LAPORAN METODA NUMERIK
Implementasi Metode Heun, Midpoint, dan Runge-Kutta

Disusun Oleh :

Ivan Hartana
6161901119

Program Studi Matematika
Fakultas Teknologi Informasi dan Sains
Universitas Katolik Parahyangan
Bandung

2021

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam menyelesaikan suatu masalah nilai awal, sering kali kita tidak dapat dengan mudah mencari penyelesaian eksak dari permasalahan tersebut secara analitik. Maka dari itu, kita dapat melakukan aproksimasi solusi yang ingin kita cari secara numerik. Dalam menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial biasa secara numerik, dapat dilakukan dengan menggunakan deret Taylor. Namun ketika mencari nilai numeriknya, diperlukan deret Taylor orde tinggi yang tentunya akan lebih sulit karena penyelesaian permasalahan ini membutuhkan penurunan fungsi lebih lanjut. Sehingga diperkenalkan sebuah metode baru untuk mencari solusi numerik dari permasalahan PDB yang lebih mudah, yaitu metode Runge-Kutta.

Metode Runge-Kutta memiliki orde yang penjabarannya akan menghasilkan berbagai macam metode baru dengan kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Dalam penelitian ini digunakan beberapa metode numerik untuk membantu komputasi mencari nilai awal terdiri dari metode Heun, metode Midpoint, dan metode Runge-Kutta orde 4. Metode-metode ini memiliki kelebihan dibandingkan dengan menggunakan metode deret Taylor, yaitu derajat ketelitian yang lebih tinggi dan untuk menghindari penurunan fungsi yang lebih tinggi.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mengidentifikasi permasalahan PDB mengenai debit air jika diberikan suatu nilai awal?
2. Bagaimana mencari solusi numerik dari suatu masalah nilai awal dengan metode Heun, metode Midpoint, dan Runge-Kutta orde 4 dan perbandingan hasilnya dengan solusi analitik?
3. Bagaimana penerapan metode numerik pada program *Python*

1.3 Tujuan

1. Dapat mengidentifikasi permasalahan PDB mengenai debit air jika diberikan suatu nilai awal.
2. Dapat mencari solusi numerik dari suatu masalah nilai awal dengan metode Heun, metode Midpoint, dan Runge-Kutta orde 4 dan membandingkan hasilnya dengan solusi eksak.
3. Dapat menerapkan metode numerik pada program *Python*.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode alternatif dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Kelebihan dari metode ini adalah memiliki ketelitian yang lebih tinggi dan dapat menghindari penggunaan turunan dengan derajat yang lebih tinggi dengan cara memilih titik tertentu dari suatu persamaan diferensial biasa $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Berikut merupakan penyelesaian numerik dari PDB tersebut:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{2.1}$$

Dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi kenaikan dengan bentuk:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \tag{2.2}$$

Dengan a_i konstanta dan k_i dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{2,1}k_1h + q_{2,2}k_2h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)
\end{aligned}$$

Maka bentuk umum dari metode Range-Kutta orde-n adalah:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n)h \tag{2.3}$$

Runge-Kutta Orde 1
Untuk orde 1, persamaan 2.3 menjadi

$$y_{i+1} = y_i + a_1hf(x_i, y_i)$$

Sesuai dengan penjabaran deret Taylor orde 1, nilai $a_1 = 1$. Sehingga Runge-Kutta orde 1 adalah metode Euler dengan bentuk persamaannya adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Runge-Kutta Orde 2
Dari persamaan 2.3 untuk Runge-Kutta orde 2 adalah:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \tag{2.4}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan PDB-nya, maka harus dicari masing-masing nilai dari a_1, a_2, p_1, dan q_{11} dengan menggunakan persamaan dari deret Taylor orde 2. Maka akan diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ p_1 &= \frac{1}{2a_2} \\ q_{11} &= \frac{1}{2a_2} \end{aligned}$$

dimana solusi yang unik hanya dapat diperoleh dengan memberikan sebuah peubah pada suatu variabel. Dalam hal ini akan ditentukan nilai a_2. Karena dapat diberikan sembarang nilai a_2, berarti metode Range-Kutta orde 2 tak terhingga banyaknya. Beberapa contoh metode Range-Kutta orde 2 adalah metode Heun dan metode Midpoint yang akan dibahas di sub bagian selanjutnya.

