Введение в математический анализ.

Содержание

1 Последовательности

1.1 Предел последовательности

Опр-е. 1.1 (Предел последовательности)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

- При любом $\varepsilon > 0$ вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n - a| < \varepsilon$

Свойства последовательностей:

- Не может иметь двух различных пределов
- Если имеет предел, то $|x_n| \leqslant M$
- Пределы можно складывать, вычитать, умножать, делить, брать модуль

Св-во (Переход к пределу в неравенстве)**.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \;\; \lim_{n\to\infty} y_n = b, \;\; x_n \leqslant y_n \implies a \leqslant b$$

Доказательство. От противного □

Теор. 1.1 (О двух милиционерах)**.**

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \implies \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

Доказательство. По определению □

1.2 Арифметические операции с пределами

Св-во. Конечные пределы можно складывать, вычитать, умножать, делить (нижний д.б. $\neq 0$) и брать модуль.

Доказательство. С умом подбираем ε и используем ограниченность... □

Опр-е. 1.2 (Бесконечный предел)**.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \equiv \qquad \forall E \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n > E$$

Теор. 1.2. $\lrcorner\ x_n \neq 0$. x_n – беск. большая $\iff \dfrac{1}{x_n}$ – беск. малая

Св-во. Свойства бесконечно малых:

1. Беск. малая послед. ограничена
2. Сумма, разность, произведение бес. малых – беск. малая
3. Произвед. беск. малой на ограниченную – беск. малая

Арифметические операции с бесконечностями...

1.3 Вещественные числа. Супремум и инфимум.

Опр-е. 1.3 (Вещественные числа)**.**

- Аксиомы поля (9 штук)
- Аксимомы порядка (5 штук)
- Аксиома Архимеда: $\forall\ x, y > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ : nx > y$
- Аксиома полноты: $\lrcorner\ [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ....$ Тогда существует число $c \in \mathbb{R}$, принадлежащее всем отрезкам: $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

Теор. 1.3 (О стягивающихся отрезках)**.**
$\lrcorner\ [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда пересечение всех отрезков состоит из одной точки: $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$

Доказательство. По теореме о двух милиционерах □

Опр-е. 1.4. $\lrcorner\ E$ – непустое множество
sup – наименьшая из верхних границ
inf – наибольшая из нижних границ

$$b = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, x \in E:\ x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Теор. 1.4. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет sup (inf)

Доказательство. Делением отрезка пополам, затем переход к пределу в неравенстве... □

Теор. 1.5.

- Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
- Монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.

Доказательство. Супремум... □

Теор. 1.6.

- Неограниченная сверху возрастающая последовательность стремится к $+\infty$.
- Неограниченная снизу убывающая последовательность стремится к $-\infty$.

Доказательство. По определению □

1.4 Определение числа e

Лемма 1.1 (Неравенство Бернулли)**.**

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Доказательство. По индукции □

След-е.

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad a > 1,\ k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.5 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Св-во.

$$\{a_n\} \to A \implies \{a_{n_k}\} \to A$$

Доказательство. По определению □

Теор. 1.7 (Больцано-Вейерштрасса)**.** Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся (к конечному пределу) подпоследовательность

Доказательство. Делим содержащий последовательность отрезок пополам так, чтобы в нём оставалась бесконечная подпоследовательность. Далее по теореме о двух милиционерах. □

Теор. 1.8 (Расширение теоремы Больцано-Вейерштрасса).

- Из неограниченной сверху последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$.
- Из неограниченной снизу последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$.

След-е. Из любой последовательности можно выделить под-последовательность, имеющую конечный *или бесконечный* предел.

Опр-е. 1.5. Последовательность фундаментальна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \ \forall m, n \geqslant N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна
3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то исходная последовательность сходится

След-е (Критерий Коши). Последовательность сходится $\iff$ она фундаментальна

1.6 Сходимость рядов

Опр-е. 1.6.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Если последовательность $\{S_n\} \to S$, то последовательность наз. сходящейся, а S – сумма ряда. Если $\{S_n\}$ не имеет предела или *бесконечный* предел, то ряд расходится.

