



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №1

на тему:

"Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений"

Студент _____ ФН2-61Б
(Группа)

(Подпись, дата)

И. Е. Дыбко
(И. О. Фамилия)

Студент _____ ФН2-61Б
(Группа)

(Подпись, дата)

С. И. Тихомиров
(И. О. Фамилия)

Проверил

(Подпись, дата)

К. А. Касьянова
(И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1.	Описание использованных алгоритмов	2
2.	Ответы на контрольные вопросы	2
3.	Ответы на дополнительные вопросы	5
4.	Оценка порядка аппроксимации методов	8
4.1.	Пример 1	9
4.2.	Пример 2	9
5.	Фазовые траектории систем и численное исследование их особых точек	10
5.1.	Гармонический осцилятор	10
5.2.	Модель Н.Н. Баутина химической реакции Белоусова — Жаботинского	11
5.3.	Модель Лотки-Вольтерры динамики системы «хищник-жертва» . . .	12
6.	Автоматический выбор шага	13

1. Описание использованных алгоритмов

2. Ответы на контрольные вопросы

1) Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ n -го порядка в форме, разрешенной относительно старшей производной:

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n_1)});$$

$$t = t_0 : u = u_0; u' = u'_0, \dots, u^{(n-1)} = u_0^{n-1}$$

где $u = u(t)$ — неизвестная функция; t — независимая переменная.

С помощью замены $u_k = u^{(k-1)}$, $k = \overline{1, n}$ задачу для ОДУ n -го порядка можно свести к системе из n ОДУ первого порядка:

$$u'_k(t) = u_{k+1}(t), k = \overline{1, n-1}; \quad u'_n(t) = f(t, u_1, \dots, u_n)$$

$$t = t_0 : u_k(t_0) = u_0^{(k-1)}, k = \overline{1, n}$$

Если выполнены следующие условия: 1.Пусть функция $f(t, u)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$D = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a; |u_i - u_{0,i}| \leq b, i = \overline{1, n}\}$$

В этом случае в прямоугольнике D все компоненты $|f_i| \leq M$.

2.Пусть функция $f(t, u)$ липшиц-непрерывна с постоянной L по переменным u_1, u_2, \dots, u_n

$$|f(t, u^{(1)}) - f(t, u^{(2)})| \leq L \sum_{i=1}^n |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}|$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши на участке

$$|t - t_0| \leq \bar{t} = \min\{a, b/M, 1/L\}.$$

- 2) **Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?**

Фазовое пространство — пространство, каждая точка которого соответствует одному и только одному состоянию из множества всех возможных состояний системы. Точка пространства, соответствующая состоянию системы, называется фазовой. Динамике системы можно сопоставить движение изображающей точки; траекторию этой точки называют фазовой траекторией, а скорость такой изображающей точки называют фазовой скоростью. Интегральной кривой называется график решения ДУ.

- 3) **Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?**

Явный метод Эйлера:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_0 = u_0.$$

$$\begin{aligned} \psi_h^{(1)} &= f(t_n, u_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(t_n, u_n) - \frac{1}{\tau}(u_n - u_n + u'_n \tau + O(\tau^2)) = \\ &= f(t_n, u_n) - u'_n + O(\tau) = O(\tau) \end{aligned}$$

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_0 = u_0.$$

$$\psi_h^{(1)} = O(\tau)$$

Симметричная схема:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = & \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} = & \frac{u'_n + u'_{n+1}}{2} - \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \\ \frac{1}{2} \left[u'_{n+1/2} - \frac{\tau}{2} u''_{n+1/2} + \frac{\tau^2}{8} u'''(\nu_1) + u'_{n+1/2} + \frac{\tau}{2} u''_{n+1/2} + \frac{\tau^2}{8} u'''(\nu_2) \right] - & \\ - \frac{1}{\tau} \left[u_{n+1/2} + \frac{\tau}{2} u'_{n+1/2} + \frac{\tau^2}{8} u''_{n+1/2} + \frac{\tau^3}{48} u'''(\nu_3) - u_{n+1/2} + \frac{\tau}{2} u'_{n+1/2} + \frac{\tau^2}{8} u''_{n+1/2} + \frac{\tau^3}{48} u'''(\nu_4) \right] = & \\ = O(\tau^2) \end{aligned}$$

- 4) **Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?**

Система ОДУ $u' = Au$ с постоянной матрицей $A = A_{m \times m}$ называется жесткой, если:

- 1) все собственные значения матрицы A имеют отрицательную действительную часть, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \lambda_i \in \sigma(A), i = \overline{1, m}$;
- 2) число S , называемое числом жесткости, велико:

$$S = \frac{\max |Re\lambda_k|}{\min |Re\lambda_k|}$$

Если матрица A не постоянна и $\lambda_k = \lambda_k(t)$, то вводят понятие числа жесткости системы ОДУ на временном интервале. В этом случае должно быть велико значение $\sup S(t)$.

