Введение в математический анализ.

Содержание

1 Последовательности

1.1 Предел последовательности

Опр-е. 1.1 (Предел последовательности).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

- При любом $\varepsilon > 0$ вне интервала $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности
- $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n - l| < \varepsilon$

Св-во. Свойства последовательностей:

- Не может иметь двух различных пределов
- Если имеет предел, то $|x_n| \leqslant M$
- Переход к пределу в неравенстве:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, x_n \leqslant y_n \implies a \leqslant b$$

- Пределы можно складывать, вычитать, умножать, делить, брать модуль

Теор. 1.1 (О двух милиционерах).

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \implies \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

1.2 Арифметические операции с пределами

Арифметические операции с конечными пределами...

Опр-е. 1.2 (Бесконечный предел).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \equiv \qquad \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ \ x_n > E$$

Теор. 1.2. $\daleth$ $x_n \neq 0$. x_n – беск. большая $\iff \frac{1}{x_n}$ – беск. малая

Св-во. Свойства бесконечно малых:

1. Беск. малая послед. ограничена
2. Сумма, разность, произведение бес. малых – беск. малая
3. Произвед. беск. малой на ограниченную – беск. малая

Арифметические операции с бесконечностями...

1.3 Вещественные числа. Супремум и инфимум.

Опр-е. 1.3 (Вещественные числа)**.**

- Аксиомы поля (9 штук)
- Аксимомы порядка (5 штук)
- Аксиома Архимеда: $\forall \ x, y > 0 \ \ \exists \, n \in \mathbb{N} \ : nx > y$
- Аксиома полноты: Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ....$ Тогда существует число $c \in \mathbb{R}$, принадлежащее всем отрезкам: $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

Теор. 1.3 (О стягивающихся отрезках)**.**
Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда пересечение всех отрезков состоит из одной точки: $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$

Опр-е. 1.4. $\rceil$ E – непустое множество
sup – наименьшая из верхних границ
inf – наибольшая из нижних границ

$$b = \sup E \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E: \ x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Теор. 1.4. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет sup (inf)

Доказательство. Делением отрезка пополам... □

Теор. 1.5.

- Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
- Монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.
- Неограниченная сверху возрастающая последовательность стремится к $+\infty$.
- Неограниченная снизу убывающая последовательность стремится к $-\infty$.

1.4 Определение числа e

Лемма 1.1 (Неравенство Бернулли)**.**

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

Доказательство. По индукции... □

След-е.

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{1 + x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad a > 1,\ k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.5 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Св-во.

$$\{a_n\} \to A \implies \{a_{n_k}\} \to A$$

Теор. 1.6 (Больцано-Вейерштрасса)**.** Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся (к конечному пределу) подпоследовательность

Теор. 1.7 (Расширение теоремы Б-В)**.**

- Из неограниченной сверху последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$.
- Из неограниченной снизу последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$.

След-е. Из любой последовательности можно выделить под-последовательность, имеющую конечный *или бесконечный* предел.

Опр-е. 1.5. Последовательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$

Св-во.

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна
3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то исходная последовательность сходится

След-е (Критерий Коши)**.** Последовательность сходится $\iff$ она фундаментальна

1.6 Сходимость рядов

Опр-е. 1.6.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Если последовательность $\{S_n\} \to S$, то последовательность наз. сходящейся, а S – сумма ряда. Если $\{S_n\}$ не имеет предела или **бесконечный** предел, то ряд расходится.

Теор. 1.8 (Необходимое условие сходимости ряда)**.**
Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Геометрическая прогрессия:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \quad \text{при } |q| < 1$$

Гармонический ряд $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ расходится, т.к. $H_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$

Пример:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Св-во. Свойства сходящихся рядов:

1. Ряд не может иметь двух различных сумм
2. В сходящемся ряду можно произвольно расставлять скобки (т.к. это будет подпоследовательность сходящейся последовательности)
3. Добавление и отбрасывание конечного членов ряда не влияет на сходимость (но изменяет сумму)
4. Сходящиеся ряды можно складывать и вычитать
5. Сходящийся ряд можно домножать на константу

1.7 Признаки сходимости рядов

Св-во. Если $a_k \geqslant 0$, а последовательность S_n ограничена сверху, то ряд сходится

Св-во (Признак сравнения)**.** Если $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$, то:

- если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
- если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$расходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится

Пример: ряд $\frac{1}{k^2}$ сходится. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Пример: ряд $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.

Теор. 1.9 (Признак Даламбера)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$сходится
2. Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится
3. Пусть $d_* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда:
    - Если $d_* < 1$, то ряд сходится
    - Если $d_* > 1$, то ряд расходится
    - Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.10 (Признак Коши)**.** Пусть $a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$сходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится
3. Пусть $q_* = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:
    - Если $d_* < 1$, то ряд сходится
    - Если $d_* > 1$, то ряд расходится
    - Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.11 (Факт)**.**
Если $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то также существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, и они равны.

Теор. 1.12 (Признак Лейбница)**.** Знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ с монотонно убывающим по абсолютной величине членом $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... > 0$ сходится $\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Пример – ряд Лейбница: $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - ... = \dfrac{\pi}{4}$

Опр-е. 1.7 (Абсолютная сходимость)**.**
Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теор. 1.13. Абсолютно сходящийся ряд сходится, причём $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Доказательство. Рассмотрим $0 \leqslant a_k + |a_k| \leqslant 2|a_k|$ □

Пример: если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

Свойство: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ расходится.

