

# Zaključna naloga

Liopold D. Novelli

26. 2. 2011

## 0.1 Naloga

Kvadratno zanko prepognemo po srednici za kot  $\alpha$ . Kako je magnetno polje odvisno od kota pregiba?

## 1 Uvod

Magnetno pole tokovnega vodnika izračunamo z Biot-Savartovo enačbo

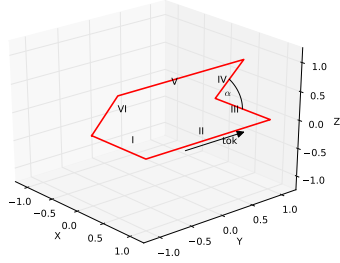
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1)$$

Električni tok je konstanten po vodniku in za gostoto magnetnega polja, dobimo enačbo

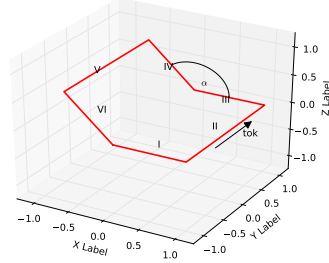
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d^3\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2)$$

## 2 Postopek reševanja

Načrt reševanja problema je bil vnaprej jasen. Najprej sem določil geometrijo sistema s pomočjo skic. Nato sem matematično nastavil problem. Integral po zaključeni poti, po naši zanki, sem zapisal kot vsoto šestih integralov po ravnih stranicah zanke (v posebnem primeru pa samo po štirih). Nato sem analitično rešil problem za dva posebna primera ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$  in  $\alpha = \pi$ ). Zadnji korak je bil program, ki mu vnesem poljubno točko prostora in mi izračuna magnetno polje v tej točki.



(a)  $\alpha = \frac{\pi}{3}$



(b)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Slika 1: Skica problema.

## 2.1 Iztegnjen kot

Za iztegnjen kot lahko pridemo do analitičnega izraza za magnetno polje na  $z$  osi. Zaključen integral po zanki razdelimo na štiri integrale po posameznih delih zanke.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(z) &= \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d^3\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \\
 &= \frac{I}{4\pi} \left( \int_{-a}^a \frac{\hat{\mathbf{j}} \times (-a\hat{\mathbf{i}} - l\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \int_a^{-a} \frac{-\hat{\mathbf{i}} \times (-l\hat{\mathbf{i}} - a\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \right. \\
 &+ \int_a^{-a} \frac{-\hat{\mathbf{j}} \times (a\hat{\mathbf{i}} - l\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \left. \int_{-a}^a \frac{\hat{\mathbf{i}} \times (-l\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl \right) = \\
 &= \frac{I}{4\pi} \left( \int_{-a}^a \frac{z\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{k}}}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \int_a^{-a} \frac{z\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}}}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \right. \\
 &+ \left. \int_a^{-a} \frac{-z\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{k}}}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl + \int_{-a}^a \frac{-z\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}}}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} dl \right) = \\
 &= \frac{Ia}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dl}{(z^2 + a^2 + l^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{I}{\pi} \frac{2a^2}{(a^2 + z^2)\sqrt{2a^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Rezultat je (bil) uporaben za preverjanje pravilnosti delovanja programa, ki izračuna magnetno polje za poljuben kot.

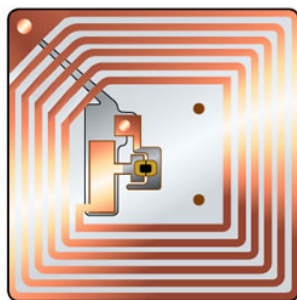
Približka za

- $a \gg z$ :  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \frac{I\sqrt{2}}{\pi a} \hat{\mathbf{k}}$
- $z \gg a$ :  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \frac{I2a^2}{\pi z^3} \hat{\mathbf{k}}$

Magnetno polje (pravtako pa tudi indukcija) z oddaljenostjo padata s tretjo potenco.

Rezultat se uporablja v Radio-frekvenčni identifikaciji (RFID), kjer imamo dostikrat iztegnjene zanke pravokotnih oblik, le da imamo več kolobarjev, kar rezultatat zmnoži s številom ovojev. RFID deluje na podlagi medsebojne indukcije.

Tak način identifikacije naj bi v prihodnosti izodrinil črtne kode, že sedaj pa se uporablja pri identifikaciji nekaterih izdelkov in domačih živali.



Slika 2: RFID čip.

