Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №4

на тему:

"Методы решения проблемы собственных значений"

Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	И. Е. Дыбко (И. О. Фамилия)
Студент	ФН2-51Б (Группа)	(Подпись, дата)	С. И. Тихомиров (И. О. Фамилия)
Проверил		(Подпись, дата)	К. А. Касьянова (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Описание использованных алгоритмов

1.1. Метод QR-разложения для поиска собственных значений

1.2. Метод обратных итераций и его модификации для нахождения собственных векторов

2. Ответы на контрольные вопросы

1) **Почему нельзя находить собственные числа матрицы A, прямо решая уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A - \lambda_j E)e_j = 0$?**
Нахождение собственных чисел через уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ является вычислительно сложной задачей, так как требует решения полиномиального уравнения степени n (где n — размер матрицы), а для больших n это может быть крайне трудоёмко и неустойчиво к ошибкам округления. Также аналитическое решение существует только для низких степеней полиномов. Определение собственных векторов через систему $(A - \lambda_j E)e_j = 0$ также невозможно.
2) **Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.**
Запишем ортогональное преобразование подобия

$$R = P^{-1}AP,$$

где P — ортогональная матрица, т.е. $P^{-1} = P^T$, A — симметричная матрица, т.е. $A = A^T$. Тогда

$$R^T = (P^{-1}AP)^T = (P^TAP)^T = P^TA^TP = P^TAP = R.$$

Получим, что:

$$R^T = R$$

3) **Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?**
Преобразование подобия сохраняет собственные значения, но собственные векторы могут изменяться. Они преобразуются в новые векторы, которые соответствуют той же линейной комбинации базисных векторов после применения преобразования.
Рассмотрим собстсенные вектора матрицы R:

$$R\xi_j = \lambda_j \xi_j.$$

Распишем преобразование подобия:

$$P^{-1}AP\xi_j = \lambda_j \xi_j,$$

$$A(P\xi_j) = \lambda_j (P\xi_j) \quad \Rightarrow \quad e_j = P\xi_j$$

То есть $e_j = P\xi_j$ — собственные вектора матрицы A, соответствующие набору собственных значений λ_j.

4) **Почему на практике матрицу А подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?**
Преобразование матрицы к форме Хессенберга, а не к треугольной форме требует большего количества вычислений (O(n^2) и O(n^3) арифметических операций) и менее устойчиво к ошибкам округления, что делает невозможным приведение матрицы к треугольному виду с сохранением подобия, т.е. с сохранением собственных значений матрицы.

5) **Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы A к форме Хессенберга.**
Так как в матрице Хессенберга все элементы ниже первой поддиагонали зануляются, то суммирование происходит до $n-3$. В каждом j-том столбце занулению подлежат элементы от $j+2$ до $n-1$.

$$\sum_{j=0}^{n-3} \sum_{i=j+2}^{n-1} (5 + 4(n-j) + 4n) \approx \frac{10}{3} n^3.$$

6) **Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взят собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?**

Метод обратной итерациии хадается следующим образом:

$$(A - \lambda_j^* E) y^{(k+1)} = x^{(k)} \tag{1}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|}$$

За $x^{(0)}$ берется любой нормированный вектор. Система собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.
Разложим вектора x и y по этому базису:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

Преобразуем систему:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^* \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j^*) \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

Выразим β_i:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_j^*}$$

Возьмем в качестве начального приближения возьмем собственный вектор e_k, соответсвтвующий другому собственному значению $\lambda_k (k \neq j)$.
Так как точное значение вектора e_k не известно, а известно только достаточно близкое значение e_k^*. Тогда разложение по базису вектора $x^{(0)}$ будет следующее:

$$x^{(0)} = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_i e_i + \ldots + \delta e_k + \varepsilon_n e_n,$$

