



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки
КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

***Численное решение линейного интегрального
уравнения Вольтерра второго рода***

Студент _____
ФН2-51Б
(Группа)

(Подпись, дата)

И. Е. Дыбко
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

К. Е. Казаков
(И. О. Фамилия)

2025 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Аналитические методы решения	4
2.1. Решение уравнений с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$ через эквивалентное дифференциальное уравнение	4
2.2. Решение уравнения с ядром $K(x, t) = K(x - t)$ через интегральное преобразование Лапласа	5
3. Численные методы решения	6
3.1. Метод квадратур	6
3.2. Метод осреднения функциональных поправок	9
4. Программная реализация методов решения	11
5. Сравнительный анализ методов	12
Заключение	16
Список использованных источников	17

Введение

Интегральные уравнения Вольтерра второго рода находят широкое применение в математическом моделировании и решении прикладных задач, включая теорию теплопроводности, электротехнику и динамику систем. Их изучение и решение представляют собой одну из фундаментальных задач прикладной математики.

В работе рассматриваются как аналитические подходы, основанные на приведении к эквивалентному дифференциальному уравнению и использовании интегральных преобразований Лапласа, так и численные методы, включая метод квадратур и метод осреднения функциональных поправок.

Целью данной работы является разработка программ для аналитического и численного решения уравнения Вольтерра второго рода при различных ядрах и правых частях.

Актуальность работы обусловлена необходимостью разработки и реализации эффективных программных решений с использованием современных математических пакетов. Особое внимание удалено сравнительному анализу точности, что позволяет оценить их практическую значимость для реальных приложений и повысить эффективность вычислительных процедур.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача о решении линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которые имеют вид

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$), $a, b \in \mathbb{R}$, $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, называемая правой частью интегрального уравнения (1).

Функции $y(x)$ и $f(x)$ будем считать непрерывными на $[a, b]$. Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ будем полагать непрерывным в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$. Отметим, что в более общем случае достаточно потребовать, чтобы $y(x)$ и $f(x)$ были квадратично интегрируемыми по Лебегу на $[a, b]$, а ядро $K(x, t)$ было квадратично интегрируемым в S , т.е. удовлетворяло условию

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt = B^2 < \infty, \quad (2)$$

где B — постоянная. В формуле (2) полагается, что $K(x, t) \equiv 0$ при $t > x$.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение (1) будем называть однородным, а при $f(x) \not\equiv 0$ — неоднородным.

Как доказано в [1], уравнение (1) при выполнении ограничений, описанных выше, имеет одно и только одно решение в классе L_2 , с точностью до нуль-функций, обращающихся в нуль почти всюду. Общей аналитической формой решения уравнения (1) является выражение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \quad (3)$$

где функция $R(x, t)$, называемая *резольвентой*, определяется исключительно ядром $K(x, t)$.

2. Аналитические методы решения

2.1. Решение уравнений с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$ через эквивалентное дифференциальное уравнение

Получим решение уравнения (1) в виде (3). Как показано в [2], уравнение (1) с ядром

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{(x - t)^{i-1}}{(i - 1)!}$$

эквивалентно дифференциальному уравнению вида

$$w^{(n)} + \alpha_1(x)w^{(n-1)} + \dots + \alpha_n(x)w = f(x)$$

с непрерывными коэффициентами и при начальных условиях:

$$w(a) = C_0, \quad w'(a) = C_1, \dots, w^{(n-1)}(a) = C_{n-1}.$$

Пусть

$$y = w''_{xx}, \quad (4)$$

где $w = w(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$w''_{xx} - \varphi(x)w'_x - \psi(x)w = f(x), \quad (5)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w(a) = C_0, \quad w'_x(a) = C_1. \quad (6)$$

Покажем, что дифференциальное уравнение (5) может быть сведено к уравнению (1) с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$, и найдем постоянные C_0, C_1 . Выразим

$w'(x)$ и $w(x)$ через $y(x)$:

$$\begin{aligned} w'(x) &= C_1 + \int_a^x y(s) ds, \\ w(x) &= C_0 + C_1(x-a) + \int_a^x \int_a^s y(t) dt ds = C_0 + C_1(x-a) + \int_a^x y(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

После подстановки $w'(x)$ и $w(x)$ в (5) получим

$$y(x) - \int_a^x [\varphi(x) + \psi(x)(x-t)] y(t) dt = f(x) + \varphi(x)C_1 + \psi(x)[C_0 + C_1(x-a)].$$

В случае, если $C_0 = C_1 = 0$ имеем уравнение (1) с заданным ядром.