## 2.2 Poljuben kot

Zaključen integral bomo razdelili na šest segmentov. Polovica zanke vedno leži v  $xy$  ravnini, zato bo polovica integrala vedno enaka.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d^3\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \\ &= \int_0^a \frac{\hat{\mathbf{i}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} dl + \int_{-a}^a \frac{\hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3} dl + \int_a^0 \frac{\hat{\mathbf{i}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3|^3} dl \\ &+ \int_0^a \frac{\hat{\mathbf{c}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4|^3} dl + \int_{-a}^a \frac{\hat{\mathbf{i}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_5)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_5|^3} dl + \int_a^0 \frac{\hat{\mathbf{c}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_6)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_6|^3} dl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}} &= (\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \\ \mathbf{r}'_1 &= (l, -a, 0) & \mathbf{r}'_4 &= (l \cos \alpha, a, l \sin \alpha) \\ \mathbf{r}'_2 &= (a, l, 0) & \mathbf{r}'_5 &= (a \cos \alpha, l, a \sin \alpha) \\ \mathbf{r}'_3 &= (l, a, 0) & \mathbf{r}'_6 &= (l \cos \alpha, -a, l \sin \alpha) \end{aligned}$$

Računal sem tudi za vsako koordinato posebej, tako da je končni rezultat pravzaprav sestavljen iz 18-ih integriranj (nekateri integrali so enaki nič - tisti deli, kjer je smer el. toka vzporedna s koordinatno osjo).

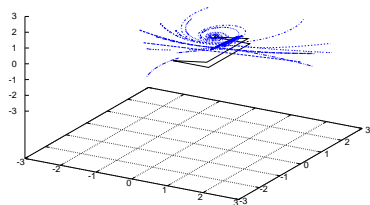
$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_I(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{II}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{III}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{IV}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_V(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{VI}(\mathbf{r}) \\
\mathbf{H}_I(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_0^a \frac{(0, -z, y+a)}{((x-l)^2 + (y+a)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathbf{H}_{II}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{(z, 0, -x+a)}{((x-a)^2 + (y-l)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathbf{H}_{III}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_a^0 \frac{(0, z, -y+a)}{((x-l)^2 + (y-a)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathbf{H}_{IV}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_0^a \frac{(\sin \alpha(-y+a), \sin \alpha(x-l \cos \alpha) - \cos \alpha(z-l \sin \alpha), \cos \alpha(y-a))}{((x-l \cos \alpha)^2 + (y-a)^2 + (z-l \sin \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathbf{H}_V(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{(-z+a \sin \alpha, 0, x-a \cos \alpha)}{((x-a \cos \alpha)^2 + (y-l)^2 + (z-l \sin \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\mathbf{H}_{VI}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_a^0 \frac{((y+a) \sin \alpha, \cos \alpha(z-l \sin \alpha) - \sin \alpha(x-l \cos \alpha), (y+a) \cos \alpha)}{((x-a \cos \alpha)^2 + (y-l)^2 + (z-l \sin \alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Končne rezultate sem dobil z numeričnim računanjem. Delal sem s programskim jezikom Python - knjižnici `NumPy` in `SciPy`. Iz zgornjih šestih integralov sem zapisal 18 funkcij (za vsako komponento magnetnega polja posebej), vendar so vsaj tri od teh funkcij enake nič. Teh 18 funkcij sem nato integriral z rutino `quad` vgrajeno v `SciPy` `integrate`.

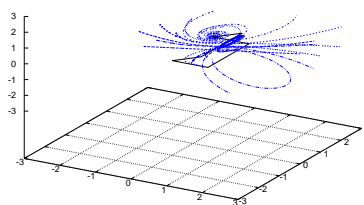
Največji izziv mi je predstavljala vizualizacija podatkov. Meni najljubše orodje `GnuPlot` se je izkazal za prezahtevno - preveč je parametrov, ki jih je treba upoštevati. Za grafe na *sliki 3* je bila potrebna precej dolga skripta. Nato sem uporabil `Matplotlib`, python knjižnico za `NumPy` in `SciPy`. Dela malce lepše grafe v smislu, da so linije bolj ostre in barve se lažje definirajo, vendar je za grafa, ki sta na *sliki 4* potrebno, po mojem mnenju, še vedno nesorazmerno veliko programiranja.

Na koncu sem odkril program `ParaView`, ki ima preprost grafični vmesnik (prejšnji orodji ga nimata), in tako je nastala zadnja serija grafov. Potrebno je bilo le še učenje strukture `.vtk` dokumenta, ki jih izrisuje `ParaView`.

