Основы дискретной математики. Комбинаторика.

1 Определения

Опр. 1.1 (Покрытие $\{X_i\}$ множества X). $\bigcup X_i = X$

Опр. 1.2 (Разбиение).

$$\begin{cases} \bigcup X_i = X \\ X_i \cap X_j = \varnothing \\ X_i \neq \varnothing \end{cases}$$

Опр. 1.3 (Упорядоченное разбиение).

$$\begin{cases} \text{разбиение} \\ X_1 \preccurlyeq X_2 \preccurlyeq ... \preccurlyeq X_n \end{cases}$$

Опр. 1.4 (Разделение).

$$\begin{cases} \text{“почти” разбиение} \\ X_i \approx \varnothing \\ X_1 \preccurlyeq ... \preccurlyeq X_n \end{cases}$$

Опр. 1.5 (Декартова степень).

$$X^k = \{(x_1,...,x_k) :\ x_i \in X,\ x_1 \preccurlyeq ... \preccurlyeq x_k\}$$

Опр. 1.6 (k-мультимножество).

$$M_k(X) = \{(x_1,...,x_k) :\ x_i \in X,\ x_1 \approx ... \approx x_k\}$$

Опр. 1.7 (k-мультимножество (2)).

$$\begin{aligned} &M_k = (X, \varphi) \\ &\varphi : X \to \overline{0,k} \\ &\sum \varphi(x_i) = k \quad \varphi(x_i) \in \overline{0,k} \end{aligned}$$

Опр. 1.8 (k-сочетание (без повторений)). *неупорядоченное* k-элементное подмножество n-элементного множества

Опр. 1.9 (k-сочетание с повторениями). $\approx$ k-мультимножество $\approx$ k монеток в кармане

2 Биномиальные коэффициенты

$\binom{n}{k}$ — количество неупорядоченных k-элементных подмножеств n-элементного множества

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$\binom{n}{k} = 0 \qquad k > n$$
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad n \geqslant 0$$

В самом общем виде:

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, & k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C} \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Рекуррентное свойство:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

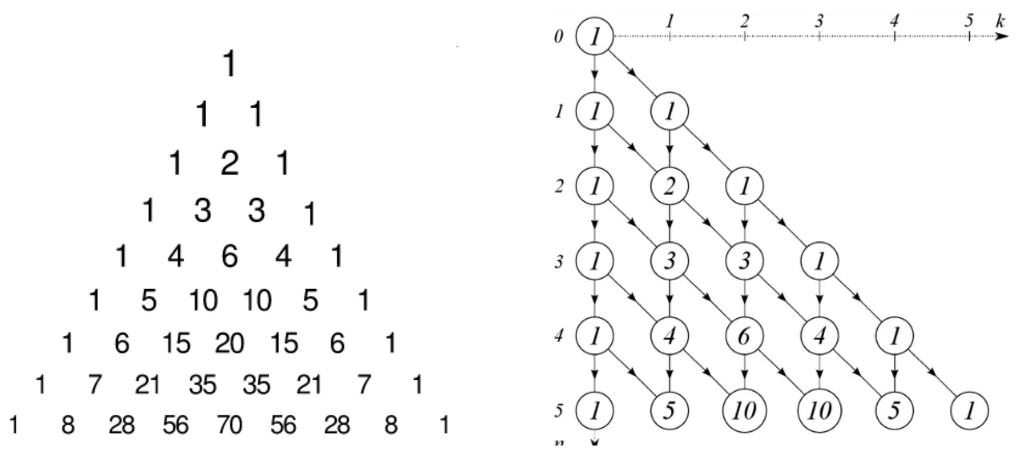


Рис. 2.1: Треугольник Паскаля

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{или...}$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

(*n белых + n чёрных шаров...* "свёртка Вандермонда")

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \qquad \text{сначала } k \text{ штук } + x_{n+1}, \text{ потом } k + x_n - x_{n+1} \text{ итд...}$$

3 Связь с биномом

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Т.е. число всех чётных подмножств равно числу всех нечётных (и равно $2^n/2$)[1]:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

4 Сочетания с повторениями

Теор. 4.1. Число способов выбрать с повторениями k элементов из n равно:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

Св-во (Принцип биекции)**.** $f : X \to Y$ — биекция $\implies |X| = |Y|$

$$\left(\!\!\binom{q}{k}\!\!\right) = \frac{q(q+1)\ldots(q+k-1)}{k!} = \frac{q^{(k)}}{k!} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C},\, k \in \mathbb{N}$$

5 Шары, ящики, перегородки

Замечание[2]...

Теор. 5.1. Число способов разложить n одинаковых шаров в k упорядоченных ящиков так, чтобы пустых ящиков не было, равно $\binom{n-1}{k-1}$, причём $n \geqslant k$.

Доказательство. Между k ящиками "$\sqcup$" находятся $k-1$ перегородок "**f**", между которыми закладываются n шаров "**w**". Края конструкции обозначим вертикальными чертами:

$$|\,\underbrace{\mathrm{w}}\,\mathrm{f}\,\underbrace{\mathrm{ww}}\,\mathrm{f}\,\underbrace{\mathrm{w}}\,\mathrm{f}\,\underbrace{\mathrm{ww}}\,|$$

Шары попадают либо между перегородками, либо между крайними перегородками и краями. Эти места соответствуют ящикам. Порядок перегородок не важен, но ящики

[1] Комбинаторное доказательство этого факта можно найти по ссылке.

[2] Описание *теории шаров и перегородок* можно найти по ссылке.