Пусть $w_1(x)$ — нетривиальное частное решение уравнения (5) при $f(x) \equiv 0$, а $w_1(a) \neq 0$. Тогда другое нетривиальное частное решение $w_2(x)$ можно определить по формуле Лиувилля — Остроградского:

$$w_2(x) = w_1(x) \int_a^x \frac{\Phi(t)}{[w_1(t)]^2} dt, \quad \Phi(x) = \exp \left[\int_a^x \varphi(s) ds \right].$$

Решение неоднородного уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), дается формулой

$$w(x) = w_2(x) \int_a^x \frac{w_1(t)}{\Phi(t)} f(t) dt - w_1(x) \int_a^x \frac{w_2(t)}{\Phi(t)} f(t) dt. \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в формулу (4), получим

$$y(x) = \frac{(w_1(x)w'_2(x) - w_2(x)w'_1(x)) f(x)}{\Phi(x)} + w''_2(x) \int_a^x \frac{f(t)w_1(t)}{\Phi(t)} dt - w''_1(x) \int_a^x \frac{f(t)w_2(t)}{\Phi(t)} dt.$$

Таким образом получено решение исходного уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t) dt,$$

где резольвента $R(x,t)$ может быть выражена через функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$

$$R(x,t) = \frac{1}{\Phi(t)} [w''_2(x)w_1(t) - w''_1(x)w_2(t)].$$

2.2. Решение уравнения с ядром $K(x,t) = K(x-t)$ через интегральное преобразование Лапласа

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $K(x-t)$ (уравнение типа свертки):

$$y(x) - \int_0^x K(x-t)y(t)dt = f(x). \quad (8)$$

Предположим, что функции $K(\xi) = K(x - t)$ и $f(x)$ непрерывны при $\xi, x \geq 0$ и являются функциями-оригиналами интегрального преобразования Лапласа. Пусть тогда для постоянных $M_1, M_2 > 0$ и s_1, s_2 верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|K(\xi)| &\leq M_1 e^{s_1 \xi}, \\ |f(x)| &\leq M_2 e^{s_2 x}.\end{aligned}$$

Для решения $y(x)$ уравнения (8) при $x \geq 0$ верна оценка

$$|y(x)| \leq M_3 e^{s_3 x}, \quad s_3 > \max\{s_1, s_2\}.$$

Таким образом, решение $y(x)$ есть функция-оригинал.

Пусть

$$y(x) \doteq \tilde{y}(p), \quad K(\xi) \doteq \tilde{K}(p), \quad f(x) \doteq \tilde{f}(p).$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (8). Тогда в силу теоремы о свертке [3] имеем

$$\tilde{y}(p) - \tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p),$$

откуда

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (9)$$

Функция $\tilde{y}(p)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_3$. Применим к (9) обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (8)

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)} e^{px} dx.$$

3. Численные методы решения

3.1. Метод квадратур

Метод квадратур состоит в замене интегрального уравнения (1) аппроксимирующей системой алгебраических уравнений относительно дискретных значений искомой функции и ее решении. Данная замена основывается на приближении квадратурными формулами интегрального оператора, входящего в уравнение.

Квадратурные формулы. Рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, разбивающих отрезок $[a, b]$ на $n - 1$ частей, где $h = \frac{b-a}{n-1}$ — постоянный шаг интегрирования. Тогда в общем виде определенный интеграл можно представить [4] по формуле

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) + \varepsilon[\varphi], \quad (10)$$

где A_i — числовые коэффициенты, как правило $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$, $\varepsilon[\varphi]$ — ошибка.

Аппроксимирующие системы линейных алгебраических уравнений.

Запишем уравнение (1) в виде

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t)y(t)dt = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Заменяя интеграл квадратурной формулой (10) и выбирая x_j ($j = 1, 2, \dots, i$), получим систему уравнений

$$y(x_1) = f(x_1), \quad y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_{ij}K(x_i, x_j)y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i[y], \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (11)$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, $\varepsilon_i[y]$ — ошибка аппроксимации. Вводя обозначения:

$$y_i = y(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad K_{ij} = K(x_i, x_j), \quad (12)$$

полагая $\varepsilon_i[y]$ малыми и отбрасывая их, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$y_1 = f_1, \quad y_i - \sum_{j=1}^i A_{ij}K_{ij}y_j = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (13)$$

позволяющую найти приближенные значения y_i в узлах x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В силу равенства $y(a) = f(a)$ в уравнении (1) и из системы (13), получим рекуррентную формулу

