Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №2

на тему:

"Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений"

Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	И. Е. Дыбко (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	С. И. Тихомиров (И. О. Фамилия)
Проверил		(Подпись, дата)	А. О. Гусев (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Описание использованных алгоритмов

1.1. Метод простой итерации

1.2. Метод Якоби

1.3. Метод Зейделя и релаксации

2. Ответы на контрольные вопросы

1. Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?

Рассмотрим СЛАУ вида

$$Ax = b,$$

где A — матрица системы размером $n \times n$, $\det A \neq 0$, b — вектор правой части. Преобразуем эту систему к виду

$$x = Cx + y, \tag{1}$$

где C— квадратная матрица размера $n \times n$, y — вектор-столбец. Запишем рекурентное соотношение:

$$x^{k+1} = Cx^k + y, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Вычтем из системы (1) систему (2), получим

$$x - x^{k+1} = C(x - x^k).$$

Найдем норму данного выражения

$$\|x - x^{k+1}\| = \|C(x - x^k)\| \leq \|C\|\|x^k - x\|.$$

Перейдем от k-той итерации к нулевой

$$\|x - x^k\| \leq \|C\|\|x - x^{k-1}\| \leq \|C\|^2\|x - x^{k-2}\| \leq \ldots \leq \|C\|^k\|x - x^0\|.$$

Если $\|C\| < 1$, то $\|C\|^k \to 0 \Rightarrow \|C\|^k\|x - x^0\| \to 0$, при $k \to \infty$, т.е. итерационный метод сходится.

2. Каким следует выбирать интерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?

В методе простой итерации параметр τ влияет на скорость сходимости. Чтобы его оптимально выбрать, он должен минимизировать норму итерационной матрицы $\|C\|$. Обычно, для систем с матрицей имеющей диагональное преобладание выбирают $|\tau|$ в пределах от 0 до 2. Оптимальный τ можно оценить через спектральный радиус матрицы. В случае систем с симметричной положительно определенной матрицей τ находят из выражения

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}},$$

где $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ — наибольшее и наименьшее по модулю собственные значения матрицы системы. При этом не обязательно находить точные собственные значений, а можно найти их оценки сверху и снизу (например, по теоремам Гершгорина). Из оценки вида $a \leq \lambda_{min} < \lambda_{max} \leq b$ получим, что значение τ находится из выражения

$$\tau = \frac{2}{a + b},$$

а при оценке вида $\lambda_{max} \leq b$ значение τ будет находится как

$$\tau = \frac{1}{b}.$$

Начальное приближение x^0 можно выбирать произвольно, но для лучшей сходимости стоит выбрать x^0, которое ближе всего к истинному решению. Если дополнительная информация о решении отсутствует, начальным приближением берется нулевой вектор.

3. На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

Решение системы двух линейных уравнений можно интерпретировать как задачу поиска точки пересечения двух прямых на плоскости.

1) **Метод Якоби:** каждое уравнение представляет собой прямую на плоскости x_1, x_2:

$$\alpha_{11}x_1^{k+1} + \alpha_{12}x_2^k = f_1;$$
$$\alpha_{21}x_1^k + \alpha_{22}x_2^{k+1} = f_2.$$

Метод Якоби заключается в том, что на каждом шаге новое значение x_1 и x_2 вычисляется с учетом значений предыдущей итерации, т.е. происходит попеременное пересечение линий в разных точках на плоскости (Рис. 1).

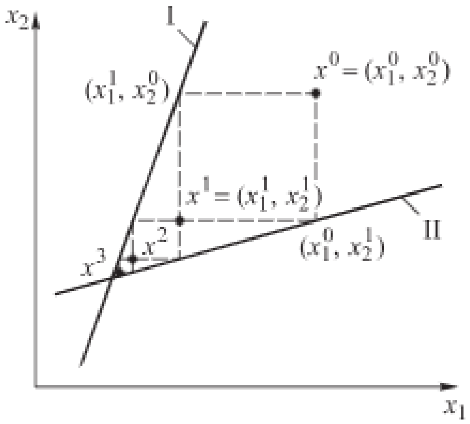


Рис. 1. Геометричекая интерпритация метода Якоби

2) **Метод Зейделя:** это модификация метода Якоби, но на каждом шаге новое значение x_1 сразу используется для вычисления x_2.

$$\alpha_{11}x_1^{k+1} + \alpha_{12}x_2^{k} = f_1;$$
$$\alpha_{21}x_1^{k+1} + \alpha_{22}x_2^{k+1} = f_2.$$

Это приводит к тому, что каждое новое приближение используется как можно раньше, что геометрически можно интерпретировать как более быстрое "движение"по направлениям линий системы (Рис.2).

