Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчет по лабораторной работе №5

на тему:

"Методы численного решения интегральных уравнений"

Студент ФН2-61Б (Группа) (Подпись, дата) И. Е. Дыбко (И. О. Фамилия)

Студент ФН2-61Б (Группа) (Подпись, дата) С. И. Тихомиров (И. О. Фамилия)

Проверил (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

1. Ответы на контрольные вопросы

1) **При выполнении каких условий интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет решение? В каком случае решение является единственным?**

Интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называют уравнение вида

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b],$$

где $u(x)$ — искомая функция; λ — параметр; $K(x,s)$ — ядро интегрального уравнения; $f(x)$ — правая часть, при этом предполагается, что $K(x,s)$ и $f(x)$ являются кусочно-непрерывными функциями либо удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds = B^2 < \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

Если $\lambda \neq \lambda_i$, где λ_i — собственное число, то уравнение имеет единственное решение.

2) **Можно ли привести матрицу СЛАУ, получающуюся при использовании метода квадратур, к симметричному виду в случае, если ядро интегрального уравнения является симметричным, т. е. $K(x,s) = K(s,x)$?**

Рассмотрим решения уравнения Фредгольма второго рода методом квадратур

$$y_i - \lambda \sum_{k=0}^{N} a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, N$$

Так как ядро интегрального уравнения является симметричным, то $K(x_i, s_k) = K(x_k, s_i)$. Домножим решение на a_i^N, получим

$$a_i^N y_i - \lambda \sum_{k=0}^{N} a_i^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, N$$

Матрица данной СЛАУ будет симметричной.

3) **Предложите способ контроля точности результата вычислений при использовании метода квадратур.**

Вычислять значение интеграла на сгущающихся сетках до тех пор, пока разность значений интегралов для целого шага h и для половины шага $\frac{h}{2}$ не станет удовлетворять требуемой точности:

$$|I_h - I_{\frac{h}{2}}| < \varepsilon$$

или по правилу Рунге если выполняется неравенство

$$\left\| \bar{u}(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}^{r_{n+\frac{1}{2}}} \right\| \approx \left\| \frac{\bar{y}_{n+1}^{r_{n+\frac{1}{2}}} - \bar{y}_{n+1}^{r_{n+1}}}{2p - 1} \right\| < \varepsilon,$$

то величину шага уменьшаем вдвое.

4) **Оцените возможность и эффективность применения методов квадратур, простой итерации и замены ядра при решении интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода.**

Метод квадратур. Уравнение Вольтерра получают из уравнения Фредгольма, полагая $K(x, s) = 0$ при $x < s$. Алгебраическая система становится при этом треугольной:

$$y_n - \lambda \sum_{k=1}^{N} a_k K(x_i, s_k) y_k = f(x_n), \quad i = 0 \le n \le N$$

и решается обратным ходом метода Гаусса всего за $\frac{3}{2}N^2$ действий.

Метод простой итерации. Для уравнения Вольтерра метод последовательных приближений сходится равномерно по x при любых значениях λ, а формула для вычисления погрешности на $n+1$-й итерации будет иметь вид:

$$z_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) z_n(s) ds$$

Метод замены ядра. Ядро интегрального уравнения фредгольма называют вырожденным, если его можно представить в виде

$$\bar{K} = \sum_{k=1}^{N} A_k(x) B_k(s).$$

Ядро уравнение Вольтерра вырожденным не может быть, поэтому метод замены ядра не применим к данному уравнению.

5) **Что называют резольвентой ядра интегрального уравнения?**

Резольвентой интегрального уравнения называют функцию, которая позволяет выразить решение уравнения через свободный член в явном виде.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b],$$

Резольвента $R(x,s;\lambda)$ этого уравнения — это функция, такая, что решение можно записать в виде:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s)\, ds.$$

При этом, резольвента связана с ядром $K(x,t)$ через ряд Неймана:

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x,s),$$

где $K_1(x,s) = K(x,s)$, а K_{k+1} — итерированные ядра:

$$K_{k+1}(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_n(t,s)\, dt.$$

Резольвента существует, если ряд сходится (например, при достаточно малых $|\lambda|$).

6) **Почему замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора?**

Полином Чебышева $T_n(x)$ является полиномом наилучшего приближения функции, который минимизирует максимальное отклонение от целевой функции на всем исследуемом отрезке $[a,b]$. Формула Тейлора

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

записывается в окрестности точки x_0, соответственно, чем дальше находится точка x, в которой вычисляется приближенное значение функции, тем больше погрешность аппроксимации. Соответственно, замену ядра $K(x, s)$ интегрального уравнения вырожденным ядром предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора, потому что в этом случае ошибка приближений будет меньше.