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}K_{ij}y_j}{1 - A_{ii}K_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

справедливую при условии

$$1 - A_{ii}K_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Применение общей формулы трапеции. Пусть задана сетка узлов (необязательно равномерная) по x , совпадающая с сеткой узлов по t (т.е. $x_i = t_i$):

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b,$$

где n — число узлов. Тогда при постоянном шаге $h = \text{const}$ формулы трапеции имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h, \\ x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n-1}. \end{aligned}$$

В таком случае при $h \neq \frac{2}{K_{ii}}$ верны следующие рекуррентные формулы:

$$y_1 = f_1,$$

$$y_i = \frac{f_i + h \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j}{1 - \frac{h}{2} K_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

В случае переменного шага $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$ применение формул трапеций приводит к решению уравнения (1) в виде следующих рекуррентных формул [5]:

$$y_1 = f_1,$$

$$y_2 = \frac{f_2 + \frac{h_2}{2} K_{21} y_1}{1 - \frac{h_2}{2} K_{22}},$$

$$y_i = \frac{f_i + \frac{h_2}{2} K_{i1} y_1 + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} K_{ij} y_j}{1 - \frac{h_i}{2} K_{ii}}, \quad i = 3, 4, \dots, n. \quad (14)$$

Формулы (14) справедливы при условии $h_i \neq \frac{2}{K_{ii}}$.

Оценка погрешности решения при использовании формул трапеций.

Приведем формулы, дающие оценку погрешности решения при использовании формул (14). Вычтем (12) из (11), имеем

$$\Delta y_i = \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} \Delta y_j = \varepsilon_i[y], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Δy_i — разность между решениями более точной (11) и менее точной (12) системами. Как показано в [5] для ошибок аппроксимации $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_i[y]$ верно приближенное представление

$$\varepsilon_i \approx -\frac{1}{12} \sum_{j=2}^i h_j^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} [K(x_i, t)y(t)] \right\}_{t=x_j}, \quad (15)$$

где $y(t)$ уже найдена на сетке узлов t_j , $j = 1, 2, \dots, n$ по формулам (14). В свою очередь, производная второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial s^2} [K(x_i, s)y(s)]$ вычисляется по следующему выражению:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} [K(x_i, s)y(s)] \right\} = \begin{cases} 2 \left[\frac{K_{ij-1} y_{j-1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} - \frac{K_{ij} y_j}{h_j h_{j+1}} + \frac{K_{ij+1} y_{j+1}}{(h_j + h_{j+1})h_{j+1}} \right], & j = 2, \dots, i-1, \\ 2 \left[\frac{K_{ii-2} y_{i-2}}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)} - \frac{K_{ii-1} y_{i-1}}{h_{i-1} h_i} + \frac{K_{ii} y_i}{(h_{i-1} + h_i)h_i} \right], & j = i. \end{cases}$$

В результате имеем следующие формулы для оценки погрешности [5]:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &\approx \Delta y_2 \approx 0, \\ \Delta y_i &\approx \frac{\varepsilon_i + \sum_{j=2}^{i-1} \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right) K_{ij} \Delta y_j}{1 - \frac{h_i}{2} K_{ii}}, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что формулы (16) учитывают лишь погрешность квадратуры. Формулы, учитывающие погрешность правой части приведены, например, в [5].

3.2. Метод осреднения функциональных поправок

Интегральное уравнение (1) может быть численно решено методом осреднения функциональных поправок, изложенным в [6]. При его рассмотрении функцию $f(x)$ будем считать непрерывной при $a \leq x \leq a+h \leq b$, где h — шаг сетки. Относительно ядра $K(x, t)$ в дальнейшем будем ограничиваться предположением, что оно удовлетворяет одному из следующих условий:

1. функция $K(x, t)$ является непрерывной почти всюду, т.е. она ограничена в области (при $a \leq x \leq t \leq b$), и все ее точки разрыва, если таковые существуют, являются точками разрыва 1-го рода;
2. функция $K(x, t)$ является полярным ядром вида

$$K(x, t) = \frac{\tilde{K}(x, t)}{(x-t)^\theta}, \quad (0 < \theta < 1),$$

где $\tilde{K}(x, t)$ — непрерывная функция обоих аргументов при $a \leq x \leq t \leq b$.

