Основы теории графов.
Теория.

Содержание

1 Основы

Опр. 1.1. Цикл - замкнутый маршрут, **рёбра** не повторяются?????

Опр. 1.2. Простой цикл - замкнутый маршрут, рёбра **и вершины** не повторяются

Теор. 1.1.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

Теор. 1.2. В дереве $V = E + 1$

«$\mathcal{TODO}$»...

2 Деревья

Теор. 2.1. граф двудольный $\iff \forall$ цикл в графе чётный

«$\mathcal{TODO}$»...

3 Эйлеровы графы

Опр. 3.1 (Цикл Эйлера)**.** проходит все **рёбра** по одному разу

Теор. 3.1. Цикл Эйлера $\exists \iff$ степень всех вершин чётная

«$\mathcal{TODO}$»...

4 Паросочетания I

«$\mathcal{TODO}$»...

5 Гамильтоновы графы

Опр. 5.1 (Цикл Гамильтона)**.** проходит все **вершины** по одному разу

«$\mathcal{TODO}$»...

6 Графы деБрейна

«$\mathcal{TODO}$»...

7 Вершинная связность

Опр. 7.1 (Точка сочленения)**.** если удалить, то распадётся.

Лемма 7.1 (Хёринг)**.** max кол-во путей $P(x \to y)$ (не перес. во внутр. точках) $= |R|$ – max мн-ва вершин, отделяющих x и y.

Теор. 7.1 (Менгер)**.** Для $\forall$ несмежных вершин $x,y \in V \nexists e(x,y)$ размер мин. **верш.**-разделяющего мн-ва $|R_{min}(x \leftrightarrow y)| =$ max числу простых путей $P(x \to y)$, отличных во внутренних точках.

Теор. 7.2 (Уитни)**.** G – k-связный $\iff \forall x,y \in V$, $\exists$ k простых путей $P(x \to y)$, не пересекающихся во внутренних точках $P_i \neq P_j$(внут.).

Теор. 7.3. $\daleth$ κ – вершинная связность, λ – рёберная связность,

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

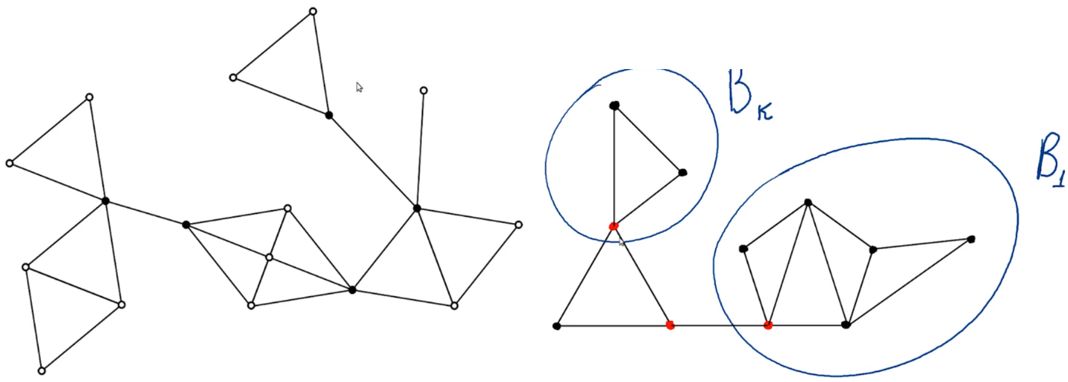
$$\text{где} \quad \delta(G) = \min_V deg(v)$$

Лемма 7.2. Если $|V| \geqslant 3$ и граф связный, то след. утв. эквивалентны:

- граф 2-связный
- $\forall$ 2 верш. лежат на цикле
- $\forall$ 2 ребра лежат на цикле

Теор. 7.4. 2-связный граф допускает разложение на цикл и ручки

Опр. 7.2. 1-связный граф можно представить в виде дерева блоков (2-связные компоненты + мосты) и точек сочленения



«$\mathcal{TODO}$»...

8 Рёберная связность

Опр. 8.1. Мост – ребро, при его удалении граф развалится

Теор. 8.1 (Форд-Фалкерсон)**.** max поток Q через сеть = пропускной способности минимального S-T разреза.

Теор. 8.2 (Менгер "рёберная")**.** Для $\forall$ несмежных вершин $x,y \in V \nexists e(x,y)$ размер min **рёберно**-разделяющего мн-ва $|R^{edge}_{min}(x \leftrightarrow y)|$ = max числу простых **рёберно**-непересекающихся путей $P(x \to y)$.

«$\mathcal{TODO}$»...

9 Паросочетания II

	вершинное	рёберное	
незав. мн-во	α	α'	max
покрытие	β	β'	min
	вершинное	п-сочетание	

Св-во. Если S – независ.мн-во вершин, то $\bar{S}$ – покрытие (необязательно max).
Замечание: это неверно для рёбер.

