LAPORAN METODA NUMERIK
Penerapan Aturan Kuadratur Gauss Komposit, Aturan Trapesium, dan Aturan Simpson dalam Perhitungan Integral

Disusun Oleh :

Ivan Hartana
6161901119

Program Studi Matematika
Fakultas Teknologi Informasi dan Sains
Universitas Katolik Parahyangan
Bandung
2021

Daftar Isi

1 Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Integral numerik merupakan metode perhitungan nilai integrasi suatu fungsi, pada selang interval tertentu untuk memperoleh nilai hampiran, karena pada dasarnya tidak semua perhitungan integral dapat diselesaikan dengan mudah secara analitik.

Pada laporan ini, kami akan membahas secara detail terkait Kuadratur Gauss Komposit, Aturan Trapesium Komposit, Aturan Simpson 1/3 Komposit, dan kasus perhitungan Integral tak Wajar; beserta program perhitungan dengan menggunakan *Python*.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana perhitungan integral numerik dari $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz (s > 0)$ dengan menggunakan Metode Kuadratur Gauss Komposit, Aturan Trapesium, dan Aturan Simpson; beserta pembuatan kode programmnya (*Python*).

2. Bagaimana perhitungan Integral tak Wajar secara numerik dari $I = \int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx$ beserta pembuatan kode programnya (*Python*).

1.3 Tujuan

1. Dapat menghitung nilai dari $p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (s > 0)$ dengan menggunakan Metode Kuadratur Gauss Komposit, Aturan Trapesium, dan Aturan Simpson; beserta pembuatan kode programmnya (*Python*).

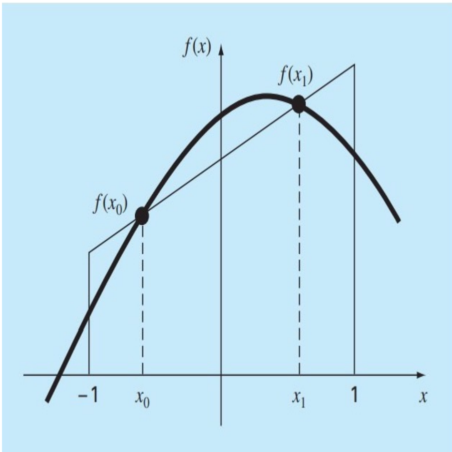
2. Dapat menghitung integral tak wajar secara numerik dari $I = \int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx$ beserta pembuatan kode programmnya (*Python*).

2 Landasan Teori

2.1 Nomor 1

2.1.1 Kuadratur Gauss

Metode Kuadratur Gauss adalah salah satu metode integral numerik dengan memanfaatkan titik berat dan pembobotan integrasi yang menggunakan interval-interval yang tidak harus sama panjangnya. Namun pada laporan ini, semua interval yang kami gunakan sama panjangnya. Metode ini sangat efisien karena pembaginya kecil sehingga memiliki galat yang kecil pula.



Grafik di atas menggambarkan Metode Kuadratur Gauss dengan 2 titik pembobotan yaitu x_0, x_1, yang dapat kita tulis menjadi:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1), \tag{1}$$

di mana c adalah koefisien pembobotan dengan interval $[-1, 1]$. Sama halnya seperti pada Aturan Trapesium, kami asumsikan persamaan (1) dapat diintegralkan sebagai fungsi yang konstan dan linear. Grafik tersebut dapat dihampiri dengan fungsi $\{1, x, x^2, x^3\}$, sehingga didapatkan

$$c_0 + c_1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2, \tag{2}$$

$$c_0x_0 + c_1x_1 = \int_{-1}^{1} xdx = 0, \tag{3}$$

$$c_0x_0^2 + c_1x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}, \tag{4}$$

$$c_0x_0^3 + c_1x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0. \tag{5}$$

Untuk mencari nilai x_i dan c_i kami menggunakan Polinomial Legendre untuk setiap fungsi $f(x)$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) \\ P_n(1) &= 1, \end{aligned} \tag{6}$$

atau dengan cara mengeliminasi persamaan (3) dan (5) sehingga

$$\begin{aligned} c_0x_0 &= -c_1x_1 \\ c_0x_0^3 &= -c_1x_1^3. \end{aligned}$$

Kemudian kami dapatkan bahwa

$$\begin{aligned} x_0^2 &= x_1^2 \\ x_0 &= \pm x_1. \end{aligned}$$

$x_0 \neq x_1$ karena akan menyebabkan kontradiksi pada $c_0 + c_1 = 0\,;\, c_0 + c_1 = 2$ sehingga $c_0 = c_1$

$$\begin{aligned} c_0x_0^2 + c_1x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ x_0^2 + x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ (-x_1)^2 + x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ 2(x_1)^2 &= \frac{2}{3} \\ x_1 &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Maka didapat nilai untuk c_0, c_1, x_1, x_2 yaitu

$$\begin{aligned} c_0 &= c_i = 1, \\ x_0 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,5773503, \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773503. \end{aligned}$$

