

Оглавление

1. Ответы на контрольные вопросы	2
2. Ответы на дополнительные вопросы	4
3. Аппроксимация граничных условий	7
4. Практическая часть	8
4.1. Примеры решения задач	8
4.2. Порядок аппроксимации схемы	10
4.3. График зависимости числа шагов от размера шага	10

1. Ответы на контрольные вопросы

- 1) **Оцените число действий, необходимое для перехода на следующий слой по времени методом переменных направлений.**

В методе прогонки переход с временного слоя t_k на слой t_{k+1} производится в два этапа. На первом этапе

$$\frac{y^{k+\frac{1}{2}} - y^k}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^k + \varphi$$

Данная схема является неявной по направлению x_1 и явной по направлению x_2 . Поэтому поочередно для каждого индекса $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ вдоль направления x_1 система решается методом прогонки. Число операций деления и умножения в методе прогонки равно $5n$. Значит, число действий будет $5N_1(N_2 - 2)$.

На втором этапе

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{k+1} + \varphi$$

Данная схема является явной по направлению x_1 и неявной по направлению x_2 . Поэтому поочередно для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ вдоль направления x_1 система решается методом прогонки. Число операций деления и умножения в методе прогонки равно $5n$. Значит, число действий будет $5N_2(N_1 - 2)$. Значит, для перехода на следующий временной слой требуется:

$$5N_1(N_2 - 2) + 5N_2(N_1 - 2) = 5N_1N_2 - 10N_1 + 5N_2N_1 - 10N_2 = 10N_1N_2 - 10(N_1 + N_2)$$

арифметических операций. То есть, число действий $10N_1N_2$

- 2) Почему при увеличении числа измерений резко возрастает количество операций для решения неявных схем (по сравнению с одномерной схемой)?

В данном методе при вычислении значений на следующем временном слое методом одномерной прогонки задействуются значения в узлах по другим измерениям. А так как при использовании неявной схемы требуется решить СЛАУ, то при увеличении числа измерений увеличивается и количество неизвестных в СЛАУ, поэтому резко возрастает количество арифметических операций.

- 3) Можно ли использовать метод переменных направлений в областях произвольной формы?

Метод переменных направлений можно использовать для любых выпуклых областей, если в этой области можно ввести связанную сетку по двум направлениям. Если область можно разделить на прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат, то можно несколько раз применять данный метод для этих отдельных прямоугольников, доопределив граничные условия в местах соприкосновения.

- 4) Можно ли использовать метод переменных направлений для решения пространственных и вообще n -мерных задач?

Метод переменных направлений можно использовать для решения пространственных задач, для этого требуется переход с временного слоя t_k на временной слой t_{k+1} производить в 3 этапа. Для n -мерной задачи данный переход надо осуществлять в n этапов:

$$\frac{y^{k+\frac{1}{n}} - y^k}{\frac{\tau}{n}} = \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{n}} + \Lambda_2 y^k + \dots + \Lambda_n y^k + \varphi$$

$$\frac{y^{k+\frac{2}{n}} - y^{k+\frac{1}{n}}}{\frac{\tau}{n}} = \Lambda_1 y^{k+\frac{1}{n}} + \Lambda_2 y^{k+\frac{2}{n}} + \dots + \Lambda_3 y^{k+\frac{1}{n}} + \varphi$$

И так далее, вплоть до n -го этапа

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+\frac{n-1}{n}}}{\frac{\tau}{n}} = \Lambda_1 y^{k+\frac{n-1}{n}} + \Lambda_2 y^{k+\frac{n-1}{n}} + \dots + \Lambda_3 y^{k+1} + \varphi$$

- 5) Можно ли использовать метод переменных направлений на неравномерных сетках?

Метод переменных направлений можно использовать на неравномерных сетках, если эти сетки согласованны, то есть неравномерная сетка, введенная на нулевом слое должна соответствовать сетке на следующем слое.