Для построения приближенного решения уравнения (1) строятся последовательные приближения. Как показано в [6], на первом шаге итерационный процесс задается следующим образом:

$$y_1(x) = f(x) + \alpha_1 \int_a^x K(x, t) dt,$$

где параметр α_1 определяется как

$$\alpha_1 = \frac{1}{hD} \int_a^{a+h} f(x) dx,$$

а величина D вычисляется по формуле

$$D = D(h) = 1 - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} dx \int_a^x K(x, t) dt, \quad D \neq 0.$$

На n -м шаге приближённое решение представляется в виде

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) [y_{n-1}(t) + \alpha_n] dt,$$

что можно записать в следующей форме:

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt + \alpha_n \int_a^x K(x, t) dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

Введём функциональную поправку, определяемую как разность между текущим и предыдущим приближением

$$\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), \quad \delta_1(x) = y_1(x).$$

Она задаётся следующим образом:

$$\delta_n(x) = \int_a^{a+h} [K(x, t) - K_1(x)] [\delta_{n-1}(t) - \tau \alpha_{n-1}] dt + \alpha_n h K_1(x),$$

где τ — произвольный параметр, а осредненная функциональная поправка α_n определяется из выражения

$$\alpha_n = \frac{1}{hD} \int_a^{a+h} dx \int_a^{a+h} [K(x, t) - K_1(x)] [\delta_{n-1}(t) - \tau \alpha_{n-1}] dt.$$

Функция $K_1(x)$ представляет собой усредненное значение ядра $K(x, t)$ на интервале длины h и вычисляется следующим образом:

$$K_1(x) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} K(x, t) dt.$$

Достаточные условия сходимости метода. Приведем условия сходимости метода, вывод которых приведен в [6].

- Пусть $D > 0$ и на отрезке $[a, a+h]$

$$|y(x) - \alpha_1| \leq \delta, \quad \int_a^x |K(x, t)| dt \leq L.$$

Пусть

$$N = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \left| \int_t^{a+h} K(x, \xi) dx \right| dt.$$

Тогда, функция $y_n(x)$ в промежутке $[a, b]$ будет равномерно стремиться к $y(x)$ при $n \rightarrow \infty$, если

$$\tilde{\varepsilon}_1 = L + (1 + L) \frac{N}{D} < 1.$$

- В случае интегрируемого ядра $K(x, t)$ вместе со своим абсолютным значением при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ верен признак сходимости процесса, менее ограничительный чем предыдущий. Положим

$$K = \frac{1}{h^2} \int_a^{a+h} dx \int_a^x K(x, t) dt, \quad R = h \sup_{a \leq x \leq a+h} |K_1(x) - K|;$$

$$\bar{L} = \sup_{a \leq x \leq a+h} \int_a^{a+h} |K(x, t) - K_1(x)| dt; \quad \bar{N} = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \left| \int_a^{a+h} [K(x, t) - K_1(x)] dx \right| dt.$$

Тогда метод сходится при условии

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \bar{L} + R \frac{\bar{N}}{|D|} < 1.$$

3. В случае, когда ядро $K(x, t)$ интегрируемо с квадратом при $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$, метод сходится при

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_3 &= \sqrt{I^2 - J^2} \left(1 + \frac{1}{|D|} \sqrt{J^2 - h^2 K^2} \right) < 1, \\ I^2 &= \int_a^{a+h} dx \int_a^x K^2(x, t) dt, \\ J^2 &= h \int_a^{a+h} K_1^2(x) dx.\end{aligned}$$

4. Программная реализация методов решения

Аналитические методы. Указанные в Разделе 2 аналитические методы решения интегрального уравнения (1) были реализованы в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Метод, описанный в Разделе 2.1, реализован в виде программного модуля, использующего символьное решение дифференциальных уравнений `DSolve` и вычисление интегралов `Integrate`. В начале модуля реализован механизм автоматического определения переменной, используемой в выражениях φ , ψ , и f посредством функции `Variables`, которая извлекает символы из заданных входных данных. Это позволяет преобразовывать исходные символьные выражения в функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, и $f(x)$ с использованием подстановок, обеспечивая универсальность и корректность дальнейших вычислений.

Аналогичным образом реализован метод, описанный в Разделе 2.2, с использованием функций для применения прямого и обратного интегрального преобразования Лапласа `LaplaceTransform` и `InverseLaplaceTransform` соответственно.

Численные методы. Описанные в Разделе 3 численные методы реализованы в математическом пакете MATLAB.

Метод осреднения функциональных поправок реализован с применением встроенных функций `integral` для одномерного и `integral2` для двумерного численного интегрирования соответственно. Для вычисления значений подынтегральных выражений в точках внутри интервала интегрирования, отсутствующих в исходной сетке, применяется сплайн-интерполяция, реализованная с помощью функции `interp1`.

