концов соответствующих интервалов. Рассмотрим момент, в который жадный алгоритм использовал максимальный цвет k, раскрасив им какую-то вершину x, соответствующую интервалу $[a,b]$. Так как алгоритм использовал цвет k, вершина x была смежна с какими-то $k - 1$ уже окрашенными в разные цвета вершинами. Им соответствовали интервалы, начинающиеся левее аа (поскольку вершины уже окрашены), а заканчивающиеся — правее (поскольку есть пересечение с $[a,b]$). Все рассмотренные интервалы пересекаются в точке a а, следовательно, в интервальном графе соответствующие вершины образуют клику размера k. Таким образом, $X(G) <= k <= \omega$, но мы знаем, что $\omega(G) <= X(G)$, а значит, $\omega(G) = \mathcal{X}(G)$. ■

Моё кривое доказательство. «$\mathcal{TODO}$»...

Иллюстрация к задаче содержит толстую подсказку о способе рассуждений.





Разобьём все интервалы на непересекающиеся подмножества, соответствующие независимым подмножествам вершин в графе. Первый интервал выберем произвольно. Пусть это будет I_4. Затем будем двигаться от правого края интервала вправо, пока не встретим первый непересекающийся с ним интервал (I_6). Двигаясь вправо от его правого края найдём следующий и так далее, пока не достигнем максимума всех интервалов. Теперь дижемся влево от левого края I_4, пока не найдём предыдущий непересекающийся с ним интервал (I_1) или не достигнем минимума всех интервалов. Так мы построим максимальное множество S_1 всех попарно непересекающихся интервалов, включающих I_4. В нашем случае $S_1 = \{I_1,I_4,I_6\}$. Ему в графе соответсвует независимое множество вершин $\{x_1,x_4,x_6\}$.

Теперь возьмём какой-либо интервал, не входящий в S_1, т.е. пересекающийся с любым из интервалов S_1, например I_3 и повторим процесс. Получим множество $S_2 = \{I_3,I_7\}$. Затем любой интервал, не входящий в $S_1 + S_2$, повторим процесс и получим множество $S_3 = \{I_2,I_5\}$ попарно непересекающихся между собой интервалов, которые пересекаются с одним из интервалов из S_1+S_2. Продолжим процесс, пока интервалы не закончатся.

Каждому множеству интервалов S_i соответствует максимальное по построению независимое множество вершин в графе, причем вершины множества S_2 имеют рёбра с S_1, S_3 с $S_1 + S_2$ итд. Если раскрасить S_1 в 1-й цвет, S_2 во 2-й итд, то мы получим правильную раскраску графа. Этот набор множеств минимален по построению, то есть количество множеств S_i равно хроматическому числу графа χ.

Теперь расположим интервалы множества S_2 над интервалами S_1, S_3 над S_2 итд, получив вертикальный стек. Там, где некоторая вертикаль пересекает несколько интервалов (они будут из разных множеств), мы получим *клику*. Например, $[I_5,I_3,I_4]$, как показано на рисунке. Максимальный размер клики (кликовое число) будет равен высоте самого высокого интервала в стеке, т.е. числу множеств S_i. А оно, как показано выше, равно хроматическому числу. То есть граф является совершенным. ■

Зад. 10.3. Доказать, что в графе G с m ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству $\chi(\chi-1) \leqslant 2m$

Моё доказательство. Возьмём минимальную правильную раскраску в χ цветов и разделим все вершины по цвету на множества S_1,...,S_χ. Если бы нашлась такая пара S_i,S_j, что между ними не было бы рёбер, то второе множество можно было бы перекрасить в цвет первого и уменьшить количество цветов на единицу, что противоречит минимальности. Поэтому между любой парой этих множеств всегда найдётся хотя бы одно ребро. Всего таких пар (и таких рёбер) будет $\dfrac{\chi(\chi-1)}{2}$. А кроме этих, в графе могут быть и другие рёбра, то есть $m \geqslant \dfrac{\chi(\chi-1)}{2}$, что и требовалось доказать. ■

Еще одно хорошее доказательство. «$\mathcal{TODO}$»...

