Основы теории графов.
Задачи.

Содержание

1 Основы

«$\mathcal{TODO}$»...

2 Деревья

«$\mathcal{TODO}$»...

3 Эйлеровы графы

«$\mathcal{TODO}$»...

4 Паросочетания I

«$\mathcal{TODO}$»...

5 Гамильтоновы графы

«$\mathcal{TODO}$»...

6 Графы деБрейна

«$\mathcal{TODO}$»...

7 Вершинная связность

«$\mathcal{TODO}$»...

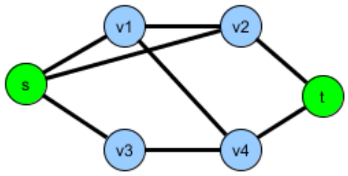
8 Рёберная связность

Задача 8.1. Рассмотрим граф G с двумя выделенными несмежными вершинами s и t. Множество вершин X, не содержащее вершин s и t, назовём вершинным разрезом, если после его удаления из графа пути между s и t будут отсутствовать.

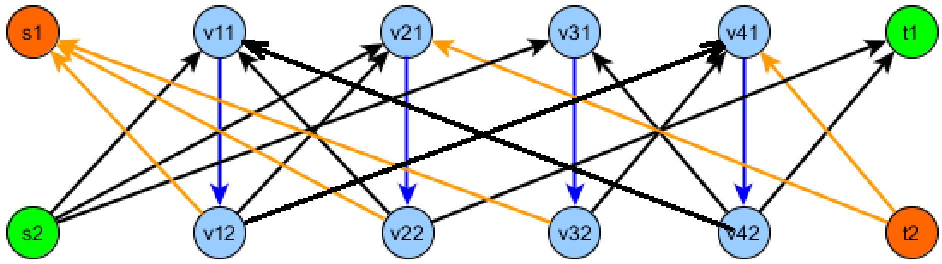
Рассмотрим наряду с графом G граф H, полученный с помощью следующей процедуры. Каждую вершину v_i графа G разделим на две вершины v_{i1} и v_{i2}, которые дополнительно соединим направленным ребром (v_{i1},v_{i2}) в случае, если v_i отлична от s и от t. Каждое ребро v_i,v_j заменим на два ребра (v_{i2},v_{j1}) и (v_{j2},v_{i1}).

Из получившегося графа H получим сеть H', приписав каждому ребру пропускную способность 1, в качестве истока взяв s_2, а в качестве стока — t_1. Докажите, что величина максимального потока в сети H' равна величине минимального вершинного разреза в графе G.

Решение.
В качестве иллюстрации своих рассуждений приведу пример исходного графа:



и сети, полученной из него по правилам в условии задачи:



Для краткости буду называть вершины сети вида v_{i1} чётными полувершинами (верхний ряд на рисунке), а вершины вида v_{i2} – чётными полувершинами.

Во-первых, заметим, что только у стока (s2) допустим нулевой входной поток, а значит вершину t2 без входящих рёбер можно из рассмотрения выбросить. Поток из неё во все оранжевые рёбра всегда будет нулевым. Аналогично выбрасываем вершину s1 (у неё исходящиё поток тоже ноль) и идущие к ней оранжевые рёбра, т.к. поток через них всегда будет нулевым.

Запустив на нашу сеть алгоритм Форда-Фалкерсона, мы найдём максимальный поток, который определяется (по теореме) минимальным S-T-разрезом. Попробуем угадать, какие рёбра в него войдут. Мы хотим получить разрез с минимальным потоком. Такие разрезы легче найти среди разрезов с минимальной пропускной способностью. Поскольку пропускная способность всех рёбер по правилам задачи одинакова и равна 1, мы ищем разрез с минимальным числом рёбер из S-половины в T-половину, причём рёбра, идущие из T в S (в обратном направлении) в разрезе не учитываются.

Рассмотрим какую-нибудь пару полувершин, например v_{11} и v_{12}. Если бы нечётная полувершина входила во множество T разреза, то мы бы учитывали входящие в неё рёбра из вершин s2, v22, v42. Если бы мы включили её в S-половину разреза вместе с s2, а v22 и v42 в T-половину, то все входящие в неё ребра не учитывались бы (все рёбра из зелёной s2 находятся внутри S-половины, а v22 и v42 были бы "обратными"$T \to S$-рёбрами). Учитывалось бы только единственное исходящее - вертикальное синее ребро ($v_{11} \to v_{12}$).

Так же и в целом по построению сети ситуация такова: только синие рёбра (рёбра вида $v_{i1} \to v_{i2}$) идут сверху вниз, а все остальные снизу вверх. Поэтому минимальный S-T разрез будет иметь вид: S - это какое-то подмножество нечётных полувершин (верхний синий ряд) плюс s2, а T - какое-то подмножество чётных полувершин (нижний синий ряд) плюс t1. Соответственно рёбра в найденном минимальном разрезе будут из подмножества синих рёбер.

Теперь заметим, что каждое синее ребро взаимно однозначно соответствует чётно-нечётной паре полувершин в H, т.е. их вершине-прототипу в G, и его удаление соответствует удалению этой вершины (т.е. удаление некоторого ($v_{i1} \to v_{i2}$) в H однозначно соответствует удалению v_i в G), а минимальный рёберный разрез по синим рёбрам в H соответствует минимальному разделяющему множеству вершин в G.

Найденный алгоритмом Форда-Фалкерсона максимальный поток – это поток через минимальный рёберный разрез в H' (какой бы он ни был, он будет среди синих рёбер) и соответвествует такому набору рёбер в H, что при его удалении путей между $s2$ и $t1$ не останется. Таким образом, максимальный поток в H' даст нам размер минимального вершинно-разделяющего множества в G. $\square$

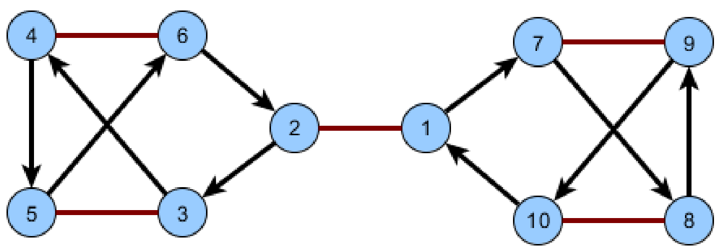
«*TODO*»...

9 Паросочетания

9.1 Задачи

Задача 9.1. Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, можно покрыть путями длины 3, не пересекающимися по рёбрам.

Решение.
В таком графе найдётся совершенное паросочетание. Удаляя его, мы получаем некоторый подграф. Каждая вершина в нём имеет степень 2. Значит, подграф состоит из циклов. Сориентируем рёбра каждого цикла графа в одном направлении:



У каждой вершины будет одно входящее, одно исходящее и одно удалённое "совершенное" ребро. Пути длины 3 строим так: ребро $u,v \in M$, ребро исходящее из v, ребро исходящее из u. $\square$

Задача 9.2. Назовём граф критическим, если в нём нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иначе говоря, для любой вершины в графе есть паросочетание, покрывающее все вершины, кроме неё. Докажите, что $c_o(G \setminus S) - |S| \leqslant -1$ для любого непустого множества S вершин критического графа.

