

# Основы теории графов. Задачи.

## 1 Основы

## 2 Вершинная связность

### 2.1 Задачи

### 2.2 Иллюстрации

## 3 Рёберная связность

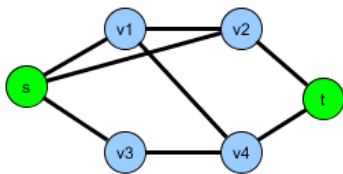
### 3.1 Задачи

*Зад. 3.1.* Рассмотрим граф  $G$  с двумя выделенными несмежными вершинами  $s$  и  $t$ . Множество вершин  $X$ , не содержащее вершин  $s$  и  $t$ , назовём вершинным разрезом, если после его удаления из графа пути между  $s$  и  $t$  будут отсутствовать.

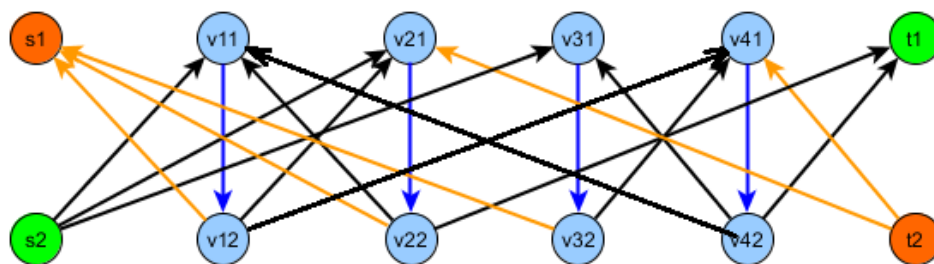
Рассмотрим наряду с графом  $G$  граф  $H$ , полученный с помощью следующей процедуры. Каждую вершину  $v_i$  графа  $G$  разделим на две вершины  $v_{i1}$  и  $v_{i2}$ , которые дополнительно соединим направленным ребром  $(v_{i1}, v_{i2})$  в случае, если  $v_i$  отлична от  $s$  и от  $t$ . Каждое ребро  $v_i, v_j$  заменим на два ребра  $(v_{i2}, v_{j1})$  и  $(v_{j2}, v_{i1})$ .

Из получившегося графа  $H$  получим сеть  $H'$ , приписав каждому ребру пропускную способность 1, в качестве истока взяв  $s_2$ , а в качестве стока —  $t_1$ . Докажите, что величина максимального потока в сети  $H'$  равна величине минимального вершинного разреза в графе  $G$ .

*Доказательство.* В качестве иллюстрации своих рассуждений приведу пример исходного графа:



и сети, полученной из него по правилам в условии задачи:



Для краткости буду называть вершины сети вида  $v_{i1}$  чётными полувершинами (верхний ряд на рисунке), а вершины вида  $v_{i2}$  – чётными полувершинами.

Во-первых, заметим, что только у стока ( $s2$ ) допустим нулевой входной поток, а значит вершину  $t2$  без входящих рёбер можно из рассмотрения выбросить. Поток из неё во все оранжевые рёбра всегда будет нулевым. Аналогично выбрасываем вершину  $s1$  (у неё исходящий поток тоже ноль) и идущие к ней оранжевые рёбра, т.к. поток через них всегда будет нулевым.

Запустив на нашу сеть алгоритм Форда-Фалкерсона, мы найдём максимальный поток, который определяется (по теореме) минимальным S-T-разрезом. Попробуем угадать, какие рёбра в него войдут. Мы хотим получить разрез с минимальным потоком. Такие разрезы легче найти среди разрезов с минимальной пропускной способностью. Поскольку пропускная способность всех рёбер по правилам задачи одинакова и равна 1, мы ищем разрез с минимальным числом рёбер из S-половины в T-половину, причём рёбра, идущие из T в S (в обратном направлении) в разрезе не учитываются.

Рассмотрим какую-нибудь пару полувершин, например  $v_{11}$  и  $v_{12}$ . Если бы нечётная полувершина входила во множество T разреза, то мы бы учитывали входящие в неё рёбра из вершин  $s2$ ,  $v_{22}$ ,  $v_{42}$ . Если бы мы включили её в S-половину разреза вместе с  $s2$ , а  $v_{22}$  и  $v_{42}$  в T-половину, то все входящие в неё рёбра не учитывались бы (все рёбра из зелёной  $s2$  находятся внутри S-половины, а  $v_{22}$  и  $v_{42}$  были бы "обратными"  $T \rightarrow S$ -рёбрами). Учитывалось бы только единственное исходящее - вертикальное синее ребро ( $v_{11} \rightarrow v_{12}$ ).

Так же и в целом по построению сети ситуация такова: только синие рёбра (рёбра вида  $v_{i1} \rightarrow v_{i2}$ ) идут сверху вниз, а все остальные снизу вверх. Поэтому минимальный S-T разрез будет иметь вид: S - это какое-то подмножество нечётных полувершин (верхний синий ряд) плюс  $s2$ , а T - какое-то подмножество чётных полувершин (нижний синий ряд) плюс  $t1$ . Соответственно рёбра в найденном минимальном разрезе будут из подмножества синих рёбер.

