

Основы теории графов. Теория

1 Основы

Опр. 1.1. Цикл - замкнутый маршрут, **рёбра** не повторяются????

Опр. 1.2. Простой цикл - замкнутый маршрут, рёбра **и вершины** не повторяются

Теор. 1.1.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

Теор. 1.2. В дереве $V = E + 1$

«TODO»...

2 Деревья

«TODO»...

3 Эйлеровы графы

Опр. 3.1 (Цикл Эйлера). проходит все **рёбра** по одному разу

Теор. 3.1. Цикл Эйлера $\exists \iff$ степень всех вершин чётная

«TODO»...

4 Паросочетания I

«TODO»...

5 Гамильтоновы графы

Опр. 5.1 (Цикл Гамильтона). проходит все **вершины** по одному разу

«TODO»...

6 Графы деБрейна

«TODO»...

7 Вершинная связность

Опр. 7.1 (Точка сочленения). если удалить, то распадётся.

Лемма 7.1 (Хёринг). $\max \text{кол-во путей } P(x \rightarrow y) \text{ (не перес. во внутр. точках)} = |R|$
– \max мн-ва вершин, отделяющих x и y .

Теор. 7.1 (Менгер). Для \forall несмежных вершин $x, y \in V \nexists e(x, y)$ размер мин. **верш.-**разделяющего мн-ва $|R_{\min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ числу простых путей $P(x \rightarrow y)$, отличных во внутренних точках.

Теор. 7.2 (Уитни). $G - k$ -связный $\iff \forall x, y \in V, \exists k$ простых путей $P(x \rightarrow y)$, не пересекающихся во внутренних точках $P_i \neq P_j$ (внут.).

Теор. 7.3. κ – вершинная связность, λ – рёберная связность,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

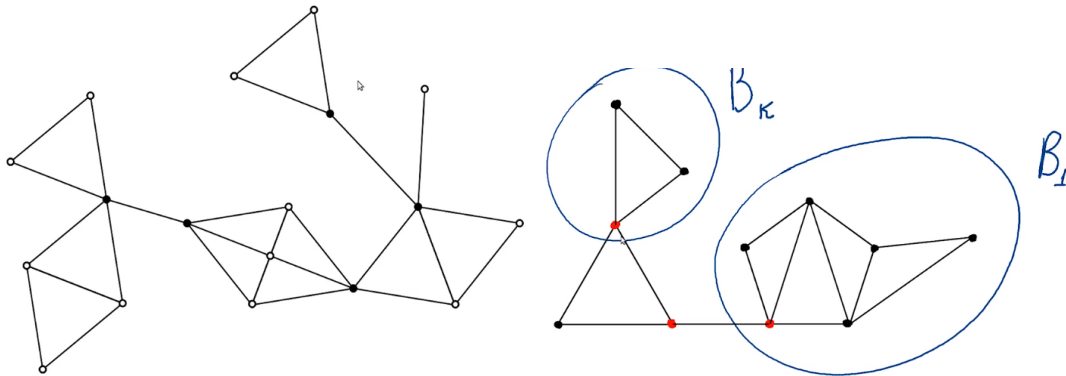
$$\text{где } \delta(G) = \min_V \deg(v)$$

Лемма 7.2. Если $|V| \geq 3$ и граф связный, то след. утв. эквивалентны:

- граф 2-связный
- $\forall 2$ верш. лежат на цикле
- $\forall 2$ ребра лежат на цикле

Теор. 7.4. 2-связный граф допускает разложение на цикл и ручки

1-связный граф можно представить в виде дерева блоков (2-связные подмножества и мосты) и точек сочленения.



«TODO»...

8 Рёберная связность

Опр. 8.1. Мост – ребро, при его удалении граф развалится

Теор. 8.1 (Форд-Фалкерсон). \max поток Q через сеть = пропускной способности минимального S - T разреза.