Решение.
Рассмотрим произвольное произвольное непустое множество S в графе G и выделим произвольную (возможно, единственную, если $|S| = 1$) вершину $x \in S$. Обозначим $G' = G \setminus x$ и $S' = S \setminus x$. Заметим, что $|S| = |S'| + 1$. Тогда: $G \setminus S = G \setminus (S' \cup x) = (G \setminus x) \setminus S' = G' \setminus S'$. По условию задачи, в G' всегда найдётся совершенное паросочетание, а значит: $\operatorname{def}(G') = \max\limits_{\forall S'' \subset V'(G')} \left[C_o(G' \setminus S'') - |S''|\right] = 0$. Соединяя вместе эти формулы, получаем: $C_o(G \setminus S) - |S| = C_o(G' \setminus S') - (|S'| + 1) = \left[C_o(G' \setminus S') - |S'|\right] - 1 \leqslant \max\limits_{\forall S'' \subset V'(G')} \left[C_o(G' \setminus S'') - |S''|\right] - 1 = \operatorname{def}(G') - 1 = 0 - 1 = -1$ Что и требовалось доказать. $\square$

«$\mathcal{TODO}$»...

9.2 Иллюстрации

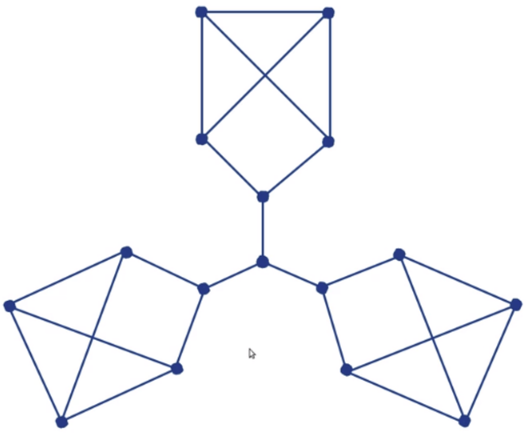


Рис. 9.1: Кубический граф

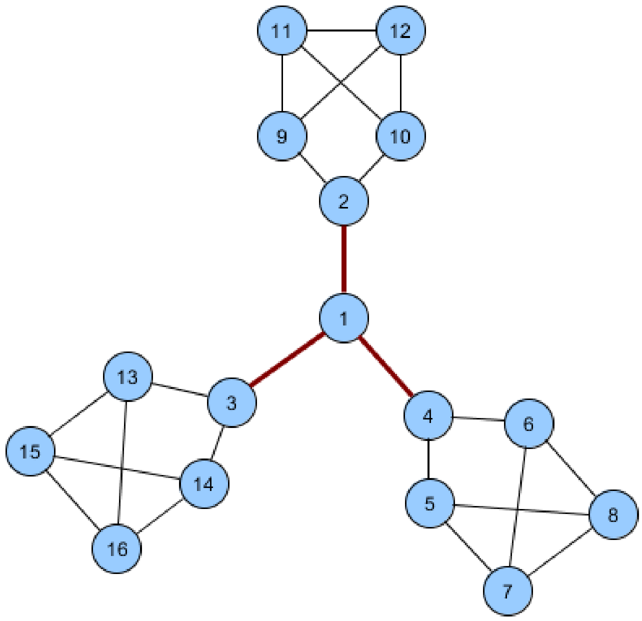


Рис. 9.2: Мин. (16 вершин) кубический граф с 3 мостами (сов.п.с. $\nexists$)

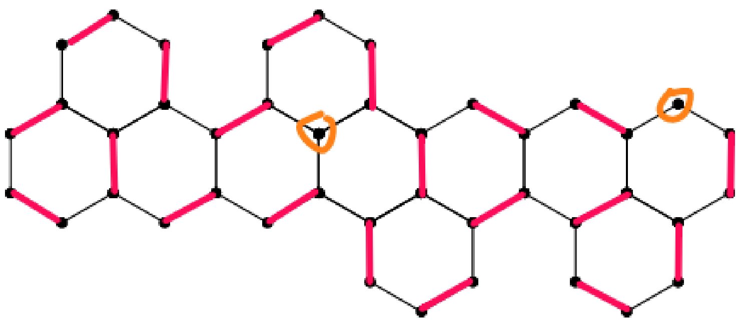


Рис. 9.3: Дефицит графа

10 Раскраски

10.1 Хроматическое число

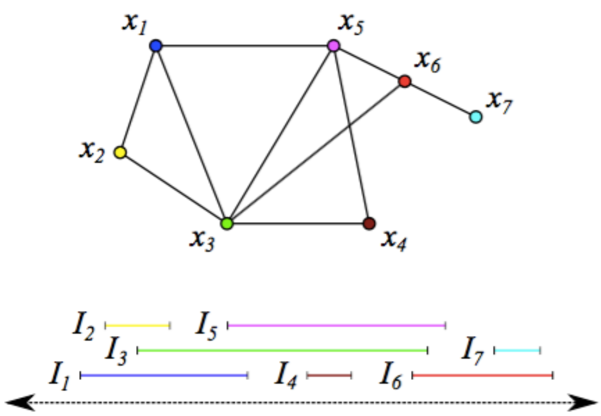
Задача 10.1. Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\mathcal{X}(G)$ цветов.

Решение.
Выделяем в графе максимальное независимое множество вершин S_1. Они несмежны между собой и получат один цвет C_1. Теперь выбираем среди оставшихся вершин графа вершины, смежные с S_1 и среди них выбираем максимально независимое множество S_2. Опять, их цвет $C2$ одинаковый в силу несмежности, но отличается от C_1 в силу смежности с S_1. Среди оставшихся выбираем вершины, смежные с $S_1 \cup S_2$, а среди них - максимальное независимое множество S_3. Они получат новый цвет C_3 итд до S_q. В силу максимальности независимых множеств на каждом этапе их общее число q минимально, т.е. равно хроматическому числу $q = \mathcal{X}(G)$.

Теперь расставим все вершины по порядку так: сначала вершины из S_1 в любом порядке (номера 1,2,...,$|S_1|$), потом из S_2 в любом порядке ($|S_1| + 1$, $|S_1| + 2$, ..., $|S_1| + |S_2|$) итд до S_q. При проходе в таком порядке жадный алгоритм будет замечать смежность вершин очередного множества S_i только с предыдущими $S_{j<i}$ (поскольку последующие еще не раскрашены) и выдаст ту же раскраску $C_1 ... C_q$. □

Задача 10.2 (ссылка). Граф G называется совершенным, если $\chi(G) = \omega(G)$, где $\omega(G)$ – его кликовое число.

Рассмотрим n замкнутых интервалов I_1,I_2,...,I_n на вещественной оси. Построим для этих интервалов граф G на n вершинах x_1,...,x_n, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j \neq \varnothing$. Такой граф G называется интервальным графом (см. рис.).



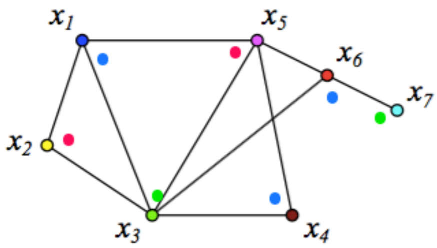
Доказать, что любой интервальный граф является совершенным.

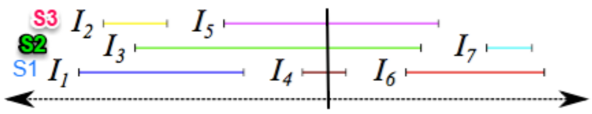
Решение (Эталонное доказательство).
«$\mathcal{TODO}$»...