Итерационный процесс организован с проверкой сходимости на основе нормы максимальной разности $\max_{x \in [a,b]} |y^{(n)}(x) - y^{(n-1)}(x)|$.

5. Сравнительный анализ методов

Проведем сравнительный анализ численных методов. Будем решать уравнения на отрезке $[a, b]$ с различными ядрами и правыми частями, под нормой ошибки будем понимать $err = \|y(x) - y_{\text{числ}}\|_C = \max_{x_i \in [a,b]} |y(x_i) - y_{\text{числ}}^{(i)}|$, $i = \overline{1, N}$, где N — число узлов сетки. В методе квадратур будем использовать равномерную сетку. В методе функциональных поправок будем считать $\varepsilon = 10^{-6}$ и $\tau = 1$, если не указано иное.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \int_0^x y(t)dt = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad (17)$$

решение которого может быть найдено методом, описанным в Разделе 2.1, и имеет вид $y(x) = 2e^x - x - 1$. Как следует из данных, представленных в Табл. 1, метод осреднения функциональных поправок демонстрирует более высокую точность по сравнению с методом квадратур. Увеличение длины интервала до $[0, 20]$ привело к существенному снижению точности последнего. Отметим, что увеличение количества узлов в методе осреднения функциональных поправок сопровождается ростом вычислительных затрат, однако в некоторых случаях позволяет повысить точность расчетов. Соответствующие графики ошибок приведены на Рис. 1.

Таблица 1. Точность численных методов для уравнения (17)

(а) Метод квадратур			(б) Метод оср. функ. поправок			
$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки	$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки	$iter$
$[0, 5]$	0.005	$3.098 \cdot 10^{-3}$	$[0, 5]$	0.005	$9.612 \cdot 10^{-8}$	23
$[0, 5]$	0.001	$1.237 \cdot 10^{-4}$	$[0, 5]$	0.001	$8.829 \cdot 10^{-10}$	26^1
$[0, 15]$	0.001	8.173	$[0, 15]$	0.005	$8.577 \cdot 10^{-5}$	51
$[0, 20]$	0.001	1617.3	$[0, 20]$	0.01	0.265	65
$[0, 20]$	0.0001	16.172	$[0, 20]$	0.005	$1.680 \cdot 10^{-2}$	65

¹ $\varepsilon = 10^{-8}$.

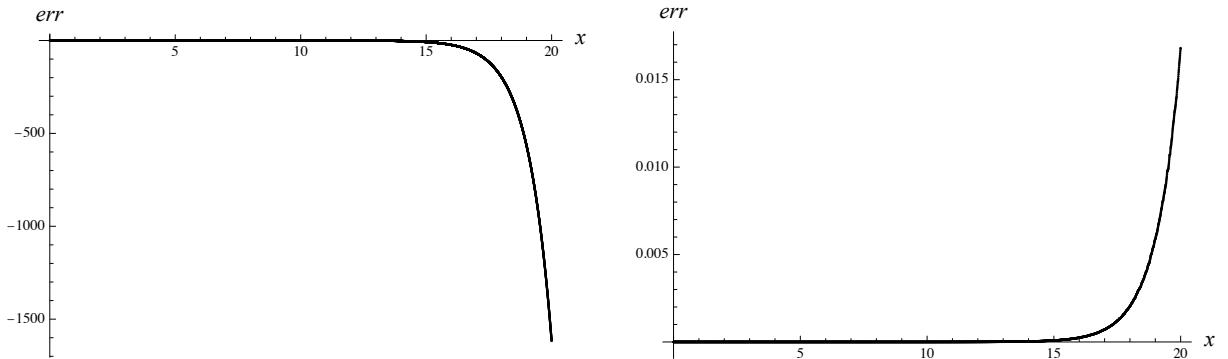
(a) Метод квадратур на отрезке $[0, 20]$ с шагом $h = 0.001$ (б) Метод оср. функ. поправок на отрезке $[0, 20]$ с шагом $h = 0.005$

Рис. 1. Графики ошибок решений уравнения (17)

Пример 2.

Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = \sin x + \cos x, \quad (18)$$

решение которого есть $y(x) = x + 1$, которое может быть найдено используя метод, основанный на преобразовании Лапласа. В Табл. 2 представлены нормы ошибок численных методов, использованных для решения задачи. Анализ данных позволяет сделать вывод, что метод осреднения функциональных поправок демонстрирует существенно более высокую точность по сравнению с методом квадратур, особенно на длинных интервалах. На основании графика ошибок метода осреднения функциональных поправок (Рис. 2б) можно отметить, что величина ошибки приближается к нулю на большей части интервала, что свидетельствует о высокой точности данного подхода. Стоит отметить, что уменьшение шага сетки приводит к снижению точности метода.

Таблица 2. Точность численных методов для уравнения (18)

(а) Метод квадратур

$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки
$[0, 20]$	0.01	$1.312 \cdot 10^{-2}$
$[0, 20]$	0.005	$3.279 \cdot 10^{-3}$
$[0, 50]$	0.01	0.184
$[0, 100]$	0.01	1.426

(б) Метод оср. функ. поправок

$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки	iter
$[0, 20]$	0.5	$8.560 \cdot 10^{-8}$	31
$[0, 20]$	0.1	$1.103 \cdot 10^{-7}$	32
$[0, 50]$	0.5	$2.000 \cdot 10^{-10}$	72 ¹
$[0, 100]$	0.5	$7.000 \cdot 10^{-10}$	134 ¹
$[0, 100]$	0.1	$3.400 \cdot 10^{-9}$	134 ¹

¹ $\varepsilon = 10^{-8}$.

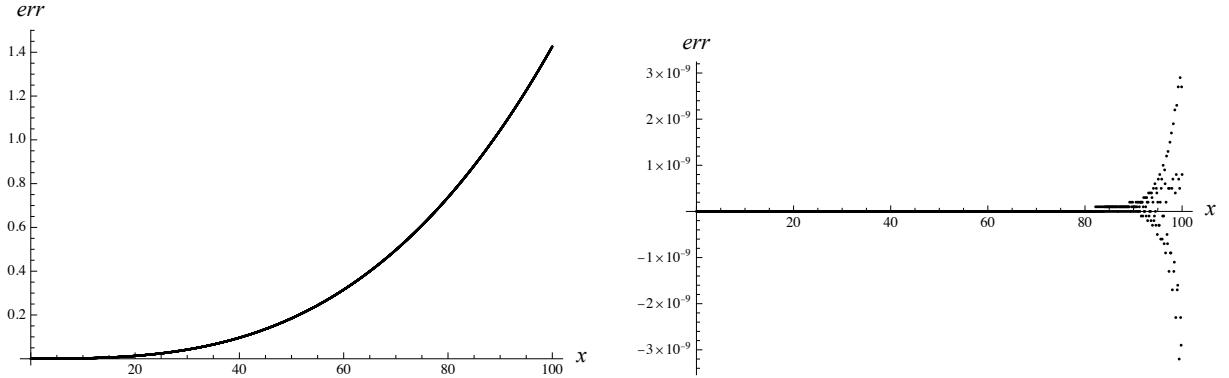
(a) Метод квадратур на отрезке $[0, 100]$ с шагом $h = 0.01$ (б) Метод оср. функ. поправок на отрезке $[0, 100]$ с шагом $h = 0.1$ и $\varepsilon = 10^{-8}$

Рис. 2. Графики ошибок решений уравнения (18)

Пример 3.

Рассмотрим уравнение, приведенное в [6],

$$y(x) + \frac{1}{4} \int_0^x \sqrt{x+3t} y(t) dt = 1 + x \left(1 + \frac{7}{18} \sqrt{x} + \frac{29}{135} x^{\frac{3}{2}} \right), \quad (19)$$

имеющеее решение $y(x) = x + 1$. Метод осреднения функциональных поправок при $b > 18.5$ теряет сходимость при $\varepsilon = 10^{-6}$, тогда как метод квадратур обеспечивает решение с приемлемой точностью. Анализ показывает, что на участке $[0, 10]$ ошибка метода квадратур достигает значительных величин, однако на последующих подинтервалах наблюдается её стремление к нулю. Графическое представление ошибок приведено на Рис. 3, а численные значения ошибок представлены в Табл. 3.