2.1.1 Metode Heun

Metode Heun adalah metode yang meningkatkan keakuratan dengan menggunakan gabungan dari dua buah turunan titik pada interval, yaitu di titik awal dan titik akhir. Untuk memperoleh estimasi kemiringan yang lebih baik, metode ini menggunakan nilai rata-rata dari kedua turunan tersebut.

Perhatikan gradien (kemiringan) di titik awal interval adalah:

$$y'_i = f(x_i, y_i) \tag{2.5}$$

sehingga nilai di akhir interval adalah:

$$y^{\circ}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{2.6}$$

Lalu persamaan 2.6 digunakan untuk mengaproksimasi kemiringan di titik ujung akhir interval.

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^{0}_{i+1}) \tag{2.7}$$

sehingga gabungan dari dua *slope* diperoleh:

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1})}{2} \tag{2.8}$$

Maka, metode Heun memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1})}{2} h \tag{2.9}$$

Persamaan 2.6 biasanya disebut sebagai *predictor*, sementara persamaan 2.9 disebut sebagai *corrector*. Jika dibandingkan dengan persamaan 2.4, maka berlaku:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) h \tag{2.10}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1}) = f(x_i + h, y_i + k_1 h) \end{aligned}$$

sehingga nilai $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $p_1 = q_{11} = 1$ Jadi, metode Heun adalah implementasi dari PDB Orde 2 yang mengasumsikan variabel $a_2 = \frac{1}{2}$.

2.1.2 Metode Midpoint

Metode titik tengah adalah salah satu modifikasi dari metode Euler dimana metode Euler digunakan untuk memprediksi nilai y pada titik tengah interval seperti berikut:

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2} \tag{2.11}$$

Kemudian, nilai prediksi ini digunakan untuk menghitung kemiringan di titik tengah sebagai berikut:

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \tag{2.12}$$

dimana diasumsikan nilai kemiringan ini dapat mewakili nilai aproksimasi dari kemiringan rata-rata sepanjang interval. Sehingga, saat kemiringan ini digunakan untuk mengekstrapolasi secara linear dari x_i sampai x_{i+1} akan menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h \tag{2.13}$$

Jika dibandingkan dengan persamaan 2.4, maka berlaku:

$$y_{i+1} = y_i + (0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2)h = y_i + k_2 h \tag{2.14}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \end{aligned}$$

sehingga nilai $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ dan $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$ Jadi, metode Midpoint adalah implementasi dari PDB Orde 2 yang mengasumsikan variabel $a_2 = 1$.

2.1.3 Metode Runge-Kutta Orde 4

Sama seperti Runge-Kutta Orde 2, ada tak hingga banyaknya pendekatan untuk Runge-Kutta Orde 4. Berikut merupakan bentuk RK Orde 4 yang paling sering digunakan atau yang disebut *classical fourth-order Runge-Kutta Method*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.15}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h) \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa persamaan 2.15 memiliki bentuk yang menyerupai aproksimasi pada metode Heun (persamaan 2.10), dimana k_i merupakan turunan-turunan titik dan koefisien-koefisien dari k_i adalah pembobot rata-rata dari masing-masing turunan titik k_i sehingga metode Runge-Kutta Orde 4 ini memiliki estimasi rata-rata turunan untuk sepanjang interval yang lebih baik.