2. Ответы на дополнительные вопросы

- 1) **Определить порядок аппроксимации второй производной на неравномерной сетке**

$$y_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{y_{\bar{x},i+1} - y_{\bar{x},i}}{h_1 + h_2} = \frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{y_{+1} - y}{h_2} - \frac{y - y_{-1}}{h_1} \right)$$

Разложим по формуле Тейлора в точке $u = u(x_i)$

$$\begin{aligned} \psi_{h_1 h_2} = u_{xx} - \frac{2}{h_1 + h_2} & \left(\frac{1}{h_2} \left[u - u + u_x h_2 + u_{xx} \frac{h_2^2}{2} + O(h_2^3) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_1} \left[u - u + u_x h_1 - u_{xx} \frac{h_1^2}{2} + O(h_1^3) \right] \right) = u_{xx} - u_{xx} + O(h_1 - h_2) \end{aligned}$$

Таким образом погрешность аппроксимации

$$\psi_{h_1 h_2} = O(h), \text{ где } h = \max(h_1, h_2)$$

- 2) **Влияют ли начальные условия на результат работы метода? Обосновать математически.** Рассмотрим две задачи. Стационарную:

$$\operatorname{div}[k(r) \operatorname{grad} u(r)] = -f(r), \quad r \in G, \quad u_\Gamma(r) = \mu(r), \quad k(r) > 0$$

И эволюционную задачу теми же граничными условиями и произвольно выбранными начальными данными:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}[k(r) \operatorname{grad} u(r)] + f(r) \quad r \in G, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

$$v_\Gamma(r, t) = \mu(r), \quad v(r, 0) = v_0(r).$$

Исследуем, насколько решение $v(r, t)$ эволюционной задачи отличается от решения $u(r)$ стационарной задачи. Вычитая стационарное уравнение из эволюционного и учитывая, что $\partial u(r)/\partial t = 0$, получим, что разность $w(r, t) = v(r, t) - u(r)$ удовлетворяет однородному параболическому уравнению с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(r, t) = \operatorname{div}[k(r) \operatorname{grad} w], \quad r \in G, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$w_r(r, t) = 0, \quad w(r, 0) = w_0(r) \equiv v_0(r) - u(r).$$

Поскольку начальные данные в эволюционной задаче были выбраны произвольно, то без ограничения общности можно считать, что начальные данные для $w(r, t)$ также произвольны.

В курсах математической физики показано, что с помощью метода разделения переменных решение данной задачи можно представить в виде ряда:

$$w(r, t) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q e^{-\lambda_q t} w_q(r).$$

Здесь $w_q(r)$ и λ_q — собственные функции и собственные значения многомерной задачи Штурма–Лиувилля:

$$\operatorname{div}[k(r) \operatorname{grad} w_q] + \lambda_q w_q(r) = 0, \quad r \in G, \quad w_q(r)_r = 0,$$

а коэффициенты c_q определяются как коэффициенты Фурье начальных данных:

$$c_q = \int_G w(r, 0) w_q(r) dr.$$

Собственные значения этой задачи положительны и образуют неубывающую последовательность:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

а собственные функции $w_q(r)$ образуют полную ортонормированную систему в $G(r)$.

Из представления решения и свойств собственных значений нетрудно получить неравенство:

$$\|w(r, t)\|_{L_2} = \left(\sum_{q=1}^{\infty} c_q^2 e^{-2\lambda_q t} \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda_1 t} \left(\sum_{q=1}^{\infty} c_q^2 \right)^{1/2} = e^{-\lambda_1 t} \|w_0(r)\|_{L_2}.$$

Оно означает, что разность $w(r, t) = v(r, t) - u(r)$ при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально стремится к нулю по норме $\|\cdot\|_{L_2}$, так что решение $v(r, t)$ эволюционной задачи среднеквадратично сходится к решению $u(r)$ стационарной задачи при $t \rightarrow \infty$.

3) Подобрать оптимальный шаг по времени, чтобы ошибка убывала максимально быстро.

