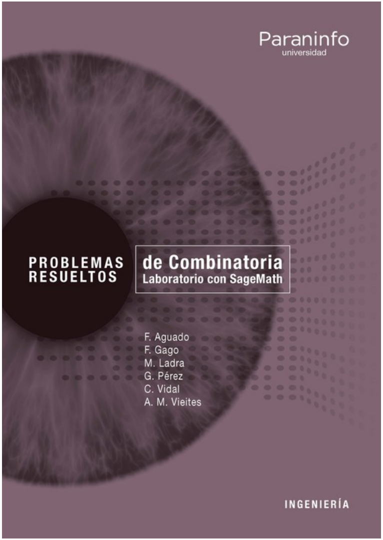
Tema 1. Análisis de algoritmos
Resolución de recurrencias

F. Aguado, P. Cabalar, G. Pérez, C. Vidal

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Curso 2021–2022

Consultar


Paraninfo
universidad
PROBLEMAS
RESUELTOS
de Combinatoria
Laboratorio con SageMath
F. Aguado
F. Gago
M. Ladra
G. Pérez
C. Vidal
A. M. Vieites
INGENIERÍA

Introducción

Definición

Una **sucesión** *es una aplicación del conjunto de los números naturales en un conjunto S. Se suele usar la notación a_n para denotar la imagen del número natural n, el término n-ésimo de la sucesión.*

Introducción

Definición

Una **sucesión** *es una aplicación del conjunto de los números naturales en un conjunto S. Se suele usar la notación a_n para denotar la imagen del número natural n, el término n-ésimo de la sucesión.*

Ejemplos

La sucesión $\{4n+1\}$, es de la forma

$$1, 5, 9, 13, \ldots$$

Se llama **sucesión constante** *a aquella cuyos términos son todos iguales. Los términos de la sucesión constante $\{2\}$ son*

$$2, 2, 2, 2, 2, \ldots$$

Relaciones de recurrencia

Definición

Se llama **relación de recurrencia** *para una sucesión* $\{a_n\}$ *a toda expresión matemática, generalmente una ecuación, que relaciona cada término* a_n, *a partir de uno dado, con los anteriores.*

Relaciones de recurrencia

Definición

Se llama **relación de recurrencia** *para una sucesión* $\{a_n\}$ *a toda expresión matemática, generalmente una ecuación, que relaciona cada término* a_n*, a partir de uno dado, con los anteriores.*

Ejemplo

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 2$$

Relaciones de recurrencia

Ejemplo

La sucesión de Fibonacci, $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$*, puede definirse mediante la relación de recurrencia*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ , \quad n \geq 2$$

junto con las **condiciones iniciales**, $\{F_0 = 0, F_1 = 1\}$.

Ejemplo

Con la misma relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ , \quad n \geq 2$$

pero con otras condiciones iniciales $\{a_0 = 1, a_1 = 2\}$*, nos queda la sucesión:* $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$

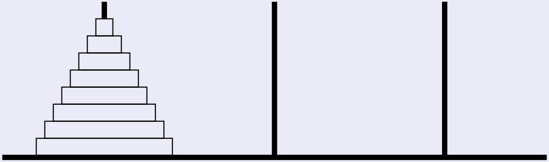
Relaciones de recurrencia

Definición

Resolver una relación de recurrencia *es encontrar las sucesiones que la satisfacen, dando una fórmula explícita para el cálculo de su n-ésimo término.*

Relaciones de recurrencia

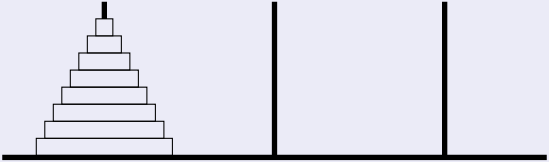
Ejemplo (Torres de Hanoi)



- *Objetivo*: *Trasladar la torre de discos a otro de los palos*
- *Normas*:
  - *en cada paso se mueve un único disco*
  - *sólo puede moverse el que está en la parte superior de un montón*
  - *no puede colocarse un disco encima de otro de menor tamaño.*