Теор. 8.2 (Менгер “рёберная”). Для \forall несмежных вершин $x, y \in V \nexists e(x, y)$ размер мин **рёберно-**разделяющего мн-ва $|R_{\min}^{edge}(x \leftrightarrow y)| = \max$ числу простых **рёберно-**непересекающихся путей $P(x \rightarrow y)$.

«TODO»...

9 Паросочетания II

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	α	α'	max
покрытие	β	β'	min
	вершинное	п-сочетание	

Св-во. Если S – независ.мн-во вершин, то \bar{S} – покрытие (необязательно max).
Замечание: это неверно для рёбер.

Теор. 9.1 (Галаи).

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

Теор. 9.2 (Кёниг). В \forall 2-дольном графе $B(m,n)$: $\beta = \alpha'$

Опр. 9.1 (Кубический граф). регулярный ($\deg v_i = \text{const}$) граф: $\deg = 3$

Св-во. В кубическом графе $|V|$ – чётное

Теор. 9.3 (Татт). \exists совершенное п.с. \iff при удалении $\forall S \subset V$ образуется нечётных компонент

$$C_o(G \setminus S) \leq |S|$$

Сл-е (Петерсен). В кубическом графе \exists с.п.с., если $N(\text{мостов}) \leq 2$

Св-во. В чётном графе если $C_o(G \setminus S) \geq |S|$ то $C_o(G \setminus S) \geq |S| + 2$

Опр. 9.2 (Дефицит). число вершин, не покрытых максимальным п.с.

$$\text{def}(G) = |V| - 2 \max |M|$$

Теор. 9.4 (Татта-Бержа). $\text{def}(G) = \max_{S \subset V} (C_o(G \setminus S) - |S|)$

Сл-е. $\text{def} \equiv |V| \pmod{2}$

10 Раскраски

Опр. 10.1. $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$

Св-во. chromatic number $\mathcal{X}(G) \leq \Delta + 1$ (оценка жадного алгоритма)

- деревья: $\mathcal{X} = 2$
- двудольные графы $B(m,n)$: $\mathcal{X} = 2$
- полные графы K_n : $\Delta = n - 1$, $\mathcal{X} = n$
- циклы чётной длины C_{2n} : $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 2$
- циклы нечётной длины C_{2n+1} : $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 3$

Теор. 10.1 (Брукс). $\mathcal{X}(G) \leq \Delta$ для всех графов кроме полных и нечётных циклов

Опр. 10.2 (Клика). полный подграф

Опр. 10.3 (Кликовое число). $\omega(G) = \max_{K_n \subseteq G} n$

Св-во. $\chi(G) \geq \omega(G)$

Св-во. K_n содержит $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots, K_3$ (треугольники)

Теор. 10.2 (Мицельский). $\forall n \in \mathbb{N} \exists G : \chi(G) = n, G \not\supset K_3$ (свободен от треугольников, т.е. $\omega(G) = 2$)

Опр. 10.4 (Обхват). $\Omega(G) = \min_{C_n \subseteq G} n, C_n$ — простой цикл

Теор. 10.3 (Эрдёш). $\forall k, m \in \mathbb{N} \exists G : \chi(G) = k, \Omega(G) \geq m$

Опр. 10.5. $P_G(k)$ — число способов раскрасить G в k цветов, $P_G(k) = 0$ при $k < \chi(G)$

- полный граф K_n $P_{K_n}(z) = z(z-1) \cdots (z-n+1)$
- пустой граф \bar{K}_n $P_{\bar{K}_n}(z) = z^n$
- дерево T_n $P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}$
- лес $T_{n,k}$ из k деревьев и $n = n_1 + \dots + n_k \geq k$ вершин $P_{T_{n,k}}(z) = z^k(z-1)^{n-k}$
- цикл C_n $P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$

Св-во. Если в графе есть кратные рёбра, то это никак не влияет на раскраску

Теор. 10.4. $P_G(z) = 1z^n - C_{n-1}z^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n, C_i \geq 0$, причём

- $C_{n-1} = |E(G)|$
- $G = \{G_1, \dots, G_m\}$ (связные компоненты) $\implies P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{G_m}(z)$

Лемма 10.1. $(G - e)$ — удаление ребра e , $(G \sim e)$ — “стягивание” ребра e

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) + P_{G \sim e}(z)$$

Доказательство.