Очевидно, оптимальным будет тот шаг τ_0 , при котором разностное решение выйдет на стационарное за наименьшее число шагов. Для этого надо, чтобы начальные данные за один шаг затухали возможно сильнее.

Затухание начальных данных можно исследовать методом разделения переменных, взятым в строгой форме (поскольку нас интересуют точные значения границ спектра оператора). Собственные функции разностного оператора

$-(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ в прямоугольнике на равномерной сетке равны, как нетрудно проверить,

$$w_{qr}(x) = \sin \frac{\pi q x_1}{a} \sin \frac{\pi r x_2}{b}, \quad 1 \leq q \leq N-1, \quad 1 \leq r \leq M-1.$$

Подставляя их в схему и полагая $\hat{w}_{qr} = \rho_{qr} w_{qr}$, определим множители роста гармоник:

$$\rho_{qr} = \frac{(1 - \alpha_q)(1 - \beta_r)}{(1 + \alpha_q)(1 + \beta_r)},$$

$$\alpha_q = \frac{2\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi q h_1}{2a}, \quad \beta_r = \frac{2\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi r h_2}{2b}.$$

Очевидно, все $|\rho_{qr}| < 1$, т. е. все гармоники затухают; это означает, что схема обладает аппроксимационной вязкостью.

Нетрудно заметить, что входящий в ρ_{qr} сомножитель $\gamma_q = (1 - \alpha_q)/(1 + \alpha_q)$ заключен в пределах $(-1, +1)$ и монотонно убывает при увеличении номера q . Наибольшим по модулю может быть множитель либо с $q = 1$, либо с $q = N - 1$. Считая N достаточно большим, можно положить

$$\sin \frac{\pi h_1}{2a} = \sin \frac{\pi}{2N} \approx \frac{\pi}{2N}, \quad \sin \frac{\pi(N-1)h_1}{2a} = \sin \frac{\pi(N-1)}{2N} \approx 1$$

и представить экстремальные множители (при $\tau \sim h$) в виде

$$\gamma_1 \approx 1 - \frac{\pi^2 \tau}{a^2}, \quad \gamma_{N-1} \approx - \left(1 - \frac{a^2}{\tau N^2} \right).$$

Аналогично, второй сомножитель $(1 - \beta_r)/(1 + \beta_r)$ максимален по модулю либо при $r = 1$, либо при $r = M - 1$. Поэтому $|\rho_{qr}|$ максимален либо при $q = r = 1$, либо при $q = N - 1, r = M - 1$, причем

$$\rho_{11} \approx 1 - \pi^2 \tau \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right), \quad \rho_{N-1, M-1} \approx 1 - \frac{a^2}{\tau N^2} - \frac{b^2}{\tau M^2}.$$

Чем больше шаг τ , тем меньше ρ_{11} и больше $\rho_{N-1, M-1}$, причем оба они близки к 1°; это значит, что первая и последняя гармоники затухают медленно, причем при малом шаге τ быстрее затухает последняя, а при большом – первая гармоника. Выберем шаг τ_0 так, чтобы $\rho_{11}(\tau_0) = \rho_{N-1, M-1}(\tau_0)$; видно, что

$$\tau_0 \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{M^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1/2}. \quad (1)$$

Если изменить шаг по сравнению с τ_0 , то либо первая, либо последняя гармоника будет затухать медленнее, чем при $\tau = \tau_0$. Следовательно, τ_0 есть оптимальный шаг.

