Оглавление

1. Ответы на контрольные вопросы

1. Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.

Корректность по Адамару: Задача называется корректно поставленной, если ее решение существует, единственно, и непрерывно зависит от входных данных.

Разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если $\|\psi_h\| \to 0$ и $\|\chi_h\| \to 0$ при $n \to 0$. Аппроксимация имеет порядок p, если $\|\psi_h\| = O(h^p)$ и $\|\chi_h\| = O(h^p)$ при $n \to 0$.

Разностная схема называется **однородной**, если её уравнение записано одинаковым образом и на одном шаблоне во всех узлах сетки без явного выделения особенностей.

Разностная схема называется **консервативной**, если для её решения выполняются законы сохранения, присущие исходной задаче.

Разностная схема называется **монотонной**, если в одномерном случае её решение сохраняет монотонность по пространственной переменной, при условии, что соответствующее свойство справедливо для исходной задачи, а в многомерном — удовлетворяет принципу максимума исходной задачи.

Разностная схема называется **устойчивой**, если её решение непрерывно зависит от входных данных. Устойчивость называется условной, если ее наличие зависит от соотношения шагов в сетке по разным направлениям, и безусловной в противном случае.

Разностное решение y сходится к решению исходной задачи, если $\|y - P_h u\| \to 0$, сходится с порядком p, если $\|y - P_h u\| = O(h^p)$ при $h \to 0$.

2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

Рассматриваются явная ($\sigma = 0$), неявная ($\sigma = 1$) и смешанная ($\sigma = 1/2$) схемы. Схема будет устойчивой при

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau\overline{K}}, \quad \overline{K} = \max_{0 \leq x \leq L} K(x).$$

Следовательно:

– явная схема — условно устойчива. Её устойчивость обеспечивается лишь при условии, что τ/h^2 не превышает некоторого критического значения.

– неявная схема и смешанная схема являются абсолютно устойчивыми, что означает, т.е для их стабильности не накладываются жёсткие ограничения на соотношение τ и h. Эти схемы позволяют использовать более крупный шаг по времени при сохранении устойчивости вычислений.

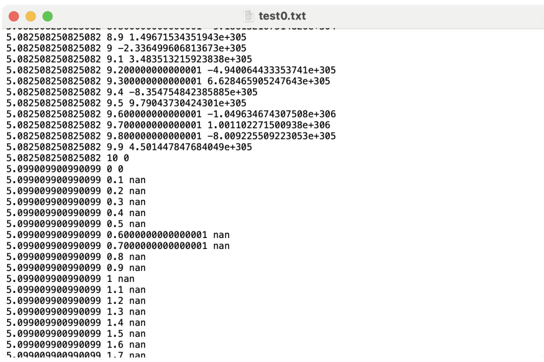
Приведем пример расчета, в котором нарушается условие устойчивости. Рассмотрим задача (3) – (5) и схему с $\sigma = 0$. Проверим условие устойчивости для случаев $h = 0.1$, $\tau = 0.1$ и $h = 0.1$, $\tau = 0.0015$

$$\left.\frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau\overline{K}}\right|_{\substack{h=0.1\\ \tau=0.1}} \approx 0.494, \quad \left.\frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau\overline{K}}\right|_{\substack{h=0.1\\ \tau=0.0015}} \approx 0.083$$

Как видно в обоих случаях нарушается условие устойчивости, однако во втором случае оно «ближе» к истине.


```
test0.txt
5.5 4.800000000000001 1.216691395158026e+90
5.5 4.9 -9.130746004765361e+90
5.5 5 3.365543084722899e+91
5.5 5.100000000000001 -1.003379121317053e+92
5.5 5.2 2.665618149595229e+92
5.5 5.300000000000001 -6.540255975739304e+92
5.5 5.4 1.507411677206895e+93
5.5 5.5 -3.294220385661442e+93
5.5 5.600000000000001 6.86449776769664e+93
5.5 5.7 -1.36904000570079e+94
5.5 5.800000000000001 2.620185506772939e+94
5.5 5.9 -4.822798639983568e+94
5.5 6 8.558751760503775e+94
5.5 6.100000000000001 -1.472974550362629e+95
5.5 6.2 2.511427373173883e+95
5.5 6.300000000000001 -4.590092736108801e+95
5.5 6.4 1.098038970997173e+96
5.5 6.5 -4.052840676193325e+96
5.5 6.600000000000001 1.9800356846795e+97
5.5 6.7 -1.032091496983933e+98
5.5 6.800000000000001 5.242959239194822e+98
5.5 6.9 -2.533201252564121e+99
5.5 7 1.158394296507847e+100
5.5 7.100000000000001 -5.012974302353363e+100
5.5 7.2 2.055006876494052e+101
5.5 7.300000000000001 -7.989168445466362e+101
5.5 7.4 2.948643860124807e+102
5.5 7.5 -1.034160516791118e+103
5.5 7.600000000000001 3.449526501934165e+103
5.5 7.7 -1.095085355054317e+104
```