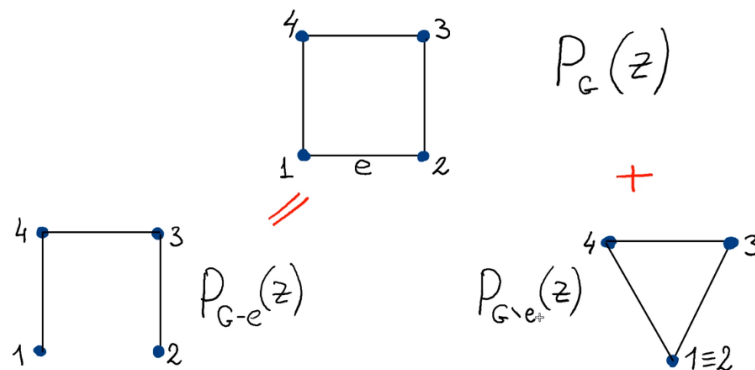


Рис. 1: chromatic polynome rule

□

11 Планарные графы I

Опр. 11.1 (Планарный). можно правильно уложить в плоскость/сферу

Св-во. Непланарные – K_5 , $K_{3,3}$

Опр. 11.2 (Грань f_i). ...

Уложив планарный граф в сферу и поворачивая сферу можно \forall заданную вершину уложить во внешнюю грань.

Св-во. $\sum \deg(f_i) = 2|E| \quad \dots = \sum \deg(v_i)$

Теор. 11.1. Граница \forall грани 2-связного плоского графа — простой цикл

Сл-е. Вершины, смежные с \forall вершиной 3-связного плоского графа – лежат на простом цикле

Опр. 11.3 (Дуальный граф плоского графа). грани \longrightarrow вершины; соединяем дуальные вершины ребром, если исходные грани смежны (т.е. отделены 1 ребром)

Св-во. Дуальный граф всегда связан; вершины \longleftrightarrow грани (с сохранением степеней)

Теор. 11.2 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников и связных планарных графов).

$$V + F = E + 2$$

Св-во. В простом плоском графе $\deg(f_i) \geq 3$

- $\deg(f_i) = 1 \implies$ петля
- $\deg(f_i) = 2 \implies$ мультиребро

Сл-е. В простом плоском графе $E \leq 3V - 6$; если равенство, то это **max** планарный граф

Теор. 11.3 (Фэри / Fary). \forall планарный граф можно так уложить в плоскость, что все рёбра – прямые отрезки

Теор. 11.4 (о 4 красках). Для правильной раскраски граней плоского графа (без мостов) хватит 4 цветов

Сл-е. Плоский граф \longrightarrow дуальный (грани \Leftrightarrow вершины), а вершины плоского дуального графа \Leftrightarrow вершинам его планарного. Так что задача \equiv правильной раскраске **вершин** планарного графа

Теор. 11.5 (Коши???). если точка A лежит внутри замкнутого контура, а B – вне его, то любой путь (A, B) пересечёт контур минимум 1 раз

12 Планарные графы II

Теор. 12.1. Если 2-связные графы в дереве блоков 1-связного графа планарны, то и весь граф планарный

Доказательство. (по индукции по точкам сочленения). □

Опр. 12.1 (подразбиение графа). добавление вершин $\deg = 2$ внутри рёбер

Теор. 12.2 (критерий Куратовского). граф не планарный \iff он содержит подразбиение K_5 или $K_{3,3}$

Теор. 12.3 (Татт). \forall 3-связный планарный граф можно вложить на плоскость так, что \forall внутренняя грань будет выпуклым многоугольником

«TODO»...

