

Введение в математический анализ.

Содержание

1	Последовательности	2
1.1	Предел последовательности	2
1.2	Арифметические операции с пределами	2
1.3	Вещественные числа. Супремум и инфимум.	3
1.4	Определение числа ϵ	4
1.5	Теорема Больцано-Вейерштрасса	4
1.6	Сходимость рядов	5
1.7	Признаки сходимости рядов	6
1.8	Тесты на сходимость рядов	8
2	Функции и непрерывность	9
2.1	Предел функции	9
2.1.1	Предельные точки множества	9
2.1.2	Предел функции	10
2.1.3	Арифметические действия с пределами	10
2.1.4	Односторонние пределы	11
2.2	Непрерывность функции	11
2.3	Теорема Вейерштрасса	12
2.4	Теорема Больцано-Коши	12
2.4.1	Обратные функции	13
2.5	Замечательные пределы	14
2.6	Эквивалентные функции	14
2.6.1	o -малое	15
3	Производные	16
3.1	Дифференцируемость и производная	16
3.2	Теоремы о среднем	17
3.3	Производная и монотонность	17
3.4	Правило Лопиталя	18
3.5	Формула Тейлора	19
3.6	Экстремумы функций	19
4	Интегралы	19
4.1	Первообразная и неопределённый интеграл	19
4.2	Действия с неопределёнными интегралами	19
4.3	Площади и определённый интеграл	19
4.4	Теорема Барроу и формула Ньютона-Лейбница	19

4.5	Интегральные суммы	19
4.6	Связь между суммами и интегралами	19



1 Последовательности

1.1 Предел последовательности

Опр-е. 1.1 (Предел последовательности). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

- При любом $\varepsilon > 0$ вне интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности
- $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$

Свойства последовательностей:

- Не может иметь двух различных пределов
- Если имеет предел, то $|x_n| \leq M$
- Пределы можно складывать, вычитать, умножать, делить, брать модуль

Св-во (Переход к пределу в неравенстве).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, x_n \leq y_n \implies a \leq b$$

Док-во. От противного

□

Теор. 1.1 (О двух милиционерах).

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$$

Док-во. По определению

□

1.2 Арифметические операции с пределами

Св-во. Конечные пределы можно складывать, вычитать, умножать, делить (нижний д.б. $\neq 0$) и брать модуль.

Док-во. С умом подбираем ε и используем ограниченность...

□

Опр-е. 1.2 (Бесконечный предел).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \equiv \quad \forall E \exists N \forall n > N x_n > E$$

Теор. 1.2. $\bigwedge x_n \neq 0. x_n - \text{беск. большая} \iff \frac{1}{x_n} - \text{беск. малая}$

Св-во. Свойства бесконечно малых:

1. Беск. малая послед. ограничена
2. Сумма, разность, произведение бес. малых – беск. малая
3. Произвед. беск. малой на ограниченную – беск. малая

Арифметические операции с бесконечностями...

1.3 Вещественные числа. Супремум и инфимум.

Опр-е. 1.3 (Вещественные числа).

- Аксиомы поля (9 штук)
- Аксиомы порядка (5 штук)
- Аксиома Архимеда: $\forall x, y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$
- Аксиома полноты: $\bigwedge [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

Тогда \exists число $c \in \mathbb{R}$, принадлежащее всем отрезкам: $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

Теор. 1.3 (О стягивающихся отрезках). $\bigwedge [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Тогда пересечение всех отрезков состоит из одной точки: $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Док-во. По теореме о двух милиционерах □

Опр-е. 1.4. $\bigwedge E$ – непустое множество

sup – наименьшая из верхних границ

inf – наибольшая из нижних границ

$$b = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Теор. 1.4. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет sup (inf)

Док-во. Делением отрезка пополам, затем переход к пределу в неравенстве... □

Теор. 1.5.

- Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
- Монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.

Док-во. Супремум...

□

Теор. 1.6.

- Неограниченная сверху возрастающая последовательность стремится к $+\infty$.
- Неограниченная снизу убывающая последовательность стремится к $-\infty$.

Док-во. По определению

□

1.4 Определение числа e

Лемма 1.1 (Неравенство Бернулли).