где $|\varepsilon_j| \ll 1, \quad j = 1, \ldots, n, j \neq k, \delta \approx 1$. Решение будет следующее:

$$y^{(1)} = \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1 - \lambda_1^*} e_1 + \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2 - \lambda_2^*} e_2 + \ldots + \frac{\varepsilon_j}{\lambda_j - \lambda_j^*} e_j + \ldots + \frac{\delta}{\lambda_k - \lambda_j^*} e_k + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n - \lambda_j^*} e_n$$

Поскольку величина $|\lambda_j - \lambda_j^*| \ll 1$, то коэффициент разложения β_j при собственном векторе e_j, чем коэффициенты при других собственных векторах. При следующих итерациях нормировка вектора x приведет к сохранению соотношения между коэффициентами.
После нескольких итераций коэффициент β_j станет самым большим среди всех. и последовтельность векторов x^k сойдется к собственному вектору e_i.

7) **Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для QR-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.**

В результате выполнения метода QR-разложения получим последовательность матриц $\{A^{(k)}\}$, подобных матрице A. На каждой итерации подддиагональные элементы последней строки становятся близки к нулю и полученный элемент $a_{ii}^{(k)}$ можно принять за приблеженное значение собственного числа λ_i. Тогда критерий останова будет следующим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_{ni}^{(k)}| < \varepsilon.$$

8) **Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.**

Одним из условий перехода к QR-алгоритму со сдвигами может быть достижение малых вне диагональных элементов в Хессенберговой форме. Алгоритм выбора сдвига может основываться на величине последнего диагонального элемента или на наибольшем вне диагональном элементе. Один из популярных методов — использование значения последнего диагонального элемента для сдвига, известного как сдвиг Вилькинсона.

9) **Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?**

Если $|\lambda| > 1$, то последовательность норм векторов стремится к бесконечности, если $|\lambda| < 1$, то последовательность норм векторов стремится к нулю и возможно исчезновение порядка. Для предупреждения этих ситуаций вектор нормируют.

10) **Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.**

(a) Вычисление числа обусловленности матрицы:

$$M_A = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

(b) Выбор итерационных параметров итерационных методов:

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

(c) Оценка скорости сходимости итерационных методов:

$$\|E - \tau_0 A\| = \rho_0$$

где $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \dfrac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$

(d) Вычисление матричной нормы

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^T A)}$$

3. Ответы на дополнительные вопросы

1) **Приведите пример ортогональных преобразований.**

   Поворот в пространстве

   Поворот в двумерном пространстве вокруг начала координат можно записать как матрицу поворота:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   где θ — угол поворота. В трёхмерном пространстве можно также записать матрицу поворота вокруг одной из осей.

2) **Всегда ли можно составить из собственных векторов матрицы базис?**

   Если собственные векторы матрицы A образую базис, то она представима в виде:

$$A = PDP^{-1}$$

   где P — матрица, составленная из координат собственных векторов, D — диагональная матрица с соответствующими собственыыми значениями.

3) **Как понять в какой момент необходимо переходить к алгоритму со сдвигами? (Как в ходе вычислений определить, что отношение пары собственных значений близко к единице?) Как выбрать величину сдвига?**

   Элементы $a_{ij}^{(k)}$ матриц $A^{(k)}$, стоящие ниже главной диагонали, сходятся к нулю со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен модулю отношения соответствующей пары собственных значений, то есть

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| |a_{ij}^{(k-1)}|, \quad i > j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   При приближении отношения пары собственных значений к еденице следует переходить к алгоритму со сдвигами.

   Если среди собственных чисел матрицы A есть близкие по величине, то отношение пары их собственных значений будет близко к еденице.

   В качестве величины сдвига σ можно взять $a_{n,n}^{(k)}$. Когда в последней строке матрицы $A^{(k)}$ внедиагональные элементы станут близки к нулю, будем считать соответствующее собственное значение найденным с достаточной точностью и перейдем к задаче меньшей размерности для поиска остальных собственных значений.

4) **Почему у одной и той же матрицы норма собственного вектора может быть, как очень большой, так и очень маленькой?**

   Так собственные вектора определяются с точностью до константы, то значение его нормы может сильно варьироваться в зависимости от значения константы.