Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №3

на тему:

"Решение задач интерполирования"

Студент ФН2-51Б (Группа) _______ (Подпись, дата) И. Е. Дыбко (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-51Б (Группа) _______ (Подпись, дата) С. И. Тихомиров (И. О. Фамилия)

Проверил _______ (Подпись, дата) А. О. Гусев (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Описание использованных алгоритмов

1.1. Интерполирование многочленами Лагранжа

1.2. Интерполирование кубическими сплайнами

2. Ответы на контрольные вопросы

1) **Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n.**

   Инетрполяционный полином $L_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{i=0\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

   Посчитаем количество операций для нахождения одного элемента суммы ряда. Для вычисления числителя и знаменателя в произведении ряда производится $2 \cdot (n-1)$, также $n-1$ операций деления и $n-1$ операций умножения, далее производим умножение на f_k и суммирование n элементов n раз.

$$\sum = n \cdot (4 \cdot (n-1) + 1) + n = 4n^2 - 2n = O(n^2)$$

2) **Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n.**

Пусть имеются точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$, а также значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ Найдем функцию $S_3(x)$, представляющую собой многочлен третьей степени на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $h_i = x_i - x_{i-1}$:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

Зададим граничные условия, а также потребуем непрерывность первой и второй производных во внутренней сетки сплайна:

$$\begin{aligned} S_3(x_{i-1}) &= y_{i-1} = a_i; \\ S_3(x_i) &= y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3; \\ S_3' &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2; \\ S_3'' &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Непрерывность производных означает, что:

$$\begin{aligned} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1}; \\ 2c_i + 6d_i h_i &= 2c_{i+1} \quad i = 1, \ldots n-2. \end{aligned}$$

В результате получено $2n + 2(n-2) = 4n - 4$ уравнений для $4n$ неизвестных. Еще два уравнения можно записать, полагая производную S_3'' равной нулю в точках $x = x_0 = a$ и $x = x_{n-1} = b$:

$$2c_1 = 0; \qquad 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0$$

(или пологая формально $c_{n+1} = 0$).

Для получения расчетных соотношений приведем рассматриваемую систему уравнений к удобному виду, исключив a_i, b_i, d_i:

$$d_n = -\frac{c_n}{3h_n}; \qquad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i};$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1} - c_i)h_i}{3}; \qquad b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - c_n h_n - \frac{(c_{n+1} - c_n)h_n}{3};$$

Таким образом имеем трехдиагональную СЛАУ со строгим диагональным преобладанием:

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\dfrac{g_i - g_{i-1}}{h_i}, \quad i = 2, \ldots, n-1 \\ c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

где $g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$.

Для решения данной СЛАУ размера $(n-1)\times(n-1)$ методом прогонки потребуется $5(n-1)-4$ операций. Для вычисления g_i понадобится $(n-1)$ операции, для вычисления h_i понадобится $n-1$ операции. Для вычисления правой части СЛАУ потребуется $n-1$ операции.

Далее высчитаем коэффициенты b_i и d_i. Для этого понадобится $3(n-1)$ и $2(n-1)$ операций соответственно. На вычисление значения самого сплайна уйдет еще 8 операций. Итого, количество операций для вычислений значения сплайна в точке x_i равно:

$$5(n-1)-4+(n-1)+(n-1)+(n-1)+3(n-1)+2(n-1)+8 = 13n-9 = O(n)$$

3) **Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0,2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,2$.Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2,2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.**

Для начала построим многочлен Лагрнажа:

$$L_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} f(x_i) \prod_{i=0, i\neq k}^{10} \frac{x-x_k}{x_k-x_i}$$

$$\begin{aligned}L_{10}(x) = 7,6167\cdot 10^{-7}\cdot x^{10} + 2,5376\cdot 10^{-8}\cdot x^9 + 3,2905\cdot 10^{-5}\cdot x^8 + \\ + 0,000183677\cdot x^7 + 0,00140624\cdot x^6 + 0,00831992\cdot x^5 + \\ + 0,0416734\cdot x^4 + 0,166665\cdot x^3 + 0,5\cdot x^2 + 1\cdot x + 1\end{aligned}$$