Kemudian kami lakukan substitusi ke persamaan (1), sehingga diperoleh

$$I \cong f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}). \tag{7}$$

Oleh karena daerah integral berada di interval $[-1, 1]$, maka kami harus mengganti variabel yang ada agar cocok dalam interval ini. Misalkan variabel baru adalah x_d, yang berkaitan dengan variabel awal x, sehingga

$$x = a_0 + a_1 x_d, \tag{8}$$

di mana a_0 dan a_1 adalah

$$a_0 = \frac{b+a}{2}\ ;\ a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Selanjutnya kami lakukan substitusi ke persamaan (8)

$$x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2}, \tag{9}$$

lalu kita turunkan persamaan (9)

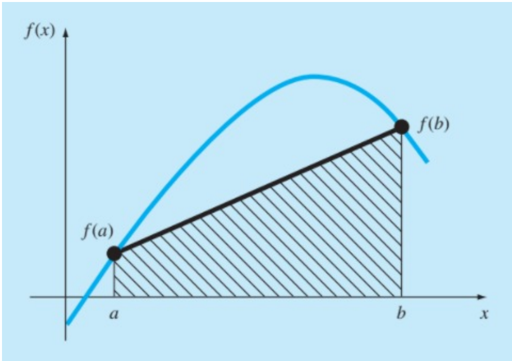
$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d, \tag{10}$$

sehingga bentuk umum dari metode Gauss Kuadratur adalah

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + ... + c_{n-1} f(x_{x-1}). \tag{11}$$

2.1.2 Aturan Trapesium

Dalam Aturan Trapesium, kami akan menaksir setiap segmen dengan trapesium. Aturan ini termasuk dalam metode integrasi numerik Newton-Cotes bentuk tertutup, di mana nilai di ujung selang telah diketahui dan fungsi hampirannya adalah polinomial berderajat satu $f_1(x)$



Dalam mencari integral kurva $f(x)$ dengan batas dari a hingga b, nilai $f(x)$ akan dihampiri dengan $f_1(x)$ yang dapat diperoleh dari fungsi linear

$$\frac{f_1(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{12}$$

Kemudian, persamaan (12) dapat kita sederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}, \end{aligned}$$

Sehingga integral $f(x)$ dapat kita aproksimasi menjadi

$$\begin{aligned}
I &\cong \int_a^b f_1(x)dx \\
&= \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x^2 + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}x\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}^2 + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}(b-a) \\
&= \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b+a)(b-a) + bf(a)-af(b) \\
&= \frac{(f(b)-f(a))(b+a)}{2} + bf(a)-af(b) \\
&= \frac{bf(b)-bf(a)+af(b)-af(a)+2bf(a)-2af(b)}{2} \\
&= \frac{bf(a)+bf(b)-af(a)-af(b)}{2} \\
&= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},
\end{aligned}$$

juga didapatkan rumus perhitungan dengan Aturan Trapesium adalah

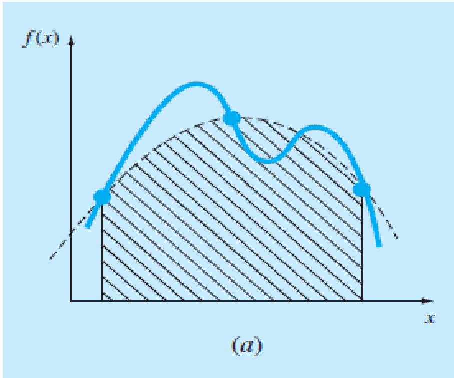
$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{13}$$

Dalam melakukan aproksimasi integral, terdapat galat yang muncul akibat pengaplikasian aturan ini. Kemudian perhitungan galat setiap segmen dapat kita cari dengan

$$\varepsilon_t = \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Trapesium}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%.$$

2.1.3 Aturan Simspon 1/3

Misal akan dihitung integral di bawah kurva warna biru dengan batas integral dari titik a sampai b. Selanjutnya, ada titik tambahan di tengah-tengah antara $f(a)$ dan $f(b)$. Ketiga titik tersebut dihubungkan dengan parabola (kurva putus-putus). Berikut ilustrasi grafiknya



.

