

30 марта 2021 г.

Лабораторная работа №3

В данной лабораторной работе предлагается реализовать в виде алгоритма для ЭВМ разностные методы решения следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T; \\ u|_{t=0} &= f(x), \quad 0 < x < L, \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L; \\ u|_{x=0} &= \varphi(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u|_{x=L} = \psi(x), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

В дополнение к основным заданиям лабораторной работы предлагается решить следующие задачи.

Задача 1. Для уравнения колебаний $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ставится следующая начально-краевая задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad x \in [-2, 2], \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

— на концах отрезка $[-2, 2]$ задаются условия отражения, а начальный профиль задаётся следующим функциональным соотношением

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/3, 1/3], \\ 0, & x \notin [-1/3, 1/3]. \end{cases}$$

Рассчитайте задачу с числами Куранта $\gamma = 0.1, 0.5, 0.75, 1.0$. Рассмотрите различные варианты аппроксимации начальных условий:

- член f_{xx} вычисляется **точно** (на основе аналитического выражения для $f(x)$);
- член f_{xx} вычисляется по формулам второй разностной производной.

Предоставьте иллюстрации и объясните наблюдаемые эффекты.

Задача 2. То же — для следующей задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad x \in [-1, 1], \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

где на краях отрезка так же ставятся условия отражения, а начальное распределение скоростей задаётся следующей функцией:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & x \notin [-1/2, 1/2]. \end{cases}$$

Задача 3. То же — для задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad x \in [0, 4\pi], \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \sin t, \\ u(4\pi, t) &= 0. \end{aligned}$$