BAB 3

PEMBAHASAN

3.1 Soal 25.20 dari buku referensi [1]

Sebuah tangki air yang berbentuk bola memiliki lubang melingkar di bagian dasar sehingga cairan mengalir keluar dari tangki seperti pada Gambar 3.1. Laju aliran air yang keluar melalui lubang dapat diperkirakan sebagai $Q_{out} = CA\sqrt{2gH}$ di mana Q_{out} = debit air yang keluar (m^3/s), C = koefisien yang diturunkan secara empiris, A = luas lubang melingkar di bagian bawah tangki (m^2), g = percepatan gravitasi ($9.81 m/s^2$), dan H = kedalaman cairan di dalam tangki. Gunakan metode numerik Heun, metode Titik Tengah, dan metode Runge-Kutta untuk menentukan berapa lama waktu yang dibutuhkan agar air dapat keluar dari tangki berdiameter 3 m dengan ketinggian air di awal adalah 2,75 m. Catatan : lubang melingkar di dasar tangki memiliki diameter 3 cm dan C = 0,55.

3.2 Hasil dan Pembahasan

Dari soal diketahui:

- Jari-jari tangki air: $r = \frac{3}{2}$ m
- Jari-jari lubang di dasar tangki: $r_L = \frac{3}{200}$m
- $Q_{out} = CA\sqrt{2gH}$
- $g = 9.81$
- $C = 0.5$
- Nilai awal: Saat $t = 0$ sekon, $H = 2,75$ m

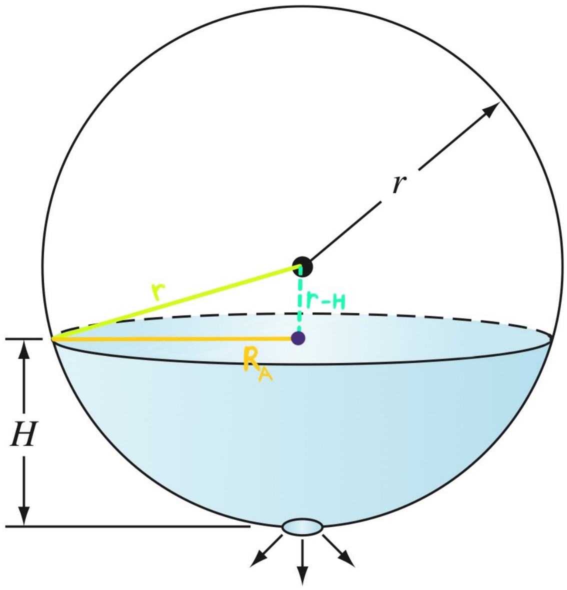
Ditanya :
Waktu (t) saat $H = 0$.

Jawab :
Perhatikan bahwa Q_{out} menunjukkan debit air yang keluar dari tangki ini, sehingga

$$Q_{out} = \frac{dV}{dt} = -CA\sqrt{2gH} \tag{3.1}$$

dan $\frac{dV}{dt}$ bernilai negatif karena air dalam tangki berkurang (dianalisis secara vektor).

Perhatikan ilustrasi tangki air berikut:



Gambar 3.1: Ilustrasi Tangki Berbentuk Bola

Misalkan R_A adalah jari-jari dari permukaan air dalam tangki, dimana permukaan air dari tangki berbentuk lingkaran. Maka dari Gambar 3.1, diperoleh:

$$\begin{aligned} r^2 &= R_A^2 + (r-H)^2 \\ R_A^2 &= r^2 - (r-H)^2 \\ &= r^2 - (r^2 - 2rH + H^2) \\ &= 2rH - H^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ingat bahwa volume adalah luas permukaan dikalikan dengan tinggi, sehingga dalam kasus ini differensial volume dapat dicari menggunakan luas permukaan air dikalikan dengan diferensial tinggi air di dalam tangki.

$$\begin{aligned} dV &= (\pi \cdot R_A^2) \cdot dH, \text{ subtitusi persamaan 3.2} \\ dV &= \pi(2rH - H^2)dH \end{aligned}$$

Kita bagi kedua ruas dengan dt

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \pi(2rH - H^2) \cdot \frac{dH}{dt}, \text{ subtitusi persamaan 3.1} \\ -CA\sqrt{2gH} &= \pi(2rH - H^2)\frac{dH}{dt} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{-CA\sqrt{2gH}}{\pi(2rH - H^2)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Selanjutnya akan dicari nilai A, dimana A adalah luas lubang di dasar tangki.