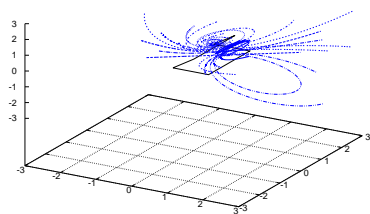
### 3 Rezultati



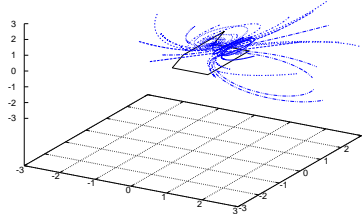
(a)  $\alpha = \frac{\pi}{10}$



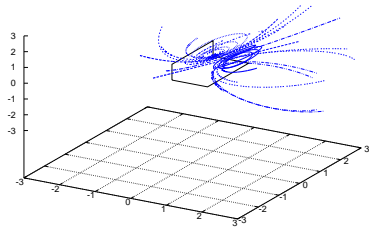
(b)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$



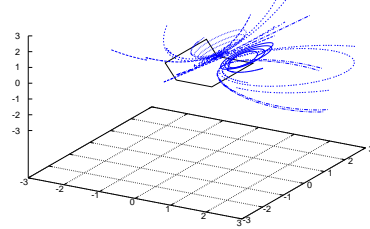
(c)  $\alpha = \frac{3\pi}{10}$



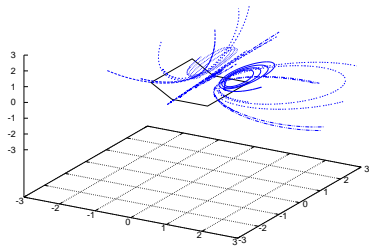
(d)  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$



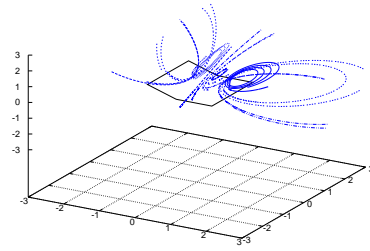
(e)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$



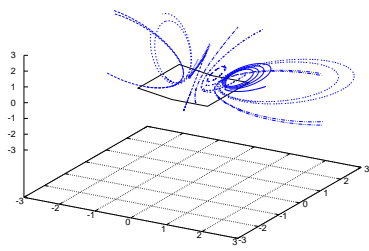
(f)  $\alpha = \frac{3\pi}{5}$



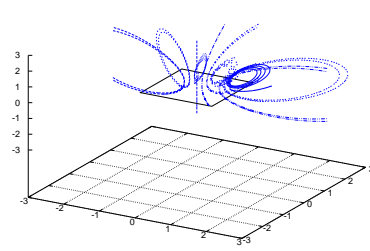
(g)  $\alpha = \frac{7\pi}{10}$



(h)  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$



(i)  $\alpha = \frac{9\pi}{10}$



(j)  $\alpha = \pi$

Slika 3: Grafi nekaterih magnetnih silnic za različne kote prepogiba zanke. Grafi so precej majhni, zato priporočam, da se jih ogleda na čim-večji povečavi.

Grafi (a) – (j) s slike 3 prikazujejo deset tokovnic skozi enakomerno razporejene točke na  $xy$  ravnini. Rezultat je simetričen glede na  $xz$  ravnino, zato sem začetne točke zavoljo večje preglednosti izbral samo na eni strani te ravnine.

Koordinatno izhodišče vedno prebada silnica, ki je premica (zaključena v neskončnosti, ker so silnice magnetnega polja vedno zaključene), in je nagnjena za kot  $\frac{\alpha}{2}$  glede na  $x$  os.

Iskal sem še druge načine prikaza magnetnega polja, predvsem me je motilo, da silnice ne pokažejo velikosti magnetnega polja. Zato sem narisal grafa za velikost polja na  $z$  osi in velikost polja na osi zanke. Prvi graf nam ne pove veliko, je pa drugi zato bolj ilustrativen. Magnetno polje, če tok teče v smeri urinega kazalca, kaže v smeri osi zanke in narašča, ko se približujemo dolgima robovoma in pada, ko se od njiju oddaljujemo. Maximum magnetnega polja leži na  $y$  osi na sredini med točkama  $T_1(a, 0, 0)$  in  $T_2(a \cos \alpha, 0, a \sin \alpha)$ . Maximum je torej v točki  $T_{max}(\frac{a(\cos \alpha + 1)}{2}, 0, \frac{a \sin \alpha}{2})$ , ki je  $\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{\cos \alpha + 1}$  oddaljena od koordinatnega izhodišča. To sem preveril tudi z grafom (c) na sliki 4.