Теперь подставим точку $x = 2,2$:

$$L_{10}(2,2) = 9.02501$$

Посчитаем погрешность:

$$|L_{10}(2,2) - e^{2,2}| = 6.26633\cdot 10^{-8}$$

Посчитаем погрешность по формуле для экстраполяции:

$$\forall x \in [b, b+h]: \quad |y(x) - L_{10}(x^*)| \leq h^{n+1} \max |y^{(n+1)}(\xi)|$$

Для $x^* = 2,2$:

$$|e^{2,2} - L_{10}(2,2)| \leq 0,2^{11}\cdot e^2 \approx 1,51328\cdot 10^{-7}$$

4) **Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.**

Пусть имеются точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$, а также значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ Найдем функцию $S_3(x)$, представляющую собой многочлен третьей степени на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $h_i = x_i - x_{i-1}$:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

Зададим граничные условия, а также потребуем непрерывность первой и второй производных во внутренней сетки сплайна:

$$\begin{aligned}
S_3(x_{i-1}) &= y_{i-1} = a_i;\\
S_3(x_i) &= y_i = a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3;\\
S_3' &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2;\\
S_3'' &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Непрерывность производных означает, что:

$$\begin{aligned}
b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 &= b_{i+1};\\
2c_i + 6d_ih_i &= 2c_{i+1} \quad i = 1, \ldots n-2.
\end{aligned}$$

В результате получено $2n + 2(n-1) = 4n - 2$ уравнений для $4n$ неизвестных. Еще два уравнения можно записать, полагая производную S_3' равной $y'(x_0)$ в точке $x = x_0 = a$ и $y'(x_n)$ в точке $x = x_n = b$:

$$S'(x_0) = y'(x_0) = b_1; \qquad S_3'(x_n) = y'(x_n) = b_n + 2c_2h_n + 3d_ih_n^2$$

(или пологая формально $c_{n+1} = 0$).

Для получения расчетных соотношений приведем рассматриваемую систему уравнений к удобному виду, исключив a_i, b_i, d_i:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i};$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_ih_i - \frac{(c_{i+1} - c_i)h_i}{3} = g_i - c_ih_i - \frac{(c_{i+1} - c_i)h_i}{3};$$

Подставим коэффициенты в выражение первой производной:

$$b_1 = y'(x_0) = g_1 - c_1h_1 - \frac{(c_2 - c_1)h_1}{3}$$

$$y'(x_n) = g_n - c_nh_n - \frac{(c_{n+1} - c_n)h_n}{3} + 2c_2h_n + 3\frac{c_{n+1} - c_n}{3h_n}h_n^2$$

Выразим из первого выражения c_1 и c_n из второго:

$$c_1 = -\frac{c_2}{2} + \frac{3(g_1 - y'(x_0))}{2h_1}$$

$$c_n = -\frac{c_{n+1}}{2} + \frac{3(y'(x_n) - g_n)}{2h_n}$$

Таким образом система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{c_2}{2} + \dfrac{3(g_1 - y'(x_0))}{2h_1}; \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\dfrac{g_i - g_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \ldots, n \\ c_n = -\dfrac{c_{n+1}}{2} + \dfrac{3(y'(x_n) - g_n)}{2h_n}. \end{cases}$$

где $g_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$.

5) **Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?**

Интерполяция многочленом Лагранжа.

Достоинства:

(a) наличие непрерывных производных высоких порядков;

(b) функция легко описывается на всей сетке (число вычисляемых коэффициентов соответствующих многочленов для сетки: $n + 1$.

(c) построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка.

Недостатки:

(a) с увеличением числа узлов в сетке увеличивается и степень полинома, что при большом числе узлов сильно увеличивает завтраты на их вычисление;

(b) чувствителен к узлам сетки(изменение хотя бы одного узла или увеличение их числа требует полного перерасчета коэффициентов полинома).

(c) склонны осциллировать в окрестностях точки, существенно отличающейся от своих соседей.

Сплайн-интерполяция.

Достоинства:

(a) локальность: изменение в одном узле не влияет на остальные;

(b) заданным массивом построенная функция определена однозначно.