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r_L^2 \\ &= \pi \cdot \left(\frac{3}{200}\right)^2 = 0.0007068583 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai-nilai yang diketahui, maka persamaan 3.3 dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{-(0.55)(0.0007068583)\sqrt{2(9.81)H}}{\pi(3H - H^2)} \\ &= -0.000548144 \cdot \frac{\sqrt{H}}{3H - H^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

dengan diketahui nilai awal $H(0) = 2.75$.

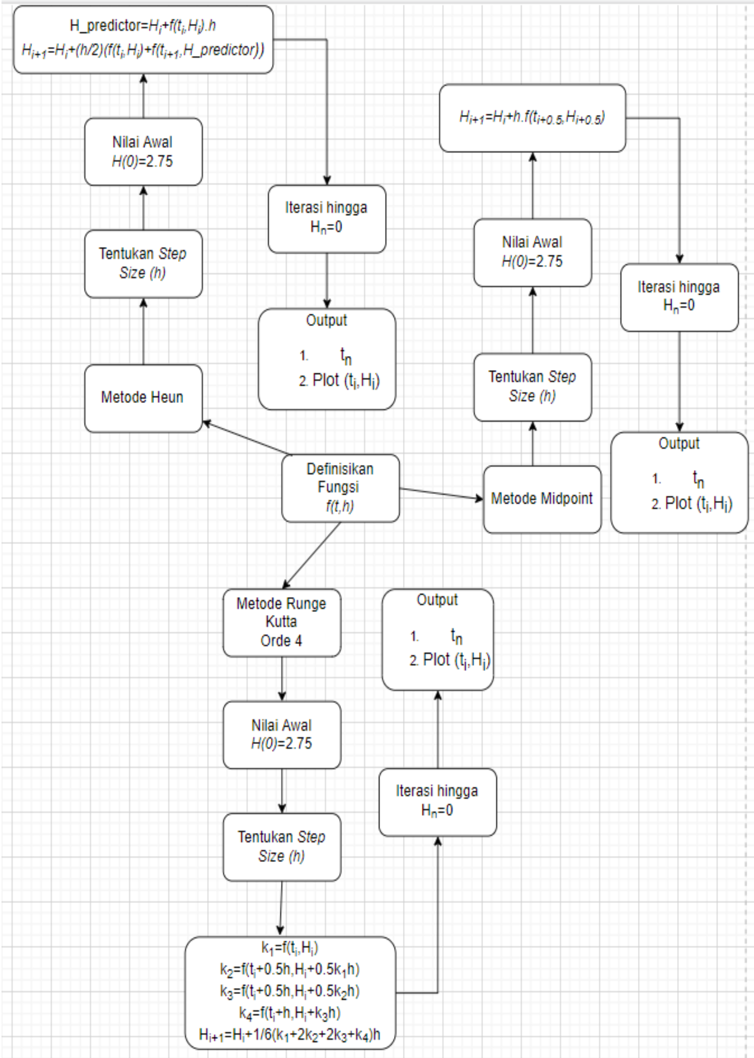
- **SOLUSI ANALITIK**
  Perhatikan persamaan 3.4,

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -0,000548144\frac{\sqrt{H}}{3H - H^2}\\ \int \left(\frac{3H - H^2}{\sqrt{H}}\right) dH &= -0,000548144 \int dt\end{aligned}$$