7) **Какие вы можете предложить методы решения переопределенной системы помимо введения дополнительно переменной R?**

   Метод наименьших квадратов. Решение:

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

   (если $A^T A$ обратима)

2. Ответы на дополнительные вопросы

1) **Задача Штурма-Лиувилля для оператора Фредгольма**

   Для уравенения Фредгольма можно поставить задачу Штурма-Лиувилля отыскания собственных функций φ_i и собственных значений λ_i:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0, \quad x \in [a, b].$$

   Если ядро вещественно и симметрично, т.е. $K(x, \xi) = K(\xi, x)$, то существует по крайней мере одна собственная функция и одно собственное значение. Все собственные значения такого оператора действительны, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

2) **К чему сходится метод просто итерации в уравнении Вольтера?**

   Для уравения Вольтерра второго рода метод простой итерации сходится к решению с ошибкой

$$\|z^k\|_C \le \frac{1}{k!} (|\lambda| \|K\|_C (b - a))^k \|z^0\|_C$$

   Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$ для любого λ.

3) **Вырожденность ядра уравнения Вольтера**

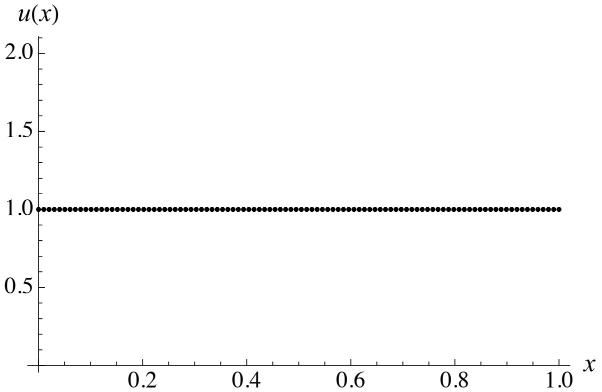
   Ядро уравнения Вольтерра вырожденным не бывает, так как в случае вырожденности оно должно было бы равняться нулю (в силу условия $K(x, \xi) = 0$ при $\xi > x$).

3. Примеры работы программ

3.1. Пример 1

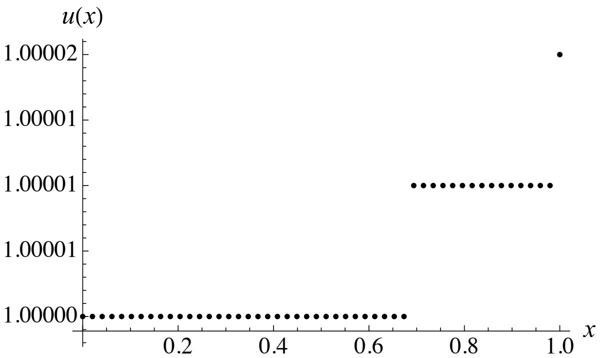
Рассмотрим уравнение

$$u(x) - \int_a^b \frac{1}{2}(1 - x \cdot \cos(xs))u(s)\,ds = \frac{1}{2}(1 + \sin x), \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$



(a) $a = 0$, $b = 1$ (b) $a = 0.1$, $b = 1$

Рис. 1. Решение уравнения (1) методом квадратур с числом узлов $N = 100$



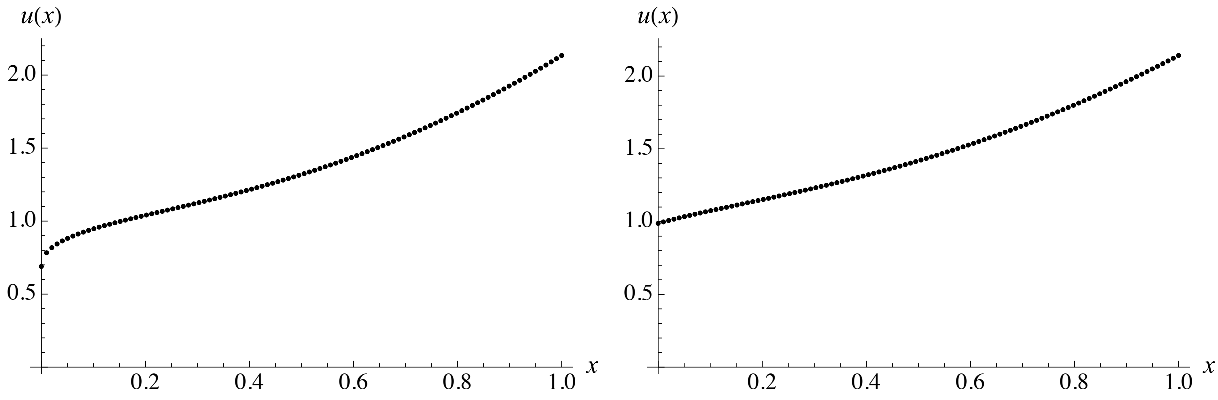
(a) $a = 0$, $b = 1$ (b) $a = 0.1$, $b = 1$

