

Численное решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

Докладчик: Дыбко И. Е.

Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент кафедры ФН-2
Казаков К. Е.

группа ФН2-51Б

18 января 2025 г.



Постановка задачи

Линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x),$$

где $y(x)$ — неизвестная функция, $K(x, t)$ — ядро уравнения, $f(x)$ — известная правая часть.

Ограничения

- $y(x)$ и $f(x)$ — непрерывны на $[a, b]$.
- $K(x, t)$ — непрерывна в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

Уравнение имеет единственное решение $y(x)$ в классе L_2 , с точностью до нуль-функций.

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt$$

Уравнение с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$

Эквивалентное дифференциальное уравнение

Пусть $y = w''_{xx}$, где $w = w(x)$ — решение уравнения

$$w''_{xx} - \varphi(x)w'_x - \psi(x)w = f(x), \quad w(a) = w'_x(a) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения

$$w(x) = w_2(x) \int_a^x \frac{w_1(t)}{\Phi(t)} f(t) dt - w_1(x) \int_a^x \frac{w_2(t)}{\Phi(t)} f(t) dt,$$

$$\Phi(x) = \exp \left[\int_a^x \varphi(s) ds \right]$$

Резольвента

$$R(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} [w''_2(x)w_1(t) - w''_1(x)w_2(t)]$$

Уравнение с ядром $K(x - t)$

$$y(x) - \int_0^x K(x-t)y(t)dt = f(x)$$

Применение преобразования Лапласа

Пусть $y(x) \doteq \tilde{y}(p)$, $K(\xi) \doteq \tilde{K}(p)$, $f(x) \doteq \tilde{f}(p)$.

Тогда:

$$\tilde{y}(p) - \tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p) \implies \tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}.$$

Обратное преобразование Лапласа

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)} e^{px} dp.$$

Идея метода

- Апроксимация интегралов квадратурными формулами:

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) + \varepsilon[\varphi].$$

- Замена интегрального уравнения системой алгебраических уравнений.

Рекуррентная формула

Считая ошибки аппроксимации $\varepsilon[y] \approx 0$, на сетке узлов $x_i = a + h_i(i - 1)$ имеем:

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} K_{ij} y_j}{1 - A_{ii} K_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Условие применимости: $1 - A_{ii} K_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n.$

Формулы трапеций

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = \cdots = A_{n-1} = h, \text{ где } h = \frac{b-a}{n-1}.$$

Оценка погрешности при применении формул трапеций

- Оценка ошибки аппроксимации:

$$\varepsilon_i \approx -\frac{1}{12} \sum_{j=2}^i h_j^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} [K(x_i, t)y(t)] \right\}_{t=x_j}.$$

- Оценка погрешности решения:

$$\Delta y_1 \approx \Delta y_2 \approx 0,$$

$$\Delta y_i \approx \frac{\varepsilon_i + \sum_{j=2}^{i-1} \left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2} \right) K_{ij} \Delta y_j}{1 - \frac{h_i}{2} K_{ii}}, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

Ограничения на ядро

$K(x, t)$ удовлетворяет одному из условий:

- $K(x, t)$ — непрерывная почти всюду функция;
- $K(x, t) = \frac{\tilde{K}(x, t)}{(x-t)^\theta}$, $0 < \theta < 1$, $\tilde{K}(x, t)$ — непрерывна.

Решение в первом приближении

$$y_1(x) = f(x) + \alpha_1 \int_a^x K(x, t) dt,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{hD} \int_a^{a+h} f(x) dx, \quad D = 1 - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} dx \int_a^x K(x, t) dt.$$

Метод осреднения функциональных поправок

Поправка: $\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x)$, $\delta_1(x) = y_1(x)$.

$$\delta_n(x) = \int_a^{a+h} [K(x, t) - K_1(x)] [\delta_{n-1}(t) - \tau \alpha_{n-1}] dt + \alpha_n h K_1(x),$$

$$K_1(x) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} K(x, t) dt.$$

Осредненная функциональная поправка:

$$\alpha_n = \frac{1}{hD} \int_a^{a+h} dx \int_a^{a+h} [K(x, t) - K_1(x)] [\delta_{n-1}(t) - \tau \alpha_{n-1}] dt.$$

Решение в n -ом приближении

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt + \alpha_n \int_a^x K(x, t) dt.$$