Relaciones de recurrencia

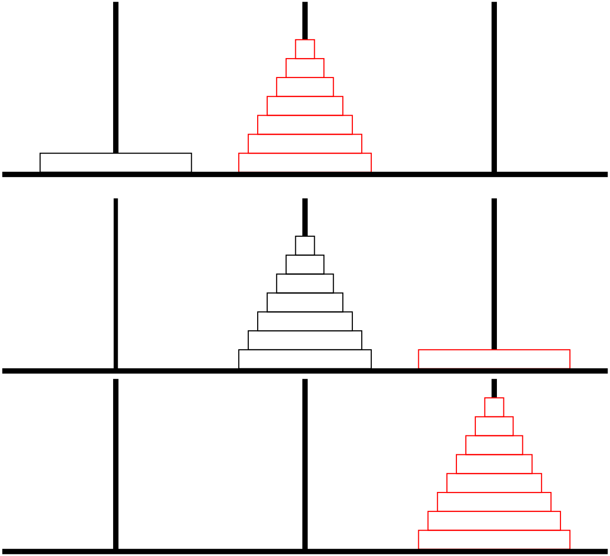
Ejemplo (Torres de Hanoi)



La sucesión $\{H_n\}$*, donde* H_n *es el número de movimientos necesarios para resolver el juego de las torres de Hanoi con n discos, es solución de la relación de recurrencia*

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

Relaciones de recurrencia



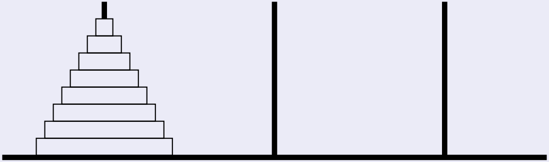
H_{n-1} movimientos

1 movimiento

H_{n-1} movimientos

Relaciones de recurrencia

Ejemplo (Torres de Hanoi)



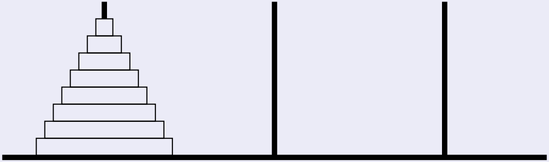
Los primeros términos de la sucesión son:

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
H_n	0	1	3	7	15	31	63	$\cdots$

Parece que $H_n = 2^n - 1$

Relaciones de recurrencia

Ejemplo (Torres de Hanoi)



Parece que $H_n = 2^n - 1$
En efecto, la sucesión $a_n = 2^n - 1$*, es una solución para la relación de recurrencia*

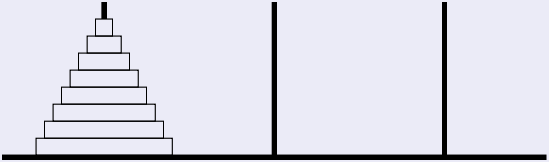
$$a_n = 2a_{n-1} + 1,$$

puesto que

$$\underbrace{2^n - 1}_{a_n} = 2 \cdot (\underbrace{2^{n-1} - 1}_{a_{n-1}}) + 1.$$

Relaciones de recurrencia

Ejemplo (Torres de Hanoi)



$$a_n = 2a_{n-1} + 1,$$

OJO: *Pero también la sucesión constante* $\{-1, -1, -1, \ldots\}$, *es solución para esta misma relación de recurrencia, pues* $-1 = 2(-1) + 1$. *Evidentemente no es una solución para el problema de las torres de Hanoi.*

Relaciones de recurrencia homogéneas

Definición

Una **relación de recurrencia lineal homogénea, con coeficientes constantes**, *(RRLHCC)*, **de orden** k *es una expresión de la forma*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

donde los coeficientes, $c_1, \ldots, c_k$*, son números reales y* $c_k \neq 0$.