Рис. 2. Решение уравнения (1) методом простой итерации с числом узлов $N = 100$

3.2. Пример 2

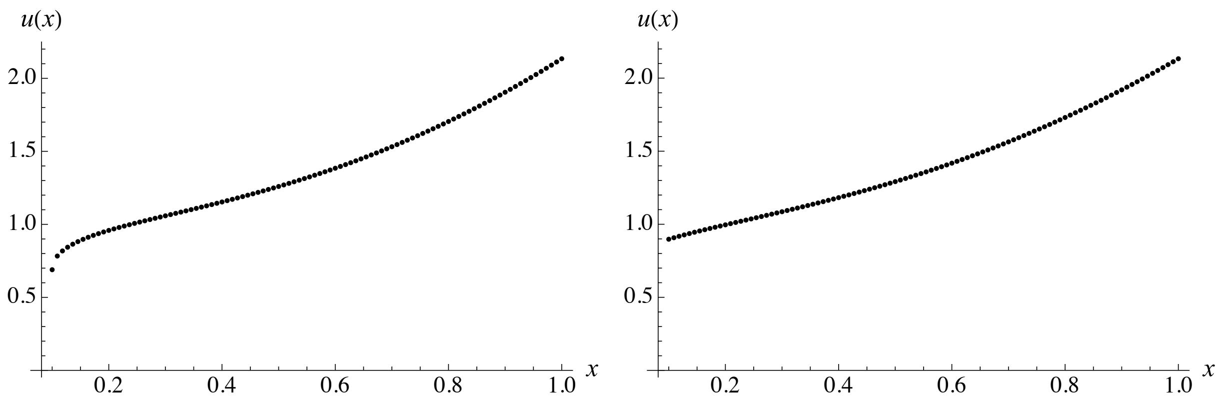
Рассмотрим уравнение

$$u(x) - \int_a^b \frac{1}{2}(1 - x \cdot \cos(xs))u(s)\,ds = x^2 + \sqrt{x}, \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$



(a) $a = 0$, $b = 1$ (b) $a = 0.1$, $b = 1$

Рис. 3. Решение уравнения (2) методом квадратур с числом узлов $N = 100$

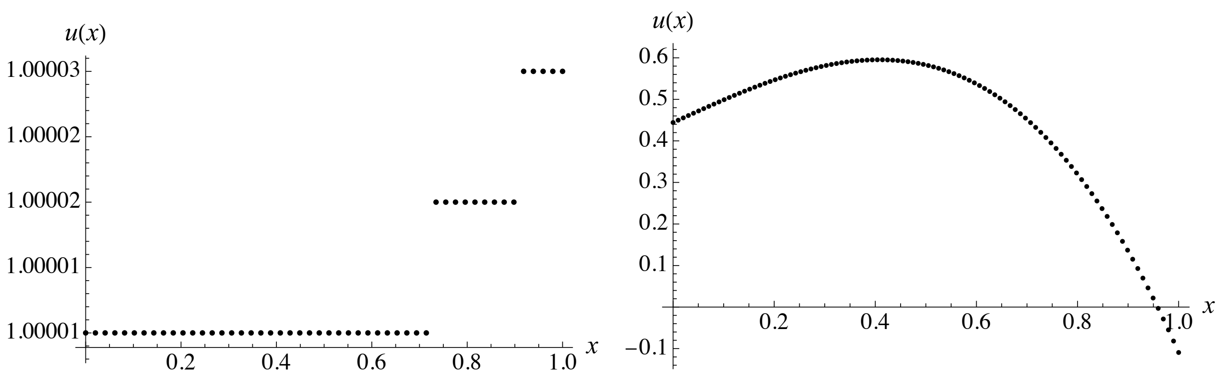


(a) $a = 0$, $b = 1$ (b) $a = 0.1$, $b = 1$

Рис. 4. Решение уравнения (2) методом простой итерации с числом узлов $N = 100$

3.3. Вариант 8

$$K(x, s) = 1 - x\cos(xs),\ f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin x - x^3$$