Теор. 1.9 (Необходимое условие сходимости ряда).
Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Геометрическая прогрессия:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \qquad \text{при } |q| < 1$$

Гармонический ряд $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ расходится, т.к. $H_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$

Пример:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Свойства сходящихся рядов:

1. Ряд не может иметь двух различных сумм
2. В сходящемся ряду можно произвольно расставлять скобки (т.к. это будет подпоследовательность сходящейся последовательности)
3. Добавление и отбрасывание конечного членов ряда не влияет на сходимость (но изменяет сумму)
4. Сходящиеся ряды можно складывать и вычитать
5. Сходящийся ряд можно домножать на константу

1.7 Признаки сходимости рядов

Св-во. Если $a_k \geqslant 0$, а последовательность S_n ограничена сверху, то ряд сходится

Св-во (Признак сравнения)**.** Если $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$, то:

- если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
- если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится

Пример: ряд $\dfrac{1}{k^2}$ сходится. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Пример: ряд $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.

Теор. 1.10 (Признак Даламбера)**.** $\lrcorner$ $a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится
3. $\lrcorner$ $d_* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда:
   - Если $d_* < 1$, то ряд сходится

- Если $d_* > 1$, то ряд расходится
- Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.11 (Признак Коши)**.** $\lrcorner$ $a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится
3. $\lrcorner$ $q_* = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:
   - Если $d_* < 1$, то ряд сходится
   - Если $d_* > 1$, то ряд расходится
   - Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.12 (Факт)**.**
Если $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то также существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, и они равны.

Теор. 1.13 (Признак Лейбница)**.** Знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ с монотонно убывающим по абсолютной величине членом $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$ сходится $\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказательство. Построить последовательность вложенных отрезков из частичных сумм S_{2n-1}, S_{2n}, S_{2n+1}, S_{2n+2} $\square$

Пример – ряд Лейбница: $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \ldots = \dfrac{\pi}{4}$

Опр-е. 1.7 (Абсолютная сходимость)**.**
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теор. 1.14. Абсолютно сходящийся ряд сходится, причём $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Доказательство. Рассмотреть $0 \leqslant a_k + |a_k| \leqslant 2|a_k|$ $\square$

Пример: если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$.
$\Big($доказательство: из $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ $\Big)$

Свойство: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится (доказательство: *от противного*).

1.8 Тесты на сходимость рядов

- [x] Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- [x] Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- [x] Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- [x] Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- [ ] Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- [ ] Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [ ] Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
- [x] Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [ ] Если $a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

- [x] Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- [x] Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [x] Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- [x] Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- [ ] Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- [ ] Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- [ ] Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- [ ] Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
- [ ] Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ также расходится.
- [ ] Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- [ ] Если $a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.
- [x] Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

2 Функции и непрерывность

2.1 Предел функции

2.1.1 Предельные точки множества

Опр-е. 2.1. Окрестность точки U_a – любой интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$

Опр-е. 2.2. Проколотая окрестность $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

Опр-е. 2.3. Окрестность $+\infty$ – любой луч $(E, +\infty)$

Опр-е. 2.4. Окрестность $-\infty$ – любой луч $(-\infty, E)$

Опр-е. 2.5. a – предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$, если $\mathring{U}_a \cap E \neq \varnothing$ для любой $\mathring{U}_a$

Примеры:

1. $[a, b]$ – множество предельных точек (a, b)
2. $\{a\}$ – предельная точка ряда $\{a_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
3. $\varnothing$ – нет предельных точек у одиночной точки $\{a\} \in \mathbb{R}$

Лемма 2.1 (Утверждение.)**.** Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества E
2. В $\forall$ окрестности точки a найдётся бесконечно много точек из E
3. $\exists$ такая последовательность точек $x_n \in E$ $(x_n \neq a)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2.1.2 Предел функции

Опр-е. 2.6. $\lrcorner$ дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$. $\lrcorner$ a – предельная точка множества E. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $\big($или $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$ $\big)$, если выполнено любое из равносильных условий:

1. Для $\forall$ окрестности U_A $\exists$ такая окрестность $\mathring{U}_a$, что $f(\mathring{U}_a \cap E) \subset U_A$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in E$, т.ч. $x \neq a$ и $|x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ (определение по Коши)
3. Для $\forall$ последовательности $\{x_n\}$ точек из E $(x_n \neq a)$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (определение по Гейне)

Замечания к определению предела функции:

1. Предел – локальное свойство
2. Значение f в точке a не участвует в определении
3. Если в определении по Гейне $\forall$ последовательность $f(x_n)$ имеет предел, то все эти пределы равны (иначе мы могли бы построить последовательность перемешиванием, и она не имела бы предела)
4. В определении по Гейне достаточно ограничиться *только* последовательностями, которые *монотонно* стремятся к a

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Локальная ограниченность: если $f: E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R}$, то $\exists$ такая окрестность U_a, что $f(x)$ ограничена на $U_a \cap E$.
3. Стабилизация знака: если $f: E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\exists$ такая окрестность U_a, что знаки $f(x)$ при $x \in \mathring{U}_a \cap E$ и A совпадают.