Теор. 9.1 (Галаи)**.**

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

Теор. 9.2 (Кёниг)**.** В $\forall$ 2-дольном графе $B(m{,}n)$: $\beta = \alpha'$

Опр. 9.1 (Кубический граф)**.** регулярный ($\deg v_i = \mathrm{const}$) граф: $\deg = 3$

Св-во. В кубическом графе $|V|$ – чётное

Теор. 9.3 (Татт)**.** $\exists$ совершенное п.с. $\iff$ при удалении $\forall\ S \subset V$ образуется нечётных компонент

$$C_o(G \setminus S) \leqslant |S|$$

Сл-е (Петерсен)**.** В кубическом графе $\exists$ с.п.с., если $\mathrm{N}() \leqslant 2$

Св-во. В чётном графе если $C_o(G \setminus S) \geq |S|$ то $C_o(G \setminus S) \geqslant |S| + 2$

Опр. 9.2 (Дефицит)**.** число вершин, не покрытых максимальным п.с.

$$\mathrm{def}(G) = |V| - 2\max|M|$$

Теор. 9.4 (Татта-Бержа)**.** $\mathrm{def}(G) = \max\limits_{S \subset V} \big(C_o(G \setminus S) - |S| \big)$

Сл-е. $\mathrm{def} \equiv |V| \pmod 2$

10 Раскраски

10.1 Хроматическое число

Опр. 10.1. $\Delta = \max\limits_{v \in V} \deg(v)$

Св-во. chromatic number $\mathcal{X}(G) \leqslant \Delta + 1$ (оценка жадного алгоритма)

- деревья: $\mathcal{X} = 2$
- двудольные графы $B(m{,}n)$: $\mathcal{X} = 2$
- полные графы K_n: $\Delta = n - 1$, $\mathcal{X} = n$
- циклы чётной длины C_{2n}: $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 2$
- циклы нечётной длины C_{2n+1}: $\Delta = 2$, $\mathcal{X} = 3$

Теор. 10.1 (Брукс)**.** $\mathcal{X}(G) \leqslant \Delta$ для всех графов кроме полных и нечётных циклов

Опр. 10.2 (Клика)**.** полный подграф

Опр. 10.3 (Кликовое число)**.** $\omega(G) = \max\limits_{K_n \subseteq G} n$

Св-во. $\mathcal{X}(G) \geqslant \omega(G)$

Св-во. K_n содержит K_{n-1}, K_{n-2}, $\ldots$, K_3 (треугольники)

Теор. 10.2 (Мицельский)**.** $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists G : \mathcal{X}(G) = n,\ G \not\supseteq K_3$ (свободен от треугольников, т.е. $\omega(G) = 2$)

Опр. 10.4 (Обхват)**.** $\Omega(G) = \min\limits_{C_n \subseteq G} n$, C_n — простой цикл

Теор. 10.3 (Эрдёш)**.** $\forall k{,}m \in \mathbb{N}\ \ \exists G : \mathcal{X}(G) = k,\ \Omega(G) \geqslant m$

10.2 Хроматический многочлен

Опр. 10.5. $P_G(k)$ – число способов раскрасить G в k цветов, $P_G(k) = 0$ при $k < \mathcal{X}(G)$

- полный граф K_n $\quad P_{K_n}(z) = z(z-1)\cdots(z-n+1)$
- пустой граф $\bar{K}_n$ $\quad P_{\overline{K}_n}(z) = z^n$
- дерево T_n $\quad P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}$
- лес $T_{n,k}$ из k деревьев и $n = n_1 + \cdots + n_k \geqslant k$ вершин $\quad P_{T_{n,k}}(z) = z^k(z-1)^{n-k}$
- цикл C_n $\quad P_{C_n}(z) = (z-1)^n + (-1)^n(z-1)$

Св-во. Если в графе есть кратные рёбра, то это никак не влияет на раскраску

Теор. 10.4. $P_G(z) = 1z^n - C_{n-1}z^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n, \quad C_i \geqslant 0$, причём

- $C_{n-1} = |E(G)|$
- $G = \{G_1,\ldots,G_m\}$ (связные компоненты) $\implies P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot \ldots \cdot P_{G_m}(z)$

Лемма 10.1. $(G-e)$ — удаление ребра e, $(G \sim e)$ — "стягивание" ребра e

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G\sim e}(z)$$

Доказательство.