(a) $f(x) = f_1(x)$ (b) $f(x) = f_2(x)$

Рис. 5. Решение уравнения (2) методом простой итерации с числом узлов $N = 100$

3.4. Проверка соотвествия погрешности решения погрешности квадратурной формулы

В методе квадратур использована формула трапеций с погрешность $\Psi_h = O(h^2)$. Таким образом аппроксимация полученного решения должна быть с точностью $O(h^2)$. Рассмотрим уравнение

$$u(x) - \int_0^1 xt \cdot u(t)\,dt = \frac{2}{3}x \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

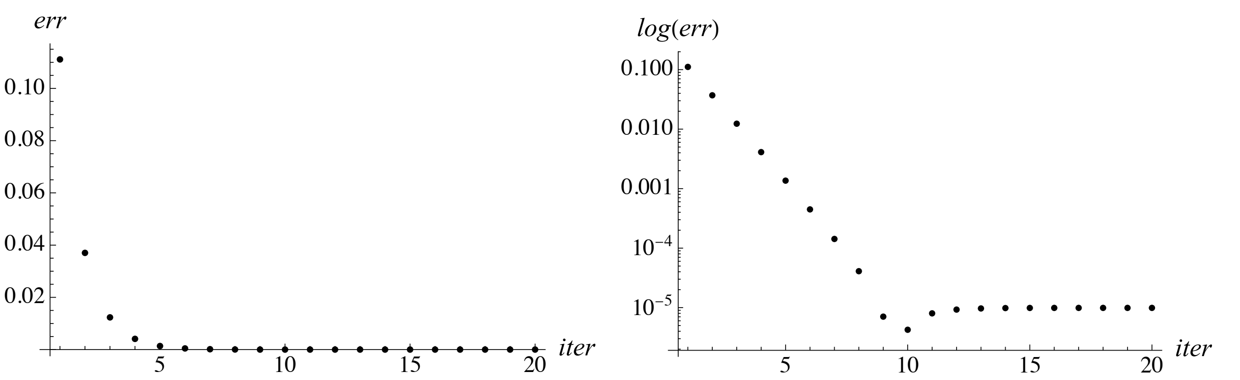
Данное уравнение имеет решение

$$u(x) = x.$$

Таблица 1. Проверка соотвествия погрешности решения погрешности квадратурной формулы

h	err	p
0.1	$3.1 \cdot 10^{-3}$	–
0.05	$6.9 \cdot 10^{-4}$	2.17
0.025	$1.6 \cdot 10^{-4}$	2.11
0.0125	$4.0 \cdot 10^{-5}$	2.00

3.5. Зависимость погрешности от количества итераций



(a) Линейный масштаб (b) Логарифмический масштаб

Рис. 6. График зависимости погрешности решения уравнения (3) от числа итераций

3.6. Зависимость погрешности решения от количества членов разложения ядра общего вида

Рассмотрим ядро $K(x,t) = \cos(xt) + \sin(xt)$. Разложим в ряд Тейлора относительно точки $(0,0)$

$$\begin{aligned} K(x,t) = {} & 1 + s\left(x + O\left(x^{13}\right)\right) + s^2\left(-\frac{x^2}{2} + O\left(x^{13}\right)\right) \\ & + s^3\left(-\frac{x^3}{6} + O\left(x^{13}\right)\right) + s^4\left(\frac{x^4}{24} + O\left(x^{13}\right)\right) \\ & + s^5\left(\frac{x^5}{120} + O\left(x^{13}\right)\right) + s^6\left(-\frac{x^6}{720} + O\left(x^{13}\right)\right) \\ & + s^7\left(-\frac{x^7}{5040} + O\left(x^{13}\right)\right) + s^8\left(\frac{x^8}{40320} + O\left(x^{13}\right)\right) \\ & + s^9\left(\frac{x^9}{362880} + O\left(x^{13}\right)\right) + s^{10}\left(-\frac{x^{10}}{3628800} + O\left(x^{13}\right)\right) \\ & + s^{11}\left(-\frac{x^{11}}{39916800} + O\left(x^{13}\right)\right) + s^{12}\left(\frac{x^{12}}{479001600} + O\left(x^{13}\right)\right) + O\left(s^{13}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть правая часть имеет вид

$$f(x) = -\frac{1}{1+x} + \cos(x) + \frac{\cos\left(\frac{1+x}{2}\right)}{1+x} + \frac{\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)}{-1+x} + \sin(x).$$