Для решения жестких задач предпочтительны методы с возможностью изменять шаг τ в широком диапазоне без потери устойчивости, т.е. методы должны быть A -устойчивыми или $A(\alpha)$ -устойчивыми. Таким свойством обладают неявные методы. Так, например, явный метод Эйлера не подходит для жёстких задач, так как требует слишком малого шага времени для обеспечения устойчивости, а неявный метод Эйлера подходит, так как является неявным методом, обеспечивающим устойчивость, но может быть медленным из-за необходимости решать систему уравнений на каждом шаге; симметричная схема может использоваться, но её устойчивость зависит от конкретной задачи; метод Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков в явной форме не подходит для жёстких задач, так как также требуют малых шагов. Однако существуют специальные неявные методы Рунге-Кутты, предназначенные для жёстких задач.

- 5) **Как найти $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции (1.18)?** Для сохранения четвертого порядка точности необходимо использовать метод четвертого порядка точности и выше, например четырехстадийный метод Рунге-Кутты. Также в качестве начального приближения $y^{(0)}_{n+1}$ принимают значение, получаемое по формуле Адамса и выполняют только одну итерацию в методе простой итерации. В результате приходят к методу прогноза и коррекции.
- 6) **Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким?**
Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достичнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?
 Методы Эйлера имеют самую низкую точность, но просты в реализации и имеют высокую скорость поиска решений. Метод симметричной схемы имеет точность на порядок выше по сравнению с методами Эйлера, но является неявным. Метод прогноза-коррекции обладает таким же порядком точности, что и симметричная схема, но является явным. Явные t -стадийные методы Рунге-Кутты обладают достаточной точностью и имеют возможность применения переменного шага, но может быть сложным в расчетах из-за функции $f(t, u)$ в правой части.
- 7) **Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?**
 Для оценки погрешности используют такие формулы Рунге-Кутты, которые позволяли бы вычислить вместе с означением приближенного решения y_{n+1} более точное (более высокого порядка) приближение \hat{y}_{n+1} , затратив при этом минимальные вычислительные ресурсы. Этого можно добиться, если использовать пару методов Рунге-Кутты, внутренние стадии которых совпадают (по крайней мере, частично). Такие методы получили название вложенных методов Рунге — Кутты порядка $p(q)$. Например, метод Фельдберга порядка 2(3).

3. Ответы на дополнительные вопросы

- 1) **В чем смысл липшицевой непрерывности? Привести пример липшиц непрерывной функции и изобразить ее график**
 Запишем условие липшицевой непрерывности:

$$|f(t, u^{(1)}) - f(t, u^{(2)})| \leq L \sum_{i=1}^n |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}|$$

Это значит, что функция не может изменяться слишком быстро, и её график будет ограничен в плане "крутизны" изменения.

Пример такой функции — это линейная функция:

$$f(x) = 2x$$

Для неё можно выбрать $L = 2$, потому что:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |2x_1 - 2x_2| = 2|x_1 - x_2|$$

2) Что надо сделать, чтобы получить собственные значения системы ДУ?

Рассмотрим следующую систему ДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

Согласно методу Эйлера, решение системы ищется в следующем виде:

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad y(t) = \alpha_2 e^{\lambda t}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0, \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы единственno при выполнении условия:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{12} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

3) Вывести порядок аппроксимации метода Адамса — Башфорта.