Пример 1

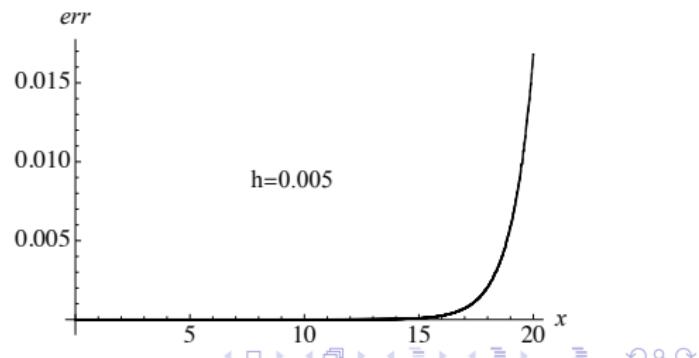
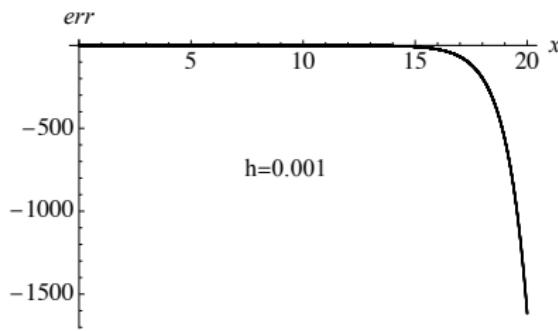
$$y(x) - \int_0^x y(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} \implies y(x) = 2e^x - x - 1.$$

Метод квадратур

$[a, b]$	Шаг	Ошибка
$[0, 5]$	0.005	$3.10 \cdot 10^{-3}$
$[0, 5]$	0.001	$1.24 \cdot 10^{-4}$
$[0, 15]$	0.001	8.17
$[0, 20]$	0.001	1617.3
$[0, 20]$	0.0001	16.17

Метод оср. функ. поправок

$[a, b]$	Шаг	Ошибка	iter	ε
$[0, 5]$	0.005	$9.61 \cdot 10^{-8}$	23	10^{-6}
$[0, 5]$	0.001	$8.83 \cdot 10^{-10}$	26	10^{-8}
$[0, 15]$	0.005	$8.58 \cdot 10^{-5}$	51	10^{-6}
$[0, 20]$	0.01	0.265	65	10^{-6}
$[0, 20]$	0.005	$1.68 \cdot 10^{-2}$	65	10^{-6}

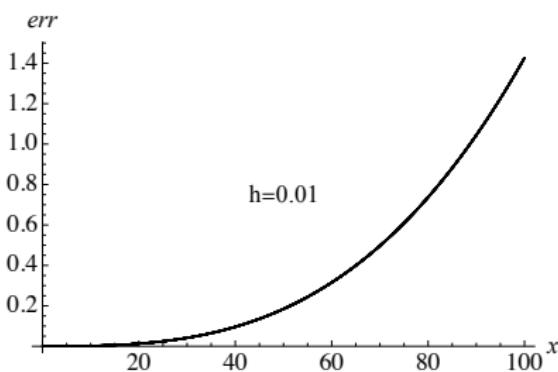


Пример 2

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = \sin x + \cos x \implies y(x) = x + 1.$$

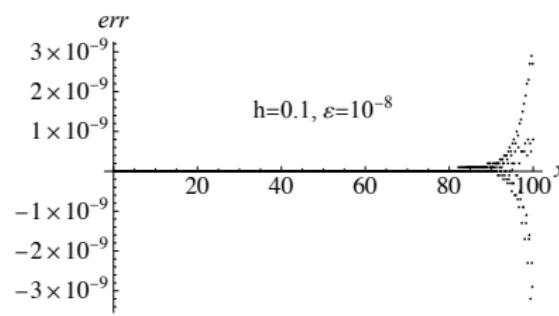
Метод квадратур

$[a, b]$	Шаг	Ошибка
$[0, 20]$	0.01	$1.312 \cdot 10^{-2}$
$[0, 20]$	0.005	$3.279 \cdot 10^{-3}$
$[0, 50]$	0.01	0.184
$[0, 100]$	0.01	1.426



Метод оср. функ. поправок

$[a, b]$	Шаг	Ошибка	iter	ε
$[0, 20]$	0.5	$8.6 \cdot 10^{-8}$	31	10^{-6}
$[0, 20]$	0.1	$1.1 \cdot 10^{-7}$	32	10^{-6}
$[0, 50]$	0.5	$2.0 \cdot 10^{-10}$	72	10^{-8}
$[0, 100]$	0.5	$7.0 \cdot 10^{-10}$	134	10^{-8}
$[0, 100]$	0.1	$3.4 \cdot 10^{-9}$	134	10^{-8}