Теперь заметим, что каждое синее ребро взаимно однозначно соответствует чётно-нечётной паре полувершин в  $H$ , т.е. их вершине-прототипу в  $G$ , и его удаление соответствует удалению этой вершины (т.е. удаление некоторого  $(v_{i1} \rightarrow v_{i2})$  в  $H$  однозначно соответствует удалению  $v_i$  в  $G$ ), а минимальный рёберный разрез по синим рёбрам в  $H$  соответствует минимальному разделяющему множеству вершин в  $G$ .

Найденный алгоритмом Форда-Фалкерсона максимальный поток – это поток через минимальный рёберный разрез в  $H'$  (какой бы он ни был, он будет среди синих рёбер) и соответствует такому набору рёбер в  $H$ , что при его удалении путей между  $s2$  и  $t1$  не останется. Таким образом, максимальный поток в  $H'$  даст нам размер минимального вершинно-разделяющего множества в  $G$ .  $\square$

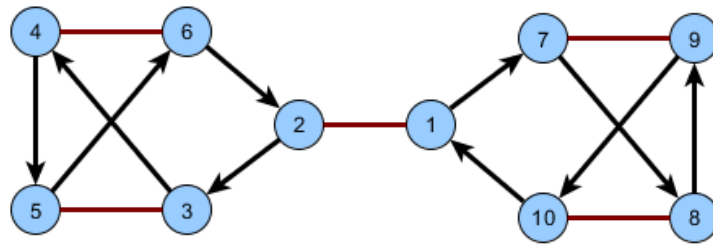
## 3.2 Иллюстрации

# 4 Паросочетания

## 4.1 Задачи

*Зад. 4.1.* Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, можно покрыть путями длины 3, не пересекающимися по рёбрам.

*Доказательство.* В таком графе найдётся совершенное паросочетание. Удаляя его, мы получаем некоторый подграф. Каждая вершина в нём имеет степень 2. Значит, подграф состоит из циклов. Сориентируем рёбра каждого цикла графа в одном направлении:



У каждой вершины будет одно входящее, одно исходящее и одно удалённое “совершенное” ребро. Пути длины 3 строим так: ребро  $u, v \in M$ , ребро исходящее из  $v$ , ребро исходящее из  $u$ .  $\square$

*Зад. 4.2.* Назовём граф критическим, если в нём нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иначе говоря, для любой вершины в графе есть паросочетание, покрывающее все вершины, кроме неё. Докажите, что  $c_o(G \setminus S) - |S| \leq -1$  для любого непустого множества  $S$  вершин критического графа.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное непустое множество  $S$  в графе  $G$  и выделим произвольную (возможно, единственную, если  $|S| = 1$ ) вершину  $x \in S$ . Обозначим  $G' = G \setminus x$  и  $S' = S \setminus x$ . Заметим, что  $|S| = |S'| + 1$ . Тогда:  $G \setminus S = G \setminus (S' \cup x) = (G \setminus x) \setminus S' = G' \setminus S'$ . По условию задачи, в  $G'$  всегда найдётся совершенное паросочетание, а значит:  $\text{def}(G') = \max_{S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S'']] = 0$ .

Соединяя вместе эти формулы, получаем:  $C_o(G \setminus S) - |S| = C_o(G' \setminus S') - (|S'| + 1) = [C_o(G' \setminus S') - |S'|] - 1 \leq \max_{S'' \subset V'(G')} [C_o(G' \setminus S'') - |S'']] - 1 = \text{def}(G') - 1 = 0 - 1 = -1$