Relaciones de recurrencia homogéneas

Ejemplos

1. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
2. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3}$
3. $a_n = na_{n-1}$
4. $a_n = 2a_{n-1} + 1$
5. $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$

Relaciones de recurrencia homogéneas

Ejemplos

1. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *es una RRLHCC de orden 2.*
2. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3}$ *es una RRLHCC de orden 3.*
3. $a_n = na_{n-1}$ *es una RRLH pero sus coeficientes no son constantes.*
4. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ *es una RRLCC de orden 1 pero no homogénea.*
5. $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ *es una RRHCC de orden 2 pero no es lineal.*

Relaciones de recurrencia homogéneas

Para resolver la RRLHCC:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

buscaremos soluciones del tipo $a_n = r^n$, $r \neq 0$.

Relaciones de recurrencia homogéneas

Para resolver la RRLHCC:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

buscaremos soluciones del tipo $a_n = r^n$, $r \neq 0$. Substituyendo, tenemos:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

Relaciones de recurrencia homogéneas

Para resolver la RRLHCC:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

buscaremos soluciones del tipo $a_n = r^n$, $r \neq 0$. Substituyendo, tenemos:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

Dividiendo por r^{n-k} y reordenando:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0.$$

Relaciones de recurrencia homogéneas

Para resolver la RRLHCC:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

buscaremos soluciones del tipo $a_n = r^n$, $r \neq 0$. Substituyendo, tenemos:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

Dividiendo por r^{n-k} y reordenando:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0.$$

$\{r^n\}$ es una solución de la relación de recurrencia si, y sólo si, r satisface la ecuación

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0,$$

que recibe el nombre de ecuación característica, y sus raíces el de raíces características.

Relaciones de recurrencia homogéneas

Teorema (Solución de RRLHCC con raíces características distintas)

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ una RRLHCC tal que sus raíces características, $r_1, \ldots, r_k$, son todas reales y distintas. Entonces, para cualesquiera números reales, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$,

- *la sucesión*

  $$a_n = \alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

  es una solución para la relación de recurrencia
- *cualquier solución es de esta forma, para algunos números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$*

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$.

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

$$F_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$.

$$F_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Si $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, tendremos que $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ y $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$F_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Relaciones de recurrencia homogéneas

Teorema (Solución de RRLHCC con raíces características no distintas)

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ *una relación de recurrencia lineal, homogénea y con coeficientes constantes tal que sus raíces características,* $r_1, \ldots, r_s$*, son reales y con multiplicidades respectivas* $m_1, \ldots, m_s$*. Las soluciones son de la forma*

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\alpha_{10} + \alpha_{11}\, n + \cdots + \alpha_{1m_1-1}\, n^{m_1-1}\right) r_1^n \\ &+ \left(\alpha_{20} + \alpha_{21}\, n + \cdots + \alpha_{2m_2-1}\, n^{m_2-1}\right) r_2^n \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots \\ &+ \left(\alpha_{s0} + \alpha_{s1}\, n + \cdots + \alpha_{sm_s-1}\, n^{m_s-1}\right) r_s^n \end{aligned}$$

para cualesquiera números reales α_{ij}.

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble)

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble)

$$t_n = \alpha_1 1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n)2^n$$

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble)

$$t_n = \alpha_1 1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n) 2^n$$

$$\begin{aligned} t_0 = 0: &\quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ t_1 = 1: &\quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ t_2 = 2: &\quad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble)

$$t_n = \alpha_1 1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n)2^n$$

$$\begin{aligned} t_0 = 0: &\quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ t_1 = 1: &\quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ t_2 = 2: &\quad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 2 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -2$$
$$\alpha_2 = 2$$
$$\alpha_3 = \frac{-1}{2}$$

