

Основы дискретной математики. Комбинаторика.

Содержание

1	Определения	1
2	Биномиальные коэффициенты	2
3	Связь с биномом	3
4	Сочетания с повторениями	4
5	Шары, ящики, перегородки	4
6	Перестановки	5
7	Схемы с урнами и ящиками	5
8	Количество отображений	5
9	Разделения $\{a_i\}$	6

1 Определения

Опр. 1.1 (Покрытие $\{X_i\}$ множества X). $\bigcup X_i = X$

Опр. 1.2 (Разбиение).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup X_i = X \\ X_i \cap X_j = \emptyset \\ X_i \neq \emptyset \end{array} \right.$$

Опр. 1.3 (Упорядоченное разбиение).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{разбиение} \\ X_1 \preceq X_2 \preceq \dots \preceq X_n \end{array} \right.$$

Опр. 1.4 (Разделение).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“почти” разбиение} \\ X_i \approx \emptyset \\ X_1 \preceq \dots \preceq X_n \end{array} \right.$$

Опр. 1.5 (Декартова степень).

$$X^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in X, x_1 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq x_k\}$$

Опр. 1.6 (k -мультимножество).

$$M_k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in X, x_1 \approx \dots \approx x_k\}$$

Опр. 1.7 (k -мультимножество (2)).

$$\begin{aligned} M_k &= (X, \varphi) \\ \varphi &: X \rightarrow \overline{0, k} \\ \sum \varphi(x_i) &= k \quad \varphi(x_i) \in \overline{0, k} \end{aligned}$$

Опр. 1.8 (k -сочетание (без повторений)). *неупорядоченное* k -элементное подмножество n -элементного множества

Опр. 1.9 (k -сочетание с повторениями). $\approx k$ -мультимножество $\approx k$ монеток в кармане

2 Биномиальные коэффициенты

$\binom{n}{k}$ — количество неупорядоченных k -элементных подмножеств n -элементного множества

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ \binom{n}{k} &= 0 \quad k > n \\ \binom{n}{0} &= 1 \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

В самом общем виде:

$$\binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, & k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C} \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Рекуррентное свойство:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

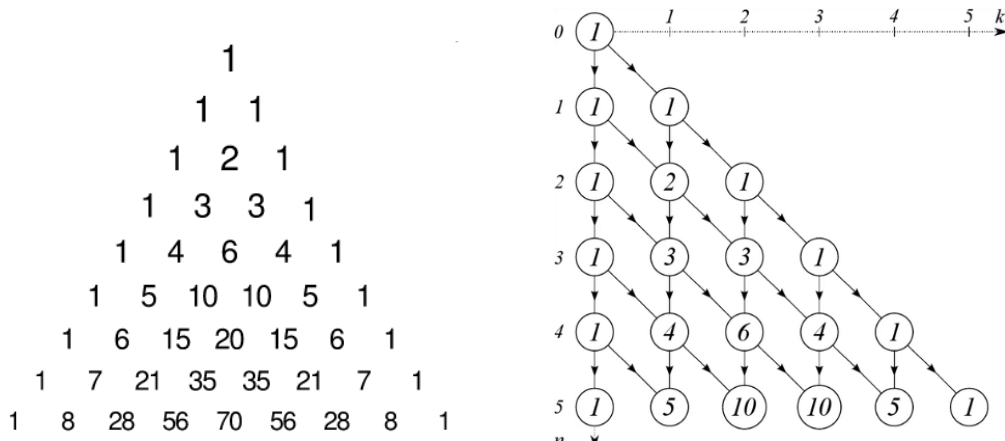


Рис. 2.1: Треугольник Паскаля

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} && \text{или...} \\
 \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} && \text{?} \\
 \binom{n+m}{k} &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
 \binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 && (n \text{ белых} + n \text{ чёрных шаров...} \quad \text{“свёртка Вандермонда”})
 \end{aligned}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} \quad \text{сначала } k \text{ штук} + x_{n+1}, \text{ потом } k + x_n - x_{n+1} \text{ итд...}$$

3 Связь с биномом

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 2^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
 0 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Т.е. число всех чётных подмножеств равно числу всех нечётных (и равно $2^n/2$)¹:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

¹ Комбинаторное доказательство этого факта можно найти [по ссылке](#).

4 Сочетания с повторениями

Теор. 4.1. Число способов выбрать с повторениями k элементов из n равно:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Св-во (Принцип биекции). $f : X \rightarrow Y$ — биекция $\implies |X| = |Y|$

$$\binom{q}{k} = \frac{q(q+1)\dots(q+k-1)}{k!} = \frac{q^{(k)}}{k!} \quad \forall q \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$$

5 Шары, ящики, перегородки

Замечание²...

Теор. 5.1. Число способов разложить n одинаковых шаров в k упорядоченных ящиков так, чтобы пустых ящиков не было, равно $\binom{n-1}{k-1}$, причём $n \geq k$.

