Теория Вероятности

1 Непрерывные СВ

1.1 Вероятностное пространство

Опр-е. 1.1 (σ-алгебра)**.** *σ-алгебра над множеством X* — это семейство $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X, т.ч.:

1. $X \in \mathfrak{S}$ и $\varnothing \in \mathfrak{S}$
2. если $E \in \mathfrak{S}$, то $X \setminus E \in \mathfrak{S}$
3. если $\exists$ семейство $\{A_n\} \in \mathfrak{S}$ (конечное или счётное), то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$

Опр-е. 1.2 (Борелевское множество)**.** $\mathbb{B}$-*множество* — такое множество, которое может быть получено из *открытых или замкнутых промежутков* на $\mathbb{R}$ конечным или счетным числом операций $\bigcup A_n$ и $\bigcap A_n$.

Опр-е. 1.3. *Борелевская σ-алгебра* $\equiv$ минимальная σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{R}$.

Задача 1.1. Является ли множество всех рациональных точек на прямой борелевским, т.е. верно ли, что $\left\{\dfrac{m}{n}, n = 1, 2, ...; m = 0, 1, 2, ...\right\} \in \mathbb{B}$?

Решение. **Да.**
Каждую точку можно рассматривать как отрезок $\left[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m}{n}\right] = \left(-\infty, \dfrac{m}{n}\right] \setminus \left(-\infty, \dfrac{m}{n}\right)$, причём множество всех рациональных точек на прямой счетно.

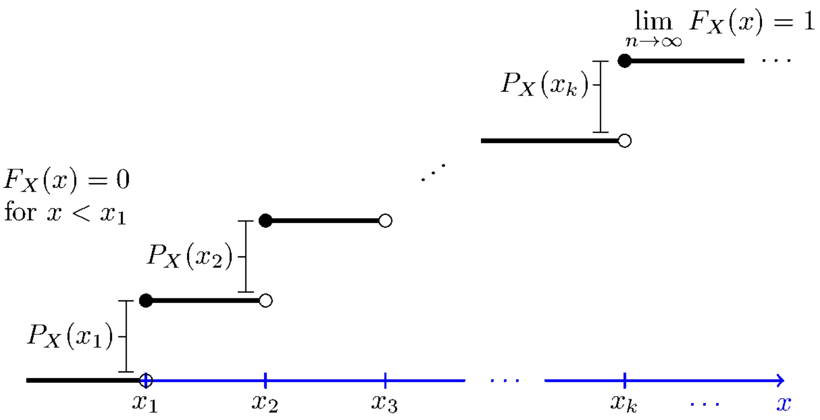
1.2 Функции распределения и плотности

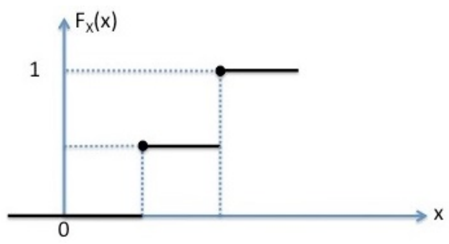
Функция распределения вероятности (CDF)

1. $F_X(x) = P(X \leqslant x)$
2. $0 \leqslant F_X \leqslant 1$
3. F – монотонно неубывающая

4. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
5. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
6. F – непрерывна *справа*
7. F – это некоторая вероятность, т.е. безразмерная величина

Замечание: если бы CDF была определена как $P(X{<}x)$, то была бы непрерывна *слева*.





Функция плотности распределения (PDF):

1. $f(u) \geqslant 0$
2. $f(x) = F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$
3. $P(X \leqslant x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$ – условие нормировки
5. $P(X = a) = 0$
6. $P(X \in \langle x, x+\delta\rangle) \approx f(x)\delta$
7. размерность f есть $\dfrac{1}{\text{размерность}(X)}$ (например, см$^{-1}$, кг$^{-1}$)

1.3 Характеристики непрерывных СВ

Матожидание $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du$

$M(x)$ существует $\iff$ интеграл сходится *абсолютно*: $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|f(u)du < \infty$.

Матожидание может не существовать. Пример – распределение Коши: $f(x) = \dfrac{1/\pi}{1+x^2}$.
Для него $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|f(u)du = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \dfrac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty} \to \infty$

Если $f(x) = f(-x)$ (чётная), то $M(X) = 0$ (если существует).

Матожидание функции $M\left(\varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)f(u)du$.