Grafa (a) in (b) s slike 4 sta me spodbudili k razmišljanju, za kateri kot zanke je polje na osi zanke najbolj daljnosežno. Predvideval sem, da bo to za iztegnjeno zanko, saj se v tem primeru na osi seštejejo vsi štirje robovi zanke, a zmedla me je krivulja na grafu (b), ki ima pri fiksni oddaljenosti od izhodišča  $L = 4$  očitni maximum pri kotu okrog  $\frac{\pi}{2}$ .

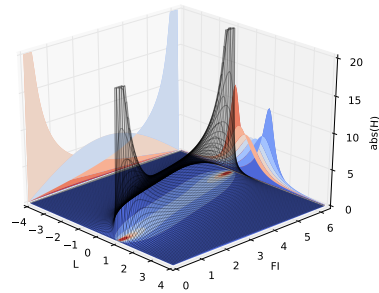
Narisal sem precej grafov in jih analiziral. Najprej velikost polja na srednjici zanke za nekaj različnih kotov (in logaritem velikosti). V takih  $2D$  grafih je lažje primerjati krivulje med sabo. Maximumi so očitno večji za manjše kote pregiba in premaknjeni so bližje 1 (oziroma  $a$ ), a hitreje padajo (saj se prispevka prepognjenih robov izničita, ker sta tokovna vodnika skoraj vzporedna). Potem sem grafe premaknil po razdalji od izhodišča za predviden maximum pri posameznem kotu.

Izkaže se, da je intuicija imela prav. Velikost maximuma magnetnega polja je sicer večja za manjše kote pregiba, vendar z oddaljenostjo od maximuma tudi hitreje pada. Pojasnilo zakaj ima krivulja, ki orisuje rob grafa (b) maximum pri kotu, ki ni enak  $\pi$ , pa je, da so maximumi premaknjeni iz izhodišča koordinatnega sistema, za manjše kote pregiba, medtem, ko so pri bolj iztegnjenih kotih premaknjeni nazaj.

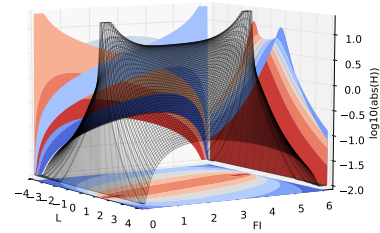
Na grafu (c) so za majhne kote vidni še neki odmiki od predvidene lege, neka čudna vdolbina, ki se je ne znam dobro pojasniti. Graf pridobljen numerično je narisal v absolutni vrednosti, saj se zanka prepogne nazaj, pri kotih večjih od  $\pi$ . To pomeni, da je za zelo oster kot, numerično izračunan kot bližje izhodišču (kot predvideno), za kot malce manjši od  $2\pi$ , pa je še

dalj kot je dolžina samega roba zanke.

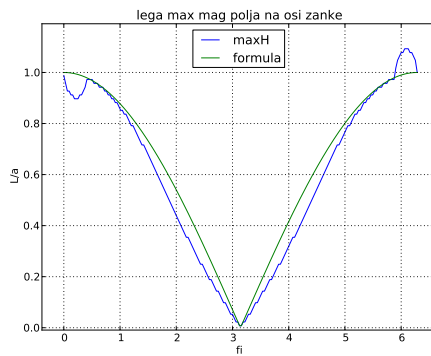
Za konec sem narisal še grafe v programu paraView, ki omogoča naslednjo stopnjo prikazovanja od `gnuplota`, in iz grafov naredil animacijo.



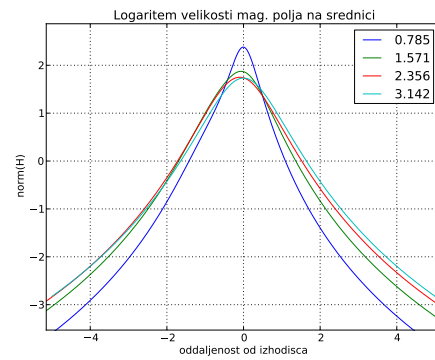
(a)



(b)