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble)

$$t_n = \alpha_1 1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n)2^n$$

$$\begin{aligned} t_0 = 0 : &\quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ t_1 = 1 : &\quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ t_2 = 2 : &\quad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 2 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = -2 \,;\, \alpha_2 = 2 \,;\, \alpha_3 = \frac{-1}{2}$$

$$t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$$

Relaciones de recurrencia no homogéneas

Definición

Una **relación de recurrencia lineal no homogénea, con coeficientes constantes**, *(RRLnHCC)*, **de orden** k *es una expresión de la forma*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + L(n)$$

donde los coeficientes, $c_1, \ldots, c_k$*, son números reales,* $c_k \neq 0$ *y* $L(n)$ *es una función de n (no nula)*

Relaciones de recurrencia no homogéneas

Definición

Una **relación de recurrencia lineal no homogénea, con coeficientes constantes**, *(RRLnHCC)*, **de orden** k *es una expresión de la forma*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + L(n)$$

donde los coeficientes, $c_1, \ldots, c_k$, *son números reales,* $c_k \neq 0$ *y* $L(n)$ *es una función de n (no nula)*

Ejemplos

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + L(n)$$

1. $h_n = 2h_{n-1} + 1$
2. $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$
3. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n2^n$

Relaciones de recurrencia no homogéneas

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + L(n)$$

$$a_n^{(h)} = c_1 a_{n-1}^{(h)} + c_2 a_{n-2}^{(h)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(h)}$$

relación de recurrencia lineal homogénea asociada

Teorema (Solución de una RRLnHCC)

Si $a_n^{(p)}$ es una solución particular de la RRLnHCC y $a_n^{(h)}$ es cualquier solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, entonces

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

es también solución de la relación de recurrencia no homogénea, y todas las soluciones son de esta forma, para alguna $a_n^{(h)}$.

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.
- $H_n = H_n^{(h)} + H_n^{(p)}$

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.
- $H_n = H_n^{(h)} + H_n^{(p)}$
- Sabemos que $\{-1, -1, \ldots\}$ es una solución particular. Por lo tanto, cualquier solución es:
$$H_n = H_n^{(h)} - 1$$

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.
- $H_n = H_n^{(h)} + H_n^{(p)}$
- Sabemos que $\{-1, -1, \ldots\}$ es una solución particular. Por lo tanto, cualquier solución es:
$$H_n = H_n^{(h)} - 1$$
- Por otro lado la RRLH asociada es $H_n = 2H_{n-1}$ cuya única raíz es 2.

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.
- $H_n = H_n^{(h)} + H_n^{(p)}$
- Sabemos que $\{-1, -1, \ldots\}$ es una solución particular. Por lo tanto, cualquier solución es:
$$H_n = H_n^{(h)} - 1$$
- Por otro lado la RRLH asociada es $H_n = 2H_{n-1}$ cuya única raíz es 2.
- Entonces $H_n^{(h)} = \alpha 2^n$ y
$$H_n = \alpha 2^n - 1.$$

Torres de Hanoi

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

- $H_n = 2H_{n-1} + 1$ con $H_0 = 0$.
- $H_n = H_n^{(h)} + H_n^{(p)}$
- Sabemos que $\{-1, -1, \ldots\}$ es una solución particular. Por lo tanto, cualquier solución es:
$$H_n = H_n^{(h)} - 1$$
- Por otro lado la RRLH asociada es $H_n = 2H_{n-1}$ cuya única raíz es 2.
- Entonces $H_n^{(h)} = \alpha 2^n$ y
$$H_n = \alpha 2^n - 1.$$
- Finalmente si imponemos que $H_0 = 0$, nos queda $0 = \alpha - 1$ y
$$H_n = 2^n - 1.$$

RRLnHCC: soluciones particulares

Teorema (Soluciones particulares)

Dada la RRLnHCC:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + L(n),$$

donde $L(n) = (p_0 + p_1\, n + \cdots + p_t\, n^t)\, s^n$, *entonces*

1. *Si* s *no es una de las raíces de la relación homogénea asociada, entonces*

   $$a_n^{(p)} = \left(\beta_0 + \beta_1\, n + \cdots + \beta_t\, n^t\right) s^n,$$

   es una solución particular para $\beta_0, \ldots, \beta_t \in \mathbb{R}$.