(а) $h = 0.1$, $\tau = 0.1$


```
test0.txt
5.082508250825082 8.9 1.49671534351943e+305
5.082508250825082 9 -2.336499606813673e+305
5.082508250825082 9.1 3.483513215923838e+305
5.082508250825082 9.200000000000001 -4.940064433353741e+305
5.082508250825082 9.300000000000001 6.628465905247643e+305
5.082508250825082 9.4 -8.354754842385885e+305
5.082508250825082 9.5 9.79043730424301e+305
5.082508250825082 9.600000000000001 -1.049634674307508e+306
5.082508250825082 9.700000000000001 1.001102271500938e+306
5.082508250825082 9.800000000000001 -8.009225509223053e+305
5.082508250825082 9.9 4.501447847684049e+305
5.082508250825082 10 0
5.099009900990099 0 0
5.099009900990099 0.1 nan
5.099009900990099 0.2 nan
5.099009900990099 0.3 nan
5.099009900990099 0.4 nan
5.099009900990099 0.5 nan
5.099009900990099 0.6000000000000001 nan
5.099009900990099 0.7000000000000001 nan
5.099009900990099 0.8 nan
5.099009900990099 0.9 nan
5.099009900990099 1 nan
5.099009900990099 1.1 nan
5.099009900990099 1.2 nan
5.099009900990099 1.3 nan
5.099009900990099 1.4 nan
5.099009900990099 1.5 nan
5.099009900990099 1.6 nan
5.099009900990099 1.7 nan
```

(б) $h = 0.1$, $\tau = 0.0015$

Рис. 1. Результаты расчетов

3. Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при

$$a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}?$$

Запишем определение a_i

$$a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})} = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}\right)^{-1}$$

Для удобства обозначим за I

$$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}$$

Выразим I:

$$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)} = h\frac{K(x_i)+K(x_{i-1})}{2K(x_i)K(x_{i-1})} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{K(x_{i-1})}+\frac{1}{K(x_i)}\right)$$

Это квадратурная форма трапеций, которая имеет второй порядок аппроксимации.

4. Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий с порядком точности $O(\tau + h^2), O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^2 + h)$ вы знаете?

Граничные условия имееют вид

$$-K(u,0)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,t)} = P(t), \quad K(u,L)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(L,t)} = P(t). \tag{1}$$

Схема с порядком точности $O(\tau^2 + h^2)$ может быть получена следующим образом.

Проинтегрируем исходное уравнение по ячейке, примыкающей к левой границе

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_0}^{x_{1/2}} u_t\,dxdt = k\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_0}^{x_{1/2}} u_{xx}\,dxdt.$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_{1/2}}\left(u(x,t_{j+1})-u(x,t_j)\right)dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}}\big(ku_x(x_{1/2},t)-ku_x(x_0,t)\big)\,dt\\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}}\big(ku_x(x_{1/2},t)+P(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Аппроксимируя интегралы получим:

$$\int_{x_0}^{x_{1/2}}\left(u(x,t_{j+1})-u(x,t_j)\right)dx \approx \frac{h}{2}\left(\hat{y}_0 - y_0\right),$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\big(ku_x(x_{1/2},t)+P(t)\big)\,dt \approx \tau\left(k\frac{\hat{y}_1-\hat{y}_0}{h}+\hat{P}\right).$$

После интегрирования получим разностную аппрокисмацию граничного условия

$$\frac{h}{2}\frac{\hat{y}_0-y_0}{\tau} = k\frac{\hat{y}_1-\hat{y}_0}{h}+\hat{P}.$$

или после преобразований

$$-k\hat{y}_{x,0} + \frac{h}{2} y_{t,0} = \hat{P}.$$

Тогда вычисление погрешности аппроксимации на точном решении исходной задачи дает

$$\psi_{h,0} = -k\hat{u}_{xx}\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\hat{u}_t + O(\tau h + h^2) = O(\tau^2 + h^2).$$

Схема с порядком точности $O(\tau + h^2)$ может быть получена путем введения фиктивной точки.