2.1.3 Арифметические действия с пределами

Пределы двух функций в точке можно складывать, вычитать, перемножать и делить (если предел нижней функции не равен 0).

Теор. 2.1 (Предельный переход в неравенстве)**.** Если

1. $f, g:\ E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка E
2. $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

Тогда $A \leqslant B$

Теор. 2.2 (Теорема о сжатой функции (аналог теоремы о двух милиционерах))**.** Если

1. $f, g, h : E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка E
2. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$

2.1.4 Односторонние пределы

Опр-е. 2.7 (Монотонная функция)**.** $f : E \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает (убывает), если для $\forall\ x \leqslant y$ выполнено $f(x) \leqslant f(y)$ $\big($или $f(x) \geqslant f(y)\big)$

Теор. 2.3. $\lrcorner\ f : E \to \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка множества $E_1 = E \cap (-\infty, a)$. Тогда:

- Если f возрастает и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)$
- Если f *убывает* и ограничена *снизу*, то $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

2.2 Непрерывность функции

Опр-е. 2.8. $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$, если выполнено любое из равносильных условий:

1. Если a – предельная точка, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ т.ч. $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. Для $\forall$ окрестности $U_{f(a)}$ $\exists$ такая окрестность U_a, что $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$
4. Для $\forall$ послед. точек $\{x_n\} \subset E$ т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Непрерывные в точке a функции можно складывать, вычитать, умножать и (если $g(a) \neq 0$) делить.

Следствия:

1. Многочлены $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ непрерывны на $\mathbb{R}$.
2. Отношения многочленов $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (рациональные функции) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в ноль.

Теор. 2.4 (Теорема о стабилизации знака)**.** Если $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ и $f(a) \neq 0$, то найдётся такая окрестность U_a, что знак $f(x)$ совпадает с $f(a)$.

Доказательство. Следствие утверждения про пределы $\square$

Теор. 2.5 (Непрерывность композиции)**.** $\lrcorner$ $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ $f(D) \subset E$ и f непрерывна в точке $a \in D$, а g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Доказывается по определению предела по Гейне.
Для пределов было бы неверно, т.к. композиция пределов не обязательно будет пределом композиции, напр. для $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(y) = \{1 \Leftarrow y \neq 0, \; 0 \Leftarrow y = 0\}$ $\square$

Пример: $\sin x$ непрерывен на $\mathbb{R}$.
Вспомогательное нер-во: если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теор. 2.6 (Вейерштрасса)**.** Непрерывная на *отрезке* функция:
① ограничена; ② принимает наибольшее и наименьшее значения

Доказательство. ① от противного: $\lrcorner$ неограничена $\Rightarrow$ можно найти $\{x_n\}$ т.ч. $f(x_n) \to +\infty$. Т.к. $\{x_n\}$ – ограничена $\Rightarrow$ по т.Больцано-Вейерштрасса найдётся $x_{n_k} \to c$ ...
② от противного: $\lrcorner$ $f(x) < M$. Рассмотреть $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ ... $\square$

Расширение теоремы: если функция f непрерывна на $[a, +\infty]$, и $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то f ограничена на $[a, +\infty]$.

2.4 Теорема Больцано-Коши

Теор. 2.7 (Больцано-Коши)**.** $\lrcorner$ f непрерывна на $[a, b]$ и значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков. Тогда $\exists\, c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$.

Доказательство. Делением отрезка пополам $\square$

След-е. $\lrcorner$ f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) < y < f(b)$ или $f(b) < y < f(a)$. Тогда $\exists$ такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = y$.

Доказательство. Рассмотреть $g(x) = f(x) - y$ $\square$

След-е. Если *непрерывная* на *отрезке* функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения, лежащие между ними.