Явный метод Адамса — Башфорта 4-го порядка имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{55}{24}f_n - \frac{59}{24}f_{n-1} + \frac{37}{24}f_{n-2} - \frac{9}{24}f_{n-3} \right), \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_0 = u_0.$$

Разложим точное решение $y(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_n

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n + \frac{h^4}{24}y''''_n + O(h^5).$$

Разложим $f(t_{n-k})$ в ряд Тейлора:

$$f_{n-k} = f_n - khf'_n + \frac{(kh)^2}{2}f''_n - \frac{(kh)^3}{6}f'''_n + O(h^4).$$

Подставляя эти выражения в метод Адамса — Башфорта, получаем разложение:

$$\begin{aligned} \frac{55}{24}f_n - \frac{59}{24}\left(f_n - hf'_n + \frac{h^2}{2}f''_n - \frac{h^3}{6}f'''_n\right) + \frac{37}{24}\left(f_n - 2hf'_n + h^2f''_n - \frac{4h^3}{6}f'''_n\right) \\ - \frac{9}{24}\left(f_n - 3hf'_n + \frac{9h^2}{2}f''_n - \frac{27h^3}{6}f'''_n\right). \end{aligned}$$

Упростив данное выражение

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf'_n + \frac{h^2}{2}f''_n + \frac{h^3}{6}f'''_n + \frac{h^4}{24}f''''_n + O(h^5)$$

4) Чем плохи неявные методы решения обыкновенного дифференциального уравнения?

Неявные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) имеют несколько недостатков:

1. Необходимость решения нелинейных уравнений на каждом шаге: В отличие от явных методов, где шаги можно вычислить напрямую, в неявных методах для каждого шага необходимо решать систему уравнений, что увеличивает вычислительные затраты.
2. Меньшая интуитивность: Процесс расчета может быть менее прозрачным, что усложняет анализ решений.
3. Часто неэффективны для малых шагов: Если шаги слишком малы, решение системы уравнений может стать вычислительно дорогим.

5) Связь порядка метода от числа стадий? Чем плохо увеличение стадий метода?

Порядок метода численного решения ОДУ описывает, насколько быстро ошибка решения уменьшается с уменьшением шага. Например, метод порядка p будет давать ошибку порядка $O(h^p)$, где h — шаг интегрирования.

Число стадий в методе связано с его порядком: для повышения порядка метода часто нужно увеличивать количество стадий. Однако увеличение числа стадий может привести к некоторым проблемам:

Увеличение вычислительных затрат: Большое количество стадий требует больше операций для вычисления каждого шага.

Сложность реализации: Сложность алгоритма увеличивается, что может сделать его трудным для анализа и реализации.

Проблемы с устойчивостью: Некоторые методы с большим количеством стадий могут быть менее устойчивыми в некоторых случаях.

6) В чем заключается метод Фельдберга — Рунге?

Метод интегрирования Рунге — Кутта с адаптивным шагом является одним из наиболее часто используемых методов численного решения дифференциальных уравнений. Для достижения заданной точности применяется изменение шага интегрирования, который можно изменять, интегрируя дважды с одним шагом, но разным порядком метода. В этом методе для оценки погрешности метода пятого порядка точности используют формулы метода четвертого порядка точности, причем на одном шаге требуется всего лишь шесть вычислений значений правой части.

Расчетные коэффициенты для метода Рунге — Кутты — Фельдберга:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= hF_j(x_i, Y_j), \\ k_{1ij} &= hF_j(x_i + \frac{2}{9}h, Y_j + \frac{2}{9}k_{ij}), \\ k_{2ij} &= hF_j(x_i + \frac{1}{3}h, Y_j + \frac{1}{2}k_{ij} + \frac{1}{6}k_{1ij}), \\ k_{3ij} &= hF_j(x_i + \frac{3}{4}h, Y_j + \frac{69}{128}k_{ij} - \frac{143}{128}k_{1ij} + \frac{135}{64}k_{2ij}), \\ k_{4ij} &= hF_j(x_i + h, Y_j + \frac{27}{432}k_{ij} - \frac{27}{5}k_{1ij} - \frac{16}{15}k_{2ij}), \\ k_{5ij} &= hF_j(x_i + \frac{5}{6}h, Y_j + \frac{65}{432}k_{ij} + \frac{15}{16}k_{1ij} + \frac{13}{16}k_{2ij} + \frac{4}{27}k_{3ij} + \frac{5}{144}k_{4ij}), \\ Y_{j(i+1)} &= Y_j + \frac{21}{9}k_{ij} + \frac{9}{20}k_{1ij} + \frac{16}{45}k_{2ij} + \frac{1}{12}k_{3ij}. \end{aligned}$$