Ввведем фиктивную точка $x_{-1} = -h$, тогда значение функции в ней: $u^j_{-1} = u(-h, t_j)$.

Разложим u^j_1, u^j_2 и u^j_{-1} в ряд Тейлора:

$$u^j_1 = u(0, t_j) + hu_x(0, t_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(0, t_j) + O(h^3).$$

$$u^j_2 = u(0, t_j) + 2hu_x(0, t_j) + \frac{(2h)^2}{2} u_{xx}(0, t_j) + O(h^3).$$

$$u^j_{-1} = u(0, t_j) - hu_x(0, t_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(0, t_j) + O(h^3).$$

Апроксимируем $u_x(0, t_j)$ и для получения схемы требуемого порядка исключим $u(0, t_j)$ и $u_{xx}(0, t_j)$:

$$au^j_1 + bu^j_2 + cu^j_{-1} = (a+b+c)u(0, t_j) + h(a+2b-c)u_x(0, t_j) + \frac{h^2}{2}(a+4b+c)u_{xx}(0, t_j) + O(h^3).$$

Потребуем

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a + 4b + c = 0, \\ a + 2b - c = \frac{1}{h}. \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{3}{2h}, \\ b = \frac{2}{h}, \\ c = -\frac{1}{2h}. \end{cases}$$

Тогда

$$u_x(0, t_j) \approx \frac{-3u^j_0 + 4u^j_1 - u^j_2}{2h} + O(h^2).$$

Подставляя аппроксимацию $u_x(0, t_j)$ в граничное условие, имеем:

$$-K(u^j_0, 0) \cdot \frac{-3u^j_0 + 4u^j_1 - u^j_2}{2h} = P(t_j).$$

Дискретизацию по времени будет проводить с использованием явной схемы Эйлера с точностью $O(\tau)$. Таким образом получим схему с порядком $O(h^2 + \tau)$.

Схема с порядком точности $O(\tau^2+h)$. Рассмотрим схему с порядком $O(\tau^2+h^2)$

$$0=\frac{2}{h}\left(\sigma\left(P_0(t_{j+1})+a_1\frac{y_1-y_0}{h}\right)+(1-\sigma)\left(P_0(t_j)+a_1\frac{y_1-y_0}{h}\right)\right),$$
$$0=\frac{2}{h}\left(\sigma\left(P_L(t_{j+1})+a_N\frac{y_N-y_{N-1}}{h}\right)+(1-\sigma)\left(P_L(t_j)+a_N\frac{y_N-y_{N-1}}{h}\right)\right),$$

где $a_i=\left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}\right)^{-1}$.

Пусть $\sigma=0.5$. Будем аппроксимировать a_i с первым порядком точности, например, с помощью квадратурной формулы левых

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}\approx\frac{h}{K(x_{i-1})}\implies a_i\approx\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{K(x_{i-1})}\right)^{-1}=K(x_{i-1})$$

или правых прямоугольников

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{K(x)}\approx\frac{h}{K(x_i)}\implies a_i\approx\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{K(x_i)}\right)^{-1}=K(x_i)$$

Тогда схема будет иметь порядок $O(\tau^2+h)$, из-за «плохой» аппроксимации a_i.

5. При каких h,τ и σ смешанная схема монотонна?

Признак монотонности:

Явная двухслойная схема $\hat{y_n}=\sum\limits_l\beta_l y_{n+1}$ монотонная тогда, когда все $\beta_l\geqslant 0$.

6. Какие ограничения на h,τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?

Имеем разностную схему:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left(\sigma(w_{i+1/2}^{j+1}-w_{i-1/2}^{j+1})+(1-\sigma)(w_{i+1/2}^j-w_{i-1/2}^j)\right),$$

где $w_{i-1/2}^j=a_iy_{x,i}^j,\ w_{i+1/2}^j=a_iy_{x,i}^j$.