Kita tahu bahwa integral $f(x)$ dari titik a ke b dapat diaproksimasi dengan

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx, \tag{14}$$

di mana

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

dan n menyatakan pangkat tertinggi dari polinomial. Untuk Aturan Simpson 1/3 dipilih $n = 2$, sehingga persamaan (14) menjadi

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx. \tag{15}$$

Misalkan $f_2(x)$ adalah Polinomial Lagrange orde 2, yaitu

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2), \tag{16}$$

jika disubstitusikan $x_0 = a$ dan $x_2 = b$ ke persamaan (16), maka diperoleh

$$I = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right] dx. \tag{17}$$

Setelah itu dilakukan pengintegralan dan manipulasi aljabar terhadap persamaan (17), didapatlah rumus untuk Aturan Simpson 1/3 sebagai berikut

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \tag{18}$$

Pada laporan ini, akan digunakan Aturan Simpson 1/3 Komposit karena banyaknya segmen/interval bervariasi (tidak hanya 2). Akibatnya h berubah menjadi

$$h = \frac{b-a}{n}, \tag{19}$$

di mana h adalah lebar segmen dan n adalah banyaknya segmen Total integrasinya dapat direpresentasikan sebagai berikut

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx. \tag{20}$$

Substitusikan persamaan (18) ke setiap suku persamaan (20), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} I \cong & 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \\ & 2h\frac{f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)}{6} + ... + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}. \end{aligned}$$

Kelompokkan suku-suku yang sejenis, sehingga diperoleh

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}, \tag{21}$$

yang merupakan rumus Aturan Simpson 1/3 Komposit.

2.2 Nomor 2

2.2.1 Integral Tak Wajar

Suatu integral tentu dapat dikatakan integral tak wajar jika:

1. Dalam $a \leq x \leq b$ ada yang menyebabkan $f(x)$ diskontinu
2. Batas-batas integrasinya bernilai setidaknya satu tanda tak hingga

Jenis-jenis integral tak wajar:

1. Integral wajar dengan batas pengintegralan tak hingga

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{22}$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{23}$$

   Jika limit diruas kanan ada dan berhingga, integral tak wajar disebut konvergen, jika tidak maka disebut divergen.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx. \end{aligned} \tag{24}$$

2. Integral wajar dengan integran tak hingga

   (a) Integran tak hingga di ujung selang
   Jika kontinu pada $[a, b)$ dan $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx, \tag{25}$$

   jika kontinu pada $(a, b]$ dan $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{s\to a^+} \int_{s}^{b} f(x)dx, \tag{26}$$

   jika limit ruas kanan ada, maka integral tak wajar disebut konvergen, jika tidak maka disebut divergen.

(b) Integran tak hingga di titik dalam selang pengintegralan

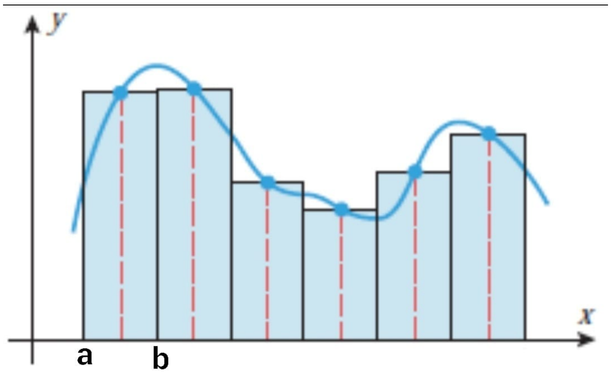
Jika $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$, kecuali di c dengan $a < c < b$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ maka

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx \qquad (27)\end{aligned}$$

Jika $\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx$ dan $\lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$ ada dan berhingga maka hasil $\int_a^b f(x)dx$ bernilai
konvergen.

2.2.2 Aturan Titik Tengah

Aturan titik tengah hampir mirip dengan aturan trapesium, tetapi aturan titik tengah menggunakan pendekatan luas persegi panjang. Kurva yang dipartisi sedemikian sehingga setiap partisi yang berbentuk kurva lengkung didekatkan dengan suatu garis singgung, di mana garis singgung yang digunakan melalui titik tengah dari lengkungan kurva pada setiap partisi. Berikut contoh ilustrasi gambar dari aturan titik tengah dengan satu partisi



Jika dimiliki sebuah partisi kurva seperti di atas dengan titik awal a sampai b dan titik tengahnya $a + \frac{1}{2}h$, maka luasnya adalah

$$\int_a^b f(x)dx = hf\left(a + \frac{h}{2}\right), \qquad (28)$$

dengan $h = b - a$.
Jika ada dua atau lebih partisi, maka luasnya adalah

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= hf\left(a + \frac{h}{2}\right) + hf\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \cdots + hf\left(a + \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= h\left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \cdots + f\left(a + \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

dengan $h = \frac{b-a}{n}$ dan n merupakan banyaknya partisi.
Untuk memastikan kebenaran persamaan di atas, kami pastikan juga dengan *crosscheck* di buku Press, William H. dkk. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed).* New York: Cambridge University Press, yaitu