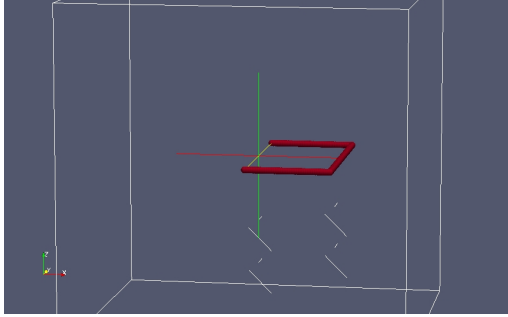
(c)



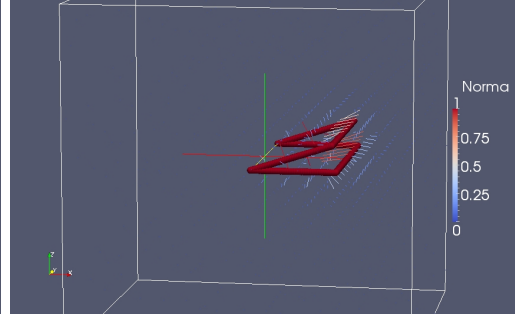
(d)

Slika 4: Grafi velikosti magnetnega polja na osi zanke (levo v navadni skali, desno pa v logaritemski).

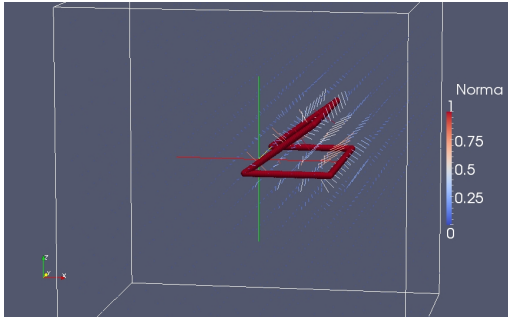




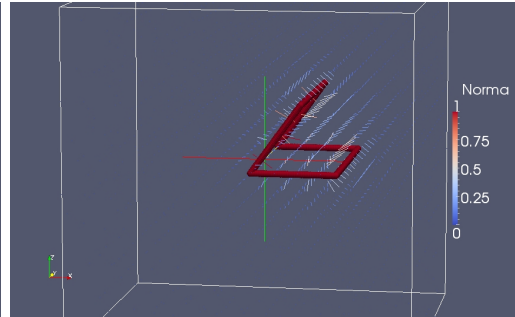
(a)  $\alpha = 0$



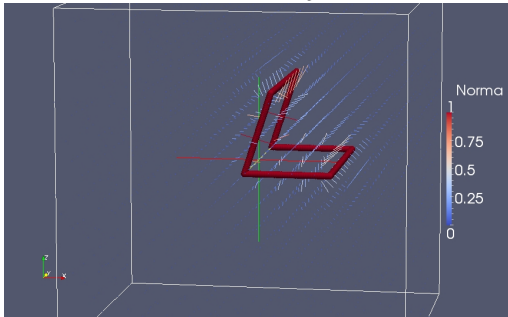
(b)  $\alpha = \frac{\pi}{10}$



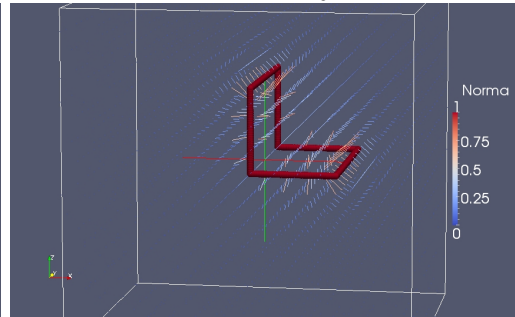
(c)  $\alpha = \frac{\pi}{5}$



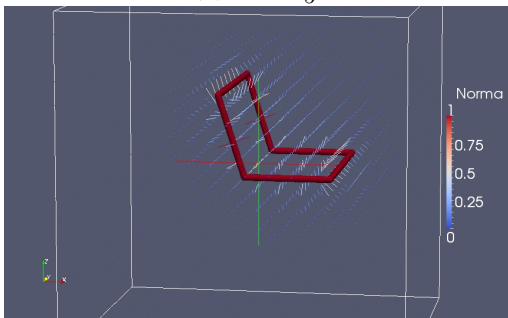
(d)  $\alpha = \frac{3\pi}{10}$



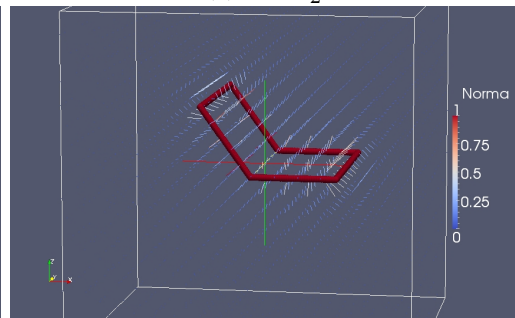
(e)  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$