Данную схему можно записать в виде системы

$$A_iy_{i-1}^{j+1}-B_iy_i^{j+1}+C_iy_{i+1}^{j+1}=-F_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

с коэффициентами

$$A_i=\frac{\sigma}{h}a_i,\quad B_i=\frac{\sigma}{h}a_i+\frac{\sigma}{h}a_{i+1}+c\rho\frac{h}{\tau}\quad C_i=\frac{\sigma}{h}a_{i+1},$$

и правой частью

$$F_i=c\rho\frac{h}{\tau}y_i^j+(1-\sigma)(w_{i+1/2}^j-w_{i-1/2}^j).$$

Прогонка корректна и устойчива, если в трехдиагональной матрице выполнено условие диагонального преобладания

$$|B_i| \geqslant |A_i| + |C_i|,$$

и хотя бы для одного i выполнено строгое равенство. Таким образом

$$\left|\frac{\sigma}{h}a_i + \frac{\sigma}{h}a_{i+1} + c\rho\frac{h}{\tau}\right| \geqslant \left|\frac{\sigma}{h}a_i\right| + \left|\frac{\sigma}{h}a_{i+1}\right|.$$

Таким образом прогонка корректна и устойчива при $c\rho\dfrac{h}{\tau} \geqslant 0$.

7. В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

8. Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

1.1. Ответы на дополнительные вопросы

Выпишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой, объясните его смысл. Докажите на паре теорему о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости. Приведите пример неконсервативной разностной схемы для уравнения теплопроводности.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

Теорема: Если решение задачи $Au = f$ в G и $Ru = \mu$ на ∂G существует, разностная схема $A_h y = \varphi$ в G_h и $R_h y = \nu$ на ∂G корректна и аппроксимирует задачу для y, то разностное решение сходится к точному.

Какие еще квадратурные формулы второго порядка точности вы знаете? Приведите соответствующие формулы для вычисления коэффициентов a_i.

Квадратурная формула центральных прямоугольников:

$$I_{h,i} = f(x_{i-\frac{1}{2}})h, \quad a_i = K(x_{i-\frac{1}{2}})$$

Сформулируйте принцип максимума. Объясните разницу между немонотонностью и неустойчивостью численного решения. Получите немонотонное распределение в результате расчета по симметричной схеме.

Принцип максимума: Пусть G_h и ω, где $\bar{\omega} \subset G_h$ связны, для h в ω выполнено условие положительности коэффицикнтов. Тогда, если y непостоянна на $\bar{\omega}$ и $Ly \leq 0 (Ly \geq 0)$ $\forall x \in \omega$, то y не может принимать саоего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на ω среди всех ее значений на $\bar{\omega}$ (т.е. принимает его на $\bar{\omega} \setminus \omega$).

2. Результаты работы программ

2.1. Расчет порядка сходимости схем

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = \left(K(x)u_x\right)_x, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \tag{3}$$

где коэффициент теплопроводности определяется как:

$$K(x) = \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2.$$

Распределение температуры в начале и на границе зададим условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right)\right). \tag{5}$$

Аналитическое решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{x}{L}\right)\right) \exp\left(-\frac{t}{L^2}\left(\left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)\right).$$