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{3}{2}}) + f(x_{n-\frac{1}{2}})\right], \qquad (29)$$

dengan $h = \frac{b-a}{n}$ dan n merupakan banyaknya partisi.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Nomor 1

Buatlah sebuah program untuk menghitung

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (s > 0) \quad (1)$$

Gunakan kuadratur Gauss komposit dengan m panel dan n titik (*node*) per panel (m dan n diinput oleh *user*/pengguna) untuk menghitung integral (1) dengan variabel s diinput oleh user (pengguna). Anggap nilai ini sebagai nilai eksaknya. Kemudian hitung nilai interal tersebut dengan aturan trapesium dan Simpson dengan banyaknya titik $k = 2, 3, 4, ..., 31$ untuk aturan trapesium dan $k = 3, 5, 7, ..., 31$ untuk aturan Simpson. Dengan demikian, ada 30 nilai integral (1) untuk aturan Simpson. Dalam satu grafik, dengan sumbu x menyatakan 'banyaknya titik' dan sumbu y menyatakan 'nilai integral $p(s)$', gambarkan:

3.1.1 Aturan Kuadratur Gauss Komposit

Kita akan menggunakan 6 titik dan 8 panel dalam metode Gauss Kuadratur ini, dengan $s = 1$ dan fungsi $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ lalu kita substitusi ke persamaan (1)

$$I \cong c_0 f(z_0) + c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + c_3 f(z_3) + c_4 f(z_4) + c_5 f(z_5). \qquad (30)$$

Kita hampiri luas integral dengan fungsi $\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= \int_{-1}^{1} 1dz = 2, \\
c_0z_0 + c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4 + c_5z_5 &= \int_{-1}^{1} zdz = 0, \\
c_0z_0^2 + c_1z_1^2 + c_2z_2^2 + c_3z_3^2 + c_4z_4^2 + c_5z_5^2 &= \int_{-1}^{1} z^2dz = \frac{2}{3}, \\
c_0z_0^3 + c_1z_1^3 + c_2z_2^3 + c_3z_3^3 + c_4z_4^3 + c_5z_5^3 &= \int_{-1}^{1} z^3dz = 0, \\
c_0z_0^4 + c_1z_1^4 + c_2z_2^4 + c_3z_3^4 + c_4z_4^4 + c_5z_5^4 &= \int_{-1}^{1} z^4dz = \frac{2}{5}, \\
c_0z_0^5 + c_1z_1^5 + c_2z_2^5 + c_3z_3^5 + c_4z_4^5 + c_5z_5^5 &= \int_{-1}^{1} z^5dz = 0.
\end{aligned}$$

Kita akan mencari nilai c_i dan z_i menggunakan polinomial Legendre,

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= 1, \\
P_1(z) &= z, \\
P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \\
P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \\
P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \\
P_5(z) &= \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z) \\
P_6(z) &= \frac{1}{16}(231z^8 - 414z^4 + 105z^2 - 5).
\end{aligned}$$

Dengan menghitung akar dari persamaan Polinomial Legendre derajat 6, didapatkan nilai akar-akar z dari $P_6(z)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
z_0 &= -0,932469514, \\
z_1 &= -0,661209386, \\
z_2 &= -0,238619186, \\
z_3 &= 0,238619186, \\
z_4 &= 0,661209386, \\
z_5 &= 0,932469514.
\end{aligned}$$

Lalu kita substitusi nilai z diperoleh nilai c sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0,1713245, \\
c_1 &= 0,3607616, \\
c_2 &= 0,4679139, \\
c_3 &= 0,4679139, \\
c_4 &= 0,3607616, \\
c_5 &= 0,1713245.
\end{aligned}$$

Kita ubah variabel awalnya terlebih dahulu seperti persamaan (8)

$$z = \frac{(1 + (-1)) + (1 - (-1))z_d}{2} = z_d. \tag{31}$$

Lalu kita turunkan persamaan (31)

$$dz = dz_d. \tag{32}$$

Kita substitusi nilai z dan dz sehingga

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z_d^2}{2}\right) dz_d. \tag{33}$$

Kita substitusi nilai c_i dan z_i ke persamaan (30), sehingga diperoleh I sebesar

$$\begin{aligned} I &\cong 0,1713245f(-0,932469514) + 0,3607616f(-0,661209386) \\ &+ 0,4679139f(-0,238619186) + 0,4679139f(0,238619186) \\ &+ 0,3607616f(0,661209386) + 0,1713245f(0,932469514) \\ &= 0,6826894921370861. \end{aligned}$$

3.1.2 Aturan Trapesium

Ke-30 nilai integral (1) yang diperoleh dari aturan trapesium

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (s > 0) \quad (1)$$

Dalam menghitung luasan daerah menggunakan aturan trapesium, kita dapat membagi interval batas bawah (a) hingga batas atas (b) menjadi beberapa segmen. Untuk mempermudah perhitungan, kita akan membagi setiap segmen dengan lebar (h) yang sama. Misalkan

$$h = \frac{b-a}{n},$$

maka hasil integral (I) merupakan penjumlahan setiap segmen pada selang interval.