  Diketahui bahwa saat $t = 0$, $H = 2,75$ m,

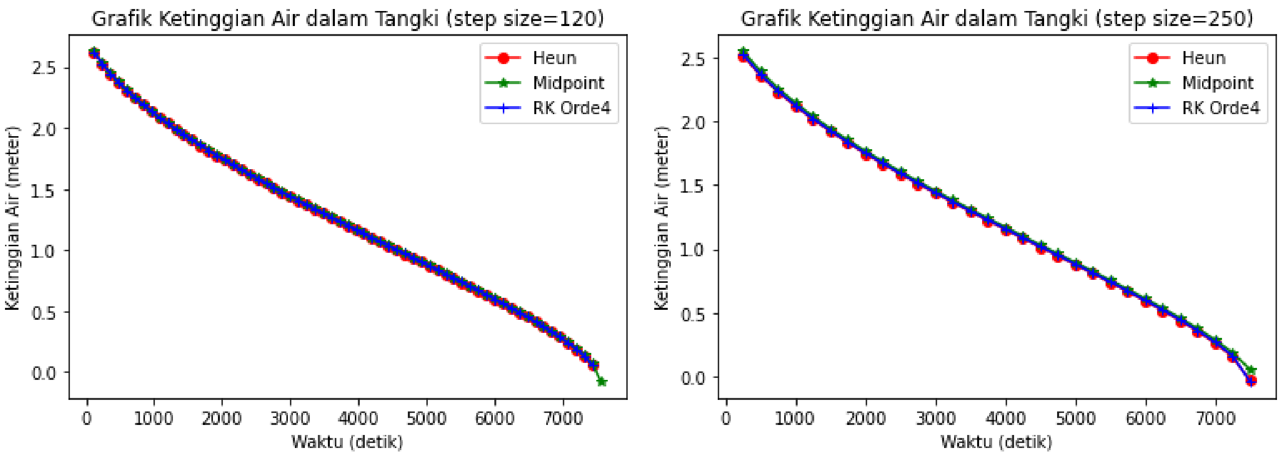
$$\begin{aligned}\int_{2,75}^{0} \left(3\sqrt{H} - H^{3/2}\right) dH &= -0,000548144 \int_0^t dT\\ \left[2H^{3/2} - \frac{2}{5}H^{5/2}\right]_{2,75}^{0} &= -0,000548144t\\ 0 - \left[2(2,75)^{3/2} - \frac{2}{5}(2,75)^{3/2}\right] &= -0,000548144t\\ -9,1207 + 5,016394 &= -0,000548144t\\ -4,104305 &= -0,000548144t\\ t &= 7487,64\ s\end{aligned}$$

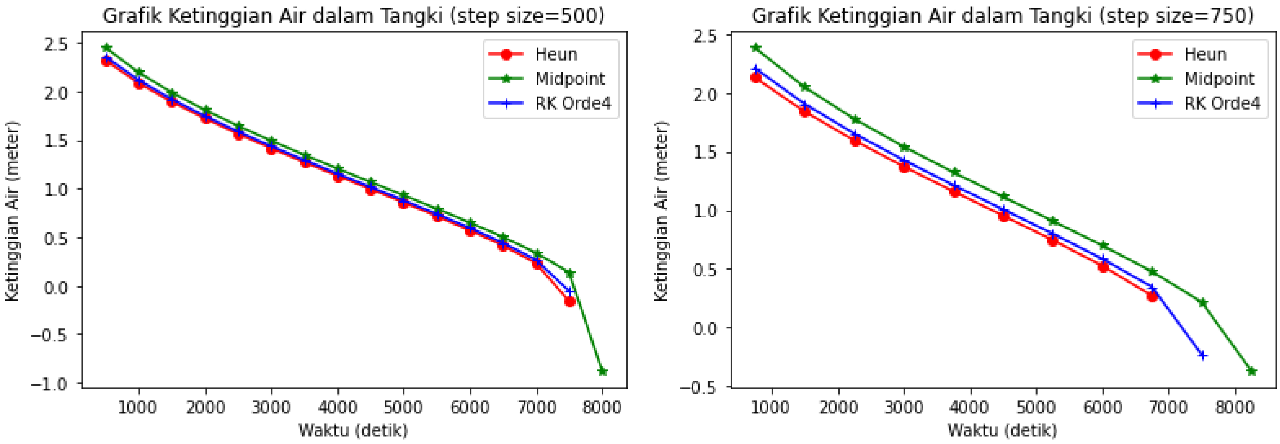
- **SOLUSI NUMERIK**
  Selanjutnya akan dicari nilai t saat $H \approx 0$, dengan menggunakan 3 metode yaitu metode Heun, metode *Midpoint*, dan metode Runge-Kutta orde 4. Berikut algoritma dari ketiga metode yang digunakan:



Gambar 3.2: Algoritma Penyelesaian Dengan 3 Metode

Berikut hasil simulasi dari penyelesaian permasalahan di atas dengan menggunakan beberapa nilai *step size* untuk waktu (t).