3. Аппроксимация граничных условий

Имеем следующие граничные условия слева и справа:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = g_l(x_2), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_x} = g_r(x_2).$$

Рассмотрим левую границу ($x_1 = 0$). Аппроксимируем производную:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = g_l(x_{2j}) \implies u_{-1,j} = u_{1,j} - 2hg_l(x_{2j})$$

Аппроксимация второй производной в узле $i = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=0} &\approx \frac{u_{-1,j} - 2u_{0,j} + u_{1,j}}{h^2} \\ \frac{u_{1,j} - 2hg_l(x_{2j}) - 2u_{0,j} + u_{1,j}}{h^2} &= \frac{2u_{1,j} - 2u_{0,j}}{h^2} - \frac{2g_l(x_{2j})}{h} \end{aligned}$$

Таким образом схема в $i = 0$ имеет вид:

$$\frac{u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n}{\tau} = \frac{2}{h^2}(u_{1,j}^{n+1} - u_{0,j}^{n+1}) - \frac{2g_l(x_{2j})}{h}$$

Рассмотрим правую границу ($x_1 = L_x$). Аппроксимируем производную:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=L_x} \approx \frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h} = g_r(x_{2j}) \implies u_{N+1,j} = 2hg_r(x_{2j}) + u_{N-1,j}$$

Аппроксимация второй производной в узле $i = N$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_1=L_x} &\approx \frac{u_{N-1,j} - 2u_{N,j} + u_{N+1,j}}{h^2} \\ &= \frac{u_{N-1,j} - 2u_{N,j} + (2hg_r(x_{2j})) + u_{N-1,j}}{h^2} = \frac{2u_{N-1,j} - 2u_{N,j}}{h^2} + \frac{2g_r(x_{2j})}{h} \end{aligned}$$

Таким образом схема в $i = N$ имеет вид:

$$\frac{u_{N,j}^{n+1} - u_{N,j}^n}{\tau} = \frac{2}{h^2}(u_{N-1,j}^{n+1} - u_{N,j}^{n+1}) + \frac{2g_r(x_{2j})}{h}$$

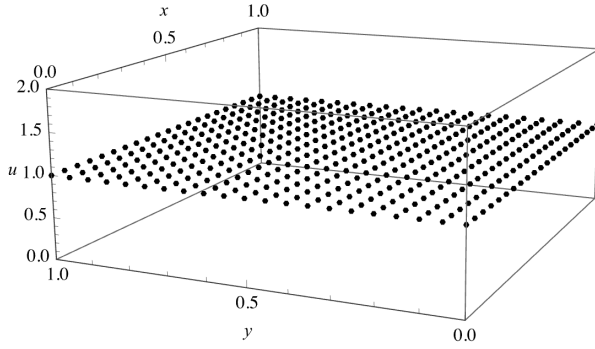
4. Практическая часть

4.1. Примеры решения задач

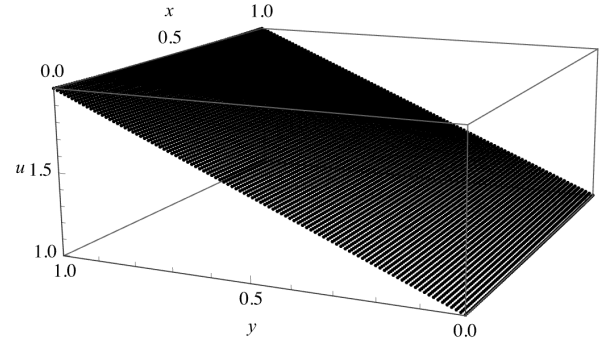
Рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x_1, x_2) \in G = [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x_1, x_2) = 1, & (x_1, x_2) \in \partial G. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_2=0} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_2=1} = 1, \\ u|_{x_1=0} = 1 + x_2, \quad u|_{x_1=1} = 1 + x_2. \end{cases} \quad (3)$$



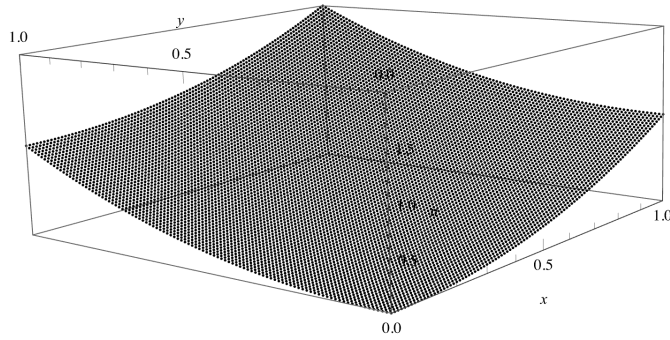
(а) Задача (2)