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]. \end{aligned}$$

Kemudian perhitungan persentase galat relatif setiap segmen dalam aturan trapesium dapat kita cari dengan

$$\varepsilon_t = \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Trapesium}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%.$$

Sebagai salah satu contoh perhitungan kita akan menghitung untuk 3 titik, yang berarti kita akan menghitung luas integral dengan membagi kedalam dua segmen. Segmen pertama untuk interval $f(-1)$ hingga $f(0)$ dan segmen kedua untuk interval $f(0)$ hingga $f(1)$, dengan

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1-(-1)}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}\left[f(x_{-1}) + f(x_0)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_{-1}) + 2f(x_0) + f(x_1)] \\ &= \frac{1}{2}\left[0,24197 + (2)0,39894 + 0,24197\right] \\ &= 0,640875. \end{aligned}$$

Kita juga dapat menghitung presentase galat relatid dari perhitungan tadi dengan

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Trapesium}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \\ &= \left|\frac{0,682689 - 0,640913}{0,682689}\right| \\ &= 6,119331. \end{aligned}$$

Berikut ini merupakan hasil perhitungan 30 nilai integral dengan menggunakan aturan trapesium beserta nilai galatnya dengan $s = 1$

Banyak Titik	Solusi Aturan Trapesium	Persentase Galat Relatif
2	0,483941	29,112509
3	0,640913	6,119398
4	0,664491	2,665639
5	0,672521	1,489354
6	0,676202	0,950266
7	0,678191	0,658816
8	0,679388	0,483548
9	0,680163	0,369978
10	0,680694	0,292200
11	0,681074	0,236608
12	0,681354	0,195498
13	0,681568	0,164244
14	0,681734	0,139928
15	0,681866	0,120639
16	0,681972	0,105081
17	0,682059	0,092350
18	0,682131	0,081800
19	0,682191	0,072960
20	0,682242	0,065479
21	0,682286	0,059093
22	0,682324	0,053597
23	0,682356	0,048834
24	0,682384	0,044679
25	0,682409	0,041032
26	0,682431	0,037815
27	0,682451	0,034961
28	0,682468	0,032419
29	0,682484	0,030144
30	0,682498	0,028101
31	0,682510	0,026259

3.1.3 Aturan Simpson

Ke-15 nilai integral (1) yang diperoleh dari aturan Simpson. Gunakan tanda yang berbeda dengan aturan trapesium.

Dalam menghitung luasan daerah menggunakan aturan simpson 1/3 komposit, kita dapat membagi interval batas bawah (a) dan batas atas (b) menjadi beberapa segmen. Untuk mempermudah perhitungan, kita akan membagi setiap segmen dengan lebar (b) menjadi beberapa segmen. Untuk mempermudah perhitugnan, kita akan membagi setiap segmen dengan lebar (h) yang sama. Misalkan

$$h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_n = b.$$

Maka hasil integral (I) merupakan penjumlahan setiap segmen tiap interval, yaitu

$$I = h\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{n}.$$

Kemudian perhitungan persentase galat relatif setiap segmen dalam aturan simpson dapat kita cari dengan

$$\varepsilon_t = \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Trapesium}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%.$$

Sebagai salah satu contoh perhitungan, kami akan menghitung luas daerah dengan menggunakan aturan simpson untuk 3 titik. Jadi perhitungan akan dibagi menjadi 2 segmen. Segmen pertama untuk interval $f(-1)$ hingga $f(0)$ dan segmen kedua untuk interval $f(0)$ hingga $f(1)$, dengan

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1-(-1)}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

sehingga nilai integral dengan menggunakan aturan trapesium adalah

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\left[f(x_{-1}) + 4f(x_0) + f(x_1)\right] \\ &= \frac{1}{3}[0,24197 + 4 * 0,39894 + 0,24197] \\ &= 0,693237. \end{aligned}$$