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies (1+x)^n \geq 1+nx$$

Док-во. По индукции

□

След-е.

$$x > -1, n \in \mathbb{N} \implies \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad a > 1, k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.5 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Св-во.

$$\{a_n\} \rightarrow A \implies \{a_{n_k}\} \rightarrow A$$

Док-во. По определению

□

Теор. 1.7 (Больцано-Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся (к конечному пределу) подпоследовательность

Док-во. Делим содержащий последовательность отрезок пополам так, чтобы в нём оставалась бесконечная подпоследовательность. Далее по теореме о двух милиционерах.

□

Теор. 1.8 (Расширение теоремы Больцано-Вейерштрасса).

- Из неограниченной сверху последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$.

- Из неограниченной снизу последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$.

След-е. Из любой последовательности можно выделить под-последовательность, имеющую конечный *или бесконечный* предел.

Опр-е. 1.5. Последовательность фундаментальна, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m, n \geq N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Свойства:

1. Фундаментальная последовательность ограничена
2. Сходящаяся последовательность фундаментальна
3. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то исходная последовательность сходится

След-е (Критерий Коши). Последовательность сходится \iff она фундаментальна

1.6 Сходимость рядов

Опр-е. 1.6.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Если последовательность $\{S_n\} \rightarrow S$, то последовательность наз. сходящейся, а S – сумма ряда. Если $\{S_n\}$ не имеет предела или *бесконечный* предел, то ряд расходится.

Теор. 1.9 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{k=1}^n a_k$ сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Геометрическая прогрессия:

$$S_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} \quad \text{при } |q| < 1$$

Гармонический ряд $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ расходится, т.к. $H_{2^n} \geq \frac{1}{2}$

Пример:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

Свойства сходящихся рядов:

1. Ряд не может иметь двух различных сумм
2. В сходящемся ряду можно произвольно расставлять скобки (т.к. это будет подпоследовательность сходящейся последовательности)
3. Добавление и отбрасывание конечного членов ряда не влияет на сходимость (но изменяет сумму)
4. Сходящиеся ряды можно складывать и вычитать
5. Сходящийся ряд можно домножать на константу

1.7 Признаки сходимости рядов

Св-во. Если $a_k \geq 0$, а последовательность S_n ограничена сверху, то ряд сходится

Св-во (Признак сравнения). Если $0 \leq a_k \leq b_k$, то:

- если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
- если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится

Пример: ряд $\frac{1}{k^2}$ сходится. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Пример: ряд $\frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.

Теор. 1.10 (Признак Даламбера). $\lceil a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится
3. $\lceil d_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда:
 - Если $d_* < 1$, то ряд сходится

- Если $d_* > 1$, то ряд расходится
- Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.11 (Признак Коши). $\bigwedge a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq d < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится
3. $\bigwedge q_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:
 - Если $d_* < 1$, то ряд сходится
 - Если $d_* > 1$, то ряд расходится
 - Если $d_* = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться

Теор. 1.12 (Факт). Если $a_n > 0$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то также существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, и они равны.

Теор. 1.13 (Признак Лейбница). Знакопередающийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ с монотонно убывающим по абсолютной величине членом $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots > 0$ сходится $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Док-во. Построить последовательность вложенных отрезков из частичных сумм $S_{2n-1}, S_{2n}, S_{2n+1}, S_{2n+2}$ □

Пример – ряд Лейбница: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$

Опр-е. 1.7 (Абсолютная сходимость). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теор. 1.14. Абсолютно сходящийся ряд сходится, причём $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Док-во. Рассмотреть $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$ □

Пример: если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.
 (доказательство: из $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$)

Свойство: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится (доказательство: от противного).

1.8 Тесты на сходимость рядов

- ☒ Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- ☒ Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- ☒ Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- ☒ Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- ☒ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- ☒ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- ☐ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- ☒ Если $0 \leq a_n \leq b_n$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- ☐ Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- ☐ Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- ☐ Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- ☐ Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- ☒ Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.
- ☐ Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- ☐ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- ☐ Если $a_n \leq b_n$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

- ☒ Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.
- ☒ Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- ☐ Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- ☒ Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- ☒ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ расходится.
- ☐ Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- ☐ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- ☒ Если $0 \leq a_n \leq b_n$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- ☐ Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
- ☐ Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
- ☐ Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.
- ☐ Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ существует и конечен, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- ☐ Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также расходится.
- ☐ Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
- ☐ Если $a_n \leq b_n$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.
- ☒ Если $0 \leq a_n \leq b_n$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.