4. Оценка порядка аппроксимации методов

Введем понятие ошибки по переменной j , как разность решения с шагом τq^j и решения с самым мелким шагом τ_{ref}

$$E_i^j = |U_i^j - U_{\text{ref}}^j|,$$

где $j = 1, \dots, n$, а n — число уравнений в системе. Расчет будет производить в середине отрезка $[t_0, T]$. В дальнейшем под порядком сходимости будем понимать величину

$$p_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\log_q \left(\frac{E_{i+1}^j}{E_i^j} \right) \right)^2}$$

4.1. Пример 1

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Таблица 1. Порядок сходимости для системы (1) при начальном шаге $\tau = 0.05$ и $t \in [0, 1]$

(а) Явный метод Эйлера

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	0.787
$0.05 \cdot 0.5^2$	0.889
$0.05 \cdot 0.5^3$	0.958
$0.05 \cdot 0.5^4$	1.013
$0.05 \cdot 0.5^5$	1.082
$0.05 \cdot 0.5^6$	1.214
$0.05 \cdot 0.5^7$	1.581

(б) Неявный метод Эйлера

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	1.400
$0.05 \cdot 0.5^2$	1.175
$0.05 \cdot 0.5^3$	1.099
$0.05 \cdot 0.5^4$	1.084
$0.05 \cdot 0.5^5$	1.117
$0.05 \cdot 0.5^6$	1.231
$0.05 \cdot 0.5^7$	1.589

(в) Симметричная схема

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	2.022
$0.05 \cdot 0.5^2$	2.005
$0.05 \cdot 0.5^3$	2.002
$0.05 \cdot 0.5^4$	2.005
$0.05 \cdot 0.5^5$	2.017
$0.05 \cdot 0.5^6$	2.070
$0.05 \cdot 0.5^7$	2.320

(г) Метод Рунге–Кутты

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	3.388
$0.05 \cdot 0.5^2$	3.744
$0.05 \cdot 0.5^3$	3.882
$0.05 \cdot 0.5^4$	3.943
$0.05 \cdot 0.5^5$	3.972
$0.05 \cdot 0.5^6$	3.990
$0.05 \cdot 0.5^7$	4.047

(д) Метод Адамса

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	3.426
$0.05 \cdot 0.5^2$	3.725
$0.05 \cdot 0.5^3$	3.866
$0.05 \cdot 0.5^4$	3.934
$0.05 \cdot 0.5^5$	3.967
$0.05 \cdot 0.5^6$	3.989
$0.05 \cdot 0.5^7$	4.079

(е) Предиктор–корректор

Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	1.682
$0.05 \cdot 0.5^2$	3.228
$0.05 \cdot 0.5^3$	3.658
$0.05 \cdot 0.5^4$	3.838
$0.05 \cdot 0.5^5$	3.921
$0.05 \cdot 0.5^6$	3.966
$0.05 \cdot 0.5^7$	4.067

4.2. Пример 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Таблица 2. Порядок сходимости для системы (2) при начальном шаге $\tau = 0.05$ и $t \in [0, 4]$

(а) Явный метод Эйлера		(б) Неявный метод Эйлера		(в) Симметричная схема	
Шаг	Порядок	Шаг	Порядок	Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	1.045	$0.05 \cdot 0.5$	0.957	$0.05 \cdot 0.5$	2.196
$0.05 \cdot 0.5^2$	1.032	$0.05 \cdot 0.5^2$	0.987	$0.05 \cdot 0.5^2$	2.008
$0.05 \cdot 0.5^3$	1.034	$0.05 \cdot 0.5^3$	1.012	$0.05 \cdot 0.5^3$	2.002
$0.05 \cdot 0.5^4$	1.053	$0.05 \cdot 0.5^4$	1.042	$0.05 \cdot 0.5^4$	2.005
$0.05 \cdot 0.5^5$	1.102	$0.05 \cdot 0.5^5$	1.097	$0.05 \cdot 0.5^5$	2.019
$0.05 \cdot 0.5^6$	1.224	$0.05 \cdot 0.5^6$	1.221	$0.05 \cdot 0.5^6$	2.078
$0.05 \cdot 0.5^7$	1.586	$0.05 \cdot 0.5^7$	1.584	$0.05 \cdot 0.5^7$	2.359