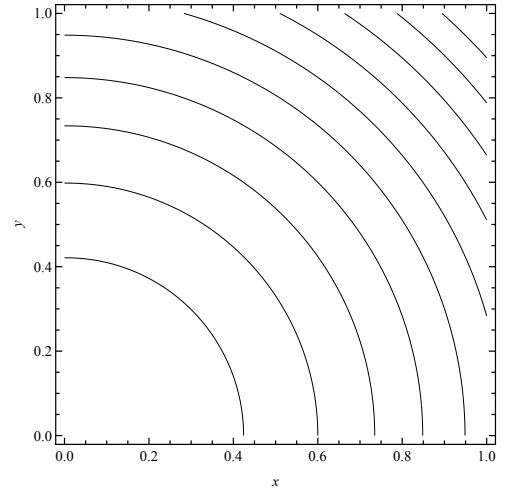
(б) Задача (3)

Рис. 1. Визуализация решения задач (2) и (3)

$$\begin{cases} \Delta u = 4, & (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_1=1} = 2, \\ u|_{x_2=0} = x_1^2, \quad u|_{x_2=1} = 1 + x_1^2. \end{cases} \quad (4)$$



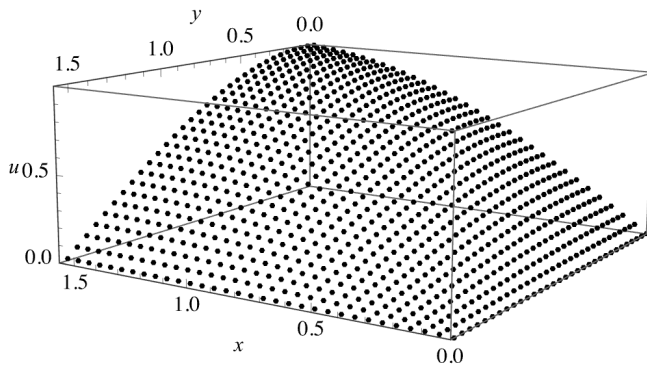
(а) Трехмерная визуализация



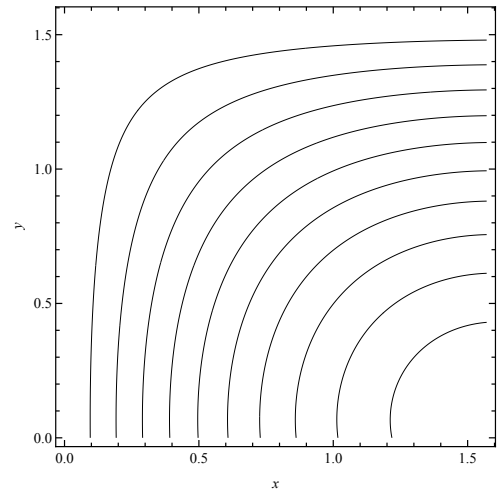
(б) Линии уровня

Рис. 2. Визуализация решения задачи (4)

$$\begin{cases} \Delta u = -2 \sin x_1 \cos x_2, & (x_1, x_2) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2], \\ \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{x_2=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{x_2=\pi/2} = -\sin x_1, \\ u|_{x_1=0} = 0, \quad u|_{x_1=\pi/2} = \cos x_2. \end{cases} \quad (5)$$



(а) Трехмерная визуализация



(б) Линии уровня

Рис. 3. Визуализация решения задачи для варианта №8 (5)

4.2. Порядок аппроксимации схемы

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1], t \leq T_0 \\ u|_{t=0} = \sin(4\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \\ u|_{x_1=0} = \sin(x_1), u|_{x_1=1} = 0 \\ u|_{x_2=0} = \sin(x_1), u|_{x_2=1} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Данная задача имеет решение

$$u(x_1, x_2) = e^{-25\pi^2 t} \sin(4\pi x_1) \sin(3\pi x_2). \quad (7)$$

Найдем погрешность схемы. Рассмотрим момент времени $T_0 = 0.025$.

