Основы теории графов. Теория

1 Основы

Теор. 1.1.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

2 Вершинная связность

Опр. 2.1. *Точка сочленения – если удалить, то распадётся.*

Л. 2.0.1 (Хёринг)**.** max *кол-во путей* $P(x \to y)$ *(не перес. во внутр. точках)* $= |R|$ – max *мн-ва вершин, отделяющих* x *и* y*.*

Теор. 2.1 (Менгер)**.** *Для* $\forall$ *несмежных вершин* $x,y \in V$ $\nexists e(x,y)$ *размер мин.* ***верш.***-*разделяющего мн-ва* $|R_{min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ *числу простых путей* $P(x \to y)$*, отличных во внутренних точках.*

Теор. 2.2 (Уитни)**.** G *–* k*-связный* $\iff \forall x,y \in V$, $\exists$ k *простых путей* $P(x \to y)$*, не пересекающихся во внутренних точках* $P_i \neq P_j$ *(внут.).*

Теор. 2.3. $\daleth$ κ *– вершинная связность,* λ *– рёберная связность,*

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

$$\textit{где} \quad \delta(G) = \min_V deg(v)$$

3 Рёберная связность

Опр. 3.1. ***Мост*** *– ребро, при его удалении граф развалится*

Теор. 3.1 (Форд-Фалкерсон)**.** max *поток* Q *через сеть = пропускной способности минимального* S*-*T *разреза.*

Теор. 3.2 (Менгер "рёберная")**.** *Для* $\forall$ *несмежных вершин* $x,y \in V$ $\nexists e(x,y)$ *размер* min ***рёберно***-*разделяющего мн-ва* $|R^{edge}_{min}(x \leftrightarrow y)| = \max$ *числу простых* ***рёберно***-*непересекающихся путей* $P(x \to y)$*.*

3.1 Задачи

4 Паросочетания

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	α	α'	max
покрытие	β	β'	min
	вершинное	п-сочетание	

Св. 4.0.1. *Если S – независ.мн-во вершин, то $\bar{S}$ – покрытие (необязательно* max*). Замечание: это неверно для рёбер.*

Теор. 4.1 (Галаи)**.**

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

Теор. 4.2 (Кёниг)**.** *В $\forall$ 2-дольном графе $B(m,n)$: $\beta = \alpha'$*

Опр. 4.1. ***Кубический*** *граф – регулярный* $(\deg v_i = \mathrm{const})$ *граф:* $\deg = 3$

Св. 4.1.1. *В кубическом графе $|V|$ – чётное*

Теор. 4.3 (Татт)**.** *$\exists$ совершенное п.с. $\iff$ при удалении $\forall\ S \subset V$ образуется нечётных компонент*

$$C_o(G \setminus S) \leqslant |S|$$

Сл. 4.3.1 (Петерсен)**.** *В кубическом графе $\exists$ с.п.с., если* N(мостов) $\leqslant 2$

Св. 4.1.2. *В чётном графе если $C_o(G \setminus S) \geq |S|$ то $C_o(G \setminus S) \geqslant |S| + 2$*

Опр. 4.2. *Дефицит – число вершин, не покрытых максимальным п.с.*

$$\mathrm{def}(G) = |V| - 2\max|M|$$

Теор. 4.4 (Татта-Бержа)**.** $\mathrm{def}(G) = \max\limits_{S \subset V} \big(C_o(G \setminus S) - |S| \big)$

Сл. 4.4.1. $\mathrm{def} \equiv |V| \pmod 2$