

Основы теории графов. Задачи.

1 Основы

«TODO»...

2 Деревья

«TODO»...

3 Эйлеровы графы

«TODO»...

4 Паросочетания I

«TODO»...

5 Гамильтоновы графы

«TODO»...

6 Графы деБрейна

«TODO»...

7 Вершинная связность

«TODO»...

8 Рёберная связность

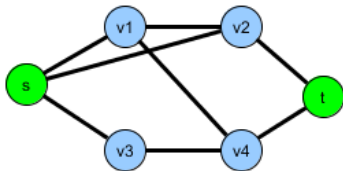
Зад. 8.1. Рассмотрим граф G с двумя выделенными несмежными вершинами s и t . Множество вершин X , не содержащее вершин s и t , назовём вершинным разрезом, если после его удаления из графа пути между s и t будут отсутствовать.

Рассмотрим наряду с графом G граф H , полученный с помощью следующей процедуры. Каждую вершину v_i графа G разделим на две вершины v_{i1} и v_{i2} , которые

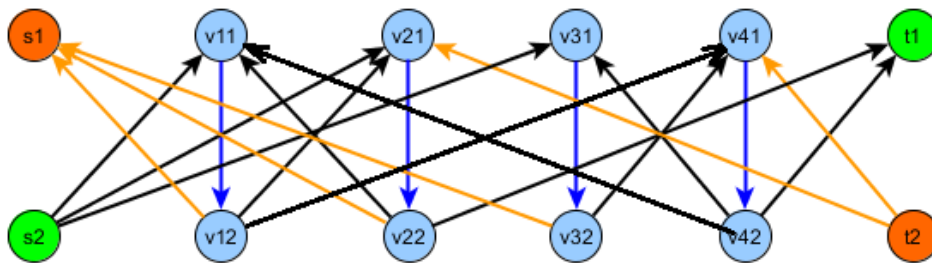
дополнительно соединим направленным ребром (v_{i1}, v_{i2}) в случае, если v_i отлична от s и от t . Каждое ребро v_i, v_j заменим на два ребра (v_{i2}, v_{j1}) и (v_{j2}, v_{i1}) .

Из получившегося графа H получим сеть H' , приписав каждому ребру пропускную способность 1, в качестве истока взяв s_2 , а в качестве стока — t_1 . Докажите, что величина максимального потока в сети H' равна величине минимального вершинного разреза в графе G .

Доказательство. В качестве иллюстрации своих рассуждений приведу пример исходного графа:



и сети, полученной из него по правилам в условии задачи:



Для краткости буду называть вершины сети вида v_{i1} чётными полувершинами (верхний ряд на рисунке), а вершины вида v_{i2} — чётными полувершинами.

Во-первых, заметим, что только у стока (s_2) допустим нулевой входной поток, а значит вершину t_2 без входящих рёбер можно из рассмотрения выбросить. Поток из неё во все оранжевые рёбра всегда будет нулевым. Аналогично выбрасываем вершину s_1 (у неё исходящий поток тоже ноль) и идущие к ней оранжевые рёбра, т.к. поток через них всегда будет нулевым.

Запустив на нашу сеть алгоритм Форда-Фалкерсона, мы найдём максимальный поток, который определяется (по теореме) минимальным S-T-разрезом. Попробуем угадать, какие рёбра в него войдут. Мы хотим получить разрез с минимальным потоком. Такие разрезы легче найти среди разрезом с минимальной пропускной способностью. Поскольку пропускная способность всех рёбер по правилам задачи одинакова и равна 1, мы ищем разрез с минимальным числом рёбер из S-половины в T-половину, причём рёбра, идущие из T в S (в обратном направлении) в разрезе не учитываются.

Рассмотрим какую-нибудь пару полувершин, например v_{11} и v_{12} . Если бы нечётная полувершина входила во множество T разреза, то мы бы учитывали входящие в неё рёбра из вершин s_2 , v_{22} , v_{42} . Если бы мы включили её в S-половину разреза вместе с s_2 , а v_{22} и v_{42} в T-половину, то все входящие в неё ребра не учитывались бы (все рёбра из зелёной s_2 находятся внутри S-половины, а v_{22} и v_{42} были бы "обратными" $T \rightarrow S$ -рёбрами). Учитывалось бы только единственное исходящее - вертикальное синее ребро ($v_{11} \rightarrow v_{12}$).