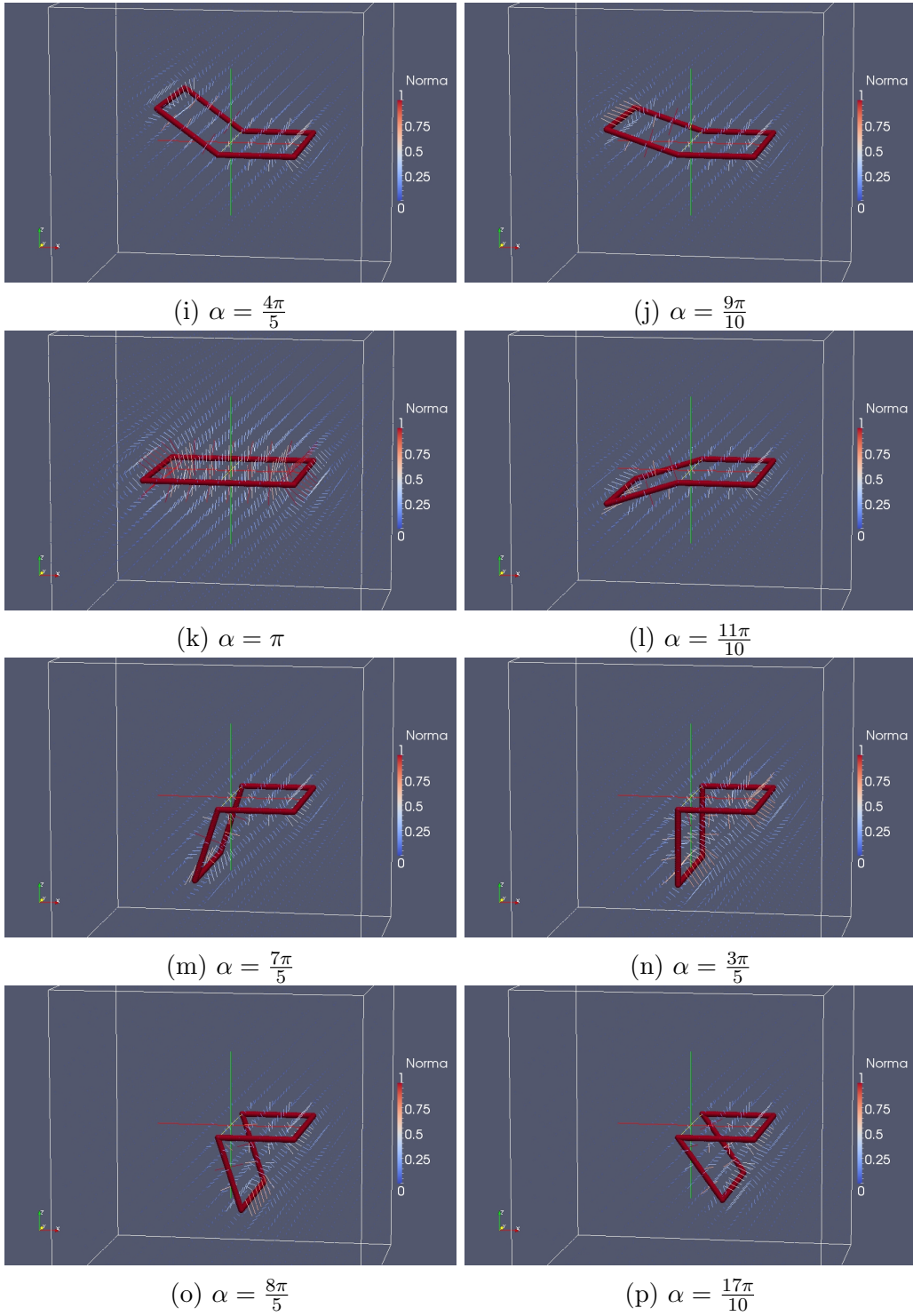
(f)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$



(g)  $\alpha = \frac{3\pi}{5}$



(h)  $\alpha = \frac{7\pi}{10}$



Slika 5: Grafi v paraView-u. Velikost mag polja v posamezni točki je ponazorjena z velikostjo in barvo črte, smer polja pa je enaka smeri črte.