(г) Метод Рунге–Кутты		(д) Метод Адамса		(е) Предиктор–корректор	
Шаг	Порядок	Шаг	Порядок	Шаг	Порядок
$0.05 \cdot 0.5$	4.077	$0.05 \cdot 0.5$	4.005	$0.05 \cdot 0.5$	4.035
$0.05 \cdot 0.5^2$	4.041	$0.05 \cdot 0.5^2$	4.008	$0.05 \cdot 0.5^2$	4.050
$0.05 \cdot 0.5^3$	4.021	$0.05 \cdot 0.5^3$	4.005	$0.05 \cdot 0.5^3$	4.034
$0.05 \cdot 0.5^4$	4.011	$0.05 \cdot 0.5^4$	4.003	$0.05 \cdot 0.5^4$	4.019
$0.05 \cdot 0.5^5$	3.929	$0.05 \cdot 0.5^5$	4.002	$0.05 \cdot 0.5^5$	4.011
$0.05 \cdot 0.5^6$	1.500	$0.05 \cdot 0.5^6$	4.008	$0.05 \cdot 0.5^6$	4.010
$0.05 \cdot 0.5^7$	1.605	$0.05 \cdot 0.5^7$	4.152	$0.05 \cdot 0.5^7$	3.834

5. Фазовые траектории систем и численное исследование их особых точек

5.1. Гармонический осциллятор

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_1 = u_2, \\ u'_2 = -\frac{k}{m}u_1, \\ u_1(t_0) = 1, \quad u_2(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

