

1 Дифференциальное исчисление

1.1 Производные

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(10^x)' = 10^x \ln 10$	$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	
$\sin x' = \cos x$	$\cos x' = -\sin x$	$\operatorname{tg} x' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arctg} x' = \frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg} x' = -\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsh} x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arch} x' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arth} x' = \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcth} x' = \frac{1}{x^2-1}$
		$\operatorname{th} x' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{cth} x' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

1.2 Комбинация производных

$y = f(x) \quad x = g(y) \quad g = f^{-1} \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f(g(x)))' = f'(t)g'(x)$
$(a \cdot b)' = a'b + ab' \quad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \quad (a \cdot b)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{(k)} b^{(n-k)}$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

$(a^{kx})^{(n)} = (k \ln a)^n a^{kx}$	$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{\ln a \cdot x^{n-1}}$
$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(x + n\frac{\pi}{2})$	$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x & n = 2k \\ \operatorname{ch} x & n = 2k + 1 \end{cases}$	$(\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x & n = 2k \\ \operatorname{sh} x & n = 2k + 1 \end{cases}$

1.3 Ряд Тейлора

$$\supset f(x) - \text{continuous, } x \in [a, b]; \exists f'(x), x \in (a, b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\square \quad \exists f^{(n+1)}(x_0) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) (x - x_0)^{n+1}}_{R_n - \text{остаточный член, } 0 < \theta < 1}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

1.4 Биномиальные коэффициенты

$$C_n(\underbrace{k_1, \dots, k_r}_{\sum k_i = n}) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

			1		
		1		1	
	1		2		1
	1	3		3	1
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

Треугольник Паскаля

$$(a_1 + \dots + a_r)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_r = n} C_n(k_1, \dots, k_r) a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

1.5 Подстановки и перестановки

$M = \{s_1, \dots, s_k\}$ — упорядоченное множество (перестановка)

$p^k: M \rightarrow M$ — взаимно-однозначное отображение (подстановка)

$M = \{s_1, \dots, s_k\}; i_1, \dots, i_p$ — числа: $\sum_{j=1}^p i_j = k, i_j$ — повторения s_j

$p_{i_1, i_2, \dots, i_p}^k$ — упор. набор из M — перестановка с повторением ($M_p \rightarrow M_k$)

($i_1 = \dots = i_p = 1 \Rightarrow p_{1, \dots, 1}^k = p^k$ — простая перестановка)

a_r^k — упор. набор из r разных эл-тов из k — размещение

a_r^k — также вз. однозн. отобр. из $\{1, 2, \dots, r\} \rightarrow M$ ($r \leq k$; $r = k \Rightarrow$ подстановки)

\tilde{a}_r^k — размещение с повторами, набор r эл-тов из k (с возвращениями) ($r > k$ — можно)

c_r^k — сочетание r эл-тов из k , подмножество, без учёта порядка

\tilde{c}_r^k — сочетание с повторениями, т.е. \tilde{a}_r^k без учета порядка.

$P_k = P(p^k) = k!$ — число всех перестановок p^k

$F(p^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i (k-i)! —$ число всех подстановок с ≥ 1 неподв. точкой

$G(p^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i i (k-i)! —$ число всех подстановок с $\equiv 1$ неподв. точкой

$$\boxed{C_k(i_1, \dots, i_p) = \frac{k!}{i_1! \dots i_p!} \left(\sum_1^p i_j = k \right) — \text{число перестановок с повторениями}}$$

$A_k^r = A(a_r^k) = \frac{k!}{(k-r)!} = k(k-1) \dots (k-r+1) —$ число размещений

$A(\tilde{a}_r^k) = k^r —$ число размещений с повтором (возвратом)

$C_k^r = C(c_r^k) = \frac{k!}{r!(k-r)!} —$ число сочетаний

$f_k^r = C_{k+r-1}^r = \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!} —$ число сочетаний с повторениями

1.6 Гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x+1) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