Дисперсия $D(X) = M\left(X - M(X)\right) = M(X^2) - M^2(X)$

Медиана (характеристика *положения*): $\mathrm{Me}(X) = arg\left\{F_X(x) = 1/2\right\}$

Медиана существует *всегда*.

Если $f(x) = f(-x)$ (чётная), то для нормировки функции плотности имеем:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_{0}^{\infty} f(u)du = F(0) + \int_{\infty}^{0} f(-u)d(-u) = F(0) + F(0)$$

а значит $F(0) = 1/2$, т.е. $\mathrm{Me}(X) = 0$.

Нижний квартиль: $F(Q_1) = 1/4$

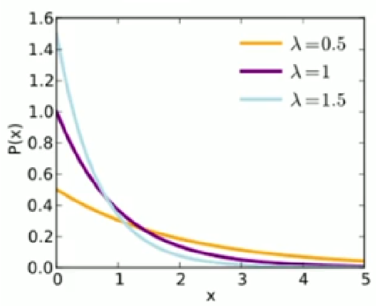
Нижний квартиль: $F(Q_3) = 3/4$

Межквартильный размах: $IQR = Q_3 - Q_1$

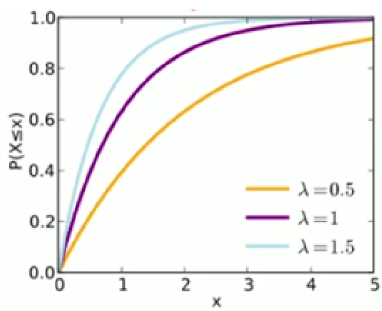
Квантиль уровня α: $F(q_\alpha) = \alpha$

Квантильная функция $Q(p) = F^{-1}(x)$, $p \in [0,1]$ – функция, обратная к функции распределения

1.4 Экспоненциальное распределение



Probability density function



Cumulative distribution function

$X \sim Exp(\lambda)$

PDF: $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, $u \geqslant 0$, $\lambda > 0$

CDF: $F(X) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda e^{-\lambda u} \qquad u \geqslant 0,\ \lambda > 0 \\ F(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geqslant 0 \\ M(x) &= \frac{1}{\lambda} \\ D(x) &= \frac{1}{\lambda^2} \\ \mathrm{Me}(x) &= \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad \text{скошено вправо: } Me < M \end{aligned}$$

Свойство отсутствия памяти:

$$P(X > t+s | X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = P(X > s) \quad (s, t \geqslant 0)$$

Среди дискретных распределений свойством отсутствия памяти обладает геометрическое. Экспоненциальное распределение – непрерывный аналог геометрического.

1.5 Процесс Пуассона

Случайный процесс – последовательность случайных величин в дискретном времени (обычно НОР, т.е. независимых одинаково распределённых).

Пуассоновский процесс – непрерывный аналог процесса Бернулли:

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Свойства ПП:

1. стационарный (распределение числа событий зависит только от длины интервала)
2. ординарный (вряд ли на очень малом интервале произойдёт больше одного события)
3. поток с отсутствием памяти.

Задача 1.2. Будет ли пуассоновский процесс подходящей моделью процесса прибытия пассажиров в пункт выдачи багажа в аэропорту?

Решение. **Нет.**
Не выполняется требование независимости событий, т.к. пассажиры приходят за багажом после посадки самолета и, если мы наблюдаем, к примеру, что в зону получения багажа за последнюю минуту пришли 15 человек, то следует ожидать значительное количество людей в течение следующей минуты. Как получают багаж? Сначала толпа, потом редкие одиночки.

Задача 1.3. Будет ли пуассоновский процесс подходящей моделью процесса поступления звонков в регистратуру поликлиники в течение рабочего дня?
Решение. **Нет.**
Не выполняется требование стационарности пуассоновского процесса, т.к. частота звонков намного выше в утренние часы в сравнении с вечерними. К концу дня поток звонков при любом распорядке будет снижаться (если это не ночной стационар).

1.6 Прочие распределения

Равномерное распределение $X \sim Uniform(a, b)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1/(b-a) & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$$Me = M = (a+b)/2$$

$$D = (b-a)^2/12$$

Распределение Лапласа:

$$f = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

$$M = 0$$

$$D = \frac{2}{\lambda^2}$$

Распределение Коши:

$$f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}$$

1.7 Вспомогательные формулы

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$$
$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}$$
$$\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx = \frac{2}{a^3}$$
$$\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$