Будем раскрашивать вершины интервального графа жадным алгоритмом, упорядочив их предварительно по возрастанию левых концов соответствующих интервалов. Рассмотрим момент, в который жадный алгоритм использовал максимальный цвет k, раскрасив им какую-то вершину x, соответствующую интервалу $[a,b]$. Так как алгоритм использовал цвет k, вершина x была смежна с какими-то $k-1$ уже окрашенными в разные цвета вершинами. Им соответствовали интервалы, начинающиеся левее аа (поскольку вершины уже окрашены), а заканчивающиеся — правее (поскольку есть пересечение с $[a,b]$). Все рассмотренные интервалы пересекаются в точке a а, следовательно, в интервальном графе соответствующие вершины образуют клику размера k. Таким образом, $\chi(G) \leqslant k \leqslant \omega$, но мы знаем, что $\omega(G) \leqslant \chi(G)$, а значит, $\omega(G) = \chi(G)$. □

Решение (Моё кривое доказательство)**.**
«*TODO*»...

Иллюстрация к задаче содержит толстую подсказку о способе рассуждений.





Разобьём все интервалы на непересекающиеся подмножества, соответствующие независимым подмножествам вершин в графе. Первый интервал выберем произвольно. Пусть это будет I_4. Затем будем двигаться от правого края интервала вправо, пока не встретим первый непересекающийся с ним интервал (I_6). Двигаясь вправо от его правого края найдём следующий и так далее, пока не достигнем максимума всех интервалов. Теперь дижемся влево от левого края I_4, пока не найдём предыдущий непересекающийся с ним интервал (I_1) или не достигнем минимума всех интервалов. Так мы построим максимальное множество S_1 всех попарно непересекающихся интервалов, включающих I_4. В нашем случае $S_1 = \{I_1,I_4,I_6\}$. Ему в графе соответсвует независимое множество вершин $\{x_1,x_4,x_6\}$.

Теперь возьмём какой-либо интервал, не входящий в S_1, т.е. пересекающийся с любым из интервалов S_1, например I_3 и повторим процесс. Получим множество $S_2 = \{I_3,I_7\}$. Затем любой интервал, не входящий в $S_1 + S_2$, повторим процесс и получим множество $S_3 = \{I_2,I_5\}$ попарно непересекающихся между собой интервалов, которые пересекаются с одним из интервалов из S_1+S_2. Продолжим процесс, пока интервалы не закончатся.

Каждому множеству интервалов S_i соответствует максимальное по построению независимое множество вершин в графе, причем вершины множества S_2 имеют рёбра с S_1, S_3 с $S_1 + S_2$ итд. Если раскрасить S_1 в 1-й цвет, S_2 во 2-й итд, то мы получим правильную раскраску графа. Этот набор множеств минимален по построению, то есть количество множеств S_i равно хроматическому числу графа χ.

Теперь расположим интервалы множества S_2 над интервалами S_1, S_3 над S_2 итд, получив вертикальный стек. Там, где некоторая вертикаль пересекает несколько интервалов (они будут из разных множеств), мы получим *клику*. Например, $[I_5, I_3, I_4]$, как показано на рисунке. Максимальный размер клики (кликовое число) будет равен высоте самого высокого интервала в стеке, т.е. числу множеств S_i. А оно, как показано выше, равно хроматическому числу. То есть граф является совершенным. □

Задача 10.3. Доказать, что в графе G с m ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству $\chi(\chi - 1) \leqslant 2m$

Решение (Моё доказательство).
Возьмём минимальную правильную раскраску в χ цветов и разделим все вершины по цвету на множества $S_1, \ldots, S_\chi$. Если бы нашлась такая пара S_i, S_j, что между ними не было бы рёбер, то второе множество можно было бы перекрасить в цвет первого и уменьшить количество цветов на единицу, что противоречит минимальности. Поэтому между любой парой этих множеств всегда найдётся хотя бы одно ребро. Всего таких пар (и таких рёбер) будет $\dfrac{\chi(\chi-1)}{2}$. А кроме этих, в графе могут быть и другие рёбра, то есть $m \geqslant \dfrac{\chi(\chi-1)}{2}$, что и требовалось доказать. □

Решение (Еще одно хорошее доказательство).
«$\mathcal{TODO}$»...

Пронумеруем все цвета от 1 до χ. $2m$ – это, как мы уже знаем, сумма степеней всех вершин. Покажем, что сумма степеней всех вершин не может быть меньше $\chi(\chi - 1)$. Сумма степеней вершин может быть равна $\chi(\chi - 1)$, например, в полном графе. Теперь покажем почему меньше не может быть. От противного, пусть у нас сумма степеней вершин в каком-то графе равна k, которое меньше $\chi(\chi-1)$. Теперь покажем, что каждый цвет i смежен со всеми $(\chi - 1)$ другими цветами. (Цвета смежны, если существует смежные вершины, покрашенные в соответствующие цвета). От противного. Если это не так, то существует цвет j, с которым i не смежен, тогда мы можем все вершины покрашенные в цвет i перекрасить в j, и раз они такие цвета не были смежны, то после перекраски никакие две вершины, покрашенные в цвет j, не будут смежны. Значит, мы может просто убрать i и получим, что хроматическое число меньше чем χ. Противоречие. Получили, что каждый цвет i смежен со всеми $\chi - 1$ другими цветами. А значит, при расчете суммы степеней вершин, будут учтены эти смежности, которые дают вклад $\chi(\chi - 1)$. Отсюда получаем, что $\chi(\chi - 1) \leqslant k$, а изначально мы утверждали обратное. Противоречие. В итоге, сумма степеней всех вершин не может быть меньше $\chi(\chi-1)$. А значит, и $2m$ не может быть меньше этого значения. □

10.2 Хроматический многочлен

Задача 10.4. Докажите, что хроматический полином для цикла C_n имеет вид $P_n(z) = (-1)^n(z-1) + (z-1)^n$.

Решение.
Доказывать будем по индукции.

В качестве базы индукции возьмём минимальный цикл на 3 вершинах C_3. Он совпадает с K_3, и его хроматический многочлен был найден на лекции

$P_{C_3}(z) = P_{K_3}(z) = z(z-1)(z-2) = z^3 - 3z^2 + 2z = z^3 - 3z^2 + 2z + (z-1) - (z-1) = (z^3 - 3z^2 + 3z - 1) + (-1)(z-1) = (z-1)^3 + (-1)^3(z-1)$.

База индукции доказана.

На шаге индукции предположим, что формула верна для C_n и проверим её для цикла C_{n+1}.

Воспользуемся доказанным на лекции правилом: $P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G\setminus e}(z)$.

Если удалить из цикла C_{n+1} одно ребро, то получится дерево $C_{n+1} - e = T_{n+1}$ с хроматическим многочленом $P_{T_{n+1}}(z) = z(z-1)^{n+1-1}$.

Если стянуть одно ребро, то получится цикл на единицу меньше $C_{n+1} \setminus e = C_n$. По предположению индукции его хроматический многочлен есть $P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$.

Тогда имеем $P_{C_{n+1}}(z) = P_{C_{n+1}-e}(z) - P_{C_{n+1}\setminus e}(z) = P_{T_{n+1}}(z) - P_{C_n}(z) = z(z-1)^n - (z-1)^n - (-1)^n(z-1) = (z-1)(z-1)^n + (-1)(-1)^n(z-1) = (z-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(z-1)$.

Шаг индукции доказан. Формула верна для всех n. □

Задача 10.5 (ссылка). «$\mathcal{TODO}$»...