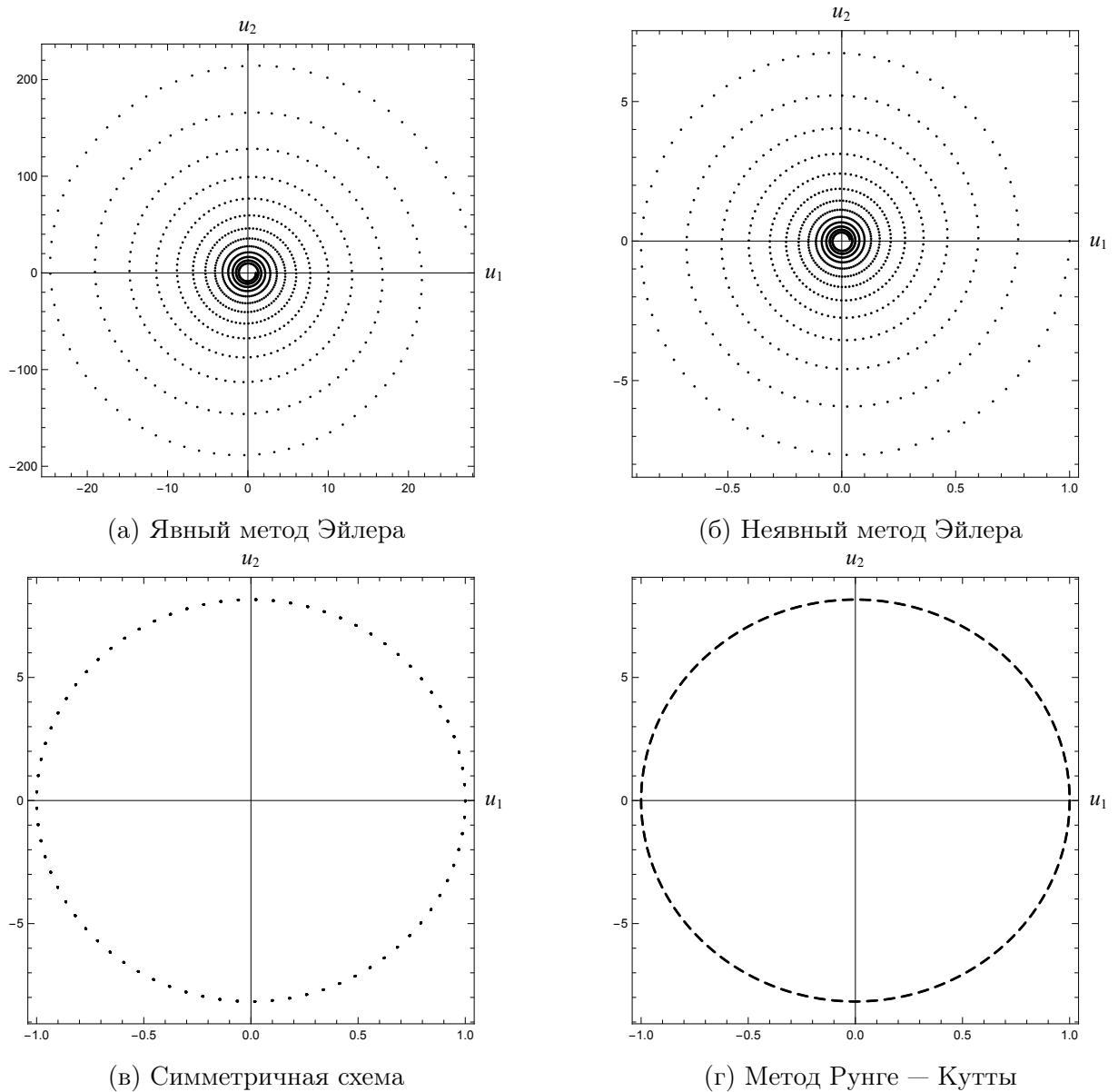


Рис. 1. Фазовые траектории системы (3), описывающей горизонтальное движение шарика без трения при $m = 0.3$ кг, $k = 20$ Н/м. Шаг по времени $\tau = 0.01$.

5.2. Модель Н.Н. Баутина химической реакции Белоусова — Жаботинского

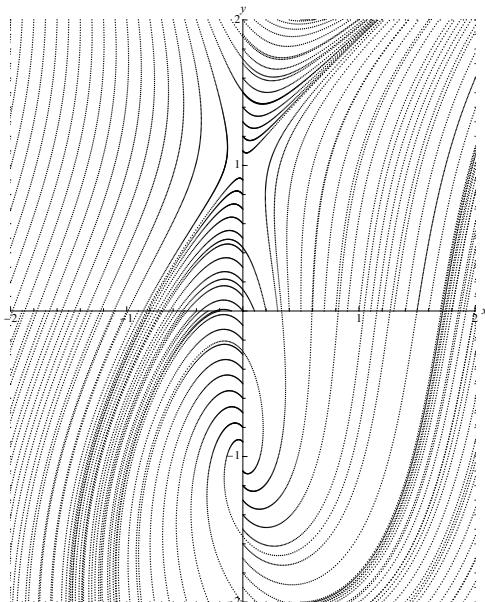
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_2 + E_1 x_1 - x_1^3 - x_1 x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + E_2 x_2 - x_2^3 - x_2 x_1^2, \\ x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 0.1, \end{cases} \quad (4)$$

где $a = 0.4 + 0.3 \sin(0.5t)$, $E_1 = 0.1$, $E_2 = 0.2$, $t = 0 \dots 50$.

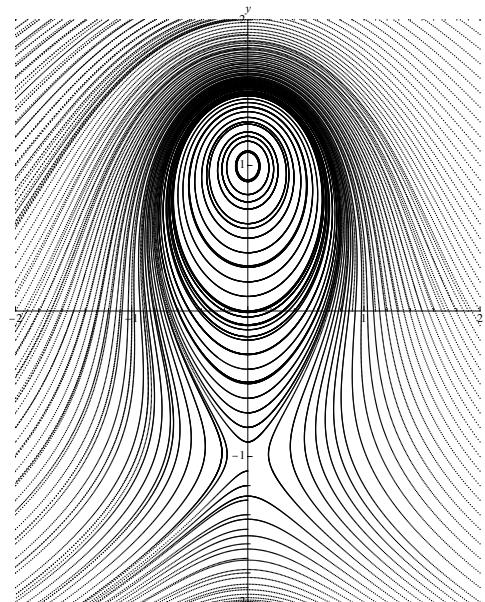
5.3. Модель Лотки-Вольтерры динамики системы «хищник-жертва»

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -r_2 x_2 - b_{22}x_2^2 + b_{21}x_1x_2, \\ x_1(0) = 1.0, \quad x_2(0) = 4.0, \end{cases} \quad (5)$$

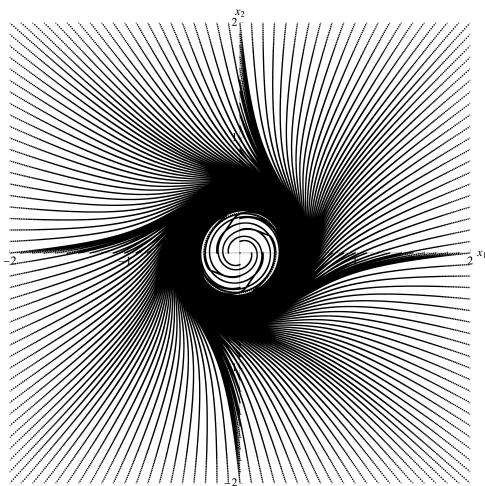
где $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.1$, $b_{11} = 0.05$, $b_{12} = 0.1$, $b_{21} = 0.08$, $b_{22} = 0.003$, $t = 0 \dots 150$.