Недостатки:

(a) нельзя использовать для экстраполяции;

6) **Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?**

Многочленом Чебышева называется многочлен $T_n(x)$ степени $n \geq 0$, такой что

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ при } n > 0$$

Свойства:

(a) $T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad |x| \leq 1;$

(b) Если степень n многочлена четная, тогда $T_n(x)$ — четная функция, если n — нечетная, то $T_n(x)$ — нечетная функция.

(c) Многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ имеет старший коэффициент 2^{n-1} $\forall n > 0$;

(d) Если отобразить многочлен Чебышева на произвольный отрезок $[a, b]$, то полученный многочлен будет иметь вид:

$$T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos((n+1) \arccos \frac{2x-(b-a)}{b-a})$$

Корни этого многочлена задаются соотношением

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

и являются узлами интерполяции.

3. Ответы на дополнительные вопросы

1) **Число арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом в форме Ньютона.**

Интерполяционный полином в форме Ньютона имеет следующий вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

Также разделенная разность n-го порядка имеет вид:

$$f(x_0, \ldots, x_{k+1}) = \frac{f(x_2, \ldots, x_{k+1}) - f(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1} - x_1}$$

Для вычисления одной разделенной разности требуется одна операция деления. Для n узлов интерполяции вычисляется $\dfrac{n(n-1)}{2}$ разделенных разностей.

Для вычисления одного слогаемого интерполяционного полинома потребуется еще $(n-1)+1=n$ мультипликативных операций. Значит для вычисления всех слогаемых полинома потребуется также $\dfrac{n(n-1)}{2}$ мультипликативных операций.

Суммируя все операции получим оценку $O(n^2)$.

2) **Физический смысл сплайн-интерполяции. Почему сплайн называется естественным?**

Кубический сплайн называют также естественным или чертежным сплайном, поскольку происходит от следующего чертежного приема. Кривая строится по гибкой металлической линейке, которая проходит через заданные точки. Приложенная линейка принимает форму,соответствующую минимуму упругой энергии:

$$\int_a^b (u'')^2 dx \to \min .$$

Отсюда получается уравнение Эйлера $n^{(4)} = 0$. Его решение $u(x)$ есть многочлен третьей степени на каждом интервале сетки. В узлах сетки должны быть непрерывны решение и его производные u' и u''.

3) **Связь тригонометрической и полиномиальной интерполяции. Как связаны тригонометрический полином на равномерной сетке и полином Лагранжа на чебышевской сетке? Ответ обосновать.**

Тригонометрической называется интерполяция функциями вида:

$$Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{b-a}$$

Такие полиномы совпадают с переодическими функциями (период $L = b - a$) в точках равномерной сетки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < b$
$(Q_n(x) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, 2n)$.

Сопоставление условий, из которых определяются коэффициенты тригонометрического полинома, и его функционального вида позволяет записать полином в аналитическом виде (аналогично полиному Лагранжа):

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) q_k^n(x),$$

где $q_k^n(x)$— базисный тригонометрический полином:

$$q_k^n(x) = \prod_{i=0\ i\neq 0}^{2n} \frac{\sin(0.5\omega(x - x_i))}{\sin(0.5\omega(x_k - x_i))}$$

При замене x на φ по правилу

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\varphi$$

происходит преобразование равномерной сетки переменной φ в чебышевскую сетку переменной x. При этом тригонометрический полином переменной φ становится обычным полиномом переменной x.

4. Результаты интерполирования. Нормы ошибок и графики интерполянтов.

4.1. Функции $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$

Таблица 1. Сравнение норм ошибок интерполяции Лагранжа функции $f(x) = 1$ на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4,8,16,32,64,128	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$

Линейная функция

Полиномиальная интерполяция

Таблица 2. Сравнение норм ошибок интерполяции Лагранжа функции $f(x) = x$ на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4,8,16,32,64,128	$< 10^{-18}$	$1.1102 \cdot 10^{-16}$

Сплайн-интерполяция

Таблица 3. Сравнение норм ошибок сплайн-интерполяции функции $f(x) = x$ на разных сетках.