След-е. Непрерывный образ отрезка – отрезок

Доказательство. Теорема Вейерштрасса + теорема Больцано-Коши $\square$

Теор. 2.8. Непрерывный образ промежутка – промежуток (возможно, другого типа).

Доказательство. Показать, что значения функции $(m, M) \subset f(\langle a, b\rangle) \subset [m, M]$, где $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ $\square$

- [ ] Функции f и g определены и непрерывны на $[a, b]$, $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = g(c)$.
- [x] Функция f определена и непрерывна на $[a, b]$ и $f(x)^2 = 1$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда либо $f(x) = 1$ при всех $x \in [a, b]$, либо $f(x) = -1$ при всех $x \in [a, b]$.
- [x] Функция f определена и непрерывна на $[a, b]$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a, b]$ конечное число корней: $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$. Тогда на каждом из промежутков (a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_n, b) функция f сохраняет постоянный знак.
- [ ] Функция f определена и непрерывна на множестве $E = [a, b] \cap \mathbb{Q}$, $f(a) = -1$ и $f(b) = 1$. Тогда найдется такая точка $c \in E$, что $f(c) = 0$.

2.4.1 Обратные функции

Опр-е. 2.9 (Обратная функция). $\lrcorner$ $f\colon X \to Y$, причём

1. $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$ (инъекция)
2. Для $\forall\, y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $y = f(x)$ (сюръекция)

Тогда можно определить $g\colon Y \to X$ так, что

- $g(f(x)) = x$ при всех $x \in X$
- $f(g(y)) = y$ при всех $y \in Y$

Теор. 2.9. $\lrcorner$ $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна, $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. f – обратима и $f^{-1}\colon \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. f^{-1} – строго монотонна
3. f^{-1} – непрерывна на $\langle m, M\rangle$

Доказательство. 1. Показать, что f инъективна и сюръективна.

2. Монотонность f^{-1} – от противного.
3. Непрерывность f^{-1} – показать, что в $\forall$ точке левый и правый пределы равны.

$\square$

Обратные тригонометрические функции:

$$\begin{aligned}
&\arcsin: && (\nearrow) && [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&\arccos: && (\searrow) && [-1, 1] \to [0, \pi] \\
&\mathrm{arctg}: && (\nearrow) && \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
&\mathrm{arcctg}: && (\searrow) && \mathbb{R} \to (0, \pi)
\end{aligned}$$

Задача 2.1. Доказать, что многочлен нечётной степени всегда имеет корень

Доказательство. Показать, что при $x \to \pm\infty$ он принимает значения как > 0, так и < 0 $\square$

2.5 Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{1/x} = e$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p \qquad (p \neq 0)$$

2.6 Эквивалентные функции

Опр-е. 2.10 ($f \sim g$ при $x \to a$)**.** $\lrcorner$ $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E.
Если $\exists$ такая окрестность $\mathring{U}_a$ и функция $\varphi : E \to \mathbb{R}$, что $f(x) = \varphi(x)g(x)$ при всех $x \in \mathring{U}_a \cap E$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$,
то $f \sim g$ при $x \to a$ (или $f \underset{x\to a}{\sim} g$).

Свойства эквивалентности (при $x \to a$):

1. $f \sim f$
2. если $f \sim g$, то $g \sim f$
3. если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$
4. если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
5. если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, причём $f_2(x) \neq 0$ и $g_2(x) \neq 0$ при $x \in \mathring{U}_a$, то $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$

Замечание: эквивалентности нельзя складывать, т.е. $f_1 \pm f_2 \not\sim g_1 \pm g_2$

Замечательные пределы ($x \to 0$):

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x$$
$$x \sim \ln(1+x)$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a \qquad (a > 0, a \neq 1)$$
$$(1+x)^p \sim px \qquad (p \neq 0)$$

2.6.1 о-малое

Опр-е. 2.11 ($o(f)$)**.** $\lrcorner$ $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a – предельная точка E. Если $\exists$ окрестность $\overset{\circ}{U}_a$ и функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, такая что $f(x) = \varphi(x)g(x)$ при всех $x \in \overset{\circ}{U}_a \cap E$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то $f = o(g)$ при $x \to a$ или $f \underset{x\to a}{=} o(g)$