2 Функции и непрерывность

2.1 Предел функции

2.1.1 Предельные точки множества

Опр-е. 2.1. Окрестность точки U_a – любой интервал вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$

Опр-е. 2.2. Проколота окрестность $\mathring{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

Опр-е. 2.3. Окрестность $+\infty$ – любой луч $(E, +\infty)$

Опр-е. 2.4. Окрестность $-\infty$ – любой луч $(-\infty, E)$

Опр-е. 2.5. a – предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$, если $\mathring{U}_a \cap E \neq \emptyset$ для любой \mathring{U}_a

Примеры:

1. $[a, b]$ – множество предельных точек (a, b)
2. $\{a\}$ – предельная точка ряда $\{a_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$
3. \emptyset – нет предельных точек у одиночной точки $\{a\} \in \mathbb{R}$

Лемма 2.1 (Утверждение.). Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества E
2. В \forall окрестности точки a найдётся бесконечно много точек из E
3. \exists такая последовательность точек $x_n \in E$ ($x_n \neq a$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

2.1.2 Предел функции

Опр-е. 2.6. \sqcup дана функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$. \sqcup a – предельная точка множества E . Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$), если выполнено любое из равносильных условий:

1. Для \forall окрестности U_A \exists такая окрестность \dot{U}_a , что $f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E$, т.ч. $x \neq a$ и $|x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$ (определение по Коши)
3. Для \forall последовательности $\{x_n\}$ точек из E ($x_n \neq a$), т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ (определение по Гейне)

Замечания к определению предела функции:

1. Предел – локальное свойство
2. Значение f в точке a не участвует в определении
3. Если в определении по Гейне \forall последовательность $f(x_n)$ имеет предел, то все эти пределы равны (иначе мы могли бы построить последовательность перемешиванием, и она не имела бы предела)
4. В определении по Гейне достаточно ограничиться *только* последовательностями, которые *монотонно* стремятся к a

Свойства пределов:

1. Предел единственный.
2. Локальная ограниченность: если $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка E , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R}$, то \exists такая окрестность U_a , что $f(x)$ ограничена на $U_a \cap E$.
3. Стабилизация знака: если $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка E , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то \exists такая окрестность U_a , что знаки $f(x)$ при $x \in \dot{U}_a \cap E$ и A совпадают.

2.1.3 Арифметические действия с пределами

Пределы двух функций в точке можно складывать, вычитать, перемножать и делить (если предел нижней функции не равен 0).

Теор. 2.1 (Предельный переход в неравенстве). Если

1. $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка E

2. $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

Тогда $A \leq B$

Теор. 2.2 (Теорема о сжатой функции (аналог теоремы о двух милиционерах)).
Если

1. $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка E

2. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ при всех $x \in E \setminus \{a\}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$

2.1.4 Односторонние пределы

Опр-е. 2.7 (Монотонная функция). $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно возрастает (убывает), если для $\forall x \leq y$ выполнено $f(x) \leq f(y)$ (или $f(x) \geq f(y)$)

Теор. 2.3. $\lceil f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad a$ – предельная точка множества $E_1 = E \cap (-\infty, a)$. Тогда:

- Если f возрастает и ограничена сверху, то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$
- Если f убывает и ограничена снизу, то $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$

2.2 Непрерывность функции

Опр-е. 2.8. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$, если выполнено любое из равносильных условий:

1. Если a – предельная точка, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ т.ч. $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
3. Для \forall окрестности $U_{f(a)}$ \exists такая окрестность U_a , что $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$
4. Для \forall послед. точек $\{x_n\} \subset E$ т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

Непрерывные в точке a функции можно складывать, вычитать, умножать и (если $g(a) \neq 0$) делить.

Следствия:

1. Многочлены $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ непрерывны на \mathbb{R} .
2. Отношения многочленов $\frac{p(x)}{q(x)}$ (рациональные функции) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в ноль.

Теор. 2.4 (Теорема о стабилизации знака). Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ и $f(a) \neq 0$, то найдётся такая окрестность U_a , что знак $f(x)$ совпадает с $f(a)$.