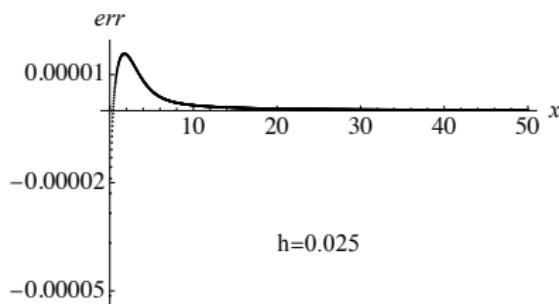


Пример 3

$$y(x) + \frac{1}{4} \int_0^x \sqrt{x+3t} y(t) dt = 1 + x \left(1 + \frac{7}{18} \sqrt{x} + \frac{29}{135} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

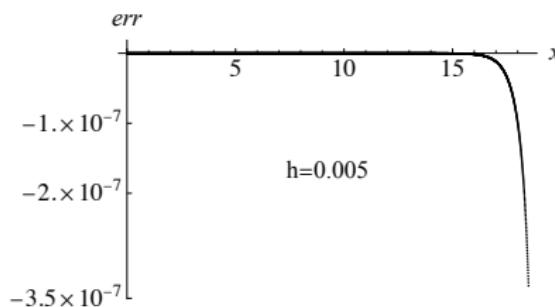
Метод квадратур

$[a, b]$	Шаг	Ошибка
$[0, 10]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 15]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 20]$	0.01	$1.355 \cdot 10^{-5}$
$[0, 50]$	0.025	$5.141 \cdot 10^{-5}$

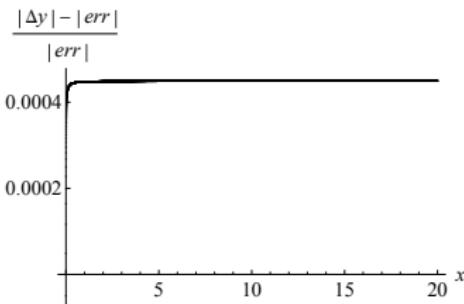


Метод оср. функ. поправок

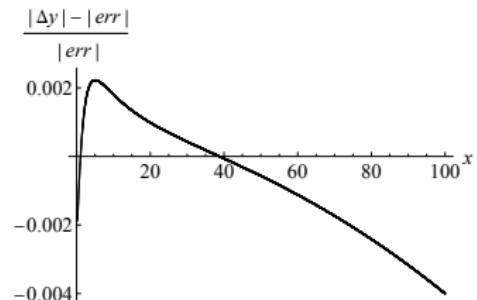
$[a, b]$	Шаг	Ошибка	iter	ε
$[0, 10]$	0.1	$1.473 \cdot 10^{-7}$	40	10^{-6}
$[0, 15]$	0.1	$9.170 \cdot 10^{-8}$	65	10^{-6}
$[0, 18.5]$	0.005	$3.321 \cdot 10^{-7}$	85	10^{-6}
$[0, 20]$	0.05	$4.697 \cdot 10^{-5}$	91	10^{-4}
$[0, 23]$	0.05	$4.955 \cdot 10^{-2}$	106	0.1



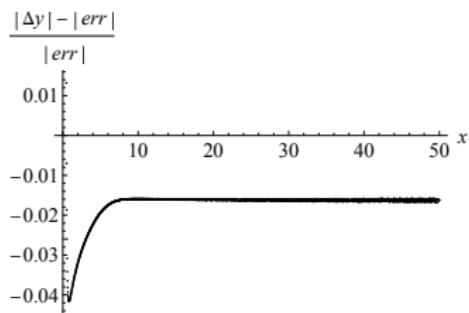
Сравнение погрешностей метода квадратур



(а) Пример 1



(б) Пример 2



(в) Пример 3

Рис. Относительная разность погрешностей

Результаты

В ходе работы получены следующие результаты:

- ① разработаны программы для реализации аналитических методов:
 - с использованием эквивалентных дифференциальных уравнений;
 - с применением преобразований Лапласа;а также численных методов:
 - метод квадратур;
 - метод осреднения функциональных поправок.
- ② проведено тестирование методов на различных примерах, включая уравнения с постоянными и гладкими ядрами, на разной длине интервалов.
- ③ выполнен сравнительный анализ точности численных методов.

Список использованных источников

- ① Трикоми. Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
- ② Мюнц Г.М. Интегральные уравнения. М.-Л.: ОНТИ. Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. 330 с.
- ③ Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
- ④ Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1978. 292 с.
- ⑤ Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.
- ⑥ Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. Киев: Наукова думка, 1967. 335 с.