Пример: $f = o(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

След-е. Следующие утверждения равносильны:

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g$
2. $f = g + o(g)$ при $x \to a$
3. $f = g + o(f)$ при $x \to a$

Свойства:

1. $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
2. Если f ограничена в $\overset{\circ}{U}_a$, то $o(fg) = o(g)$
3. $o(g) \pm o(g) = o(g)$ (т.к. *здесь* равенство означает принадлежность к классу функций)
4. Если $f \sim g$, то $o(f) = o(g)$

Замечательные пределы:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
a^x &= 1 + x \ln a + o(x) \\
(1+x)^p &= 1 + px + o(x)
\end{aligned}$$

- [ ] Если функция $|f|$ непрерывна в точке a, то функция f также непрерывна в точке a.
- [ ] Если $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.
- [x] Если функция $|f|$ непрерывна в точке a и $f(a) = 0$, то функция f также непрерывна в точке a.
- [x] Если функция f непрерывна на $[-1, 1]$, $f(-1) = 4$ и $f(1) = 2$, то для найдется такое y, что $|y| < 1$ и $f(y) = \pi$.
- [ ] Если предел $\lim\limits_{x\to 2} f(x)g(x)$ существует, то он равен $f(2)g(2)$.
- [x] Функция f удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что если $0 < |x| < \delta$, то $f(x) \in (2, 4)$.
- [ ] Если оба предела $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ не существуют, то не существует и предел $\lim\limits_{x\to 3} \big(f(x) + g(x)\big)$.
- [x] Если p многочлен, то $\lim\limits_{x\to 5} p(x) = p(5)$.

3 Производные

3.1 Дифференцируемость и производная

Опр-е. 3.1 (Дифференцируемые функции). $\lrcorner$ $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \langle a,b\rangle$.
f – дифференцируема в точке x_0, если $\exists$ такое $k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0.$$

Опр-е. 3.2. Производной функции f в точке x_0 называется

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Теор. 3.1 (Критерий дифференцируемости).
$\lrcorner$ $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Тогда след. утверждения эквивалентны:

1. f дифференцируема в точке x_0
2. f имеет в точке x_0 конечную производную
3. $\exists$ непрерывная в x_0 функция $\varphi\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$

И если они справедливы, то $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

Доказательство. ② $\Rightarrow$ ③ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

③ $\Rightarrow$ ① :

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)$$

$\square$

След-е. f дифференцируема в точке x_0 $\implies$ f непрерывна в точке x_0

Бесконечные производные: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

Односторонние производные: $f'_{\pm}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0\pm} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Производные можно складывать, вычитать, умножать и (если знаменатель $\neq 0$ в точке x_0) делить.

Теор. 3.2 (Производная композиции). $\lrcorner$ $f\colon \langle a,b\rangle \to \langle c,d\rangle$, $g\colon \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$,
f – дифф. в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$, g – дифф. в точке $f(x_0)$.
Тогда $g \circ f$ дифференцируема в x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Доказательство. Использовать определение дифференцируемости ③ через непрерывную функцию $\square$

Теор. 3.3 (Дифференцирование обратной функции). $\lrcorner$ $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна, дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$ и $f'(x_0) \neq 0$.
Тогда обратная функция f^{-1} дифф. в точке $f(x_0)$ и $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

3.2 Теоремы о среднем

Теор. 3.4 (Теорема Ферма)**.** $\lrcorner$ $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $x_0 \in (a, b)$. Если $f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ или $f(x_0) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теор. 3.5 (Теорема Ролля)**.** $\lrcorner$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифф. на (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то $\exists$ такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Теор. 3.6 (Теорема Лагранжа)**.** $\lrcorner$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и дифф. на (a, b). Тогда $\exists$ такая точка $c \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теор. 3.7 (Теорема Коши)**.** ...

«*TODO*»...

3.3 Производная и монотонность

3.4 Правило Лопиталя

3.5 Формула Тейлора

3.6 Экстремумы функций

4 Интегралы

4.1 Первообразная и неопределённый интеграл

«*TODO*»...

4.2 Действия с неопределёнными интегралами

4.3 Площади и определённый интеграл

4.4 Теорема Барроу и формула Ньютона-Лейбница

4.5 Интегральные суммы

4.6 Связь между суммами и интегралами