1.8 Тесты на сходимость рядов

- [x] Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- [x] Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- [x] Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- [x] Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- [ ] Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- [ ] Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [ ] Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
- [x] Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [ ] Если $a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

- [x] Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- [x] Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [x] Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- [ ] Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- [ ] Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [ ] Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [ ] Если $a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

2 Функции и непрерывность

2.1 Предел функции

2.1.1 Предельные точки множества

Опр-е. 2.1. Окрестность точки U_a – любой интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$

Опр-е. 2.2. Проколотая окрестность $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

Опр-е. 2.3. Окрестность $+\infty$ – любой луч $(E, +\infty)$

Опр-е. 2.4. Окрестность $-\infty$ – любой луч $(-\infty, E)$

Опр-е. 2.5. a – предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$, если $\mathring{U}_a \cap E \neq \varnothing$ для любой $\mathring{U}_a$

Примеры:

1. $[a, b]$ – множество предельных точек (a, b)
2. $\{a\}$ – предельная точка ряда $\{a_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
3. $\varnothing$ – нет предельных точек у одиночной точки $\{a\} \in \mathbb{R}$

Лемма 2.1 (Утверждение.)**.** Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества E
2. В $\forall$ окрестности точки a найдётся бесконечно много точек из E
3. $\exists$ такая последовательность точек $x_n \in E$ $(x_n \neq a)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2.1.2 Предел функции

Опр-е. 2.6. Пусть дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Пусть a – предельная точка множества E. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (или $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$), если выполнено любое из равносильных условий:

1. Для $\forall$ окрестности U_A $\exists$ такая окрестность $\mathring{U}_a$, что $f(\mathring{U}_a \cap E) \subset U_A$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in E$, т.ч. $x \neq a \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ (определение по Коши)
3. Для $\forall$ последовательности $\{x_n\}$ точек из E $(x_n \neq a)$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (определение по Гейне)

Замечания к определению предела функции:

1. Предел – локальное свойство
2. Значение f в точке a не участвует в определении
3. Если в определении по Гейне $\forall$ последовательность $f(x_n)$ имеет предел, то все эти пределы равны

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Локальная ограниченность: если $f : E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R}$, то $\exists$ такая окрестность U_a, что $f(x)$ ограничена на $U_a \cap E$.
3. Стабилизация знака: если $f : E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\exists$ такая окрестность U_a, что знаки $f(x)$ при $x \in \mathring{U}_a \cap E$ и A совпадают.

2.1.3 Арифметические действия с пределами

Пределы двух функций в точке можно складывать, вычитать, перемножать и делить (если предел нижней функции не равен 0).

Теор. 2.1 (Предельный переход в неравенстве)**.** Если

1. $f, g : E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка E
2. $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

Тогда $A \leqslant B$

Теор. 2.2 (Теорема о сжатой функции (аналог теоремы о двух милиционерах))**.** Если

1. $f, g, h : E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка E
2. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$

2.1.4 Односторонние пределы

Опр-е. 2.7 (Монотонная функция)**.** $f : E \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает (убывает), если для $\forall\ x \leqslant y$ выполнено $f(x) \leqslant f(y)$ (или $f(x) \geqslant f(y)$)

Теор. 2.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка множества $E_1 = E \cap (-\infty, a)$. Тогда:

- Если f возрастает и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)$
- Если f *убывает* и ограничена *снизу*, то $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

2.2 Непрерывность функции

Опр-е. 2.8. $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$, если выполнено любое из равносильных условий:

1. Если a – предельная точка, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ т.ч. $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. Для $\forall$ окрестности $U_{f(a)}$ $\exists$ такая окрестность U_a, что $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$
4. Для $\forall$ послед. точек $\{x_n\} \subset E$ т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Непрерываные в точке a функции можно складывать, вычитать, умножать и (если $g(a) \neq 0$) делить.

Следствия:

1. Многочлены $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

2. Рациональные функции (отношения многочленов $\dfrac{p(x)}{q(x)}$) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в ноль.

Теор. 2.4 (Теорема о стабилизации знака)**.** Если $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ и $f(a) \neq 0$, то найдётся такая окрестность U_a, что знак $f(x)$ совпадает с $f(a)$.

Теор. 2.5 (Непрерывность композиции)**.** Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ $f(D) \subset E$ и f непрерывна в точке $a \in D$, а g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Вспомогательное нер-во: если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теор. 2.6 (Вейерштрасса)**.** Непрерывная на *отрезке* функция:
① ограничена; ② принимает наибольшее и наименьшее значения

Расширение теоремы: если функция f непрерывна на $[a, +\infty]$, и $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то f ограничена на $[a, +\infty]$.

2.4 Теорема Больцано-Коши

2.5 Замечательные пределы

2.6 Эквивалентные функции

❄

3 Производные

3.1 Дифференцируемость и производная

3.2 Теоремы о среднем

«*TODO*»...

3.3 Производная и монотонность

3.4 Правило Лопиталя

3.5 Формула Тейлора

3.6 Экстремумы функций

4 Интегралы

4.1 Первообразная и неопределённый интеграл

«*TODO*»...

4.2 Действия с неопределёнными интегралами

4.3 Площади и определённый интеграл

4.4 Теорема Барроу и формула Ньютона-Лейбница

4.5 Интегральные суммы

4.6 Связь между суммами и интегралами