Так же и в целом по построению сети ситуация такова: только синие рёбра (рёбра вида $v_{i1} \rightarrow v_{i2}$) идут сверху вниз, а все остальные снизу вверх. Поэтому минимальный S-T разрез будет иметь вид: S - это какое-то подмножество нечётных полувершин (верхний синий ряд) плюс s_2 , а T - какое-то подмножество чётных полувершин (ниж-

ний синий ряд) плюс t_1 . Соответственно рёбра в найденном минимальном разрезе будут из подмножества синих рёбер.

Теперь заметим, что каждое синее ребро взаимно однозначно соответствует чётно-нечётной паре полувершин в H , т.е. их вершине-прототипу в G , и его удаление соответствует удалению этой вершины (т.е. удаление некоторого $(v_{i1} \rightarrow v_{i2})$ в H однозначно соответствует удалению v_i в G), а минимальный рёберный разрез по синим рёбрам в H соответствует минимальному разделяющему множеству вершин в G .

Найденный алгоритмом Форда-Фалкерсона максимальный поток – это поток через минимальный рёберный разрез в H' (какой бы он ни был, он будет среди синих рёбер) и соответствует такому набору рёбер в H , что при его удалении путей между s_2 и t_1 не останется. Таким образом, максимальный поток в H' даст нам размер минимального вершинно-разделяющего множества в G . \square

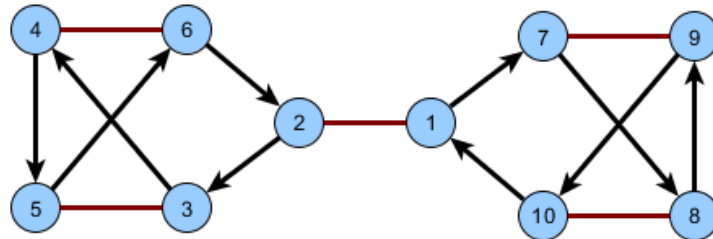
«TODO»...

9 Паросочетания

9.1 Задачи

Зад. 9.1. Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, можно покрыть путями длины 3, не пересекающимися по рёбрам.

Доказательство. В таком графе найдётся совершенное паросочетание. Удаляя его, мы получаем некоторый подграф. Каждая вершина в нём имеет степень 2. Значит, подграф состоит из циклов. Сориентируем рёбра каждого цикла графа в одном направлении:



У каждой вершины будет одно входящее, одно исходящее и одно удалённое “совершенное” ребро. Пути длины 3 строим так: ребро $u, v \in M$, ребро исходящее из v , ребро исходящее из u . \square

Зад. 9.2. Назовём граф критическим, если в нём нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иначе говоря, для любой вершины в графе есть паросочетание, покрывающее все вершины, кроме неё. Докажите, что $c_o(G \setminus S) - |S| \leq -1$ для любого непустого множества S вершин критического графа.

Доказательство. Рассмотрим произвольное непустое множество S в графе G и выделим произвольную (возможно, единственную, если $|S| = 1$) вершину $x \in S$. Обозначим $G' = G \setminus x$ и $S' = S \setminus x$. Заметим, что $|S| = |S'| + 1$. Тогда: $G \setminus S = G \setminus (S' \cup x) = (G \setminus x) \setminus S' = G' \setminus S'$. По условию задачи, в G' всегда найдётся совершенное паросочетание, а значит: $\text{def}(G') = \max_{S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S''] = 0$.

Соединяя вместе эти формулы, получаем: $C_o(G \setminus S) - |S| = C_o(G' \setminus S') - (|S'| + 1) =$

$[C_o(G' \setminus S') - |S'|] - 1 \leq \max_{\forall S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S'']] - 1 = \text{def}(G') - 1 = 0 - 1 = -1$
 Что и требовалось доказать. \square

«*TODO*»...