Дан связный граф G. Хроматический многочлен $P_G(z)$ известен. Построим граф H следующим образом:

1. Выделим в графе G произвольную вершину x.
2. Построим изоморфный графу G граф G'. Пусть при этом изоморфизме x переходит в x'.
3. “Склеим” вершины x и x'.

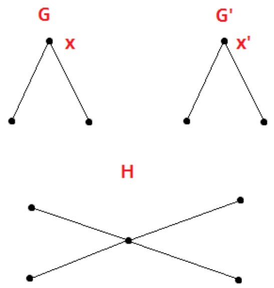
Таким образом, граф H состоит из двух одинаковых подграфов, которые пересеклись в одной вершине. Выведите формулу хроматического многочлена $P_H(z)$ для графа H. В формуле вместо $P_G(z)$ используйте переменную y.

Решение.

«$\mathcal{TODO}$»... $P_H(z) = \dfrac{y^2}{z}$

На мой взгляд, самое очевидное решение предполагает чисто комбинаторный ответ и с полиномами работать практически не приходится.

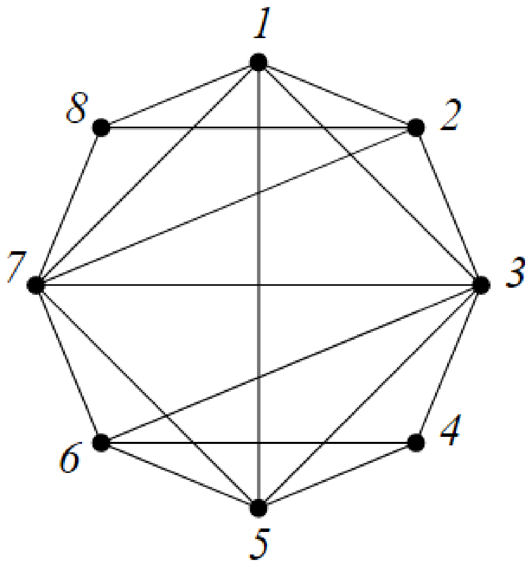
В ветке ниже уже обсуждали, но все равно напишу здесь с картинкой, чтобы сразу в глаза бросалось. Рассмотрите два дерева и соедините их:



Ещё как простой пример для рассмотрения - два графа K_2 и результат их слияния T_3. □

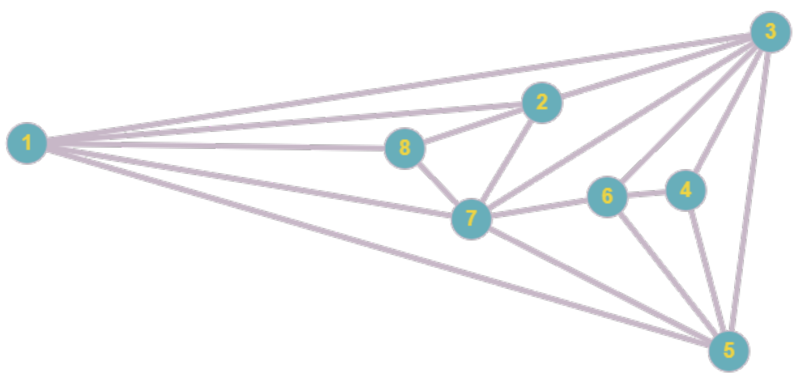
11 Планарные графы I

Задача 11.1. Доказать, что граф G, изображенный на рисунке, можно правильно вложить в плоскость, нарисовав для него соответствующий ему плоский граф $\tilde{G}$.



Теорема Fary утверждает, что любой планарный граф можно вложить в плоскость так, чтобы ребра плоского графа $\tilde{G}$изображались отрезками прямых. Постарайтесь нарисовать именно такое вложение графа G в плоскость.

Решение.



□

Задача 11.2. Доказать, что плоский граф $\tilde{G}$является двудольным тогда и только тогда, когда двойственный к нему граф $\tilde{G}^*$ является плоским эйлеровым графом.

Решение (Моё длинное)**.**
Мы знаем, что граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда *он связный* и все его вершины имеют чётную степень. Но двойственный граф *всегда связный*, а его вершинам взаимно однозначно соответствуют грани исходного плоского графа.

То есть надо доказать, что плоский граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его грани имеют чётную степень.

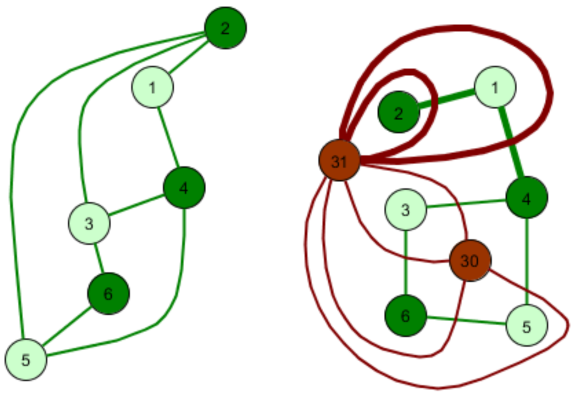
«$\mathcal{TODO}$»... Сократить доказательство с помощью утверждения “граф двудольный $\iff$ в нём любой цикл чётный”.

Докажем достаточность (двудольный $\implies$ грани чётные). Рассмотрим 3 случая.

1) Рассмотрим только такие двудольные графы, которые не содержат мостов (пример на рисунке слева). Рассмотрим произвольную грань (внутреннюю или внешнюю) и ограничивающий её цикл. Поскольку граф двудольный, в этом цикле вершины первой доли могут соединяться только с вершинами второй доли, а значит вершины двух долей в цикле чередуются, а значит общее число вершин в цикле чётное, что и требовалось доказать.

2) Рассмотрим произвольный двудольный граф, содержащий мосты, но не содержащий циклов (т.е. простое дерево). У него будет единственная внешняя грань. Каждый мост добавляет к её степени 2, а значит её полная степень чётная. Двойственный граф будет тривиальным эйлеровым графом с одной вершиной и множеством петель.

3) Рассмотрим случай двудольного плоского графа, содержащего как циклы, так и мосты. Если мосты убрать, получим случай 1, где все грани чётные, т.е. двойственный граф эйлеров. Возвращение каждого из мостов будет увеличивать степень одной из граней на 2, сохраняя свойство чётности. В двойственном графе к соответствующей вершине будут добавляться петли, сохраняя эйлеровость (см. пример на рисунке справа).Достаточность доказана.



Докажем необходимость. Пусть все грани исходного графа имеют чётную степень. Докажем, что он двудольный, т.е. есть его вершины можно правильно раскрасить в два цвета. Рассмотрим следующие случаи:

1) Если грань только одна, то этот граф - дерево (или лес), а значит двудольный.

2) Если граф 2-связный, то он допускает разложение на цикл и ручки. Цикл можно раскрасить в 2 цвета, т.к. в нём чётное число вершин. Далее идём по индукции. Добавляем i-ю ручку. Две её концевых вершины уже раскрашены и упираются в ранее раскрашенный сегмент. Продолжая от одного из концов раскрашиваем вершины ручки, чередуя цвета, пока не упрёмся в другой конец. Так как ручка вместе с ранее раскрашенным сегментом является границей некоторой грани, то сумма числа вершин в сегменте и ручке будет чётной, а значит ручка раскрасится правильно. Постепенно добавляя ручки, мы раскрасим весь граф. Получаем, что он двудольный.