упорядочены слева направо. Поскольку пустые ящики не допускаются, перегородки “**f**” можно вставлять только между шарами “**w**”. Таких мест будет $n-1$. Число способов вставить $k-1$ перегородок между ними будет $\binom{n-1}{k-1}$. При $n-1<k-1$ получится ноль, отсюда условие $n \geqslant k$. ■

Теор. 5.2. Число способов разложить n одинаковых шаров в k упорядоченных ящиков так, что ящики могут быть пустыми, равно $\binom{n+k-1}{n} = \left(\!\binom{k}{n}\!\right)$.

Доказательство. Между k ящиками “␣” находятся $k-1$ перегородок “**f**”, между которыми закладываются n шаров “**w**”. Края конструкции обозначим вертикальными чертами:

$$\big|\ \text{␣}\ \mathrm{f}\ \underbracket{\mathrm{w}}\ \mathrm{ff}\ \underbracket{\mathrm{www}}\ \mathrm{f}\ \underbracket{\mathrm{w}}\ \big|$$

Порядок перегородок не важен, но ящики упорядочены слева направо. Теперь допускается $\forall$ перестановка шаров и перегородок. То есть n шаров и $k-1$ перегородок произвольно расставляются на $n+k-1$ посадочных мест. Число способов расставить шары будет $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$, после чего перегородки расставляются на оставшиеся места. ■

Сл-е. Есть предметы n различных сортов. Число способов выбрать k предметов, если предметы одного сорта неразличимы (иначе говоря, выбрать *с повторениями* k элементов из n) равно $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Доказательство. k предметов – это “шары”, а n сортов – “ящики”, по которым их раскладываем. Получаем аналог задачи выше, но n и k поменялись местами. ■

6 Перестановки

Опр. 6.1 (k-перестановка (без повторений))**.** *упорядоченное* k-элементное подмножество $(x_1,...x_k)$ n-элементного множества $|X| = n$, $x_i \in X$;
также называют k-размещением из n элементов;
пример: №№ спортсменов на пьедестале (3-перестановка)

Опр. 6.2 (k-перестановка с повторениями)**.** $\forall$ элемент декартовой степени X^k n-элементного множества $|X| = n$;
пример: № паспорта из 8 цифр $\overline{0..9}$

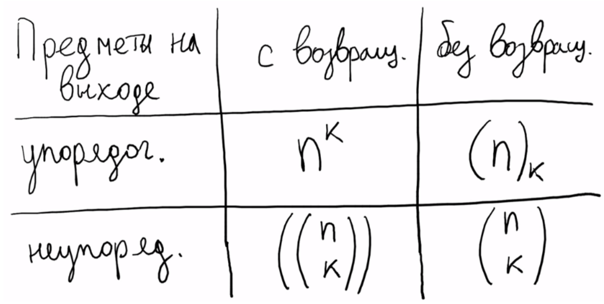
Св-во. Число k-перестановок с повторениями из n равно n^k

Св-во. Число k-перестановок без повторений из n равно

$$P(n,k) = (n)_k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

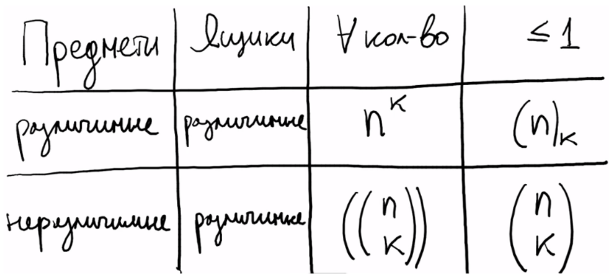
$$P(n,k)\Big|_{n=k} = P(n,n) = P(n) = P_n = n!$$

7 Схемы с урнами и ящиками



Предметы на выходе	с возвращ.	без возвращ.
упорядоч.	n^k	$(n)_k$
неупоряд.	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Рис. 7.1: Схемы с урнами (источник)



Предметы	Ящики	$\forall$ кол-во	≤ 1
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Рис. 7.2: Схемы раскладок по ящикам (источник)

8 Количество отображений

Опр. 8.1 (отображение). $x_i \in X \quad f(x_i) \in Y \quad f \in F \quad |X| = n \quad |Y| = k$

Опр. 8.2 (инъекция). $\forall\, y \in Y : \ |f^{-1}(y) \subseteq X| = \overline{0,1} \qquad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Опр. 8.3 (биекция). $\forall\, y \in Y\ \exists!\, f^{-1}(y) \in X \qquad f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

Опр. 8.4 (сюръекция). $\forall\, y \in Y : \ |f^{-1}(y) \subseteq X| > 0 \qquad (\nexists$ если $|X| > |Y|)$

$$\begin{aligned} |\text{отображение}| &= k^n \\ |\text{инъекция}| &= (k)_n \\ |\text{биекция}| &= n! \\ |\text{сюръекция}| &= \hat{S}(n,k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \hat{S}(n,i)\binom{k}{i} = k^n \qquad \text{или...} \\ &\sum_{i=0}^{n} \hat{S}(n,i)\binom{k}{i} = k^n \qquad \text{т.к. } \hat{S}(n,0) = 0,\ \left.\binom{k}{i}\right|_{i>k} = 0 \end{aligned}$$

используя формулу обращения[3]

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \implies g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$$

получаем

$$\hat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \qquad \text{причём } \hat{S}(n,k)\big|_{k>n} = 0$$

Отображения $f : X_n \to Y_k$ “изоморфны” $\longleftrightarrow$ k-разделениям X (1.4), $|\{\mathcal{D}_k\}| = k^n$.

Сюръекции $\longleftrightarrow$ упорядоченным k-разбиениям X (1.3), $|\{\mathcal{B}_k\}| = \hat{S}(n,k)$.

[3]Немного о формулах обращения, например, см. здесь