2. *Si* s *es una de las raíces de la relación homogénea asociada, con multiplicidad* m, *entonces*

   $$a_n^{(p)} = \left(\beta_0 + \beta_1 n + \cdots + \beta_t\, n^t\right) n^m\, s^n,$$

   es una solución particular para $\beta_0, \ldots, \beta_t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$
- La RRLH asociada es $a_n = 3a_{n-1}$ cuya única raíz es 3.

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$
- La RRLH asociada es $a_n = 3a_{n-1}$ cuya única raíz es 3.
- Como 2 no es raíz de la ecuación homogénea asociada, $a_n^{(p)} = \beta\, 2^n$.

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$
- La RRLH asociada es $a_n = 3a_{n-1}$ cuya única raíz es 3.
- Como 2 no es raíz de la ecuación homogénea asociada, $a_n^{(p)} = \beta\, 2^n$.
- Usamos que $\beta\, 2^n$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\beta\, 2^n = 3\,\beta 2^{n-1} + 2^n \text{ y si } n = 1 \text{ nos queda } 2\beta = 3\beta + 2,$$

$\beta = -2$ y $a_n^{(p)} = -2^{n+1}$

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$
- La RRLH asociada es $a_n = 3a_{n-1}$ cuya única raíz es 3.
- Como 2 no es raíz de la ecuación homogénea asociada, $a_n^{(p)} = \beta\, 2^n$.
- Usamos que $\beta\, 2^n$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\beta\, 2^n = 3\,\beta 2^{n-1} + 2^n \text{ y si } n = 1 \text{ nos queda } 2\beta = 3\beta + 2,$$

  $\beta = -2$ y $a_n^{(p)} = -2^{n+1}$
- Por otro lado, recordemos que $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$ y $a_n = \alpha\, 3^n - 2^{n+1}$

Ejemplos (1)

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = 2^n$

- $L(n) = 2^n$
- La RRLH asociada es $a_n = 3a_{n-1}$ cuya única raíz es 3.
- Como 2 no es raíz de la ecuación homogénea asociada, $a_n^{(p)} = \beta\, 2^n$.
- Usamos que $\beta\, 2^n$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\beta\, 2^n = 3\,\beta 2^{n-1} + 2^n \text{ y si } n = 1 \text{ nos queda } 2\beta = 3\beta + 2,$$

  $\beta = -2$ y $a_n^{(p)} = -2^{n+1}$
- Por otro lado, recordemos que $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$ y $a_n = \alpha\, 3^n - 2^{n+1}$
- Finalmente, como $a_0 = 0$, $\alpha = 2$ y

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- La RRLH asociada $a_n = a_{n-1}$ tiene como raíz 1.

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- La RRLH asociada $a_n = a_{n-1}$ tiene como raíz 1.
- Entonces $a_n^{(p)} = (an + b)n$.

$$(an + b)n = [a(n-1) + b]\,(n-1) + n$$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- La RRLH asociada $a_n = a_{n-1}$ tiene como raíz 1.
- Entonces $a_n^{(p)} = (an + b)n$.

$$(an + b)n = [a(n-1) + b]\,(n-1) + n$$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- La RRLH asociada $a_n = a_{n-1}$ tiene como raíz 1.
- Entonces $a_n^{(p)} = (an + b)n$.

$$(an + b)n = [a(n-1) + b]\,(n-1) + n$$

- La relación ha de cumplirse para $n = 1$ y $n = 2$, y resolviendo el sistema queda $a = b = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$a_n^{(p)} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- Entonces $a_n^{(p)} = (an+b)n$.

$$(an+b)n = [a(n-1)+b]\,(n-1)+n$$

- La relación ha de cumplirse para $n=1$ y $n=2$, y resolviendo el sistema queda $a = b = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$a_n^{(p)} = \frac{(n+1)n}{2}$$

- Por otro lado, recordemos que $a_n^{(h)} = \alpha 1^n = \alpha$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- Entonces $a_n^{(p)} = (an + b)n$.

