Решение задачи о назначениях Венгерским алгоритмов и симлекс-методом

Докладчик: Дыбко И. Е.

группа ФН2-41Б

14 сентября 2024 г.

Постановка задачи

Задача о назначениях

Имеется n работ и n исполнителей. Задана матрица стоимостей (размера $n \times n$) выполнения каждой работы тем или иным исполнителем. Необходимо распределить исполнителей по работам так, чтобы суммарная стоимость выполнения была минимальной.

Входные данные: матрица стоимостей.

Выходные данные: номера исполнителей для работ с номерами от 1 до n.

Постановка задачи

Пусть c_{ij} — стоимость назначения работника i на задачу j.

Целевая функция

$$\text{минимизировать } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

Ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$$

где $x_{ij} = 1$, если работник i назначен на задачу j, и 0 в противном случае.

Потенциалы строк и столбцов

Пусть $A[1 \dots n][1 \dots n]$ — матрица стоимостей

Два произвольных масива чисел $u[1 \dots n]$ и $v[1 \dots n]$ будем называть **потенциалом**, если выполняется следуюущее неравенство:

$$u[i] + v[j] \leq A[i][j]. \qquad \forall i, j \in [1 \dots n]$$

Назовем ребро (i, j) **жестким**, если верно:

$$u[i] + v[j] = A[i][j].$$

Формулировка задачи в терминах двудольного графа

Пусть H — двудольный граф, составленный только из жёстких рёбер, а M — максимальное по количеству рёбер паросочетание графа H.

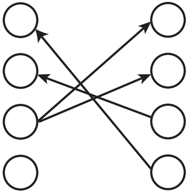

Рис. Граф

Дополняющий путь — путь нечетной длины в котором рёбра поочередно принадлежат/не принадлежат паросочетанию и оба конца не принадлежат паросочетанию.

Теорема Бержа

Паросочетание M в двудольном графе H является максимальным тогда и только тогда, когда в H нет дополняющего пути.

Пересчет потенциала

Пусть L и R — посещенные вершины левой и правой доли соответсвенно.

$$\Delta = \min_{i \in L, j \notin R} \{A[i][j] - u[i] - v[j]\}.$$

Правило пересчета

$$u[i] = u[i] + \Delta, \quad i \in L;$$
$$v[j] = v[j] - \Delta, \quad j \in R.$$

После перечета:

- потенциал останется корректным;
- достижимые вершины остануться достижимыми;
- количество достижимых вершин строго увеличиться.

Стандартная форма линейных оптимизационных моделей

При стандартной форме линейной модели:

- все ограничения должны быть записаны в виде равенств с неотрицательной правой частью;
- значения всех переменных модели неотрицательны;
- целевая функция подлежит максимизации или минимизации.

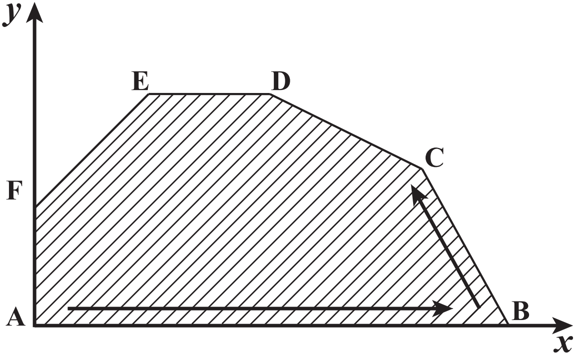

Рис. Пространство решений для задачи с двумя переменными

Пространство решений для задачи с n переменными

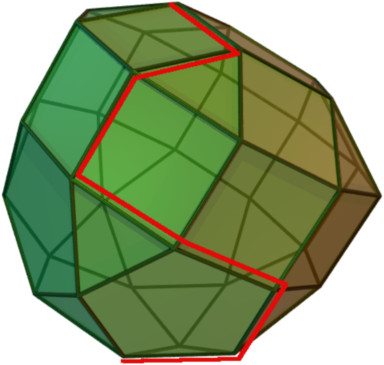

Рис. Пространство решений для задачи с n переменными

Источник: Simplex algorithm // Wikipedia URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm

Симплекс-таблица

Таблица Симплекс-таблица

Базисные переменные	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b	Отношение
z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	—
x_{e_1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	$\frac{b_1}{a_{12}}$
x_{e_2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	$\frac{b_2}{a_{22}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{e_m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	$\frac{b_m}{a_{m2}}$
Δ	Δ_1	Δ_2	$\ddots$	Δ_n	—	—

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ij} - c_i$$

Эмпирический анализ времени выполнения

Таблица Сравнение времени работы алгоритмов

Размер матрицы	**Венгерский алгоритм (с)**	**Симплекс-метод (с)**
32×32	<0.01	9.24
64×64	<0.01	15.68
128×128	<0.01	33.51
256×256	0.02	1020.01

Таблица Венгерский алгоритм

Размер матрицы	**Венгерский алгоритм (с)**
400×400	0.09
800×800	1.71
1600×1600	9.41
3200×3200	58.95

Таблица Симплекс-метод

Размер матрицы	**Симплекс-метод (с)**
50×50	0.33
75×75	2.13
112×112	10.98
168×168	89.11