Док-во. Следствие утверждения про пределы □

Теор. 2.5 (Непрерывность композиции). $\bigwedge f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad f(D) \subset E$ и f непрерывна в точке $a \in D$, а g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a .

Док-во. Доказывается по определению предела по Гейне.

Для пределов было бы неверно, т.к. композиция пределов не обязательно будет пределом композиции, напр. для $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $g(y) = \{1 \Leftarrow y \neq 0, 0 \Leftarrow y = 0\}$ □

Пример: $\sin x$ непрерывен на \mathbb{R} .

Вспомогательное нер-во: если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теор. 2.6 (Вейерштрасса). Непрерывная на *отрезке* функция:

① ограничена; ② принимает наибольшее и наименьшее значения

Док-во. ① от противного: \bigwedge неограничена \Rightarrow можно найти $\{x_n\}$ т.ч. $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Т.к. $\{x_n\}$ – ограничена \Rightarrow по т.Больцано-Вейерштрасса найдётся $x_{n_k} \rightarrow c \dots$

② от противного: $\bigwedge f(x) < M$. Рассмотреть $g(x) = \frac{1}{M-f(x)} \dots$ □

Расширение теоремы: если функция f непрерывна на $[a, +\infty]$, и \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, то f ограничена на $[a, +\infty]$.

2.4 Теорема Больцано-Коши

Теор. 2.7 (Больцано-Коши). $\bigwedge f$ непрерывна на $[a, b]$ и значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков. Тогда $\exists c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$.

Док-во. Делением отрезка пополам □

След-е. $\bigwedge f$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) < y < f(b)$ или $f(b) < y < f(a)$. Тогда \exists такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = y$.

Док-во. Рассмотреть $g(x) = f(x) - y$ □

След-е. Если *непрерывная* на *отрезке* функция принимает какие-то два значения, то она принимает и все значения, лежащие между ними.

След-е. Непрерывный образ отрезка – отрезок

Док-во. Теорема Вейерштрасса + теорема Больцано-Коши □

Теор. 2.8. Непрерывный образ промежутка – промежуток (возможно, другого типа).

Док-во. Показать, что значения функции $(m, M) \subset f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$, где $m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$,
 $M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ □

- ☐ Функции f и g определены и непрерывны на $[a, b]$, $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = g(c)$.
- ☒ Функция f определена и непрерывна на $[a, b]$ и $f(x)^2 = 1$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда либо $f(x) = 1$ при всех $x \in [a, b]$, либо $f(x) = -1$ при всех $x \in [a, b]$.
- ☒ Функция f определена и непрерывна на $[a, b]$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a, b]$ конечное число корней: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$. Тогда на каждом из промежутков (a, x_1) , (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , \dots , (x_n, b) функция f сохраняет постоянный знак.
- ☐ Функция f определена и непрерывна на множестве $E = [a, b] \cap \mathbb{Q}$, $f(a) = -1$ и $f(b) = 1$. Тогда найдется такая точка $c \in E$, что $f(c) = 0$.

2.4.1 Обратные функции

Опр-е. 2.9 (Обратная функция). $\lceil f: X \rightarrow Y$, причём

1. $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$ (инъекция)
2. Для $\forall y \in Y$ найдётся такой $x \in X$, что $y = f(x)$ (сюръекция)

Тогда можно определить $g: Y \rightarrow X$ так, что

- $g(f(x)) = x$ при всех $x \in X$
- $f(g(y)) = y$ при всех $y \in Y$

Теор. 2.9. $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна,

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

. Тогда:

1. f – обратима и $f^{-1}: \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2. f^{-1} – строго монотонна
3. f^{-1} – непрерывна на $\langle m, M \rangle$

Док-во.

1. Показать, что f инъективна и сюръективна.
2. Монотонность f^{-1} – от противного.
3. Непрерывность f^{-1} – показать, что в \forall точке левый и правый пределы равны.

□

Обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin : \quad (\nearrow) \quad [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : \quad (\searrow) \quad [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\operatorname{arctg} : \quad (\nearrow) \quad \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcctg} : \quad (\searrow) \quad \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

Задача 2.1. Доказать, что многочлен нечётной степени всегда имеет корень

Док-во. Показать, что при $x \rightarrow \pm\infty$ он принимает значения как > 0 , так и < 0 □

2.5 Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^p - 1}{x} = p \quad (p \neq 0)$$

2.6 Эквивалентные функции

Опр-е. 2.10 ($f \sim g$ при $x \rightarrow a$). $\perp f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка E .