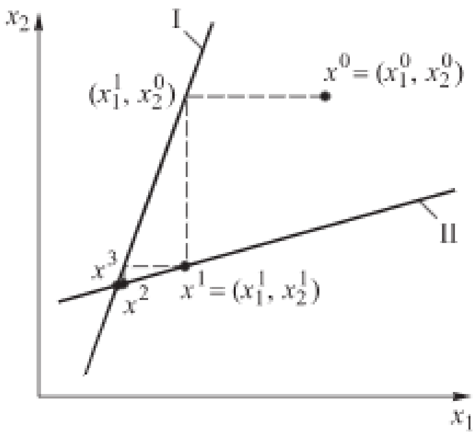


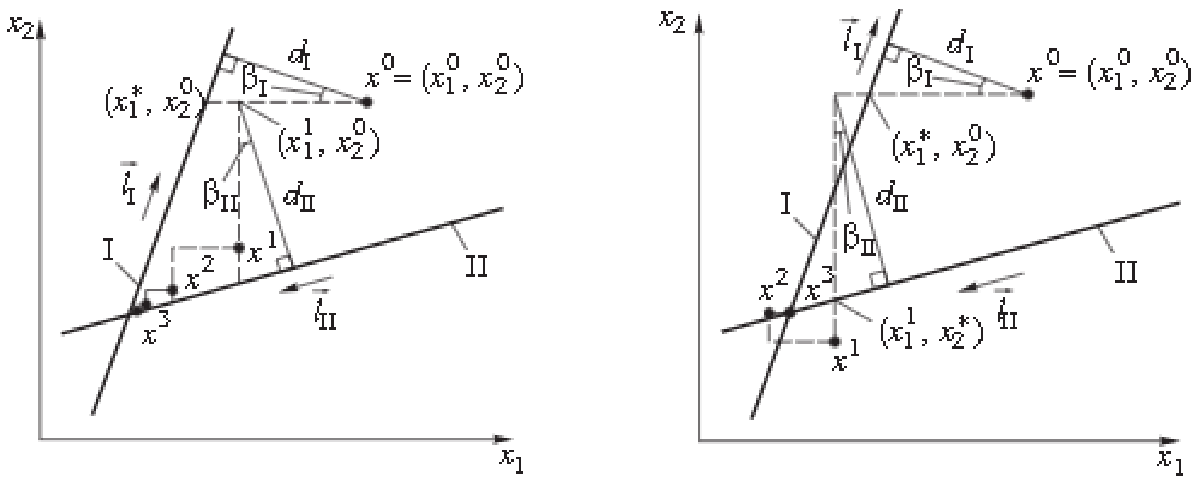
Рис. 2. Геометричекая интерпритация метода Зейделя

3) **Метод релаксации:** вводится параметр ω (релаксационный множитель), ко-

торый корректирует скорость изменений приближений.

$$\alpha_{11}(x_1^{k+1} - x_1 k) = \omega(-\alpha_{11} x_1^k - \alpha_{12} x_2^k + f_1);$$
$$\alpha_{22}(x_2^{k+1} - x_2 k) = \omega(-\alpha_{21} x_1^k - \alpha_{22} x_2^k + f_2).$$

Геометрически это можно интерпретировать как сглаживание процесса сходимости, позволяющее пересекать линии системы более гибко (например, медленнее или быстрее в зависимости от выбора ω (рис.3)).