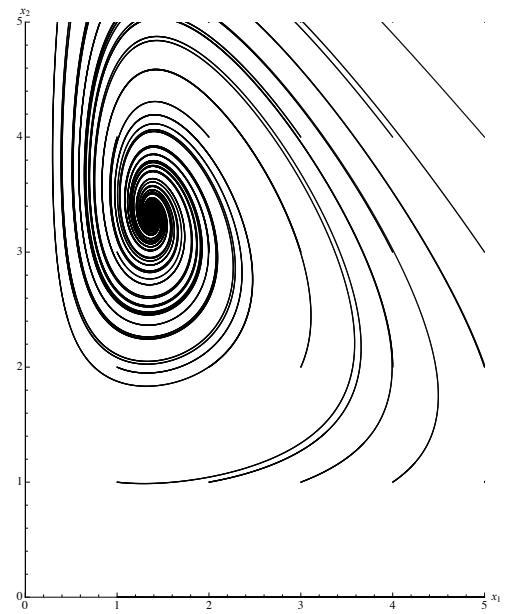
(а) Фазовые траектории системы (1)



(б) Фазовые траектории системы (2)



(в) Фазовые траектории системы (4)



(г) Фазовые траектории системы (5)

Рис. 2. Фазовые траектории систем

6. Автоматический выбор шага

Введем понятие требуемой точности $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$, а также апостериорной погрешности $\varepsilon_n = \left\| \frac{\mathbf{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} - \mathbf{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}}{2^p - 1} \right\|$. Будем уменьшать шаг, если $\varepsilon_n > 1.05\varepsilon_{tol}$, и уменьшать шаг, когда $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{tol}}{2}$, следующим образом

$$\tau_{new} = \tau_{old} \left(\frac{\varepsilon_{tol}}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6)$$

где p — порядок метода.

На следующей странице приведены графики решения и изменения ε_n и шага.