Если \exists такая окрестность \mathring{U}_a и функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(x) = \varphi(x)g(x)$ при всех $x \in \mathring{U}_a \cap E$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$,

то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$ (или $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$).

Свойства эквивалентности (при $x \rightarrow a$):

1. $f \sim f$

2. если $f \sim g$, то $g \sim f$

3. если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$

4. если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

5. если $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, причём $f_2(x) \neq 0$ и $g_2(x) \neq 0$ при $x \in \mathring{U}_a$, то $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$

Замечание: эквивалентности нельзя складывать, т.е. $f_1 \pm f_2 \not\sim g_1 \pm g_2$

Замечательные пределы ($x \rightarrow 0$):

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x$$

$$x \sim \ln(1+x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(1+x)^p \sim px \quad (p \neq 0)$$

2.6.1 о-малое

Опр-е. 2.11 ($o(f)$). $\perp f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка E . Если \exists окрестность \mathring{U}_a и функция $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f(x) = \varphi(x)g(x)$ при всех $x \in \mathring{U}_a \cap E$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то $f = o(g)$ при $x \rightarrow a$ или $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$

Пример: $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

След-е. Следующие утверждения равносильны:

1. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$
2. $f = g + o(g)$ при $x \rightarrow a$
3. $f = g + o(f)$ при $x \rightarrow a$

Свойства:

1. $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
2. Если f ограничена в \mathring{U}_a , то $o(fg) = o(g)$
3. $o(g) \pm o(g) = o(g)$ (т.к. *здесь* равенство означает принадлежность к классу функций)
4. Если $f \sim g$, то $o(f) = o(g)$

Замечательные пределы:

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$a^x = 1 + x \ln a + o(x)$$

$$(1+x)^p = 1 + px + o(x)$$

- ☐ Если функция $|f|$ непрерывна в точке a , то функция f также непрерывна в точке a .
- ☐ Если $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = 0$.
- ☒ Если функция $|f|$ непрерывна в точке a и $f(a) = 0$, то функция f также непрерывна в точке a .
- ☒ Если функция f непрерывна на $[-1, 1]$, $f(-1) = 4$ и $f(1) = 2$, то для найдется такое y , что $|y| < 1$ и $f(y) = \pi$.
- ☐ Если предел $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)$ существует, то он равен $f(2)g(2)$.
- ☒ Функция f удовлетворяет условию $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что если $0 < |x| < \delta$, то $f(x) \in (2, 4)$.
- ☐ Если оба предела $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ не существуют, то не существует и предел $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$.
- ☒ Если p многочлен, то $\lim_{x \rightarrow 5} p(x) = p(5)$.



3 Производные

3.1 Дифференцируемость и производная

Опр-е. 3.1 (Дифференцируемые функции). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \langle a, b \rangle$.
 f – дифференцируема в точке x_0 , если \exists такое $k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0.$$

Опр-е. 3.2. Производной функции f в точке x_0 называется

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Теор. 3.1 (Критерий дифференцируемости).

$\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда след. утверждения эквивалентны:

1. $f \in \text{Diff}\{x_0\}$
2. f имеет в точке x_0 конечную производную
3. \exists непрерывная в x_0 функция $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ т.ч. $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$

И если они справедливы, то $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

Док-во.

② \Rightarrow ③ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

③ \Rightarrow ① :

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x_0)(x - x_0) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))(x - x_0)$$

□

След-е. $f \in \mathcal{D}\text{iff}\{x_0\} \implies f \in \mathcal{C}\text{ont}\{x_0\}$

Бесконечные производные: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

Односторонние производные: $f'_\pm(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Производные можно складывать, вычитать, умножать и (если знаменатель $\neq 0$ в точке x_0) делить.

Теор. 3.2 (Производная композиции). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle, g: \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R},$
 f – дифф. в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle, g$ – дифф. в точке $f(x_0)$.