Таблица 3. Точность численных методов для уравнения (19)

(а) Метод квадратур

$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки
$[0, 10]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 15]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 20]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 50]$	0.025	$1.355 \cdot 10^{-5}$

(б) Метод оср. функ. поправок

$[a, b]$	Шаг	Норма ошибки	$iter$
$[0, 10]$	0.1	$1.473 \cdot 10^{-7}$	40
$[0, 15]$	0.1	$9.170 \cdot 10^{-8}$	65
$[0, 18.5]$	0.005	$3.321 \cdot 10^{-7}$	85
$[0, 20]$	0.05	$4.697 \cdot 10^{-5}$	91 ¹
$[0, 23]$	0.05	$4.955 \cdot 10^{-2}$	106 ²

¹ $\varepsilon = 10^{-4}$ ² $\varepsilon = 0.1$

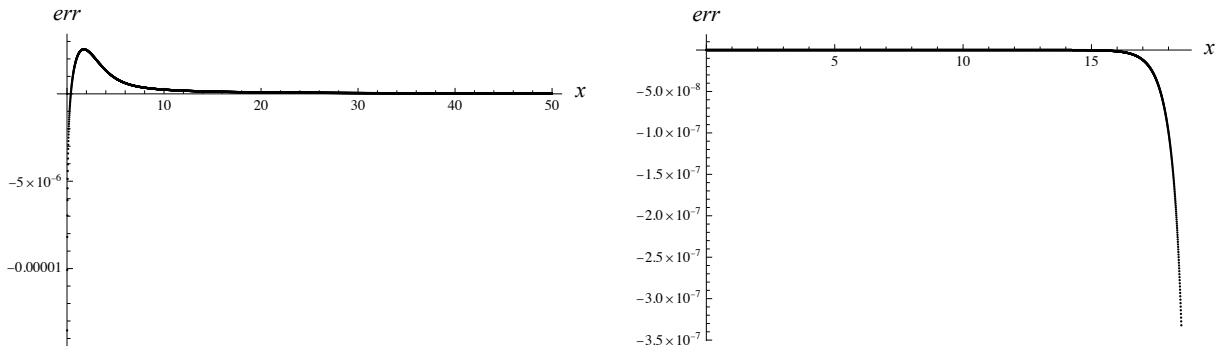
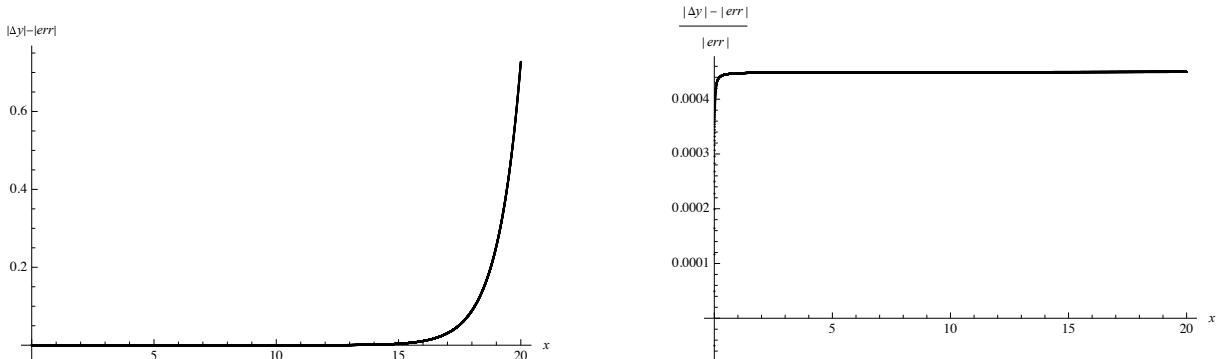
(a) Метод квадратур на отрезке $[0, 50]$ с шагом $h = 0.025$ (б) Метод оср. функ. поправок на отрезке $[0, 18.5]$ с шагом $h = 0.005$

Рис. 3. Графики ошибок решений уравнения (19)

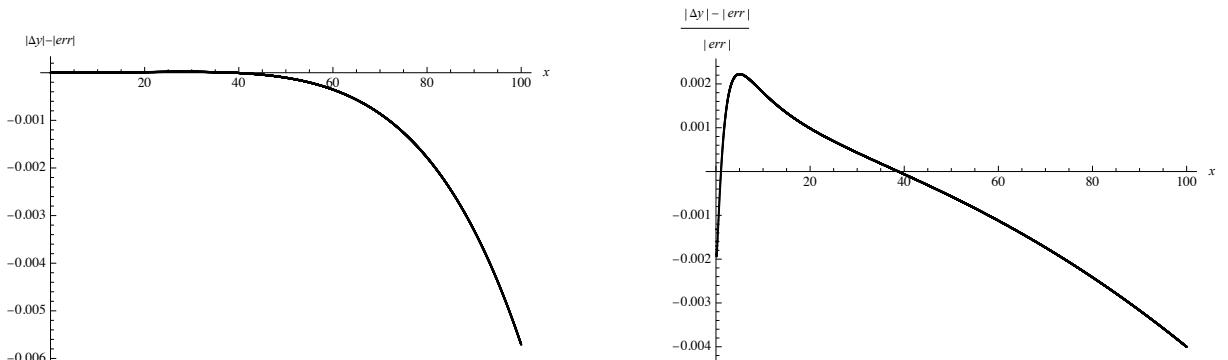
Сравнение теоретической и экспериментальной ошибок метода квадратур. Ошибка метода квадратур может быть оценена с использованием формулы (16). На Рис. 4, Рис. 5 и Рис. 6 представлены графики разности ошибок метода квадратур, вычисленных на основе точного решения, и теоретической формулы. Как видно из представленных данных, формула обеспечивает достаточно высокую точность оценки, однако в некоторых случаях не выступает в роли верхней границы ошибки.