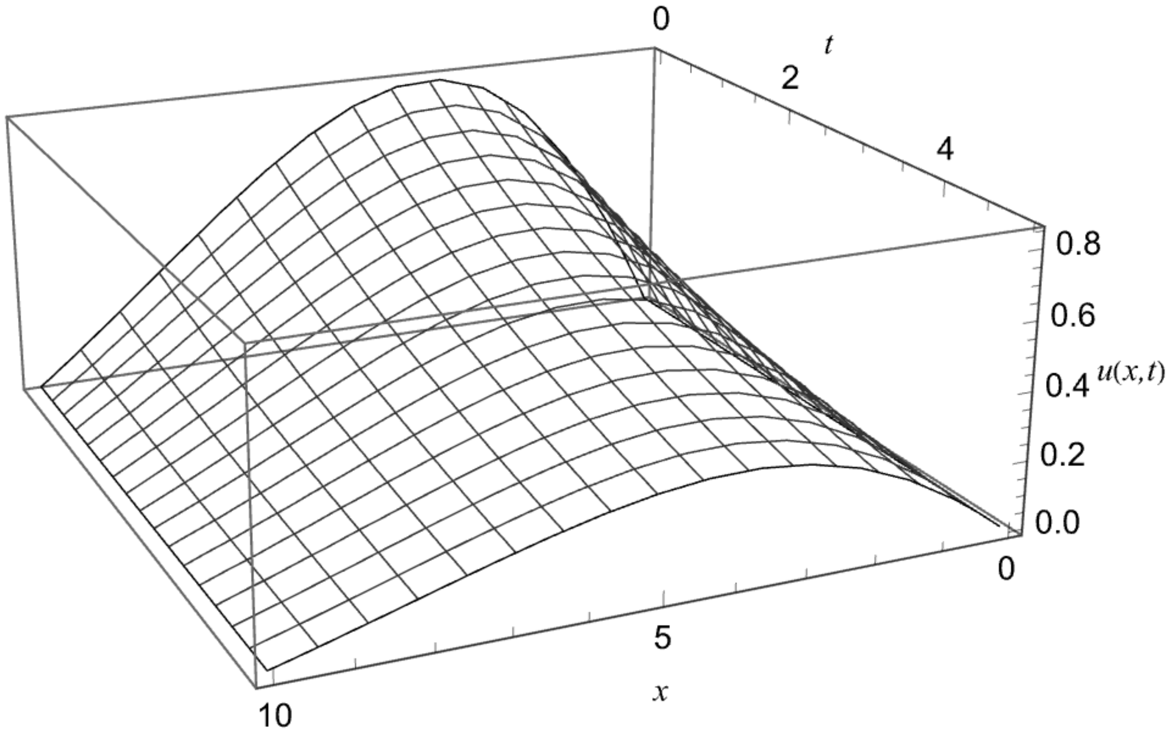


Рис. 2. График решения

Таблица 1. Демонстрация работы различных схем для задачи (3) – (5) при $h = 0.1$, $\tau = 0.001$, $q = 0.5$

Шаг	$\sigma = 0$		$\sigma = 1$	
	err	p	err	p
$h,\ \tau$	$1.278 \cdot 10^{-5}$	—	$6.319 \cdot 10^{-5}$	—
$qh,\ q^2\tau$	$3.197 \cdot 10^{-6}$	1.99917	$1.580 \cdot 10^{-5}$	1.99979
$q^2h,\ q^4\tau$	$7.989 \cdot 10^{-7}$	2.00101	$3.949 \cdot 10^{-5}$	2.0004

Таблица 2. Демонстрация работы различных схем для задачи (3) – (5) при $h = 0.1$, $\tau = 0.001$, $q = 0.5$

Шаг	$\sigma = 0.5$	
	err	p
$h,\ \tau$	$4.241 \cdot 10^{-5}$	—
$qh,\ q\tau$	$1.060 \cdot 10^{-5}$	1.99979
$q^2h,\ q^2\tau$	$2.651 \cdot 10^{-6}$	1.99998