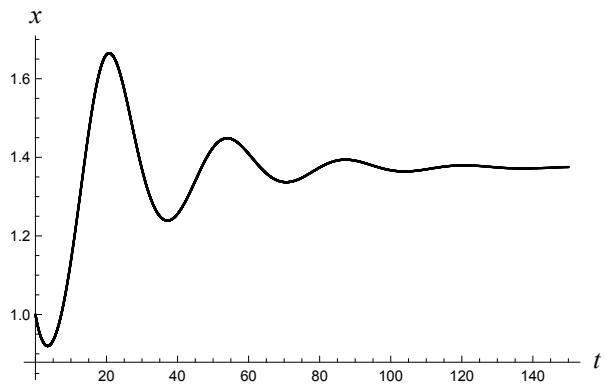
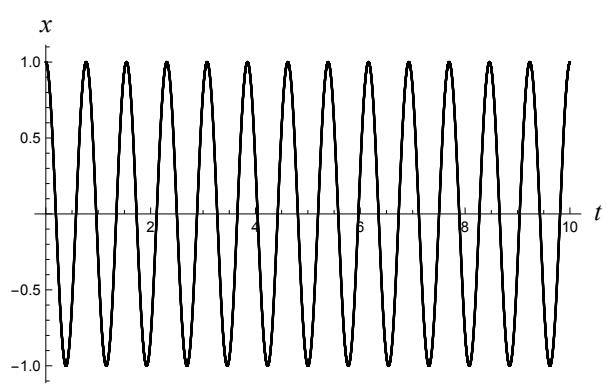
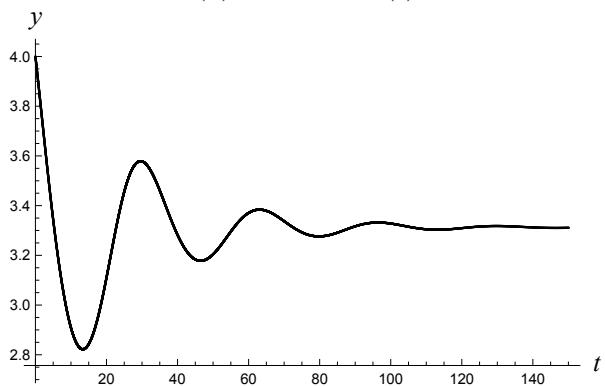
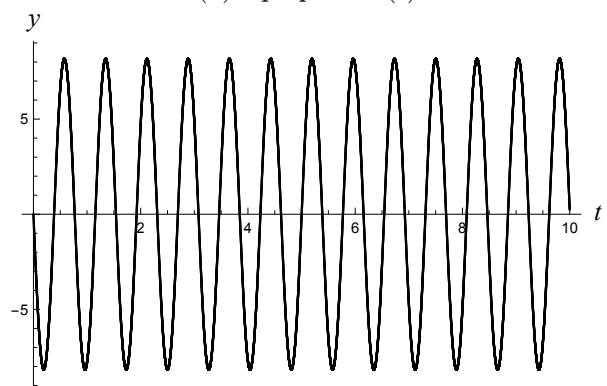
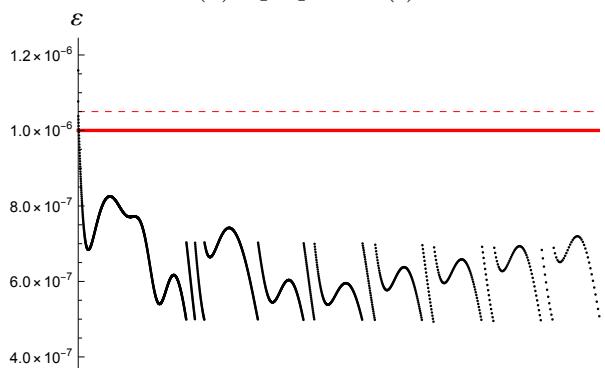
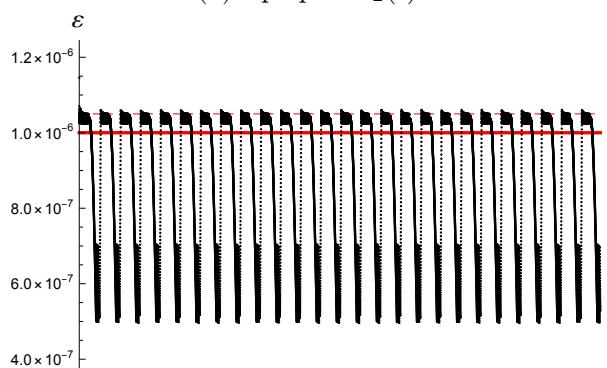
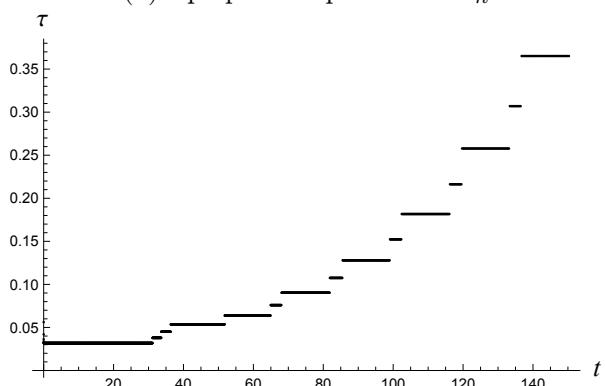
(а) График $x_1(t)$ (а) График $x_1(t)$ (б) График $x_2(t)$ (б) График $x_2(t)$ (в) График погрешности ε_n (в) График погрешности ε_n (г) График изменения шага τ

Рис. 3. Демонстрация изменения шага при превышении заданной точности для системы (5)

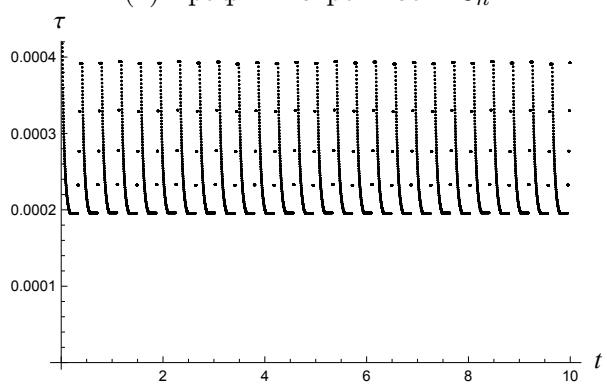
(г) График изменения шага τ

Рис. 4. Демонстрация изменения шага при превышении заданной точности для системы (3)