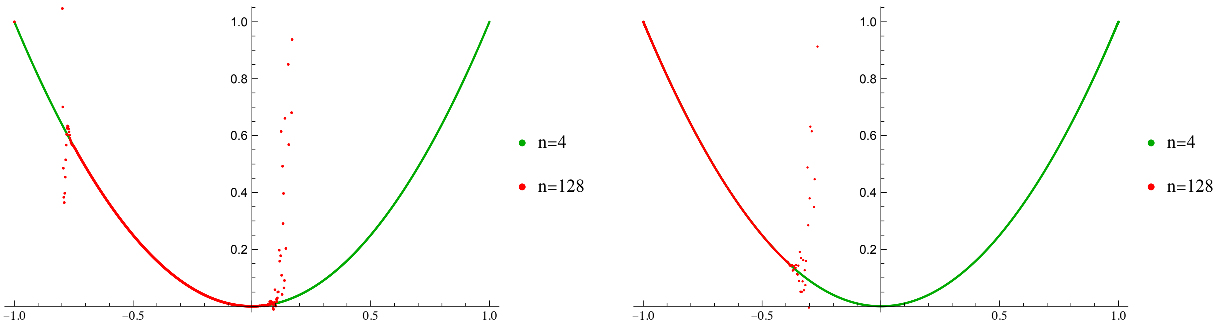
Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4	$< 10^{-18}$	$2.7756 \cdot 10^{-17}$
8	$< 10^{-18}$	$2.7756 \cdot 10^{-17}$
16	$< 10^{-18}$	$1.3878 \cdot 10^{-17}$
32	$< 10^{-18}$	$3.4694 \cdot 10^{-17}$
64	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$
128	$< 10^{-18}$	$< 10^{-18}$

Квадратичная функция

Полиномиальная интерполяция

Таблица 4. Сравнение норм ошибок интерполяции Лагранжа функции $f(x) = x^2$ на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4	$6.6613 \cdot 10^{-16}$	$2.22045 \cdot 10^{-16}$
8	$6.66134 \cdot 10^{-16}$	$6.66134 \cdot 10^{-16}$
16	$6.66134 \cdot 10^{-16}$	$8.88178 \cdot 10^{-16}$
32	$6.72329 \cdot 10^{-12}$	$1.55431 \cdot 10^{-15}$
64	$5.58926 \cdot 10^{-3}$	$4.31434 \cdot 10^{-5}$
128	$2.30737 \cdot 10^{25}$	$3.42484 \cdot 10^{27}$



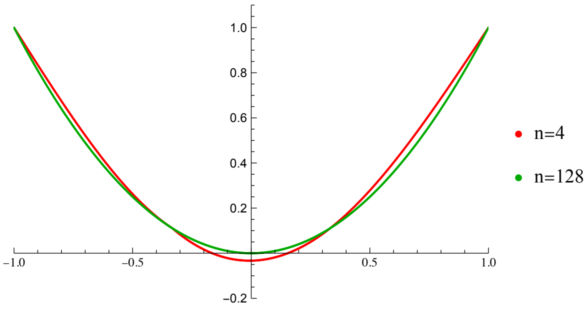
(a) Равномерная сетка (b) Чебышевская сетка

Рис. 1. График интерполянтов функции $f(x) = x^2$ на разных сетках

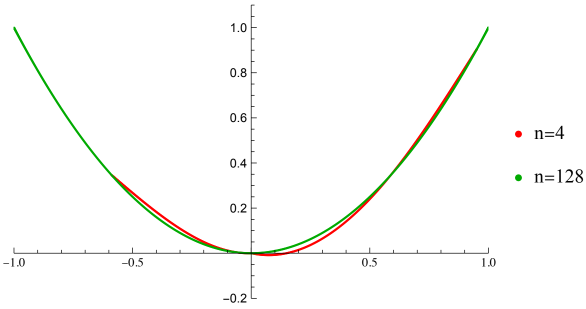
Сплайн-интерполяция

Таблица 5. Сравнение норм ошибок сплайн-интерполяции функции $f(x) = x^2$ на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4	$5.0164 \cdot 10^{-2}$	$2.6012 \cdot 10^{-2}$
8	$8.0191 \cdot 10^{-3}$	$4.1582 \cdot 10^{-3}$
16	$1.7452 \cdot 10^{-3}$	$4.8064 \cdot 10^{-4}$
32	$4.0853 \cdot 10^{-4}$	$3.5145 \cdot 10^{-5}$
64	$9.8949 \cdot 10^{-5}$	$2.4648 \cdot 10^{-6}$
128	$2.4349 \cdot 10^{-5}$	$3.0689 \cdot 10^{-7}$