3) Если граф 1-связный, то мы можем разбить его на 2-связные компоненты, соединённые мостами. Берём любую 2-связную компоненту и раскрашиваем, как опи-

сано в случае 2. Идущие от неё мосты раскрашиваем, чередуя цвета, начиная от цвета общей с предыдущей компонентой вершины. Если за мостом идёт ещё одна 2-связная компонента, начинаем раскрашивать её как в случае 2, начиная от цвета общей с мостом вершины. Так продолжаем, пока не раскрасим весь граф. Получаем, что он двудольный.

4) Если граф несвязный, разбиваем его на 1-связные компоненты, каждая из которых согласно случаю 3 будет двудольной. Значит, и весь граф двудольный.Необходимость доказана, как и утверждение в целом. □

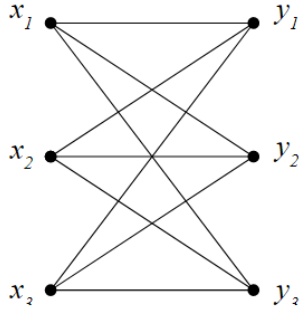
Решение (Эталонное)**.**
Заметим, что если все грани плоского графа $\tilde{G}$имеют четную степень, то четную же степень имеют и все вершины двойственного графа $\tilde{G}^*$. Так как двойственный граф всегда является связным, то это означает, что двойственный к плоскому графу $\tilde{G}$, у которого все грани имеют четную степень, является эйлеровым графом.

Осталось понять, что собой представляет плоский граф, в котором любая грань имеет четную степень. Покажем, что плоский граф имеет все грани четной степени тогда и только тогда, когда он является двудольным графом.

В одну сторону это довольно очевидно — если в графе $\tilde{G}$имеется грань нечетной степени, то это означает, что в исходном графе G имеется цикл нечетной длины. Следовательно, такой граф двудольным не является.

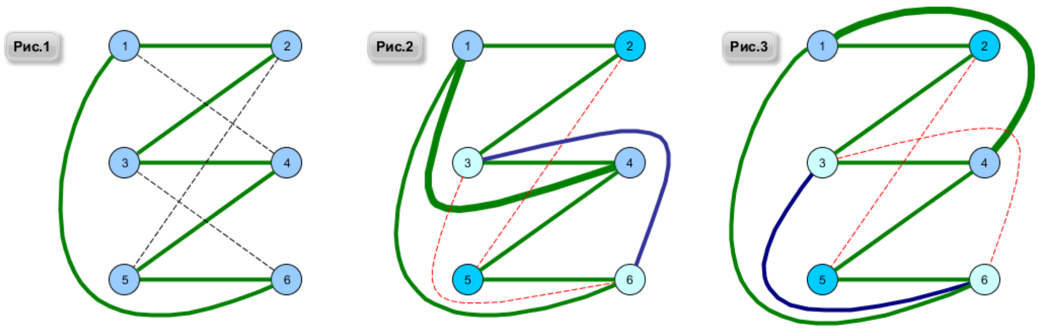
Пусть теперь $\tilde{G}$есть граф, все грани которого имеют четную степень. Рассмотрим в этом графе цикл C. Любая грань графа $\tilde{G}$лежит целиком либо внутри цикла C, либо снаружи этого цикла. Рассмотрим все грани, попавшие внутрь цикла C. Для того, чтобы сосчитать длину цикла C, нам нужно просуммировать степени всех этих граней, а затем вычесть удвоенное количество ребер, не принадлежащих этому циклу. Так как и то, и другое есть четные числа, то длина цикла C также представляет собой четное число. Следовательно, граф $\tilde{G}$является двудольным. □

Задача 11.3. С помощью леммы Жордана доказать непланарность графа $K_{3,3}$, показанном на нижеприведенном рисунке:



Решение.
Сначала рассмотрим граф без рёбер. Я немного иначе разметил вершины - номерами 1,2,3,4,5,6. Начнём добавлять рёбра и составим "большой"цикл 1-2-3-4-5-6-1 (рис.1). Теперь добавим ребро 1-4. Оно может находиться либо внутри большого цикла, либо вне.

Вариант №1 - внутри (рис.2). У нас появился новый "малый"цикл 1-4-5-6-1. Теперь добавим ребро 3-6. Оно не может находиться внутри большого цикла (красный изогнутый пунктир), т.к. иначе оно пересекло бы малый цикл, т.к. вершина 3 находится снаружи малого цикла. Значит, ребро 3-6 нахожится снаружи большого цикла (синее). Теперь мы никак не можем добавить ребро 2-5 (прямой красный пунктир), т.к. относительно нового цикла 1-4-3-6-1 вершины 2 и 5 находятся по разные стороны и по лемме Жордана должны пересечь его.



Вариант №2, когда ребро 1-4 находится снаружи большого цикла, рассматривается аналогично (рис.3). □

Задача 11.4. Доказать, что в случае плоского графа, имеющего ровно k связных компонент, формула Эйлера принимает вид $n - m + r = k + 1$.

Решение.
Обозначим n_i,m_i,r_i – число вершин, рёбер и граней в i-й компоненте связности из k. По формуле Эйлера $n_i - m_i + r_i = 2$. Просуммировать эти равенства нам мешает то, что внешняя грань у всех компонент общая, но входит в r_i каждой компоненты. Поэтому введём $s_i = r_i - 1$ – число *внутренних* граней i-й компоненты, и тогда $n_i - m_i + s_i = 1$. Просуммировав k таких равенств по i от 1 до k, получим $n - m + s = k$, где n,m,s – суммарное число вершин, рёбер и внутренних граней в графе. Добавив единую для всех компонент внешнюю грань в сумму, получим общее число граней $r = s + 1$ и окончательно $n - m + r = k + 1$. □

Задача 11.5. Рассмотрим максимальный простой планарный граф G, построенный на $n \geqslant 4$ вершинах и m ребрах. Обозначим через n_i количество вершин степени i. Доказать, что для чисел n_i выполняется равенство

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \ldots$$

Используя это равенство, доказать, что в графе G имеются по меньшей мере четыре вершины, степени которых не превосходят пяти.

Решение.
Общее число вершин $n = n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_\Delta$, где Δ – наибольшая степень вершины в графе, а n_i – число вершин степени i.

Мы суммируем от 1, т.к. максимальный плоский граф будет связным («$\mathcal{TODO}$»... – доказать), т.е. нет изолированных вершин и $n_0 = 0$.

По *I-й теореме теории графов* сумма степеней всех вершин равна $2m$:

$$\sum \deg(v_k) = \sum_{i=1}^{\Delta} i \cdot n_i = 1n_1 + 2n_2 + 3n_3 \ldots + \Delta n_\Delta$$

В максимальном плоском графе $m = 3n - 6$ (а степень любой грани $\deg(f_k) = 3$). Умножая на 2, получаем $6n = 12 + 2m$. Раскрывая общее количество вершин n и подставляя вместо $2m$ сумму степеней всех вершин, получаем:

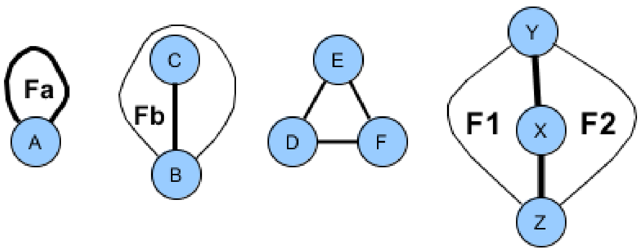
$$6n_1 + 6n_2 + 6n_3 + ... + 6n_\Delta = 12 + 1n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... + \Delta n_\Delta$$

Приводя подобные члены и упрощая, получаем:

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + ... + (\Delta - 6)n_\Delta$$

Теперь докажем, что в максимальном *простом* плоском графе $n_1 = n_2 = 0$. Воспользуемся тем, что в *максимальном* плоском графе степень любой грани $\deg(f_k) = 3$.