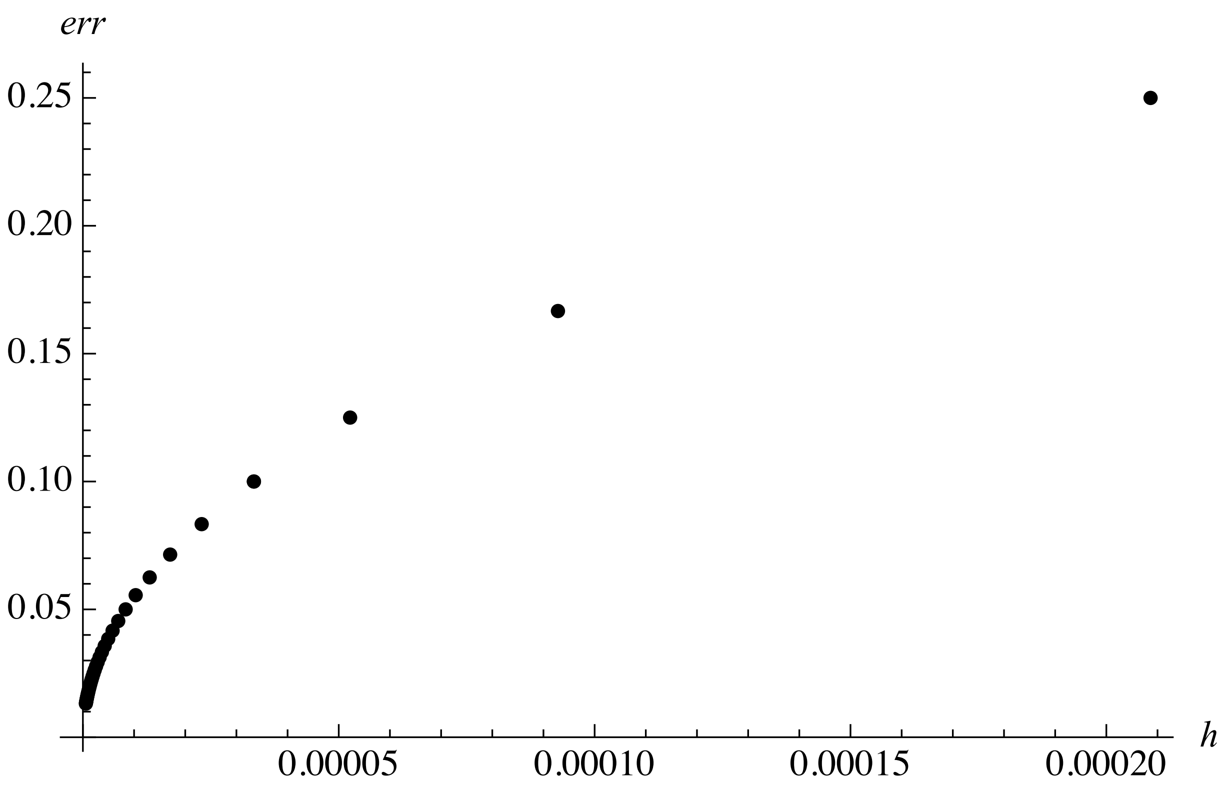


Рис. 3. График зависимости погрешности найденного решения от шага h при постоянном $\tau = 0.001$ и $\sigma = 0.5$

3. Проверка закона сохранения энергии с течением времени. Консервативность системы

Таблица 3. Разность интеграла от температуры в начальный и текущий момент времени для стержней разной длины

L \ t	0.25	0.5	0.75	1.00	1.25
1	$1.6098 \cdot 10^{-15}$	$1.6098 \cdot 10^{-15}$	$1.6098 \cdot 10^{-15}$	$1.6098 \cdot 10^{-15}$	$1.6098 \cdot 10^{-15}$
10	$5.8975 \cdot 10^{-13}$	$1.3145 \cdot 10^{-12}$	$2.0748 \cdot 10^{-12}$	$2.7924 \cdot 10^{-12}$	$3.4817 \cdot 10^{-12}$
100	$3.4250 \cdot 10^{-11}$	$6.4960 \cdot 10^{-11}$	$9.7450 \cdot 10^{-11}$	$1.2915 \cdot 10^{-10}$	$1.6121 \cdot 10^{-10}$