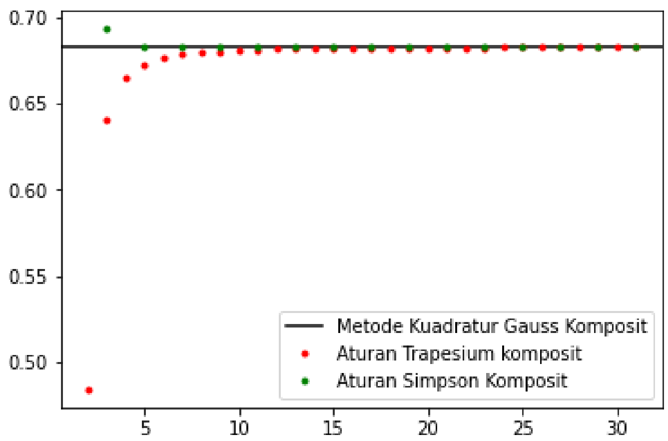
Kita juga dapat menghitung presentase galat perhitungan tersebut dengan

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Simpson}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \\ &= \left|\frac{0,682689 - 0,693237}{0,682689}\right| \times 100\% \\ &= 1,545066\% \end{aligned}$$

Berikut ini merupakan hasil perhitungan 15 nilai integral dengan menggunakan aturan simmpson beserta nilai galatnya dengan $s = 1$

Banyak Titik	Solusi Aturan Simspon	Persentase Galat Relatif
3	0,693237	1,544972
5	0,683058	0,053994
7	0,682759	0,010125
9	0,682711	0,003147
11	0,682698	0,001278
13	0,682694	0,000614
15	0,682692	0,00033
17	0,682691	0,000193
19	0,68269	0,000121
21	0,68269	0,000079
23	0,68269	0,000054
25	0,68269	0,000038
27	0,68269	0,000028
29	0,68269	0,000021
31	0,68269	0,000016

Berikut adalah hasil grafik untuk nomor 1 dari ketiga metode yang digunakan:



Gambar grafik diatas menunjukkan Aturan Trapesium maupun Aturan Simpson, semakin banyak titik yang digunakan dalam menghitung daerah luasan maka hasilnya akan mendekati nilai eksak hasil integralnya yaitu metode Gauss Kuadratur.

3.2 Nomor 2

Hitung integral tak wajar berikut secara numerik (buat programnya).

$$I = \int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx$$

Nilai eksak integral di atas adalah $I = \pi$. Jelaskan bagaimana cara menghitung integral tak wajar tersebut.

3.2.1 Aturan Titik Tengah

Pertama-tama, partisi batas integralnya dengan menggunakan rumus

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^N f(x)dx + \int_N^\infty f(x)dx. \tag{34}$$

Kami pilih $N = 2$, sehingga

$$\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx = \int_0^2 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_2^\infty \frac{2}{1+x^2} dx. \tag{35}$$

Lalu kami ubah batas integral tak wajarnya dengan menggunakan persamaan berikut

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt, \tag{36}$$

dan dikarenakan suku kedua ruas kanan memenuhi $ab = 2 \cdot \infty = \infty > 0$, maka persamaan (35) dapat berubah menjadi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx &= \int_0^2 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_{\frac{1}{\infty}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{2}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{2}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Seperti yang ada di landasan teori, dicatut dari Press, William H. dkk. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed)*. New York: Cambridge University Press., aturan titik tengah yang diperluas diberikan oleh persamaan berikut

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h[f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{3}{2}}) + f(x_{n-\frac{1}{2}})], \tag{38}$$

di mana n menyatakan jumlah langkah penyelesaian dan h menyatakan selisih antar subinterval. Selanjutnya, pesamaan (37) akan diselesaikan menggunakan Aturan Titik Tengah

- Untuk $\int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx$

Misal dipilih banyaknya selang yang digunakan$n = 8$. Akibatnya diperoleh panjang setiap sub interval sebesar:

$$\begin{aligned} h &= \frac{2-0}{8} \\ &= \frac{1}{4} \\ &= 0,25, \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusikan kumpulan nilai titik tengah ke persamaan (38)

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx &= 0,25[f(0,125) + f(0,375) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875) + f(1,125) \\ &+ f(1,375) + f(1,625) + f(1,875)] \\ &= 2,2151. \end{aligned}$$

- Untuk $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+t^2}dt$

Misal dipilih banyaknya selang yang digunakan $= 8$. Akibatnya diperoleh panjang setiap sub interval sebesar:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\frac{1}{2}}{8} \\ &= \frac{1}{16} \\ &= 0.0625, \end{aligned}$$

sehingga

sub-interval	[0;0,0625]	[0,0625; 0,125]	[0,125; 0,1875]	[0,1875; 0,25]
titik tengah	0,0313	0,0938	0,1563	0,2188
sub-interval	[0,25; 0,3125]	[0,3125; 0,375]	[0,375; 0,4375]	[0,4375; 0,5]
titik tengah	0,2813	0,3438	0,4063	0,4688

.