Петли невозможны, т.к граф простой и т.к. у грани F_a, инцидентной петле, была бы степень $1 \neq 3$ (на рисунке слева).



Предположим, что в графе есть вершина C степени 1, но тогда инцидентное ей ребро BC будет мостом и добавит 2 к степени ближайшей грани F_b. Но тогда единственный вариант получить степень грани 3 – это добавить петлю BB, а петли запрещены.

Плоский граф с вершинами степени 2 возможен на 3-х вершинах DEF, и у него степени внутренней и внешней грани будут равны 3, но по условию у нас минимум 4 вершины.

Предположим что в графе более 3-х вершин, и имеется вершина X степени 2. Рассмотрим смежные с ней вершины Y и Z. Они являются частью границы между 2-мя гранями F_1 иF_2. Рёбра XY и XZ добавляют 2 к степени грани F_1, и остаётся только одно ребро до тройки. Единственный вариант – это ребро $YZ_{(left)}$, замыкающее границу грани F_1. Аналогично рассматриваем грань F_2 и получаем наличие второго ребра $YZ_{(right)}$, замыкающего границу грани F_2. Но мультирёбра в простом графе запрещены, а значит, мы пришли к противоречию, и вершин степени 2 в нашем графе быть не может.

Мы доказали, что $n_1 = n_2 = 0$ и формула приобретает окончательный вид:

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + ... + (\Delta - 6)n_\Delta \qquad (*)$$

Минимум правой части достигается при $n_7 = n_8 = ... = n_\Delta = 0$ и равен 12. Наибольший коэффициент в левой части стоит при n_3 и равен 3, т.е. сумма слева достигает минимума по числу вершин $n_3+n_4+n_5$, когда $n_4 = n_5 = 0$, а $n_3 = \frac{12}{3} = 4$. $\square$

Задача 11.6. Граф G называется свободным от треугольников, если в нем отсутствуют простые циклы длины три. Без использования теоремы о четырех красках доказать, что любой такой граф 4-раскрашиваем.

Указание: предварительно доказать, что в таком графе количество m ребер ограничено сверху величиной $2n-4$, где n — количество вершин в графе G.

Решение.
Граф очевидно должен быть простым, иначе в нём были бы возможны петли и мультирёбра, доказать какое либо ограничение на число рёбер было бы не возможно и формулировка задачи потеряла бы смысл.

Поскольку по условию ограничивающий любую грань цикл не может иметь длину 3, то его минимальная длина равна 4, т.е. $\deg(f_i) \geqslant 4$. Т.к. сумма степеней всех граней равна $2m$, то $2m = \sum \deg(f_i) \geqslant 4r$. Отсюда $2r \leqslant m$. (Случай без циклов тривиален – любое дерево раскрашиваемо в 2 цвета.)

Умножая на 2 формулу Эйлера для планарных графов $n + r = 2 + m$, получаем $4 + 2m - 2n = 2r \leqslant m$, откуда $4 + m \leqslant 2n$, т.е. $m \leqslant 2n - 4$.

Другой, более короткий способ доказать $m \leqslant 2n-4$:
Поскольку в нашем (плоском) графе нет треугольников, мы можем внутри каждой грани провести еще как минимум одно ребро, и граф все равно останется плоским; количество вершин же при этом не изменится. То есть неравенство и после этого будет верным: $E' = E + F \leq 3V - 6$.
Далее по формуле Эйлера...

Сумма степеней всех вершин $\sum \deg(v_i) \geqslant \sum \delta = n\delta$, где δ – минимальная степень вершины. С другой стороны, $\sum \deg(v_i) = 2m$, причём $m \leqslant 2n-4$, как показано выше. Отсюда $n\delta \leqslant 2m \leqslant 4n - 8$, т.е. $(\delta - 4)n \leqslant -8$. Справа число меньше нуля. Слева $n > 0$ строго положительно, а значит $\delta - 4 < 0$ строго отрицательно. Получаем, что минимальная степень вершины $\delta < 4$, то есть в графе всегда найдётся какая-то вершина степени $\deg(v) \leqslant 3$.

Докажем по индукции, что вершины графа можно раскрасить в 4 цвета. База индукции: в случае 1,2 или 3 вершин утверждение тривиально. Шаг индукции: предположим, что утверждение верно для n вершин и рассмотрим граф из $n+1$ вершины. Как показано выше, у нас найдётся вершина, у которой $\deg(v) \leqslant 3$. Временно удалим её. По предположению индукции, оставшийся граф можно раскрасить в 4 цвета. Сделаем это и вернём вершину. У неё не более 3 соседей, то есть даже в худшем случае соседи имеют не более 3 разных цветов, а значит вершину можно раскрасить 4-м цветом, ч.т.д. □

Задача 11.7. Без использования теоремы о четырех красках доказать, что любой планарный связный граф, построенный на не более чем $n = 11$ вершинах, является 4-раскрашиваемым.

Указание: вначале доказать, что в таком графе существует вершина, степень которой $\leqslant 4$.

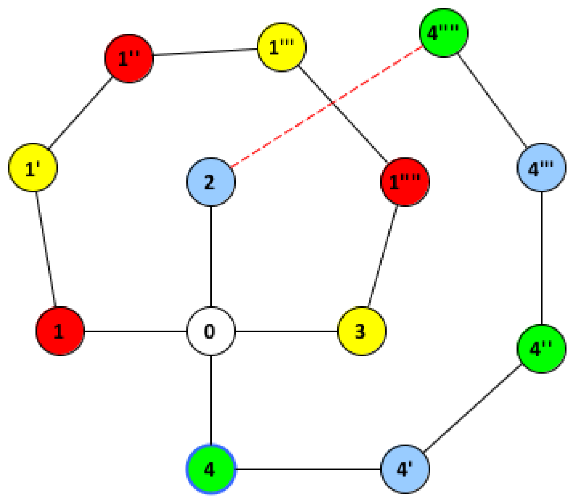
Решение.
Пусть $\delta = \min\limits_{v \in V(G)} \deg(v)$.

Тогда $\delta \cdot V \leqslant \sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) = 2E \leqslant 2(3V-6) = 6V - 12$, поскольку для простых связных планарных графов верно $E \leqslant 3V - 6$. Отсюда $12/(6-\delta) \leqslant V$. Но по условию

$V \leqslant 11$, а значит $12 \leqslant 66 - 11\delta$. Получаем, что $\delta \leqslant (54/11) \approx 4.9$, то есть целое число $\delta \leqslant 4$ и найдется вершина v, у которой $\deg(v) \leqslant 4$.

Теперь проведём рассуждение, полностью аналогичное приведённому на последней лекции, но вместо 5 цветов и соседей у нас будет 4.