Пронумеруем все цвета от 1 χ. Теперь $2m$ - это, как мы уже знаем, сумма степеней всех вершин. Теперь покажем, что сумма степеней всех вершин не может быть меньше $\chi(\chi-1)$. Сумма степеней вершин может быть равна $\chi(\chi-1)$, например, в полном графе. Теперь покажем почему меньше не может быть. От противного, пусть у нас сумма степеней вершин в каком-то графе равна k, которое меньше $\chi(\chi-1)$. Теперь покажем, что каждый цвет i смежен со всеми $(\chi-1)$ другими цветами. (Цвета смежны, если существует смежные вершины, покрашенные в соответствующие цвета). От противного. Если это не так, то существует цвет j, с которым i не смежен, тогда мы можем все вершины покрашенные в цвет i перекрасить в j, и раз они такие цвета не были смежны, то после перекраски никакие две вершины, покрашенные в цвет j, не будут смежны. Значит, мы может просто убрать i и получим, что хроматическое число меньше чем χ. Противоречие. Получили, что каждый цвет i смежен со всеми $\chi-1$ другими цветами. А значит, при расчете суммы степеней вершин, будут учтены эти смежности, которые дают вклад $\chi(\chi-1)$. Отсюда получаем, что $\chi(\chi-1) \leqslant k$, а изначально мы утверждали обратное. Противоречие. В итоге, сумма степеней всех вершин не может быть меньше $\chi(\chi-1)$. А значит, и $2m$ не может быть меньше этого значения. ■

10.2 Хроматический многочлен

Зад. 10.4. Докажите, что хроматический полином для цикла C_n имеет вид $P_n(z) = (-1)^n(z-1)+(z-1)^n$.

Доказательство. Доказывать будем по индукции.

В качестве базы индукции возьмём минимальный цикл на 3 вершинах C_3. Он совпадает с K_3, и его хроматический многочлен был найден на лекции

$P_{C_3}(z) = P_{K_3}(z) = z(z-1)(z-2) = z^3-3z^2+2z = z^3-3z^2+2z+(z-1)-(z-1) = (z^3-3z^2+3z-1)+(-1)(z-1) = (z-1)^3+(-1)^3(z-1)$.

База индукции доказана.

На шаге индукции предположим, что формула верна для C_n и проверим её для цикла C_{n+1}.

Воспользуемся доказанным на лекции правилом: $P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G\backslash e}(z)$.

Если удалить из цикла C_{n+1} одно ребро, то получится дерево $C_{n+1}-e = T_{n+1}$ с хроматическим многочленом $P_{T_{n+1}}(z) = z(z-1)^{n+1-1}$.

Если стянуть одно ребро, то получится цикл на единицу меньше $C_{n+1} \setminus e = C_n$. По предположению индукции его хроматический многочлен есть $P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$.

Тогда имеем $P_{C_{n+1}}(z) = P_{C_{n+1}-e}(z) - P_{C_{n+1}\setminus e}(z) = P_{T_{n+1}}(z) - P_{C_n}(z) = z(z-1)^n - (z-1)^n - (-1)^n(z-1) = (z-1)(z-1)^n + (-1)(-1)^n(z-1) = (z-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(z-1)$.

Шаг индукции доказан. Формула верна для всех n. ∎

Зад. 10.5 (ссылка). «$\mathcal{TODO}$»...

Дан связный граф G. Хроматический многочлен $P_G(z)$ известен. Построим граф H следующим образом:

1. Выделим в графе G произвольную вершину x.

2. Построим изоморфный графу G граф G'. Пусть при этом изоморфизме x переходит в x'.

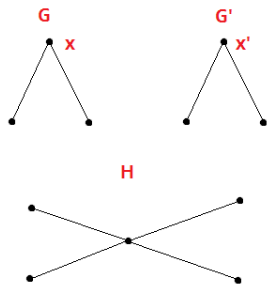
3. "Склеим" вершины x и x'.

Таким образом, граф H состоит из двух одинаковых подграфов, которые пересеклись в одной вершине. Выведите формулу хроматического многочлена $P_H(z)$ для графа H. В формуле вместо $P_G(z)$ используйте переменную y.