$$(an + b)n = [a(n-1) + b]\,(n-1) + n$$

- La relación ha de cumplirse para $n = 1$ y $n = 2$, y resolviendo el sistema queda $a = b = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$a_n^{(p)} = \frac{(n+1)n}{2}$$

- Por otro lado, recordemos que $a_n^{(h)} = \alpha 1^n = \alpha$
- Entonces $a_n = \alpha + \frac{(n+1)n}{2}$

Ejemplos (2)

$a_n = a_{n-1} + n$ con $a_0 = 0$ $\qquad L(n) = n = n\,1^n$

- Entonces $a_n^{(p)} = (an + b)n$.

$$(an + b)n = [a(n-1) + b]\,(n-1) + n$$

- La relación ha de cumplirse para $n = 1$ y $n = 2$, y resolviendo el sistema queda $a = b = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$a_n^{(p)} = \frac{(n+1)n}{2}$$

- Por otro lado, recordemos que $a_n^{(h)} = \alpha 1^n = \alpha$
- Entonces $a_n = \alpha + \frac{(n+1)n}{2}$
- Como $a_0 = 0$, nos queda $\alpha = 0$ y $a_n = \frac{(n+1)n}{2}$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como 2 es raíz de la ecuación homogénea, $a_n^{(p)} = (an + b)n\,2^n$.

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como 2 es raíz de la ecuación homogénea, $a_n^{(p)} = (an+b)n\,2^n$.
- Usamos que $a_n^{(p)}$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\begin{aligned}(an+b)n\,2^n &= 3\left[a(n-1)+b\right](n-1)2^{n-1}\\ &\quad -2\left[a(n-2)+b\right](n-2)2^{n-2}\\ &\quad +n\,2^n\end{aligned}$$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como 2 es raíz de la ecuación homogénea, $a_n^{(p)} = (an+b)n\,2^n$.
- Usamos que $a_n^{(p)}$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\begin{aligned}(an+b)n\,2^n \quad = \quad & 3\left[a(n-1)+b\right](n-1)2^{n-1} \\ & -2\left[a(n-2)+b\right](n-2)2^{n-2} \\ & +n\,2^n\end{aligned}$$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como 2 es raíz de la ecuación homogénea, $a_n^{(p)} = (an + b)n\,2^n$.
- Usamos que $a_n^{(p)}$ verifica la relación inicial, con lo que

$$\begin{aligned}(an+b)n\,2^n \quad = \quad & 3\left[a(n-1)+b\right](n-1)2^{n-1} \\ & -2\left[a(n-2)+b\right](n-2)2^{n-2} \\ & +n\,2^n\end{aligned}$$

- La relación ha de cumplirse para $n = 2$ y $n = 3$, y resolviendo el sistema queda $a = 1$ y $b = -1$.

$$a_n^{(p)} = (n-1)n\,2^n$$

Ejemplos (3)

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n \text{ con } a_n^{(p)} = (an+b)n\,2^n$$

$$\begin{aligned}(an+b)n\,2^n \quad = \quad & 3\,[a(n-1)+b]\,(n-1)2^{n-1} \\ & -2\;[a(n-2)+b]\,(n-2)2^{n-2} \\ & +n\,2^n\end{aligned}$$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ $\qquad L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ $\qquad L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como $a_n^{(p)} = (n-1)n\,2^n$ y $a_n^{(h)} = \alpha 1^n + \beta 2^n$, se tiene que:

$$a_n = \alpha + \beta 2^n + (n-1)n\,2^n$$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ $\qquad L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como $a_n^{(p)} = (n-1)n\,2^n$ y $a_n^{(h)} = \alpha 1^n + \beta 2^n$, se tiene que:

$$a_n = \alpha + \beta 2^n + (n-1)n\,2^n$$

- Como $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ 1 & = & \alpha + 2\beta \end{array} \right.$$

Ejemplos (3)

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n\,2^n$ con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ $\qquad L(n) = n\,2^n$