Selanjutnya substitusikan kumpulan nilai titik tengah di atas ke persamaan (38)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+t^2}dt &= 0,0625[f(0,0313) + f(0,0938) + f(0,1563) + f(0,2188) + f(0,2813) \\ &+ f(0,3438) + f(0,4063) + f(0,4688)] \\ &= 0,9275 \end{aligned}$$

Kembali ke persamaan (37), maka diperoleh nilai aproksimasi I menggunakan Aturan Titik Tengah sebesar

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2}dx &= \int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}dx\\ &= 2.2151 + 0.9275\\ &= 3.1426.\end{aligned}$$

Kita tahu bahwa nilai sebenarnya dari I adalah π. Oleh karena itu akan dihitung persentase galat relatifnya

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%\\ &= \left|\frac{\pi - 3.1426}{\pi}\right| \times 100\%\\ &= 0.0320648\%\end{aligned}$$

3.2.2 Aturan Simpson 1/3

Untuk metode ini langkah awalnya sama dengan metoda titik tengah dengan mengubah bentuk integralnya seperti persamaan (37).
Lalu dihitung kedua integral tersebut dengan aturan Simpson 1/3 Komposit

- Untuk $\int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx$

Misalkan nilai banyaknya selang yang digunakan adalah 8, maka diperoleh panjang setiap sub interval sebesar:

$$\begin{aligned}h &= \frac{2-0}{8}\\ &= \frac{1}{4}\\ &= 0,25.\end{aligned}$$

sehingga

nilai x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
nilai $f(x)$	2	1,8824	1,6	1,28	1	0,7805	0,6154	0,4923	0,4

.

Lalu substitusikan kumpulan nilai $f(x)$ di atas ke rumus simpson $\frac{1}{3}$ komposit, yaitu persamaan (21), sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx &= \frac{0,25}{3}[2 + 4(1,8824 + 1,28 + 0,7805 + 0,4923) + 2(1,6 + 1 + 0,6154) + 0,4]\\ &= 2,2143.\end{aligned}$$

- Untuk $\int_2^\infty \frac{2}{1+x^2}dx$

Untuk menghitung integral dengan batas tak hingga dapat dilakukan perubahan batas dari tak hingga menjadi berhingga seperti pada persamaan (36), sehingga

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{2}{1+x^2}dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{1+(\frac{1}{t})^2}dt\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+t^2}dt.\end{aligned}$$

Misalkan nilai banyaknya selang yang digunakan adalah 8, maka diperoleh panjang setiap sub interval sebesar:

$$\begin{aligned}h &= \frac{\frac{1}{2}}{8}\\ &= \frac{1}{16}\\ &= 0,0625,\end{aligned}$$

sehingga

nilai x	0	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
nilai $f(x)$	2	1,9922	1,9692	1,9321	1,8824	1,8221	1,7534	1,6787	1,6

.

Lalu substitusikan kumpulan nilai $f(x)$ di atas ke rumus simpson $\frac{1}{3}$ komposit, yaitu persamaan (21), sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+t^2}dt &= \frac{0,0625}{3}[2+4(1,9922+1,9321+1,8221+1,6787)\\ &+2(1,9692+1,8824+1,7534)+1,6]\\ &= 0,9273.\end{aligned}$$

Kembali ke persamaan soal, maka diperoleh

$$\begin{aligned}I = \int_0^\infty \frac{2}{1+x^2}dx &= \int_0^2 \frac{2}{1+x^2}dx + \int_2^\infty \frac{2}{1+x^2}dx\\ &= 2,2143+0,9273\\ &= 3,1416.\end{aligned}$$

Nilai sebenaranya dari I adalah π. Oleh karena itu, akan dihitung persentasi galat relatifnya

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\% \\
&= \left|\frac{\pi - 3.1416}{\pi}\right| \times 100\% \\
&= 0,000233843\%.
\end{aligned}$$

3.3 Algoritma Penyelesaian Nomor 1

3.3.1 Algoritma Penyelesaian Integral $p(s)$ dengan Kuadratur Gauss Komposit

***Input*/Masukkan**: Batasan integral (s), banyaknya panel (m). banyaknya titik (n)
Langkah-langkah:

1. Kita masukkan batas integral $s = 1$ dengan $m = 8$ panel dan $n = 6$ titik pembobot.

2. Ada 6 titik pembobot, maka bentuk persamaan integral Gauss Kuadraturnya sebagai berikut:

$$I \cong c_0 f(z_0) + c_1 f(z_1) + c_2 f(z_2) + c_3 f(z_3) + c_4 f(z_4) + c_5 f(z_5)$$