Доказательство. $P_H(z) = \dfrac{y^2}{z}$

На мой взгляд, самое очевидное решение предполагает чисто комбинаторный ответ и с полиномами работать практически не приходится.

В ветке ниже уже обсуждали, но все равно напишу здесь с картинкой, чтобы сразу в глаза бросалось. Рассмотрите два дерева и соедините их:



Ещё как простой пример для рассмотрения - два графа K_2 и результат их слияния T_3. ∎

11 Планарные графы I

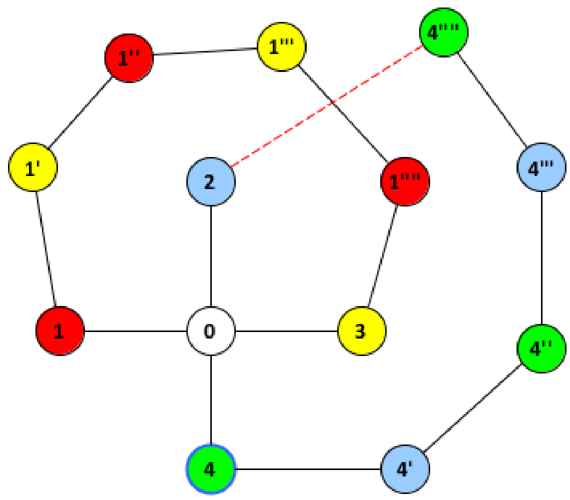
Зад. 11.1. Без использования теоремы о четырех красках доказать, что любой планарный связный граф, построенный на не более чем $n = 11$ вершинах, является 4-раскрашиваемым.
Указание: вначале доказать, что в таком графе существует вершина, степень которой меньше или равна четырем.

Доказательство. Пусть $\delta = \min\limits_{v \in V(G)} \deg(v)$. Тогда $\delta \cdot V \leqslant \sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) = 2E \leqslant 2(3V - 6) = 6V - 12$, поскольку для простых связных планарных графов верно $E \leqslant 3V - 6$.

Отсюда $12/(6-\delta) \leqslant V$. Но по условию $V \leqslant 11$, а значит $12 \leqslant 66 - 11\delta$. Получаем, что $\delta \leqslant (54/11) \approx 4.9$, то есть целое число $\delta \leqslant 4$ и найдется вершина v, у которой $\deg(v) \leqslant 4$.

Теперь проведём рассуждение, полностью аналогичное приведённому на последней лекции, но вместо 5 цветов и соседей у нас будет 4.

Проводим индукцию по количеству вершин. Для $V = 4$ утверждение очевидно (а для меньшего числа тривиально/бессмысленно). Предположим, что для $(V-1)$ индукция уже доказана. Докажем теперь шаг индукции для V ($V \leqslant 11$). Выделим вершину степени не больше 4 (мы показали, что она всегда найдётся), временно удалим, раскрасим остальной граф (это возможно по предположению шага) и вернём вершину на место. В худшем случае у вершины 4 соседа у которых 4 разных цвета (иначе раскрашиваем вершину 0 в оставшийся цвет). Например, 1-красный, 2-синий, 3-жёлтый, 4-зелёный, а самой вершине дадим индекс 0, как показано на рисунке.

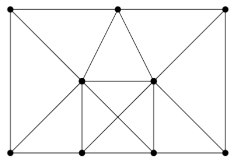


Сначала выбираем пару смежных вершин 1(красный)-3(жёлтый). Пытаемся перекрасить 1-ю в желтый, если же у неё есть жёлтый сосед 1', пытаемся перекрасить его в красный, при неудаче рассматриваем соседей соседа итд. Если удалось, меняем цвета в цепочке, 1-ю в жёлтый, 0-ю в красный и празднуем успех. В случае полной неудачи, худший случай - это когда цепочка дотянется до вершины 3. Тогда выбираем вторую пару 2(синий)-4(зелёный) и пытаемся перекрасить 4-ю в синий, а если найдётся синий сосед 4', пытаемся раскрасить его в зелёный, при неудаче тянем цепочку дальше. Рано или поздно сине-зелёная цепочка упрётся в красно-жёлтую, потому что та образует вместе с вершиной 0 замкнутый цикл, так что в этом случае удача нам гарантирована. Это доказывает шаг индукции и завершает задачу. ■

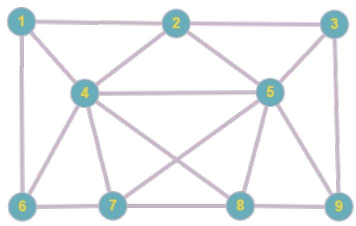
«$\mathcal{TODO}$»...