Решение соотвествующего интегрального уравнения будет

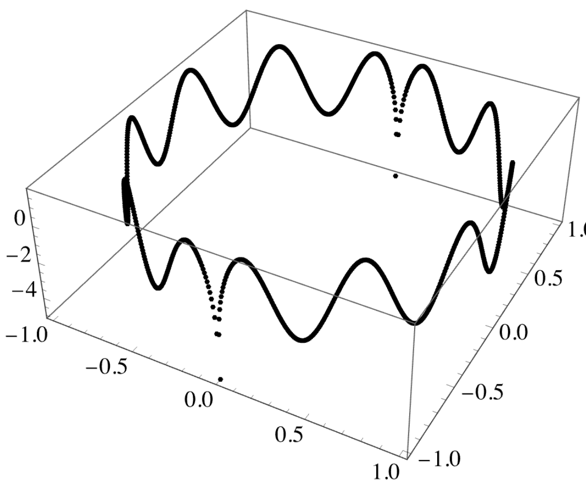
$$u(x) = \sin(x) + \cos(x).$$

Приведем данные о зависимости погрешности решения от числа членов в разложении (4).

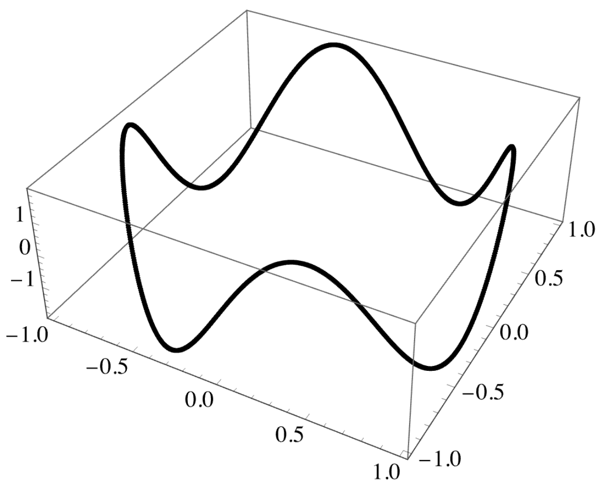
Таблица 2. Зависимость погрешности решения от числа членов в разложении (4)

N	err
2	$1.0055 \cdot 10^{-2}$
3	$5.1941 \cdot 10^{-4}$
4	$3.78069 \cdot 10^{-5}$
5	$1.10393 \cdot 10^{-5}$
6	$1.00909 \cdot 10^{-5}$
7	$1.00959 \cdot 10^{-5}$
8	$1.0096 \cdot 10^{-5}$
9	$1.0096 \cdot 10^{-5}$
10	$1.0096 \cdot 10^{-5}$
11	$1.0096 \cdot 10^{-5}$
12	$1.0096 \cdot 10^{-5}$

3.7. Сингулярные интегральные уравнения

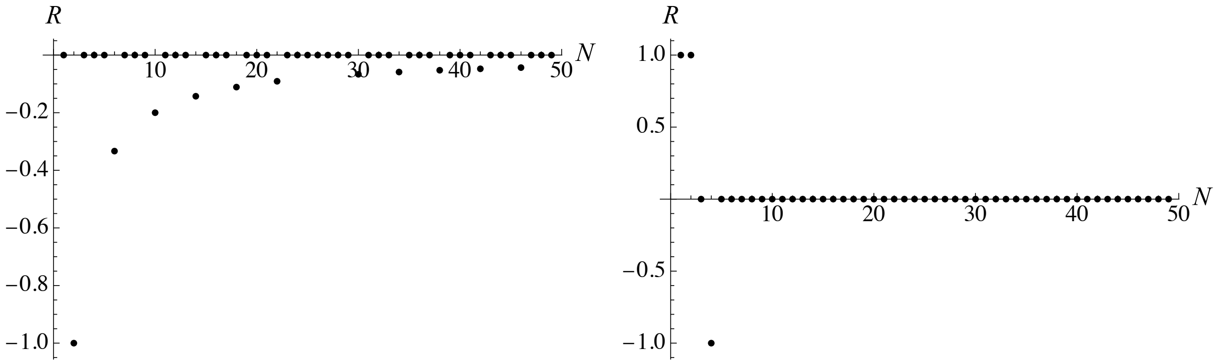


(a) $f(\boldsymbol{r}) = \sin 11\varphi$



(b) $f(\boldsymbol{r}) = \cos 4\varphi$

Рис. 7. Решения сингулярного интегрального уравнения с различными $f(\boldsymbol{r})$ числом узлов $N = 1000$



(a) $f(\boldsymbol{r}) = \sin 11\varphi$ (b) $f(\boldsymbol{r}) = \cos 4\varphi$

Рис. 8. Зависимость переменной R от количества точек интегрирования на контуре