Тогда $(g \circ f) \in \mathcal{D}\text{iff}\{x_0\}$ и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Док-во. Использовать определение дифференцируемости ③ через непрерывную функцию \square

Теор. 3.3 (Дифференцирование обратной функции). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна и $f \in \mathcal{C}\text{ont}, f \in \mathcal{D}\text{iff}$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ и $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда обратная функция $f^{-1} \in \mathcal{D}\text{iff}$ в точке $f(x_0)$ и $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

3.2 Теоремы о среднем

Теор. 3.4 (Теорема Ферма). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{D}\text{iff}\{x_0\}$ в $x_0 \in (a, b)$.

Если $f(x_0) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ или $f(x_0) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теор. 3.5 (Теорема Ролля). $\lceil f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}\text{ont}[a, b], f \in \mathcal{D}\text{iff}(a, b)$.

Если $f(a) = f(b)$, то \exists такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Теор. 3.6 (Теорема Лагранжа). $\lceil f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}\text{ont}[a, b], f \in \mathcal{D}\text{iff}(a, b)$.

Тогда \exists такая точка $c \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теор. 3.7 (Теорема Коши). $\lceil f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{C}\text{ont}[a, b], f, g \in \mathcal{D}\text{iff}(a, b)$, причём $g'(x) \neq 0$ на (a, b) . Тогда \exists такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

След-е. $\lceil f'(c) = g'(c), \forall c \in (a, b)$ и $f(a) = g(a)$ или $f(b) = g(b)$.

Тогда $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.

3.3 Производная и монотонность

Теор. 3.8 (Условия монотонности). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}\text{ont} \langle a, b \rangle \quad f \in \mathcal{D}\text{iff}(a, b)$.

Тогда

1. f возрастает на $\langle a, b \rangle \iff f'(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$.
2. $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ строго возрастает (обратное верно не всегда).

След-е (Критерий постоянства). $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}ont \langle a, b \rangle \quad f \in \mathcal{D}iff(a, b).$
Тогда $f = \text{const} \langle a, b \rangle \iff f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$

След-е (Строгое неравенство). $\lceil f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}ont [a, b] \quad f \in \mathcal{D}iff(a, b).$
Если $f(a) = g(a)$ и $f'(x) < g'(x)$ при $\forall x \in (a, b) \implies f(x) < g(x)$ при $\forall x \in (a, b).$

Теор. 3.9 (Дарбу). $\lceil f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{D}iff[a, b].$
 $\implies \forall f'(a) < y < f'(b) \quad \exists c \in (a, b) : \quad f'(c) = y.$
(Непрерывность $f'(x)$ не требуется!)

Док-во. Сначала рассмотреть $y = 0$ и $f'(a) < 0 < f'(b)$. По Т. Ферма \exists экстремум $c \in [a, b]$ Доказать, что $c \neq a, c \neq b$. Через $g(x) = f(x) - yx$ перейти к $\forall y$. \square

След-е. Функция производной не может иметь разрывов.

След-е. $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{D}iff \langle a, b \rangle$ и $f'(x) \neq 0$ на $\langle a, b \rangle.$
 $\implies f$ — строго монотонна.

След-е. $\lceil f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{D}iff \langle a, b \rangle.$ Тогда $f'(\langle a, b \rangle)$ — промежуток.

3.4 Правило Лопиталья

$$\lceil f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad f, g \in \mathcal{D}iff(a, b) \quad g'(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f, g: (a, b) \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty \implies \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

etc...

$$\forall p > 0 \quad \forall a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

$$\begin{aligned} \ln \ln x &\ll (\ln x)^{100} \ll \sqrt[100]{x} \ll x^{100} \ll (\ln x)^{\ln x} \ll x^{\ln x} \equiv \\ &\equiv e^{(\ln x)^2} \ll e^{\sqrt{x}} \ll e^x \ll (\ln x)^x \ll x^x \ll e^{x^2} \end{aligned}$$

3.5 Формула Тейлора

3.6 Экстремумы функций



4 Интегралы

4.1 Первообразная и неопределённый интеграл

«TODO»...

Некоторые интегралы:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

Не представимы в замкнутой форме: e^{-x^2} , $\sin x/x$, $\cos x/x$, $1/\ln x$.

4.2 Действия с неопределёнными интегралами

4.3 Площади и определённый интеграл

4.4 Теорема Барроу и формула Ньютона-Лейбница

4.5 Интегральные суммы

4.6 Связь между суммами и интегралами