12 Планарные графы II

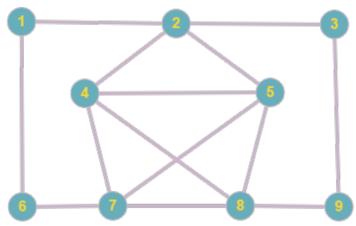
Зад. 12.1. Доказать с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G, изображенного на рисунке:



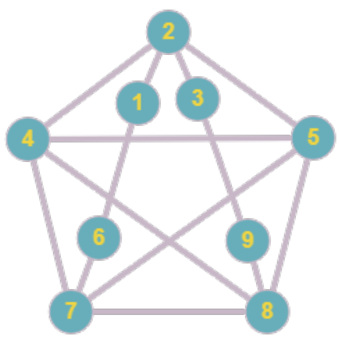
Доказательство. Докажем, что подграф нашего графа, полученный *удалением 4 рёбер*, является подразбиением графа K_5, что по критерию Куратовского гарантирует непланарность.
Пронумеруем вершины исходного графа:



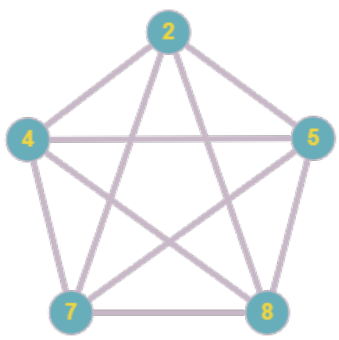
В качестве подмножества для критерия возьмём граф, в котором удалены рёбра 4-1,4-6 слева и 5-3,5-9 справа:



Вершины 1,6,3,9 в результате имеют степень 2 и являются *подразбиением* графа, к которому мы стремимся (для ясности немного переместим эти вершины):

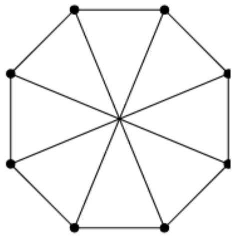


Удалим подразбиения, заменив на прямые рёбра:

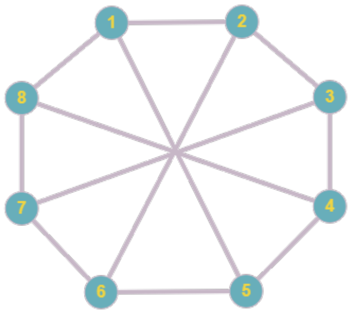


Получившийся граф изоморфен графу K_5. Доказано. ■

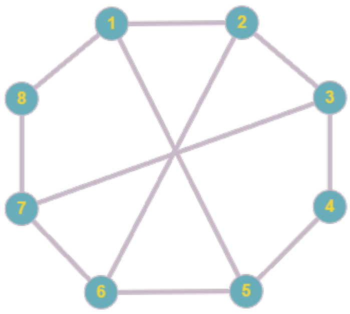
Зад. 12.2. Доказать с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G, изображенного на рисунке:



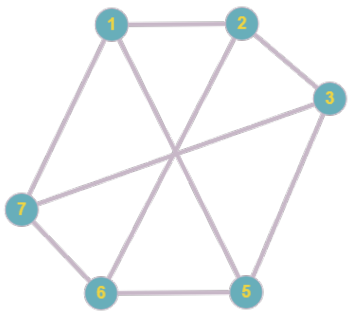
Доказательство. Докажем, что подграф нашего графа, полученный *удалением одного радиального ребра*, является подразбиением графа $K_{3,3}$, что по критерию Куратовского гарантирует непланарность.
Пронумеруем вершины исходного графа:



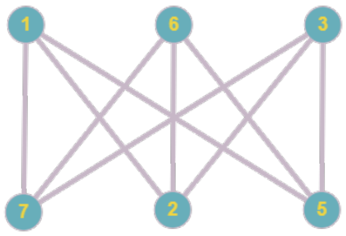
В качестве подмножества для критерия возьмём граф, в котором удалено одно радиальное ребро, например ребро 4-8:



Смежные с удаленным ребром вершины 4,8 в подмножестве имеют степень 2 и являются *подразбиением* графа, к которому мы стремимся. Удалим их, заменив на рёбра:

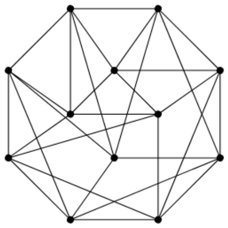


Получившийся граф изоморфен графу $K_{3,3}$. Просто переставим вершины на рисунке для наглядности:

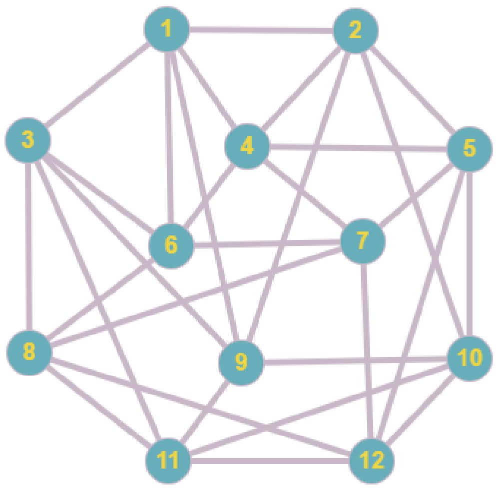


Доказано. ■

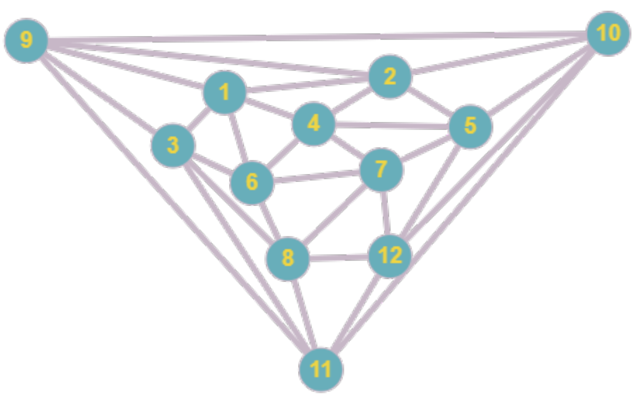
Зад. 12.3. Найти выпуклое вложение в плоскость графа G, показанного на рисунке:



Доказательство. Пронумеруем вершины исходного графа:

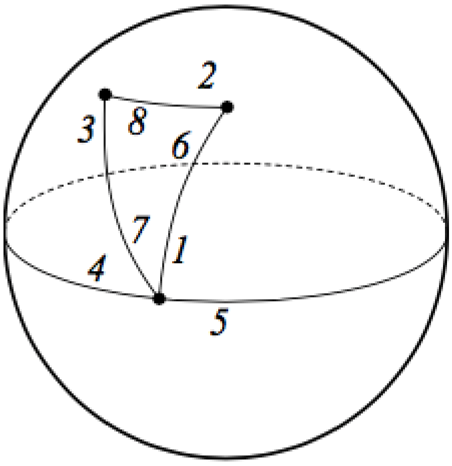


И предъявим вложение:



■

Зад. 12.4. Для карты на сфере записать перестановки σ, α, φ



Доказательство.
$\sigma = (1745)(26)(38)$
$\alpha = (16)(28)(37)(54)$
$\varphi = (5)(1234)(786)$
$\varphi = \sigma \cdot \alpha \qquad \sigma = \varphi \cdot \alpha \qquad \alpha = \alpha^{-1}$
$n = |\sigma| = 3$, $m = |\alpha| = 4$, $r = |\varphi| = 3$
$g = (2 - n + m - r)/2 = 0$ ∎

«*TODO*»...