Основы теории графов. Теория

1 Основы

Теор. 1.1.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

2 Вершинная связность

Опр. 2.1. *Точка сочленения – если удалить, то распадётся.*

Л. 2.0.1 (Хёринг)**.** max *кол-во путей* $P(x \to y)$ *(не перес. во внутр. точках)* $= |R|$ – max *мн-ва вершин, отделяющих* x *и* y*.*

Теор. 2.1 (Менгер)**.** *Для* $\forall$ *несмежных вершин* $x,y \in V$ $\nexists e(x,y)$ *размер мин.* ***верш.****-разделяющего мн-ва* $|R_{min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ *числу простых путей* $P(x \to y)$*, отличных во внутренних точках.*

Теор. 2.2 (Уитни)**.** G *–* k*-связный* $\iff \forall x,y \in V$*,* $\exists\, k$ *простых путей* $P(x \to y)$*, не пересекающихся во внутренних точках* $P_i \neq P_j$ *(внут.).*

Теор. 2.3. $\beth$ κ *– вершинная связность,* λ *– рёберная связность,*

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

$$\text{где} \quad \delta(G) = \min_V deg(v)$$

3 Рёберная связность

Опр. 3.1. ***Мост*** *– ребро, при его удалении граф развалится*

Теор. 3.1 (Форд-Фалкерсон)**.** max *поток* Q *через сеть = пропускной способности минимального* S*-*T *разреза.*

Теор. 3.2 (Менгер “рёберная”)**.** *Для* $\forall$ *несмежных вершин* $x,y \in V$ $\nexists e(x,y)$ *размер* min ***рёберно****-разделяющего мн-ва* $|R^{edge}_{min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ *числу простых* ***рёберно****-непересекающихся путей* $P(x \to y)$*.*

3.1 Задачи

4 Паросочетания

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	α	α'	max
покрытие	β	β'	min
	вершинное	п-сочетание	

Св. 4.0.1. *Если S – независ.мн-во вершин, то $\bar{S}$ – покрытие (необязательно* max*). Замечание: это неверно для рёбер.*

Теор. 4.1 (Галаи)**.**

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

Теор. 4.2 (Кёниг)**.** *В $\forall$ 2-дольном графе $B(m,n)$: $\beta = \alpha'$*

Опр. 4.1. ***Кубический*** *граф – регулярный* $(\deg v_i = \text{const})$ *граф:* $\deg = 3$

Св. 4.1.1. *В кубическом графе $|V|$ – чётное*

Теор. 4.3 (Татт)**.** *$\exists$ совершенное п.с. $\iff$ при удалении $\forall\ S \subset V$ образуется нечётных компонент*

$$C_o(G \setminus S) \leqslant |S|$$

Сл. 4.3.1 (Петерсен)**.** *В кубическом графе $\exists$ с.п.с., если* N(мостов) $\leqslant 2$

Св. 4.1.2. *В чётном графе если $C_o(G \setminus S) \geq |S|$ то $C_o(G \setminus S) \geqslant |S| + 2$*

Опр. 4.2. *Дефицит – число вершин, не покрытых максимальным п.с.*

$$\operatorname{def}(G) = |V| - 2\max|M|$$

Теор. 4.4 (Татта-Бержа)**.** $\operatorname{def}(G) = \max\limits_{S \subset V}\big(C_o(G \setminus S) - |S|\big)$

Сл. 4.4.1. $\operatorname{def} \equiv |V| \pmod 2$

5 Раскраски

Опр. 5.1. $\Delta = \max\limits_{v \in V} \deg(v)$

Св. 5.1.1. *chromatic number $\mathcal{X}(G) \leqslant \Delta + 1$ (оценка жадного алгоритма)*

- деревья: $\mathcal{X} = 2$
- двудольные графы $B(m,n)$: $\mathcal{X} = 2$
- полные графы K_n: $\Delta = n - 1$, $\mathcal{X} = n$
- циклы чётной длины C_{2n}: $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 2$
- циклы нечётной длины C_{2n+1}: $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 3$

Теор. 5.1 (Брукс). *$\mathcal{X}(G) \leqslant \Delta$ для всех графов кроме полных и нечётных циклов*

Опр. 5.2. *Клика — полный подграф*

Опр. 5.3. *Кликовое число $\omega(G) = \max\limits_{K_n \subseteq G} n$*

Св. 5.3.1. $\mathcal{X}(G) \geqslant \omega(G)$

Св. 5.3.2. *K_n содержит K_{n-1}, K_{n-2}, ..., K_3 (треугольники)*

Теор. 5.2 (Мицельский). *$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists G : \mathcal{X}(G) = n,\; G \not\supseteq K_3$ (свободен от треугольников, т.е. $\omega(G) = 2$)*

Опр. 5.4. *Обхват $\Omega(G) = \min\limits_{C_n \subseteq G} n$, C_n — простой цикл*

Теор. 5.3 (Эрдёш). *$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists G : \mathcal{X}(G) = k,\; \Omega(G) \geqslant k$*

Опр. 5.5. *$P_G(k)$ – число способов раскрасить G в k цветов, $P_G(k) = 0$ при $k < \mathcal{X}(G)$*

- полный граф K_n $\quad P_{K_n}(z) = z(z-1)\cdots(z-n+1)$
- пустой граф $\bar{K}_n$ $\quad P_{\overline{K}_n}(z) = z^n$
- дерево T_n $\quad P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}$
- лес $T_{n,k}$ из k деревьев и $n = n_1 + \cdots + n_k \geqslant k$ вершин $\quad P_{T_{n,k}}(z) = z^k(z-1)^{n-k}$
- цикл C_n $\quad P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$

Св. 5.5.1. *Если в графе есть кратные рёбра, то это никак не влияет на раскраску*

Л. 5.3.1. *($G \setminus e$ – стягивание ребра e)*

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G\setminus e}(z)$$

Доказательство. □

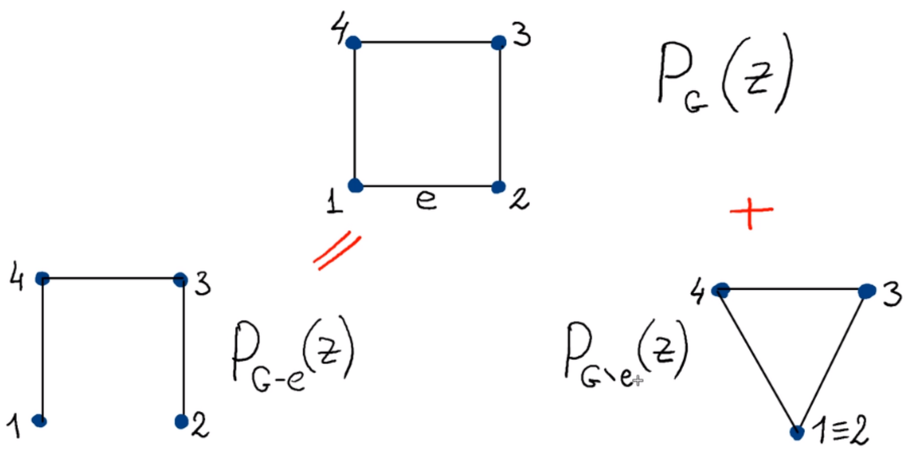

Рис. 1: chromatic polynome rule