9.2 Иллюстрации

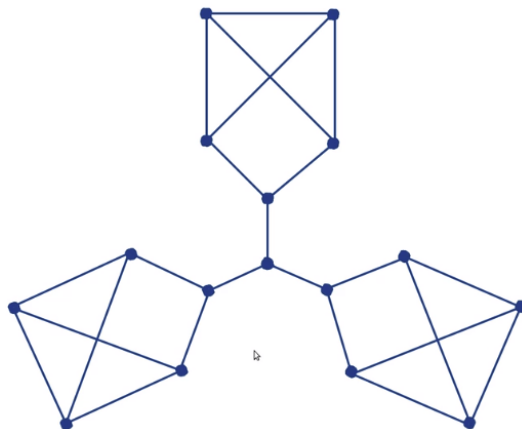


Рис. 1: Кубический граф

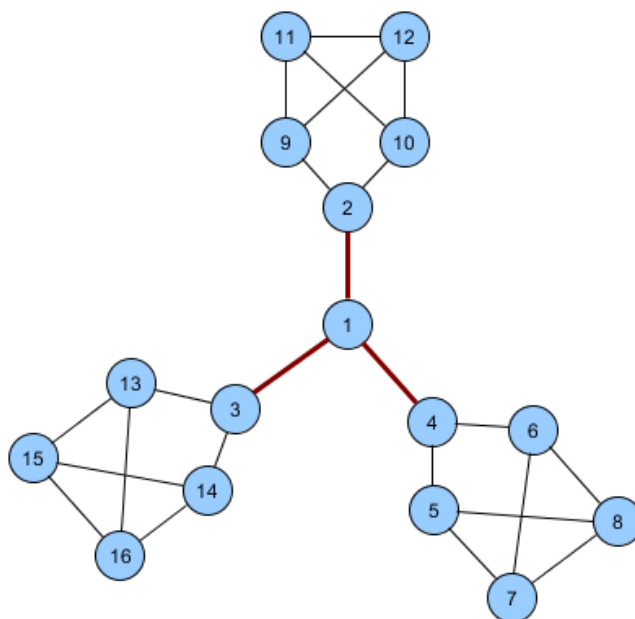


Рис. 2: Мин. (16 вершин) кубический граф с 3 мостами (сов.п.с. \nexists)

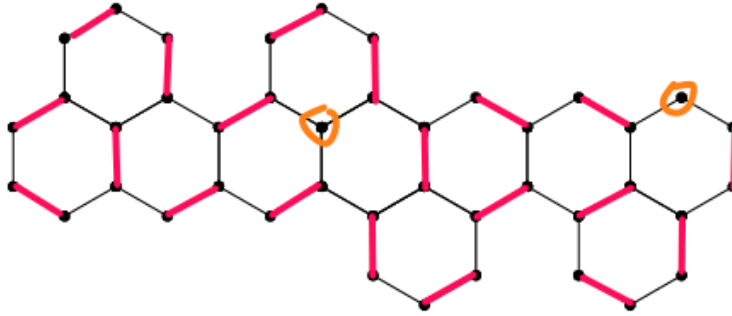


Рис. 3: Дефицит графа

10 Раскраски

«TODO»...

11 Планарные графы I

Зад. 11.1. Без использования теоремы о четырех красках доказать, что любой планарный связный граф, построенный на не более чем $n = 11$ вершинах, является 4-раскрашиваемым.

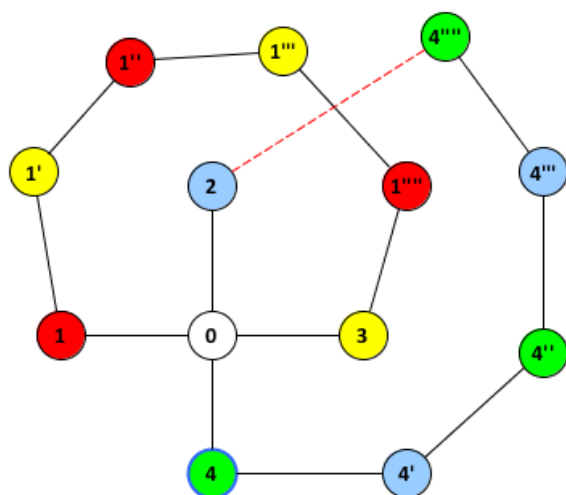
Указание: вначале доказать, что в таком графе существует вершина, степень которой меньше или равна четырем.

Доказательство. Пусть $\delta = \min_{v \in V(G)} \deg(v)$. Тогда $\delta \cdot V \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2E \leq 2(3V - 6)$

$= 6V - 12$, поскольку для простых связных планарных графов верно $E \leq 3V - 6$. Отсюда $12/(6 - \delta) \leq V$. Но по условию $V \leq 11$, а значит $12 \leq 66 - 11\delta$. Получаем, что $\delta \leq (54/11) \approx 4.9$, то есть целое число $\delta \leq 4$ и найдется вершина v , у которой $\deg(v) \leq 4$.