- La RRLH asociada $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ tiene como raíces 1 y 2.
- Como $a_n^{(p)} = (n-1)n\,2^n$ y $a_n^{(h)} = \alpha 1^n + \beta 2^n$, se tiene que:

$$a_n = \alpha + \beta 2^n + (n-1)n\,2^n$$

- $$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha + \beta \\ 1 & = & \alpha + 2\beta \end{array}\right\} \begin{array}{c} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}$$

$$a_n = -1 + 2^n(n^2 - n + 1)$$

Órdenes de complejidad

Orden	Complejidad
$\Theta(1)$	Constante
$\Theta(\log n)$	Logarítmica
$\Theta(n)$	Lineal
$\Theta(n \log n)$	Cuasi lineal
$\Theta(n^b)$	Polinómica
$\Theta(a^n)$	Exponencial
$\Theta(n!)$	Factorial

Divide y Vencerás: Esquema

1. El problema original se descompone en ℓ subproblemas más pequeños:
   - Tamaño del problema original: n
   - Tamaño del subproblema i: $m_i < n$
   - Normalmente $\sum_{i=1}^{\ell} m_i < n$
2. Los ℓ subproblemas se resuelven por separado, aplicando el mismo algoritmo
3. La solución al problema original se obtiene combinando las soluciones a los ℓ subproblemas
4. Su coste computacional se determina resolviendo relaciones de recurrencia

Divide y Vencerás: Esquema

- Caso general

$$T_{\text{dyv}}(n) = \begin{cases} T_{\text{trivial}}(n) & n \leq n_0 \\ T_{\text{dividir}}(n,\ell) + \sum_{i=1}^{\ell} T_{\text{dyv}}(m_i) + T_{\text{combinar}}(n,\ell) & n > n_0 \end{cases}$$

- Caso muy frecuente
  - $m_i = \frac{n}{b}$ para $i = 1, \ldots, \ell$ con $\ell \geq 1$ y $b \geq 2$
  - $T_{\text{trivial}}(n) \in \Theta(1)$
  - $T_{\text{dividir}}(n,\ell) + T_{\text{combinar}}(n,\ell) \in \Theta(n^k)$ con $k \geq 0$

$$T_{\text{dyv}}(n) = \begin{cases} 1 & n \leq n_0 \\ \ell T(\frac{n}{b}) + cn^k & n > n_0 \end{cases}$$

con $c > 0$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k, \text{ si } n \geq n_0$$

$\ell \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ y $c > 0$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k, \text{ si } n \geq n_0$$

$\ell \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ y $c > 0$

$n \in \{bn_0, b^2 n_0, \ldots\}$, es decir, $\frac{n}{n_0} = b^i$ con $i \geq 1$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k, \text{ si } n \geq n_0$$

$\ell \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ y $c > 0$

$n \in \{bn_0, b^2 n_0, \ldots\}$, es decir, $\frac{n}{n_0} = b^i$ con $i \geq 1$

Cambio de variable $n = b^i n_0$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k$$

$n \in \{bn_0, b^2 n_0, \ldots\}$, es decir, $\frac{n}{n_0} = b^i$ con $i \geq 1$
Cambio de variable $n = b^i n_0$

$$t(i) := T(n) = T(b^i\, n_0)$$

$$t(0) = T(n_0) = 1$$

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik} \text{ si } i \geq 1$$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \ \text{si } n \geq n_0$$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\,\ell^i$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\,\ell^i$

Caso $\ell = b^k$

$t^p(i) = d\; i\; b^{ik}$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\, b^{ik}$
Caso $\ell = b^k$

$t^p(i) = d\, i\, b^{ik}$

$$t(i) = t^h(i) + t^p(i) = a\, b^{ik} + d\, i\, b^{ik}$$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\, b^{ik}$
Caso $\ell = b^k$

$t^p(i) = d\, i\, b^{ik}$

$$t(i) = t^h(i) + t^p(i) = a\, b^{ik} + d\, i\, b^{ik}$$

$$\vdots$$

$$T(n) = \alpha\, n^k + c\, n^k\, log_b n \in \Theta(n^k\, log_b n)$$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\,\ell^i$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\, \ell^i$