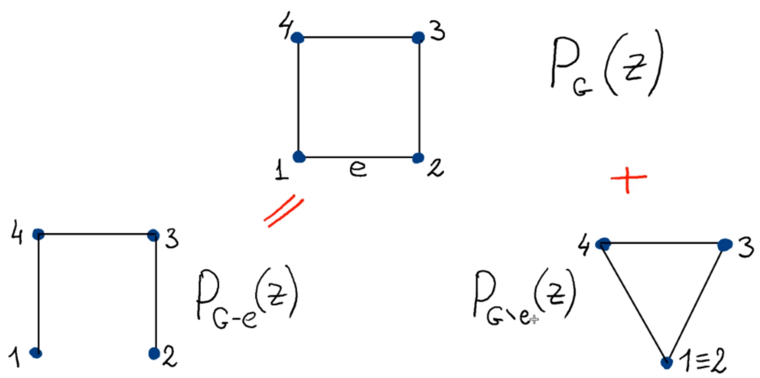


Рис. 10.1: chromatic polynome rule

■

11 Планарные графы I

Опр. 11.1 (Планарный)**.** G можно правильно уложить в плоскость (сферу), получив *плоский граф* $\tilde{G}$. Рёбра $\tilde{G}$ пересекаются **только** в вершинах.

Лемма 11.1 (Жордана)**.** Если точка A лежит внутри замкнутого контура, а B – вне его, то любой путь (A,B) пересечёт контур минимум 1 раз

Св-во. Непланарные – K_5, $K_{3,3}$

Опр. 11.2 (Грань f_i). ...

Уложив планарный граф в сферу и поворачивая сферу можно $\forall$ заданную вершину уложить во внешнюю грань.

Св-во. $\sum \deg(f_i) = 2|E| \qquad ... = \sum \deg(v_i)$

Теор. 11.1. Граница $\forall$ грани 2-связного $\tilde{G}$ — простой цикл

Сл-е. Вершины, смежные с $\forall$ вершиной 3-связного $\tilde{G}$ – лежат на простом цикле

Опр. 11.3 (Дуальный граф плоского графа). грани $\longrightarrow$ вершины (с сохранением степеней); соединяем дуальные вершины ребром, если исходные грани смежны (т.е. отделены 1 ребром)

Св-во. Дуальный граф всегда связен

Теор. 11.2 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников и связных планарных графов).

$$V + F = E + 2 \qquad \text{или} \qquad n + r - m = 2$$

Св-во. В простом (без петель и мультирёбер) плоском графе $\deg(f_i) \geqslant 3$

- $\deg(f_i) = 1 \implies$ петля
- $\deg(f_i) = 2 \implies$ мультиребро

Сл-е. В простом $\tilde{G}$ при $V \geqslant 3$ будет $E \leqslant 3V - 6$.

Сл-е. В простом $\tilde{G}$ при $V \geqslant 3$ будет $\delta = 5$.

Опр. 11.4 (максимальный плоский граф). Если достигли равенства $E = 3V - 6$.

Св-во (максимальный плоский граф). $\forall f_i \ \deg(f_i) = 3$

Теор. 11.3 (Fary). $\forall$ планарный граф можно так уложить в плоскость, что все рёбра – прямые отрезки

Теор. 11.4 (о 4 красках). Для правильной раскраски *граней* $\tilde{G}$ без мостов хватит 4 цветов. Для правильной раскраски *вершин планарного* графа хватит 4 цветов.

Сл-е. Плоский граф $\longrightarrow$ дуальный (грани $\Leftrightarrow$ вершины), а вершины плоского дуального графа $\Leftrightarrow$ вершинам его планарного. Так что задача $\equiv$ правильной раскраске **вершин** планарного графа

12 Планарные графы II

Теор. 12.1. Если 2-связные графы в дереве блоков 1-связного графа планарны, то и весь граф планарный

Доказательство. (по индукции по точкам сочленения). ■

Опр. 12.1 (подразбиение графа). добавление вершин $\deg = 2$ внутри рёбер

Лемма 12.1 (Томасон)**.** в 3-свяном графе $\exists$ ребро: если его стянуть, граф останется 3-связным

Теор. 12.2 (критерий Куратовского)**.** граф планарный $\iff$ он не содержит подразбиение K_5 или $K_{3,3}$

Теор. 12.3 (Татт)**.** $\forall$ 3-связный планарный граф можно вложить на плоскость так, что $\forall$ внутренняя грань будет выпуклым многоугольником (2-связный — не обязательно)

Опр. 12.2 (Минор)**.** получен из графа удалением или стягиванием рёбер

Св-во. минор планарного графа будет планарным

Теор. 12.4 (Вагнер)**.** граф планарный $\iff$ не содержит миноров K_5 или $K_{3,3}$

Опр. 12.3. вложение графа в поверхность рода g правильное, если при разрезании на грани получатся (криволинейные) многоугольники (а не 3-мерные цилиндры итд), т.е. получится карта

Св-во. Род поверхности для сферы $g = 0$ (без дырок, $2 - 2g = 2$), род тора $g = 1$ (одна дырка, $2 - 2g = 0$).

Теор. 12.5 (Эйлера)**.** Эйлерова характеристика карты (укладки): $\chi(M) = V + F - E$. Укладка (вложение) правильная $\iff \chi(M) = 2 - 2g$.

K_5 и $K_{3,3}$ можно вложить в тор.

«*TODO*»...