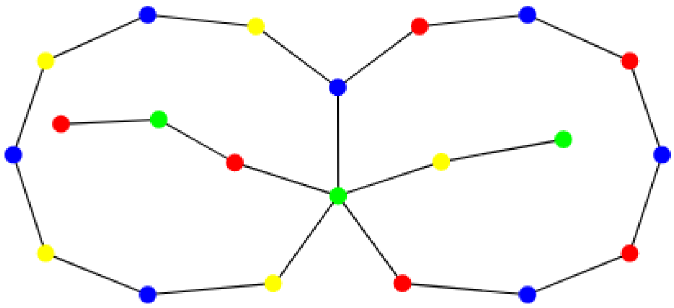
Проводим индукцию по количеству вершин. Для $V = 4$ утверждение очевидно (а для меньшего числа тривиально/бессмысленно). Предположим, что для $(V-1)$ индукция уже доказана. Докажем теперь шаг индукции для V ($V \leqslant 11$). Выделим вершину степени не больше 4 (мы показали, что она всегда найдётся), временно удалим, раскрасим остальной граф (это возможно по предположению шага) и вернём вершину на место. В худшем случае у вершины 4 соседа у которых 4 разных цвета (иначе раскрашиваем вершину 0 в оставшийся цвет). Например, 1-красный, 2-синий, 3-жёлтый, 4-зелёный, а самой вершине дадим индекс 0, как показано на рисунке.



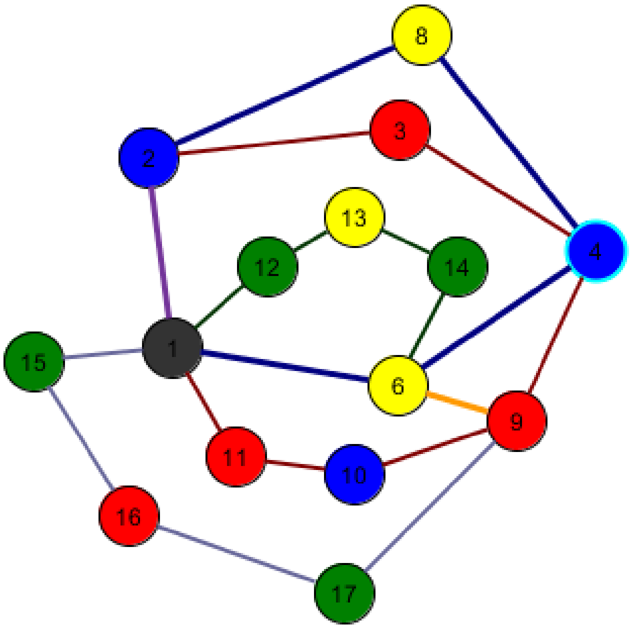
Сначала выбираем пару смежных вершин 1(красный)-3(жёлтый). Пытаемся перекрасить 1-ю в желтый, если же у неё есть жёлтый сосед 1', пытаемся перекрасить его в красный, при неудаче рассматриваем соседей соседа итд. Если удалось, меняем цвета в цепочке, 1-ю в жёлтый, 0-ю в красный и празднуем успех. В случае полной неудачи, худший случай - это когда цепочка дотянется до вершины 3. Тогда выбираем вторую пару 2(синий)-4(зелёный) и пытаемся перекрасить 4-ю в синий, а если найдётся синий сосед 4', пытаемся раскрасить его в зелёный, при неудаче тянем цепочку дальше. Рано или поздно сине-зелёная цепочка упрётся в красно-жёлтую, потому что та образует вместе с вершиной 0 замкнутый цикл, так что в этом случае удача нам гарантирована. Это доказывает шаг индукции и завершает задачу. $\square$

Задача 11.8. Найти ошибку в доказательстве Кемпе.

Решение.
В доказательстве Кемпе предполагается, что сине-красная и сине-жёлтая цепочки пересекаются только в начальной синей точке:



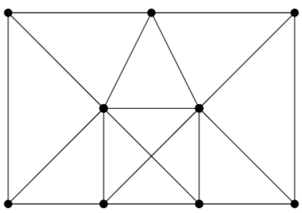
Однако, у них есть общий синий цвет точек, и можно сконструировать контрпример, где они пересекаются во второй синей точке. Например, на рисунке сине-красная цепочка 1-2-3-4-9-10-11-1 проходит "насквозь" сине-жёлтую цепочку 1-2-8-4-6-1 в точке 4:



В этом случае зелёно-желтая цепочка может упереться в сине-жёлтую (и зелёно-красная 1-15-16-17-9 в сине-красную, как показано на рисунке). Финт Кемпе с инверсией цветов уже не прокатит, так как точки "упора" смежны. □

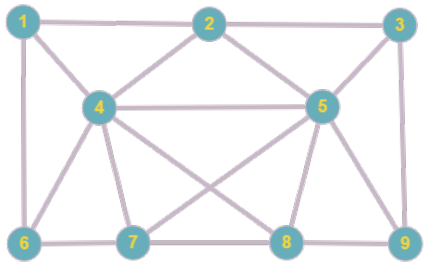
12 Планарные графы II

Задача 12.1. Доказать с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G, изображенного на рисунке:

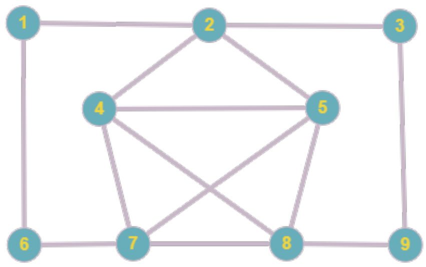


Решение.
Докажем, что подграф нашего графа, полученный *удалением 4 рёбер*, является подразбиением графа K_5, что по критерию Куратовского гарантирует непланарность.

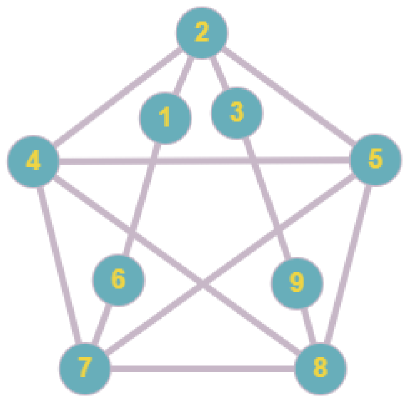
Пронумеруем вершины исходного графа:



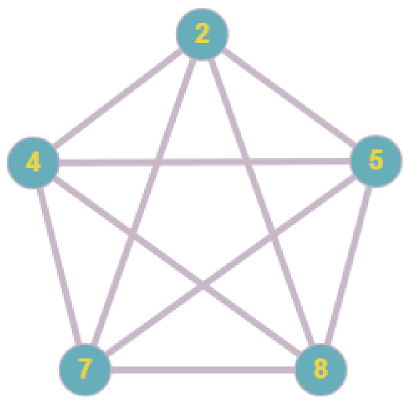
В качестве подмножества для критерия возьмём граф, в котором удалены рёбра 4-1,4-6 слева и 5-3,5-9 справа:



Вершины 1,6,3,9 в результате имеют степень 2 и являются *подразбиением* графа, к которому мы стремимся (для ясности немного переместим эти вершины):

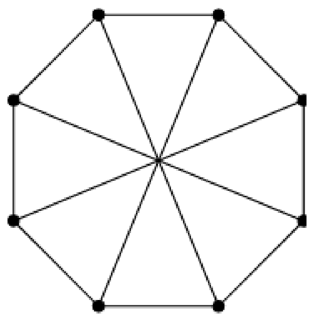


Удалим подразбиения, заменив на прямые рёбра:

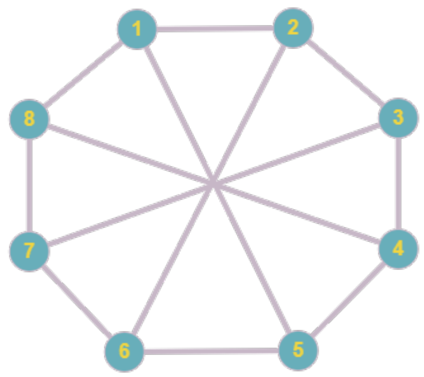


Получившийся граф изоморфен графу K_5. $\square$

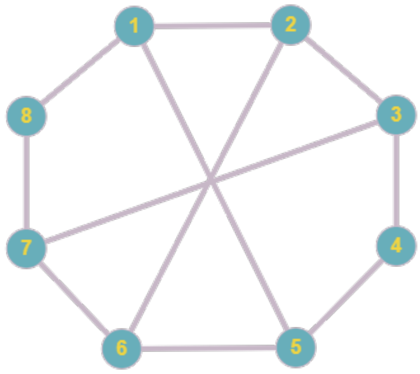
Задача 12.2. Доказать с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G, изображенного на рисунке:



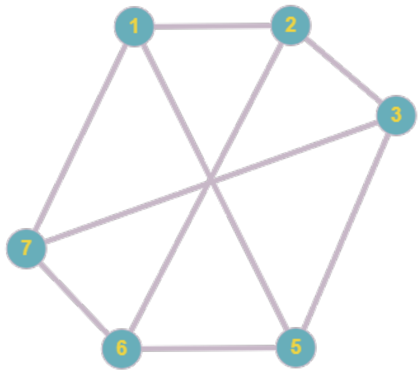
Решение.
Докажем, что подграф нашего графа, полученный *удалением одного радиального ребра*, является подразбиением графа $K_{3,3}$, что по критерию Куратовского гарантирует непланарность. Пронумеруем вершины исходного графа:



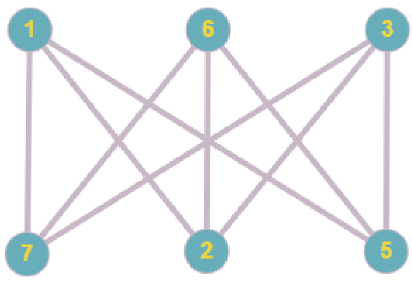
В качестве подмножества для критерия возьмём граф, в котором удалено одно радиальное ребро, например ребро 4-8:



Смежные с удаленным ребром вершины 4,8 в подмножестве имеют степень 2 и являются *подразбиением* графа, к которому мы стремимся. Удалим их, заменив на рёбра:

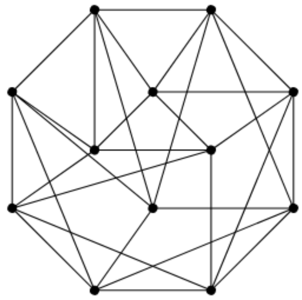


Получившийся граф изоморфен графу $K_{3,3}$. Просто переставим вершины на рисунке для наглядности:

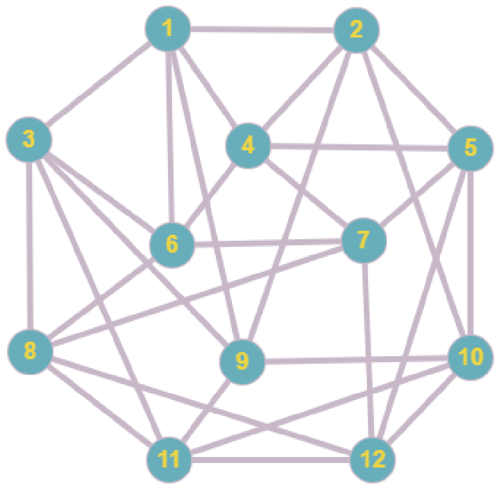


$\square$

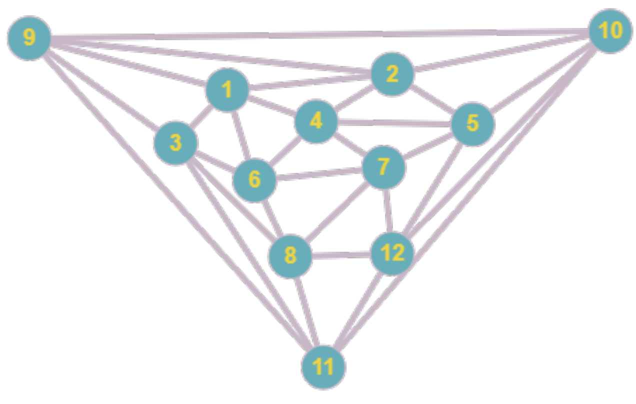
Задача 12.3. Найти выпуклое вложение в плоскость графа G, показанного на рисунке:



Решение.
Пронумеруем вершины исходного графа:



И предъявим вложение:



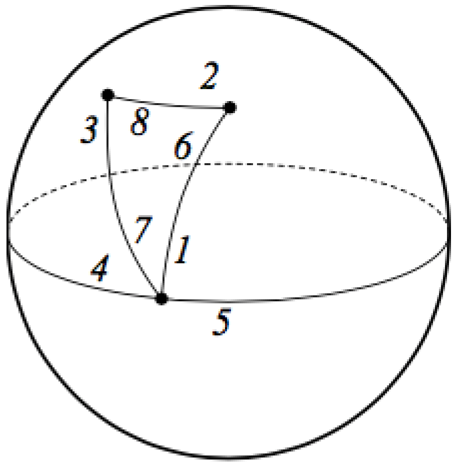
$\square$

Задача 12.4. Граф, который можно правильно вложить в поверхность рода g и невозможно вложить в поверхность меньшего рода, называется графом рода g. Доказать, что род $g(K_n)$ полного графа Kn $(n \geq 3)$ удовлетворяет неравенству

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Решение.
Пусть n,m,r – общее число вершин, рёбер и граней во вложении. По сформулированному на лекции свойству правильное вложение графа при разрезании на грани даст криволинейные многоугольники, а у них степень любой грани $deg(f_i) \geqslant 3$ (получить многоугольники невозможно для K_1 и K_2, но они отсеяны по условию задачи). Отсюда сумма всех степеней граней $\sum deg(f_i) \geqslant 3r$. Поскольку $\sum deg(f_i) = 2m$, то $3r \leqslant 2m$. По формуле Эйлера $n + r - m = 2 - 2g$ для вложения в поверхность рода g. Умножая на 3, получаем $3m - 3n + 6 - 6g = 3r \leqslant 2m$, откуда $6g \geqslant m - 3n + 6$. В полном графе K_n число рёбер $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Подставляя его в неравенство выше, получим $g \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}n(n-1) - 3n + 6\right) = \frac{1}{12}(n^2 - 7n + 12) = \frac{1}{12}(n-3)(n-4)$. Это неравенство должно выполняться и при $g = g(K_n)$, ч.т.д. □

Задача 12.5. Для карты на сфере записать перестановки σ, α, φ



Решение.

$\sigma = (1745)(26)(38)$
$\alpha = (16)(28)(37)(54)$
$\varphi = (5)(1234)(786)$
$\varphi = \sigma \cdot \alpha \qquad \sigma = \varphi \cdot \alpha \qquad \alpha = \alpha^{-1}$
$n = |\sigma| = 3$, $m = |\alpha| = 4$, $r = |\varphi| = 3$
$g = (2 - n + m - r)/2 = 0$ □