4. Визуализация заданий по вариантам

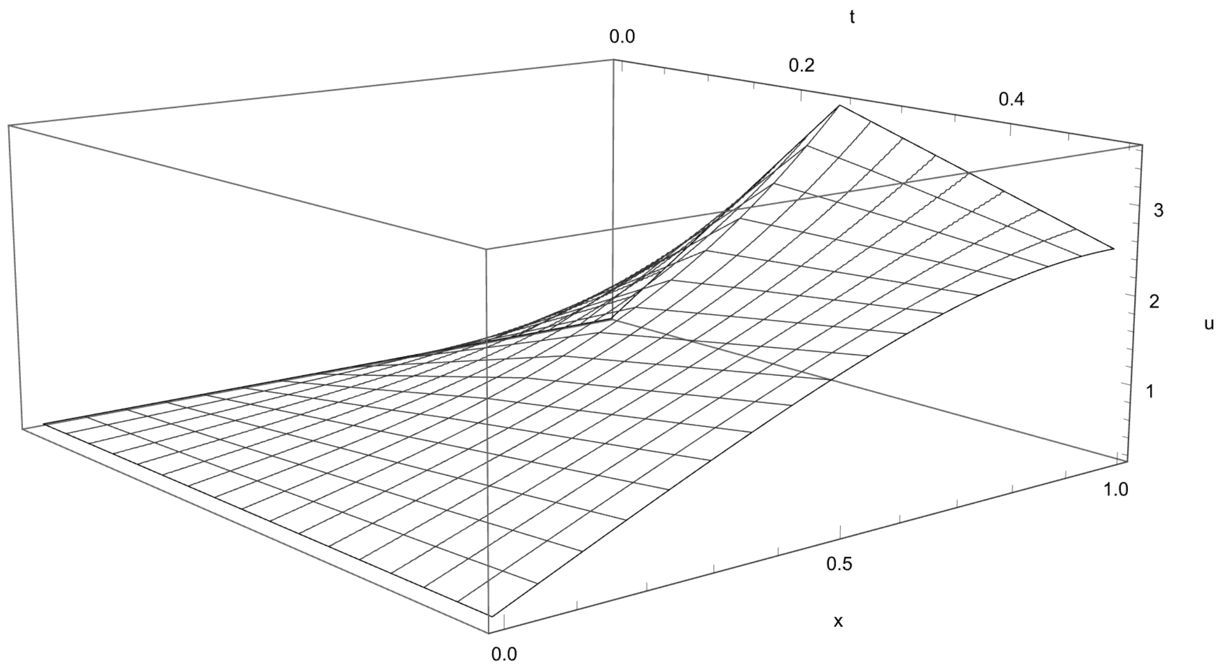


Рис. 4. График решения задания (Вариант 8)

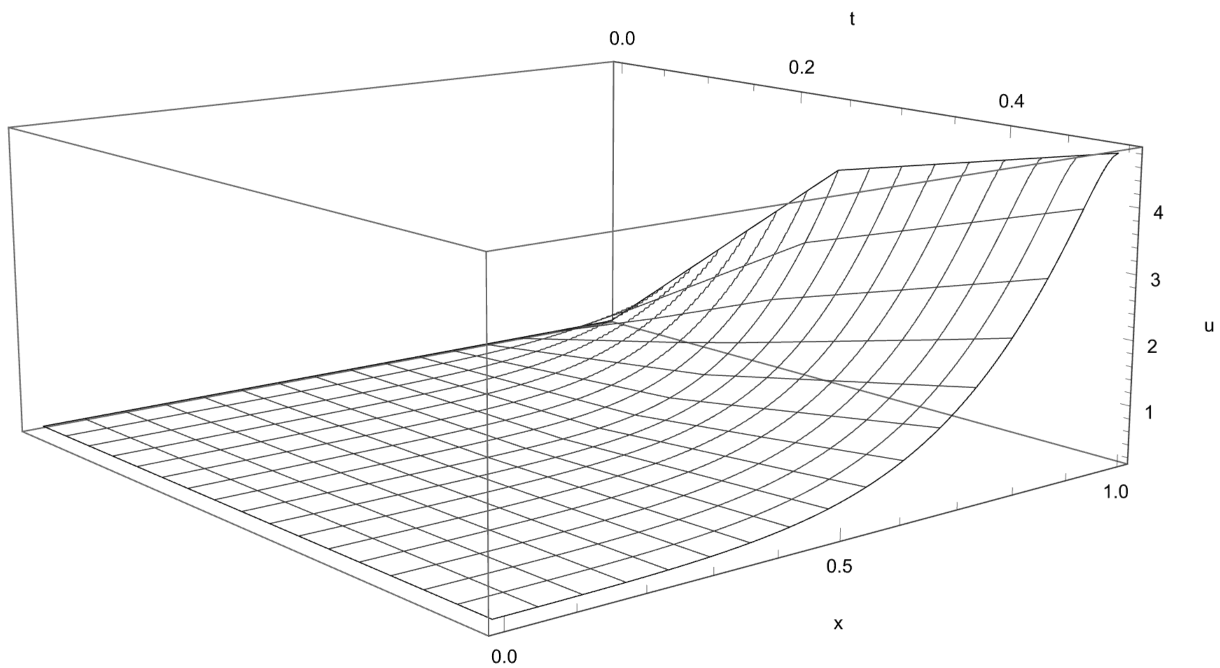


Рис. 5. График решения задания (Вариант 21)