Теперь проведём рассуждение, полностью аналогичное приведённому на последней лекции, но вместо 5 цветов и соседей у нас будет 4.

Проводим индукцию по количеству вершин. Для $V = 4$ утверждение очевидно (а для меньшего числа тривиально/бессмысленно). Предположим, что для $(V - 1)$ индукция уже доказана. Докажем теперь шаг индукции для V ($V \leq 11$). Выделим вершину степени не больше 4 (мы показали, что она всегда найдётся), временно удалим, раскрасим остальной граф (это возможно по предположению шага) и вернём вершину на место. В худшем случае у вершины 4 соседа у которых 4 разных цвета (иначе раскрашиваем вершину 0 в оставшийся цвет). Например, 1-красный, 2-синий, 3-жёлтый, 4-зелёный, а самой вершине дадим индекс 0, как показано на рисунке.

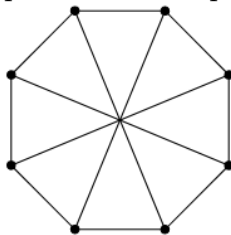


Сначала выбираем пару смежных вершин 1(красный)-3(жёлтый). Пытаемся перекрасить 1-ю в желтый, если же у неё есть жёлтый сосед 1', пытаемся перекрасить его в красный, при неудаче рассматриваем соседей соседа итд. Если удалось, меняем цвета в цепочке, 1-ю в жёлтый, 0-ю в красный и празднуем успех. В случае полной неудачи, худший случай - это когда цепочка дотянется до вершины 3. Тогда выбираем вторую пару 2(синий)-4(зелёный) и пытаемся перекрасить 4-ю в синий, а если найдётся синий сосед 4', пытаемся раскрасить его в зелёный, при неудаче тянем цепочку дальше. Рано или поздно сине-зелёная цепочка упрётся в красно-жёлтую, потому что та образует вместе с вершиной 0 замкнутый цикл, так что в этом случае удача нам гарантирована. Это доказывает шаг индукции и завершает задачу. \square

«TODO»...

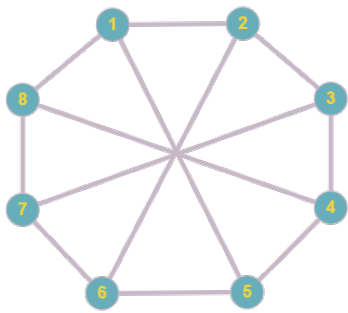
12 Планарные графы II

Зад. 12.1. Доказать с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G , изображенного на рисунке:

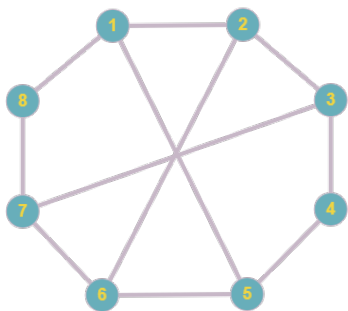


Доказательство. Докажем, что подграф нашего графа, полученный *удалением одного радиального ребра*, является подразбиением графа $K_{3,3}$, что по критерию Куратовского гарантирует непланарность.

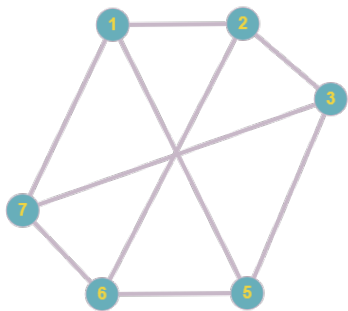
Пронумеруем вершины исходного графа:



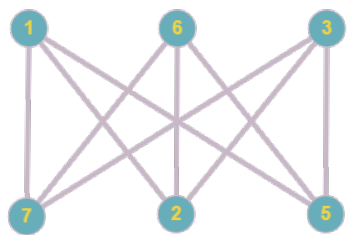
В качестве подмножества для критерия возьмём граф, в котором удалено одно радиальное ребро, например ребро 4-8:



Смежные с удалённым ребром вершины 4,8 в подмножестве имеют степень 2 и являются *подразбиением* графа, к которому мы стремимся. Удалим их, заменив на рёбра:



Получившийся граф изоморфен графу $K_{3,3}$. Просто переставим вершины на рисунке для наглядности:



Доказано. □

«*TODO*»...

