# 1 Дифференциальное исчисление

## 1.1 Производные

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(10^x)' = 10^x \ln 10$ | $(x^x)' = x^x(1+\ln x)$ | |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | |
| $\sin x' = \cos x$ | $\cos x' = -\sin x$ | $\operatorname{tg} x' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{ctg} x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arcctg} x' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arsh} x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{arch} x' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arth} x' = \frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{arcth} x' = \frac{1}{x^2-1}$ |
| | | $\operatorname{th} x' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\operatorname{cth} x' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |

## 1.2 Комбинация производных

$$y = f(x) \quad x = g(y) \quad g = f^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f(g(x)))' = f'(t)g'(x)$$

$$(a \cdot b)' = a'b + ab' \qquad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \qquad (a \cdot b)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{(k)} b^{(n-k)}$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & n \leqslant m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

$$(a^{kx})^{(n)} = (k \ln a)^n a^{kx} \qquad (\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{\ln a \cdot x^{n-1}}$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(x + n\tfrac{\pi}{2}) \qquad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(x + n\tfrac{\pi}{2})$$

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x & n = 2k \\ \operatorname{ch} x & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x & n = 2k \\ \operatorname{sh} x & n = 2k+1 \end{cases}$$

## 1.3 Ряд Тейлора

$\sqsupset$ $f(x)$ - continuous, $x \in [a,b]$; $\exists\ f'(x), x \in (a,b) \Rightarrow \exists\ x_0 \in (a,b) : \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\sqsupset \quad \exists\, f^{(n+1)}(x_0) \;\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(x-x_0)^{n+1}}_{R_n \text{ — остаточный член, } 0<\theta<1}$$

$$x_0 = 0 \;\Rightarrow\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1}$$

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\Rightarrow\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k$$

## 1.4 Биномиальные коэффициенты

$$C_n\underbrace{(k_1,\ldots,k_r)}_{\sum k_i = n} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}}$$

Треугольник Паскаля

$$(a_1+\cdots+a_r)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} C_n(k_1,\ldots,k_r)\, a_1^{k_1}\cdots a_r^{k_r}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$$

## 1.5 Подстановки и перестановки

$M = \{s_1,\ldots,s_k\}$ — упорядоченное множество (перестановка)

$p^k\colon M \to M$ — взаимно-однозначное отображение (подстановка)

$M = \{s_1,\ldots,s_k\}$; $i_1,\ldots,i_p$ — числа: $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} i_j = k$, $i_j$ — повторения $s_j$

$p^k_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$ — упор. набор из $M$ — <u>перестановка с повторением</u> ($M_p \to M_k$)

($i_1 = \ldots = i_p = 1 \Rightarrow p^k_{1,\ldots,1} = p^k$ — простая перестановка)

$a_r^k$ — упор. набор из $r$ разных эл-тов из $k$ — размещение

$a_r^k$ — также вз. однозн. отобр. из $\{1,2,\ldots,r\} \to M$ ($r \leqslant k$; $r = k \Rightarrow$ подстановки)

$\tilde{a}_r^k$ — размещение с повторами, набор $r$ эл-тов из $k$ (с возвращениями) ($r > k$ – можно)

$c_r^k$ — сочетание $r$ эл-тов из $k$, подмножество, без учёта порядка

$\tilde{c}_r^k$ — сочетание с повторениями, т.е. $\tilde{a}_r^k$ без учета порядка.

$P_k = P(p^k) = k!$ — число всех перестановок $p^k$

$F(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i (k-i)!$ — число всех подстановок с $\geqslant 1$ неподв. точкой

$G(p^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} C_k^i\, i\, (k-i)!$ — число всех подстановок с $\equiv 1$ неподв. точкой

$\boxed{C_k(i_1,\ldots,i_p) = \frac{k!}{i_1!\cdots i_p!}} \left(\sum_1^p i_j = k\right)$ — число перестановок с повторениями

$A_k^r = A(a_r^k) = \frac{k!}{(k-r)!} = k(k-1)\cdots(k-r+1)$ — число размещений

$A(\tilde{a}_r^k) = k^r$ — число размещений с повтором (возвратом)

$C_k^r = C(c_r^k) = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ — число сочетаний

$f_k^r = C_{k+r-1}^r = \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!}$ — число сочетаний с повторениями

## 1.6 Гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x+1) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! \approx \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi$$