Доказательство. Между k ящиками “ \square ” находятся $k-1$ перегородок “ \mathbf{f} ”, между которыми закладываются n шаров “ \mathbf{w} ”. Края конструкции обозначим вертикальными чертами:

$$\left| \square \mathbf{f} \square \mathbf{w} \square \mathbf{f} \square \mathbf{w} \square \right|$$

Шары попадают либо между перегородками, либо между крайними перегородками и краями. Эти места соответствуют ящикам. Порядок перегородок не важен, но ящики упорядочены слева направо. Поскольку пустые ящики не допускаются, перегородки “ \mathbf{f} ” можно вставлять только между шарами “ \mathbf{w} ”. Таких мест будет $n-1$. Число способов вставить $k-1$ перегородок между ними будет $\binom{n-1}{k-1}$. При $n-1 < k-1$ получится ноль, отсюда условие $n \geq k$. ■

Теор. 5.2. Число способов разложить n одинаковых шаров в k упорядоченных ящиков так, что ящики могут быть пустыми, равно $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Доказательство. Между k ящиками “ \square ” находятся $k-1$ перегородок “ \mathbf{f} ”, между которыми закладываются n шаров “ \mathbf{w} ”. Края конструкции обозначим вертикальными чертами:

$$\left| \square \mathbf{f} \square \mathbf{w} \square \mathbf{f} \square \mathbf{w} \square \mathbf{f} \square \mathbf{w} \square \right|$$

Порядок перегородок не важен, но ящики упорядочены слева направо. Теперь допускается \forall перестановка шаров и перегородок. То есть n шаров и $k-1$ перегородок произвольно расставляются на $n+k-1$ посадочных мест. Число способов расставить шары будет $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$, после чего перегородки расставляются на оставшиеся места. ■

Сл-е. Есть предметы n различных сортов. Число способов выбрать k предметов, если предметы одного сорта неразличимы (иначе говоря, выбрать с повторениями k элементов из n) равно $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Доказательство. k предметов — это “шары”, а n сортов — “ящики”, по которым их раскладываем. Получаем аналог задачи выше, но n и k поменялись местами. ■

² Описание теории шаров и перегородок можно найти [по ссылке](#).

6 Перестановки

Опр. 6.1 (k -перестановка (без повторений)). упорядоченное k -элементное подмножество (x_1, \dots, x_k) n -элементного множества $|X| = n$, $x_i \in X$;

также называют k -размещением из n элементов;

пример: №№ спортсменов на пьедестале (3-перестановка)

Опр. 6.2 (k -перестановка с повторениями). \forall элемент декартовой степени X^k n -элементного множества $|X| = n$;

пример: № паспорта из 8 цифр $\overline{0..9}$

Св-во. Число k -перестановок с повторениями из n равно n^k

Св-во. Число k -перестановок без повторений из n равно

$$P(n, k) = (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n, k) \Big|_{n=k} = P(n, n) = P(n) = P_n = n!$$

7 Схемы с урнами и ящиками

Предметы на выходе	с возвра.	без возвра.
упорядоч.	n^k	$(n)_k$
неупоряд.	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\binom{n}{k}$

Рис. 7.1: Схемы с урнами ([источник](#))

Предметы	ящики	\forall кол-во	≤ 1
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\binom{n}{k}$

Рис. 7.2: Схемы раскладок по ящикам ([источник](#))

8 Количество отображений

Опр. 8.1 (отображение). $x_i \in X \quad f(x_i) \in Y \quad f \in F \quad |X| = n \quad |Y| = k$

Опр. 8.2 (инъекция). $\forall y \in Y : |f^{-1}(y) \cap X| \leq 1 \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Опр. 8.3 (биекция). $\forall y \in Y \exists! f^{-1}(y) \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

Опр. 8.4 (сюръекция). $\forall y \in Y : |f^{-1}(y) \subseteq X| > 0 \quad (\nexists \text{ если } |X| > |Y|)$

$$\begin{aligned} |\text{отображение}| &= k^n \\ |\text{инъекция}| &= (k)_n \\ |\text{биекция}| &= n! \\ |\text{сюръекция}| &= \hat{S}(n, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \hat{S}(n, i) \binom{k}{i} &= k^n \quad \text{или...} \\ \sum_{i=0}^n \hat{S}(n, i) \binom{k}{i} &= k^n \quad \text{т.к. } \hat{S}(n, 0) = 0, \left. \binom{k}{i} \right|_{i>k} = 0 \end{aligned}$$

используя формулу обращения³

$$f_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g_i \implies g_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$$

получаем

$$\hat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \quad \text{причём } \hat{S}(n, k)|_{k>n} = 0$$

Отображения $f : X_{|n|} \rightarrow Y_{|k|}$ “изоморфны” $\iff k$ -разделениям X (1.4), $|\{\mathcal{D}_k\}| = k^n$.

Сюръекции \iff упорядоченным k -разбиениям X (1.3), $|\{\mathcal{B}_k\}| = \hat{S}(n, k)$.

9 Разделения $\{a_i\}$

$$P(n; a_1, \dots, a_k) = \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \dots = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!} \quad a_i \geq 0, \quad a_1 + \dots + a_k = n$$

$$\begin{aligned} k^n &= \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_k = n, \\ a_i \geq 0}} \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!} \\ \hat{S}(n, k) &= \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_k = n, \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!} \end{aligned}$$



³Немного о формулах обращения, например, см. [здесь](#)