(a) Равномерная сетка



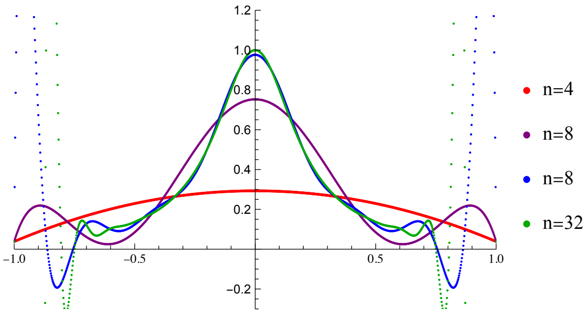
(b) Чебышевская сетка

Рис. 2. График интерполянтов функции $f(x) = x^2$ на разных сетках

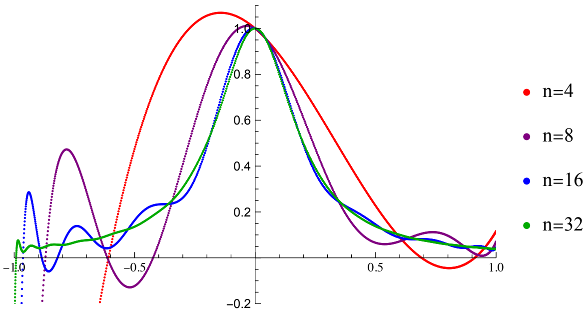
4.2. Функция Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

Таблица 6. Сравнение нормы ошибок интерполяции Лагранжа функции Рунге на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4	0.706989	3.34204
8	0.247338	4.46366
16	2.10686	3.18852
32	704.076	0.499953



(a) Равномерная сетка

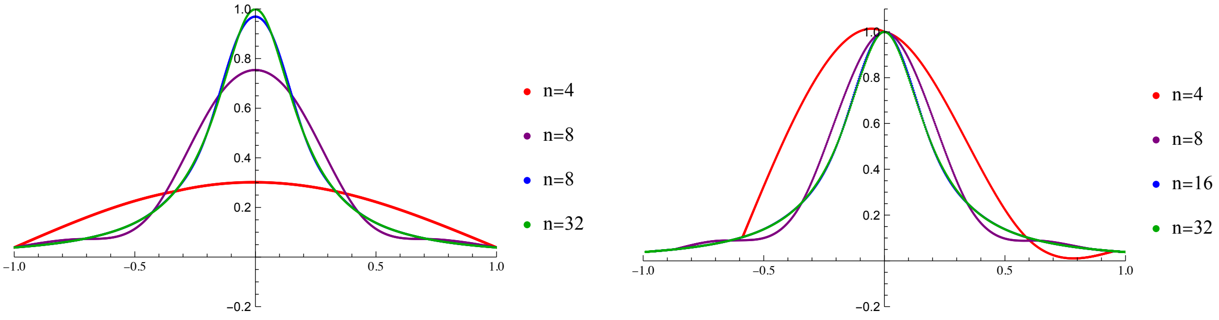


(b) Чебышевская сетка

Рис. 3. График интерполянтов в форме Ньютона функции Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на разных сетках

Таблица 7. Сравнение нормы ошибок сплайн-интерполяции функции Рунге на разных сетках.

Количество узлов n	**Норма ошибки интерполяции на равномерной сетке**	**Норма ошибки интерполяции на Чебышевской сетке**
4	$6.98586 \cdot 10^{-1}$	$4.64778 \cdot 10^{-1}$
8	$2.46032 \cdot 10^{-1}$	$1.32281 \cdot 10^{-1}$
16	$3.08813 \cdot 10^{-2}$	$1.32612 \cdot 10^{-2}$
32	$1.31272 \cdot 10^{-3}$	$2.56246 \cdot 10^{-3}$



(a) Равномерная сетка (b) Чебышевская сетка

Рис. 4. График сплайн-интерполянтов функции Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на разных сетках