(а) Абсолютная разность

(б) Относительная разность

Рис. 4. Разность между ошибками метода квадратур при решении уравнения (17)



(а) Абсолютная разность

(б) Относительная разность

Рис. 5. Разность между ошибками метода квадратур при решении уравнения (18)

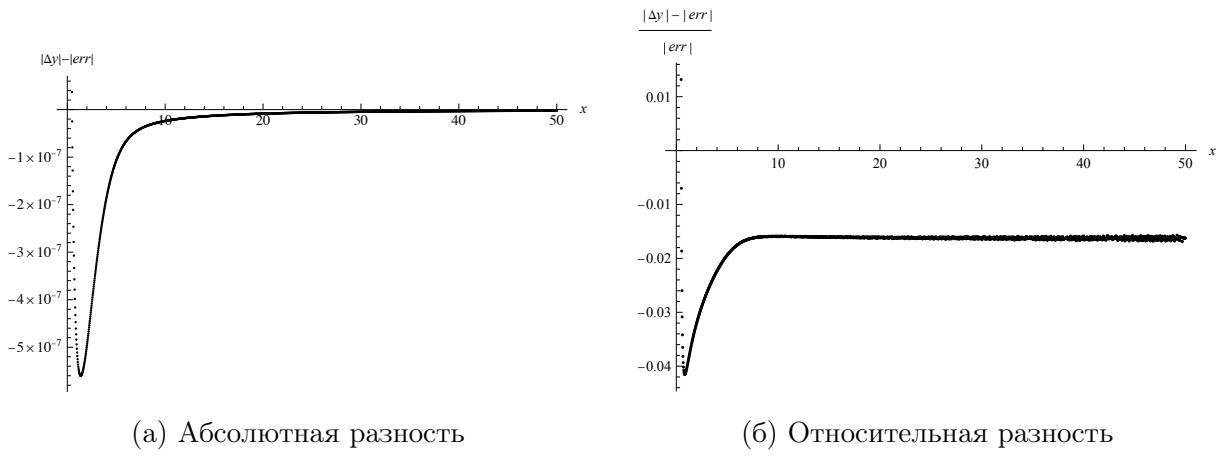


Рис. 6. Разность между ошибками метода квадратур при решении уравнения (19)

Заключение

В ходе работы были исследованы численные и аналитические методы решения линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, а также проводился сравнительный анализ их эффективности.

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Разработаны программы для реализации аналитических методов (с использованием эквивалентных дифференциальных уравнений и преобразований Лапласа) и численных методов (метода квадратур и метода осреднения функциональных поправок).
2. Проведено тестирование методов на различных примерах, включая уравнения с простыми и сложными ядрами, на различной длине интервалов.
3. Выполнен сравнительный анализ точности методов. Выявлено, что метод осреднения функциональных поправок оказался более устойчивым при увеличении длины интервала и величины шага сетки, демонстрируя минимальную ошибку вплоть до малых порядков. Это делает его предпочтительным для задач, требующих высокой точности. Метод квадратур, хотя и менее точный на длинных интервалах, остается приемлемым для задач с умеренными требованиями к точности и высокой вычислительной эффективностью. Рассмотренная в работе теоретическая формула ошибки продемонстрировала высокую точность предсказания фактической погрешности метода, что подтверждено на ряде примеров. Однако в отдельных случаях разность между теоретической и фактической ошибками показала, что формула не всегда выступает в роли верхней границы. Тем не менее, её использование полезно для предварительной оценки погрешности в практических расчетах.

Список использованных источников

1. Трикоми. Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
2. Мюнцц Г.М. Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ. Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. 330 с.
3. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978. 292 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.
6. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. Киев: Наукова думка, 1967. 335 с.