Caso $\ell \neq b^k$

$t^p(i) = d\, b^{ik}$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\,\ell^i$

Caso $\ell \neq b^k$

$t^p(i) = d\, b^{ik}$

$$t(i) = t^h(i) + t^p(i) = a\,\ell^i + d\, b^{ik}$$

Divide y Vencerás

$$t(i) = \ell t(i-1) + c\, n_0^k\, b^{ik}, \text{ si } n \geq n_0$$

La RRLH es $t^h(i) = \ell t(i-1)$ cuya solución es $t^h(i) = a\,\ell^i$

Caso $\ell \neq b^k$

$t^p(i) = d\, b^{ik}$

$$t(i) = t^h(i) + t^p(i) = a\,\ell^i + d\, b^{ik}$$

$$\vdots$$

$$T(n) = \alpha \left(\frac{n}{n_0}\right)^k + (1-\alpha)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\log_b \ell}$$

con

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \text{si } \ell < b^k \\ \alpha < 0 & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \alpha \left(\frac{n}{n_0}\right)^k + (1-\alpha)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\log_b \ell}$$

$$\alpha = \frac{c n_0^k}{\left(1 - \frac{\ell}{b^k}\right)}$$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \alpha \left(\frac{n}{n_0}\right)^k + (1-\alpha)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\log_b \ell}$$

$$\alpha = \frac{cn_0^k}{\left(1 - \frac{\ell}{b^k}\right)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \text{si } \ell < b^k \\ \alpha < 0 & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \alpha \left(\frac{n}{n_0}\right)^k + (1-\alpha)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\log_b \ell}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \text{si } \ell < b^k \\ \alpha < 0 & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

a.1) Si $\ell < b^k$, entonces $\alpha > 0$ y $T(n) \in \Theta(n^k)$

a.2) Si $\ell > b^k$, entonces $\alpha < 0$ y $T(n) \in \Theta(n^{\log_b \ell})$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \ell < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } \ell = b^k \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

Recordando que:

ℓ es el número de subproblemas,

$\frac{n}{b}$ es el tamaño de cada subproblema y

la complejidad de dividir el problema y combinar las soluciones es cn^k

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \ell < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } \ell = b^k \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3T(\frac{n}{2}) + n & n = 2^i, n \geq 1 \end{cases}$$

Como $3 > 2^1$, se tiene que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$

Divide y Vencerás

$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \ell < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } \ell = b^k \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3T(\frac{n}{2}) + n^2 & n = 2^i, n \geq 1 \end{cases}$$

Como $3 < 2^2$, se tiene que $T(n) \in \Theta(n^2)$

Divide y Vencerás

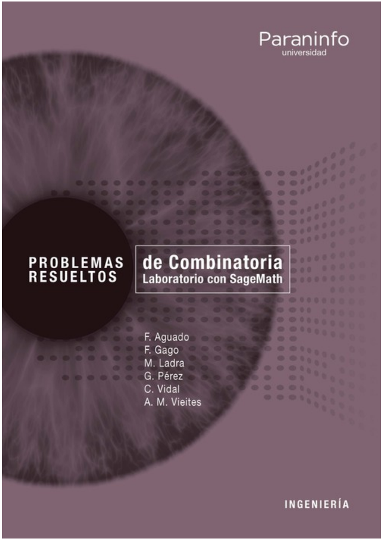
$$T(n) = \ell T(\frac{n}{b}) + c \cdot n^k$$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } \ell < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } \ell = b^k \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{si } \ell > b^k \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + n^2 & n = 2^i, n \geq 1 \end{cases}$$

Como $4 = 2^2$, se tiene que $T(n) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$

Consultar


Paraninfo
universidad
PROBLEMAS
RESUELTOS
de Combinatoria
Laboratorio con SageMath
F. Aguado
F. Gago
M. Ladra
G. Pérez
C. Vidal
A. M. Vieites
INGENIERÍA