(a) (b)

Рис. 3. Геометрическая интерпритация метода релаксации при $\omega < 1$(a) и $\omega > 1$(b)

4. При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

Положительно определенной называют симметричную матрицу A, для которой выполняется условие $x^T A x > 0$ для всех ненулевых векторов x.

Метод простой итерации сходится, если $\|C\| < 1$ (достаточное условие). Для этого обычно требуется, чтобы спектральный радиус матрицы A был меньше 1 при правильно выбранном τ.

Метод Якоби сходится, если матрица системы является матрицей с диагональным преобладанием, т.е.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

что гарантирует сходимость по нормам.

Метод Зейделя сходится при тех же условиях, что и метод Якоби, но часто обладает лучшими свойствами сходимости благодаря более быстрой обработке обновленных значений. Также, если матрица системы симметричная, положительно определенная, то метод сходится всегда.

Метод релаксации сходится если матрица системы симметричная и положительно определенная, а релаксационный параметр ω выбран правильно. Метод сходится при $0 < \omega < 2$, причём при $\omega = 1$ метод становится эквивалентен методу Зейделя.

5. Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Каноническая форма метода релаксации:

$$(D + \omega L)\frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = f,$$

где $A = L + D + U$, где L — нижнетреугольная матрица, D — диагональная матрица, U — верхнетреугольная матрица.

$$x^{k+1} = \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1}\left(\frac{D}{\omega} + L - A\right)x^k + \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} f.$$

Для метода релаксации матрица C будет иметь вид:

$$C = \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1}\left(D\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) - U\right).$$

Для метода Зейделя($\omega = 1$):

$$C = -(D + L)^{-1}U.$$

6. Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$?

Этот критерий не всегда гарантирует, что решение близко к истинному. Разница между последовательными приближениями может стать малой, но это не обязательно означает близость решения к истинному. Это особенно важно в случаях медленной сходимости или остановки метода на плато.

7. Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

Если метод сходится очень медленно, то часто применим критерий невязки:

$$\|Ax^n - f\| \leq \varepsilon;$$

$$\frac{\|Ax^n - f\|}{\|Ax^0 - f\|} \leq \varepsilon.$$

Данные критерии не являются точными, т.к. в общем случае из малости величины невязок не следует малость ошибки. Неточность этих критериев будет тем больше, чем больше обусловленность матрицы A.Число обусловленности матрицы важно учитывать при использовании критерия остановки по невязке, так как оно определяет, насколько надёжно уменьшение невязки отражает реальное приближение к точному решению. При плохо обусловленных системах невязка может вводить в заблуждение, и нужно рассматривать дополнительные факторы или корректировать критерии остановки.

В случае, если очередное приближение $x^k = 0$, то применимы следующие критерии:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon\|x^k\| + \varepsilon_0;$$
$$\left\| \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\| + \varepsilon_0} \right\| \leq \varepsilon,$$

где ε_0 — техническая константа, обеспечивающая отсутствие деления на нуль или продолжение итераций.

Эти методы оперируют не нормой погрешности численного решения, а нормами его изменения за одну итерацию. Иногда это может привести к неверному заключению о сходимости метода

Основное преимущество этих методов заключается в том, что для них не нужно вычислять матрицу C, что достаточно трудоёмко.

3. Ответы на дополнительные вопросы

Сформулировать теорему о сжимающем отображении.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $g : X \to X$ называют сжимающим в том случае, если

$$\exists\alpha \in (0, 1) : \forall x, y \in X : \ \rho(g(x), g(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$$

.

Теорема. Всякое сжимающее отображение $g : X \to X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) имеет, и притом единственную, неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in X$, что $g(x) = x$.

Сформулировать условие сходимости двухслойного итерационного метода общего вида.

Теорема. Пусть A — симметричная положительно определенная матрица, $\tau > 0$ и выполненно неравенство

$$B - 0,5\tau A > 0$$

Тогда стационарный итерационный метод

$$B\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = f$$

сходится.

Как связана скорость сходимости метода простой итерации с числом обусловленности матрицы A, если A — симметричная?

Для симметричной матрицы A и $\tau_0 = \dfrac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$ справедливо равенство

$$\|E - \tau_0 A\| = \rho_0$$

где $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \dfrac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$