Таблица 1. Порядок аппроксимации схемы

Параметры сетки		err	$\frac{err_{i-1}}{err_i}$
$h_1 = h_2$	τ		
0.1	0.001	$1.81 \cdot 10^{-3}$	—
0.05	0.0005	$3.61 \cdot 10^{-4}$	5.00
0.025	0.00025	$8.99 \cdot 10^{-5}$	4.02
0.0125	0.000125	$2.22 \cdot 10^{-5}$	4.06
0.00625	$6.25 \cdot 10^{-5}$	$5.52 \cdot 10^{-6}$	4.01
0.003125	$3.125 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	4.00

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -2 \sin(x_1) \cos(x_2), & (x_1, x_2) \in [0, \pi] \times [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{x_1=0} = -\cos(x_2), \frac{\partial u}{\partial n}|_{x_1=\pi} = -\cos(x_2), \\ u|_{x_2=0} = \sin(x_1), u|_{x_2=\pi} = -\sin(x_1). \end{cases} \quad (8)$$

Данная задача имеет решение

$$u(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2). \quad (9)$$

4.3. График зависимости числа шагов от размера шага

Пусть τ — величина шага, а N — число шагов. Рассмотрим задачу (8) и будем проводить расчет до достижения точности решения $\varepsilon = 10^{-2}$. Выберем $h_1 = h_2 = 0.01$. По формуле (1) имеем $\tau_0 = 0.01$.

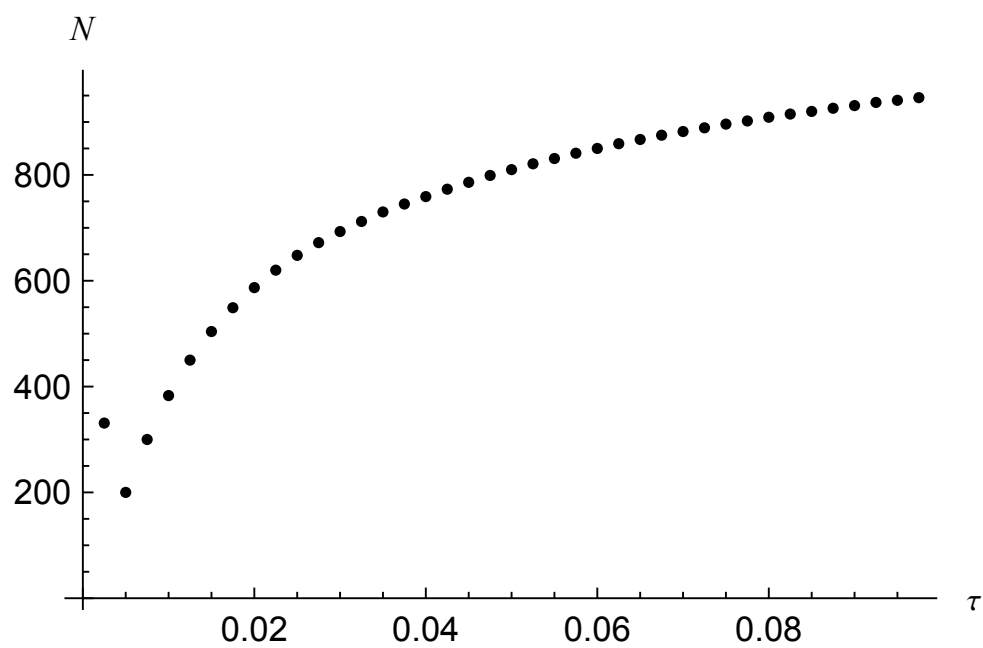


Рис. 4. График зависимости числа шагов N от величины шага τ