Что и требовалось доказать.  $\square$

## 4.2 Иллюстрации

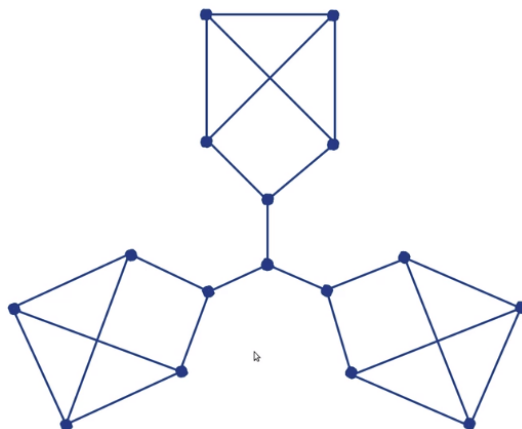


Рис. 1: Кубический граф

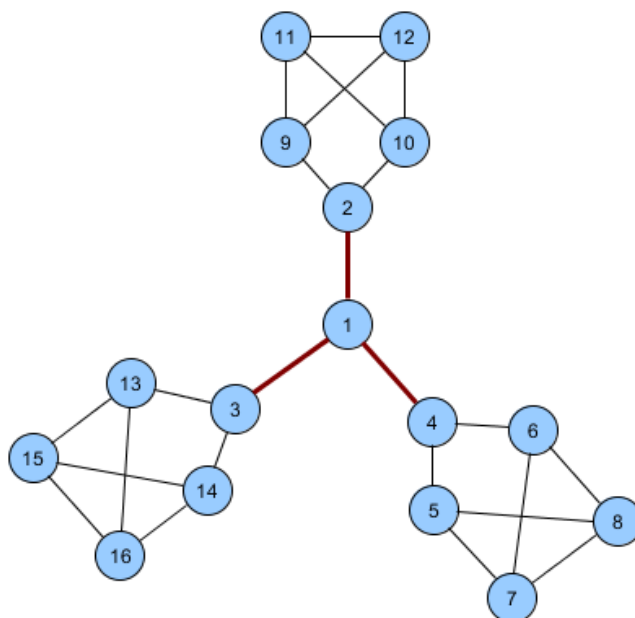


Рис. 2: Мин. (16 вершин) кубический граф с 3 мостами (сов.п.с.  $\nexists$ )



Рис. 3: Дефицит графа

## 5 Раскраска

## 6 Планарные графы

### 6.1 Задачи

*Зад. 6.1.* Без использования теоремы о четырех красках доказать, что любой планарный связный граф, построенный на не более чем  $n = 11$  вершинах, является 4-раскрашиваемым.

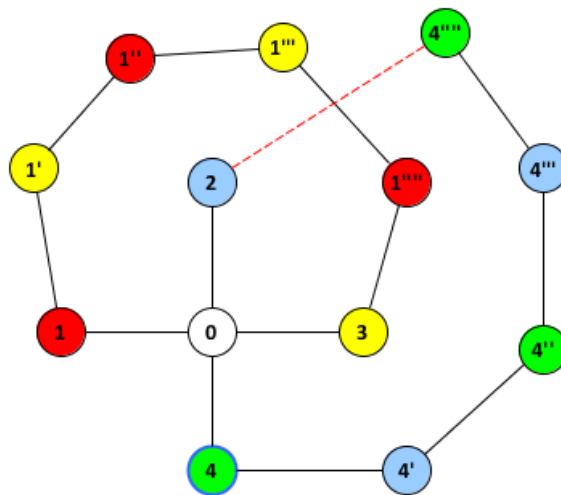
Указание: вначале доказать, что в таком графе существует вершина, степень которой меньше или равна четырем.

*Доказательство.* Пусть  $\delta = \min_{v \in V(G)} \deg(v)$ . Тогда  $\delta \cdot V \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2E \leq 2(3V - 6)$

$= 6V - 12$ , поскольку для простых связных планарных графов верно  $E \leq 3V - 6$ . Отсюда  $12/(6 - \delta) \leq V$ . Но по условию  $V \leq 11$ , а значит  $12 \leq 66 - 11\delta$ . Получаем, что  $\delta \leq (54/11) \approx 4.9$ , то есть целое число  $\delta \leq 4$  и найдется вершина  $v$ , у которой  $\deg(v) \leq 4$ .

Теперь проведём рассуждение, полностью аналогичное приведённому на последней лекции, но вместо 5 цветов и соседей у нас будет 4.

Проводим индукцию по количеству вершин. Для  $V = 4$  утверждение очевидно (а для меньшего числа тривиально/бессмысленно). Предположим, что для  $(V - 1)$  индукция уже доказана. Докажем теперь шаг индукции для  $V$  ( $V \leq 11$ ). Выделим вершину степени не больше 4 (мы показали, что она всегда найдётся), временно удалим, раскрасим остальной граф (это возможно по предположению шага) и вернём вершину на место. В худшем случае у вершины 4 соседа у которых 4 разных цвета (иначе раскрашиваем вершину 0 в оставшийся цвет). Например, 1-красный, 2-синий, 3-жёлтый, 4-зелёный, а самой вершине дадим индекс 0, как показано на рисунке.



Сначала выбираем пару смежных вершин 1(красный)-3(жёлтый). Пытаемся перекрасить 1-ю в желтый, если же у неё есть жёлтый сосед 1', пытаемся перекрасить его в красный, при неудаче рассматриваем соседей соседа итд. Если удалось, меняем цвета в цепочке, 1-ю в жёлтый, 0-ю в красный и празднуем успех. В случае полной неудачи, худший случай - это когда цепочка дотянется до вершины 3. Тогда

выбираем вторую пару 2(синий)-4(зелёный) и пытаемся перекрасить 4-ю в синий, а если найдётся синий сосед 4', пытаемся раскрасить его в зелёный, при неудаче тянем цепочку дальше. Рано или поздно сине-зелёная цепочка упрётся в красно-жёлтую, потому что та образует вместе с вершиной 0 замкнутый цикл, так что в этом случае удача нам гарантирована. Это доказывает шаг индукции и завершает задачу.  $\square$