Gambar 3.3: Plot Numerik Ketinggian Air dalam Tangki terhadap Waktu

Berikut ditunjukkan perbandingan hasil yang diperoleh secara numerik dan analitik (dalam sekon):

Step size untuk t	Heun	Midpoint	Runge-Kutta Orde 4	Solusi Analitik
120	7560	7560	7560	7487,6
250	7500	7750	7500	
500	7500	8000	7500	
750	7500	8250	7500	

Table 3.1: Tabel Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik

Dapat diperhatikan dari Gambar 3.3 dan Tabel 3.1, hasil yang diperoleh dari metode Heun, metode Midpoint, dan metode Runge-Kutta Orde 4 tidak jauh berbeda satu sama lain. Dan hasil numerik yang didapatkan juga cukup baik dalam mengaproksimasi hasil yang diperoleh secara analitik. Berdasarkan simulasi yang dilakukan, semakin kecil step size yang digunakan, maka solusi numerik yang diperoleh lebih teliti dalam mendekati solusi analitik. Namun terlepas dari itu, ketiga metode numerik yang digunakan sudah cukup baik dalam menghasilkan mengaproksimasi hasil eksak.

3.3 Kelebihan dan Kekurangan Metode Heun, Midpoint, dan Runge Kutta

Metode Heun
Kelebihan Metode Heun

1. Aplikasi lebih mudah dibandingkan menggunakan deret Taylor karena tidak memerlukan penurunan fungsi lebih lanjut.

2. Memiliki tingkat keakuratan yang cukup baik dengan menggunakan gabungan dari dua buah turunan titik pada interval, yaitu di titik awal dan titik akhir.

Kekurangan Metode Heun:

1. Aplikasi lebih panjang dibandingkan dengan metode Midpoint karena terdiri dari dua tahapan (*predictor-corrector*).

Metode Midpoint
Kelebihan Metode Midpoint:

1. Aplikasi lebih cepat dan sederhana dibandingkan metode Heun dan Runge-Kutta Orde 4.

2. Tidak memerlukan perhitungan turunan lebih lanjut.

Kekurangan Metode Midpoint:

1. Solusi yang dihasilkan kurang akurat dibandingkan dengan metode Heun dan Runge-Kutta Orde 4.

Metode Runge Kutta Orde4
Kelebihan Metode Runge Kutta:

1. Mempunyai tingkat ketelitian yang lebih tinggi karena menggunakan turunan titik di empat *point*.

2. Tidak memerlukan perhitungan turunan lebih lanjut.

3. Mampu melakukan perhitungan hingga orde yang lebih tinggi.

Kekurangan Metode Runge Kutta:

1. Memiliki tahapan yang lebih panjang dibandingkan dengan metode Heun dan Midpoint (iterasi k_i).

BAB 4

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian permasalahan yang telah dijabarkan di atas, kami berhasil mengidentifikasi masalah nilai awal yang diberikan dan memperoleh solusi yang diinginkan. Ketiga metode numerik yang digunakan juga cukup baik dalam mengaproksimasi hasil yang diperoleh secara analitik. Masing-masing dari metode Heun, Midpoint, dan Runge-Kutta Orde 4 memiliki kelebihan dan kekurangannya, namun dapat memberikan solusi yang cukup dekat dengan solusi eksaknya. Untuk memperkecil galat, lebih baik menggunakan step size yang relatif kecil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chapra & Canale, Numerical Methods for Engineers, 7th ed, McGraw Hill, 2015.