4.3. Исследование скорости сходимости функции $f(x) = \sin \pi x$

Таблица 8. Оценка скорости сходимости интерполяции Лагранжа функции $f(x) = \sin \pi x$ на равномерной сетке.

n	**Шаг сетки** h_n	**Норма ошибки** err_n	**Отношение ошибок** z_n	**Порядок сходимости** p_n
8	0.25	$1.6956 \cdot 10^{-3}$	–	–
16	0.125	$9.2161 \cdot 10^{-10}$	$5.4352 \cdot 10^{-7}$	20.8112
32	0.0625	$4.8254 \cdot 10^{-11}$	$5.2359 \cdot 10^{-2}$	4.25542
64	0.03125	$1.5932 \cdot 10^{-1}$	$3.3018 \cdot 10^{9}$	-31.6206
128	0.015625	$1.1578 \cdot 10^{27}$	$7.2668 \cdot 10^{27}$	-92.5534

Таблица 9. Оценка скорости сходимости интерполяции Лагранжа функции $f(x) = \sin \pi x$ на Чебышевской сетке.

n	**Шаг сетки** h_n	**Норма ошибки** err_n	**Отношение ошибок** z_n	**Порядок сходимости** p_n
8	0.25	$2.6112 \cdot 10^{-4}$	–	–
16	0.125	$1.0724 \cdot 10^{-11}$	$4.1069 \cdot 10^{-8}$	24.5374
32	0.0625	$2.2435 \cdot 10^{-14}$	$2.0920 \cdot 10^{-3}$	8.9009
64	0.03125	$1.7661 \cdot 10^{-4}$	$7.8723 \cdot 10^{9}$	−32.8741
128	0.015625	$1.4265 \cdot 10^{29}$	$8.0771 \cdot 10^{32}$	−109.316

Таблица 10. Оценка скорости сходимости сплайн-интерполяции функции $f(x) = \sin \pi x$ на отрезке $[-1, 1]$.

n	**Шаг сетки** h_n	**Норма ошибки** err_n	**Отношение ошибок** z_n	**Порядок сходимости** p_n
8	0.25	$2.90482 \cdot 10^{-3}$	–	–
16	0.125	$1.58469 \cdot 10^{-4}$	$5.45539 \cdot 10^{-2}$	4.19617
32	0.0625	$9.0036 \cdot 10^{-6}$	$5.68161 \cdot 10^{-2}$	4.13756
64	0.03125	$5.34353 \cdot 10^{-7}$	$5.93489 \cdot 10^{-2}$	4.07464
128	0.015625	$3.21458 \cdot 10^{-8}$	$6.01583 \cdot 10^{-2}$	4.05509

Таблица 11. Оценка скорости сходимости сплайн-интерполяции функции $f(x) = \sin \pi x$ на отрезке $[-1.25, 1.25]$.

n	**Шаг сетки** h_n	**Норма ошибки** err_n	**Отношение ошибок** z_n	**Порядок сходимости** p_n
8	0.25	$5.0282 \cdot 10^{-2}$	–	–
16	0.125	$9.8184 \cdot 10^{-3}$	$1.9526 \cdot 10^{-1}$	2.35648
32	0.0625	$2.2449 \cdot 10^{-3}$	$2.2865 \cdot 10^{-1}$	2.12878
64	0.03125	$5.4055 \cdot 10^{-4}$	$2.4078 \cdot 10^{-1}$	2.05419
128	0.015625	$1.3282 \cdot 10^{-4}$	$2.4572 \cdot 10^{-1}$	2.02491

Таблица 12. Сводная таблица оценки скорости сходимости функции $f(x) = \sin \pi x$.

Количество узлов n	**Порядок сходимости полинома Лагранжа**		**Порядок сходимости сплайна**	
	на равномерной сетке	**на чебышевской сетке**	**на отрезке** $[-1, 1]$	**на отрезке** $[-1.25, 1.25]$
8	–	–		
16	20.8112	24.5374	4.19617	2.35648
32	4.25542	8.9009	4.13756	2.12878
64	-31.6206	-32.8741	4.07464	2.05419
128	-92.5534	-109.316	4.05509	2.02491