3. Kita hampiri fungsi integral $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{s} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ dengan fungsi $\{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= \int_{-1}^{1} 1dz = 2 \\
c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + c_4 z_4 + c_5 z_5 &= \int_{-1}^{1} zdz = 0 \\
c_0 z_0^2 + c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + c_3 z_3^2 + c_4 z_4^2 + c_5 z_5^2 &= \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3} \\
c_0 z_0^3 + c_1 z_1^3 + c_2 z_2^3 + c_3 z_3^3 + c_4 z_4^3 + c_5 z_5^3 &= \int_{-1}^{1} z^3 dz = 0 \\
c_0 z_0^4 + c_1 z_1^4 + c_2 z_2^4 + c_3 z_3^4 + c_4 z_4^4 + c_5 z_5^4 &= \int_{-1}^{1} z^4 dz = \frac{2}{5} \\
c_0 z_0^5 + c_1 z_1^5 + c_2 z_2^5 + c_3 z_3^5 + c_4 z_4^5 + c_5 z_5^5 &= \int_{-1}^{1} z^5 dz = 0
\end{aligned}$$

4. Kita akan mencari koefisien c dam z dengan menggunakan polinomial Legendre derajat 6, sehingga didapatkan:

$$P_6(z) = \frac{1}{16}(231z^8 - 414z^4 + 105z^2 - 5)$$

5. Kita dapat akar-akar z dari polinomial Legendre derajat 6

6. Setelah mendapatkan nilai z kita substitusi ke persamaan fungsi hampirannya dan melakukan eliminasi didapatkan nilai c

7. Sekarang kita akan mengubah variabel z menjadi z_d

8. Substitusi z_d dan dz_d ke $f(z)$, maka diperoleh

$$f(z_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} exp\left(-\frac{(z_d)^2}{2}\right) dz_d$$

9. Kita substitusi nilai c dan z kedalam bentuk persamaan integral Gauss Kuadratur, didapatkan hasil eksak nilai integralnya.

***Output*/Keluaran**: Hasil integral $p(s)$ dengan Metode Kuadratur Gauss Komposit

3.3.2 Algoritma Penyelesaian Integral $p(s)$ dengan Aturan Trapesium

***Input*/Masukkan**: Batasan integral (s)
Langkah-Langkah:

1. Mencari batas bawah (a) dan batas atas (b) luasan daerah integral

2. Menentukan titik pembagian segmen untuk menentukan lebar tiap segmen (h)

3. Menghitung luas daerah menggunakan rumus aturan Trapesium, yaitu

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

4. Menghitung persentase galat relatif perhitungan Aturan Trapesium

$$\varepsilon_t = \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Trapesium}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%.$$

***Output*/Keluaran**: Hasil aproksimasi integral Metode Trapesium

3.3.3 Algoritma Penyelesaian Integral $p(s)$ dengan Aturan Simpson 1/3

***Input*/Masukkan**: Batasan integral (s)

Langkah - Langkah:

1. Mencari batas bawah (a) dan batas atas (b) luasan daerah integral
2. Menentukan titik pembagian segmen untuk menentukan lebar tiap segmen (h)
3. Menghitung luas daerah menggunakan rumus Aturan Simpson
$$I = h\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{n}$$
4. Menghitung persentase galat relatif perhitungan Aturan Simpson
$$\varepsilon_t = \left|\frac{\text{Nilai Sebenarnya - Nilai Aturan Simpson}}{\text{Nilai Sebenarnya}}\right| \times 100\%$$

***Output*/Keluaran**: Hasil aproksimasi integral Metode Simpson 1/3 Komposit.

3.4 Algoritma Penyelesaian Nomor 2

3.4.1 Algoritma Penyelesaian Integral I dengan Aturan Titik Tengah

***Input*/Masukkan**:

- Data dari N, dengan N adalah bilangan real positif yang lebih besar dari 0
- Data dari n, dengan n adalah bilangan asli

Langkah-langkah:

1. Bagi batas integral menjadi 2 bagian. Untuk batas pertama dari 0 sampai N, sedangkan batas kedua dari N sampai ∞.

$$I = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^N f(x)dx + \int_N^\infty f(x)dx.$$

Kita sebut integral dengan batas pertama sebagai (1), sedangkan integral dengan batas kedua sebagai (2)

2. Untuk penyelesaian integral (1), dapat langsung gunakan aturan titik tengah. Pertama-tama, hitung panjang sub interval dengan rumus:

$$h = \frac{N-0}{n}$$

3. Cari titik tengah dari setiap sub-interval menggunakan rumus:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{h(i-1)+hi}{2},$$

dengan $i = 1, 2, ..., n$

4. Substitusikan kumpulan titik tengah tersebut ke:

$$\int_0^N f(x)dx = h\left[f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{3}{2}}) + f(x_{n-\frac{1}{2}})\right],$$

yang merupakan rumus untuk mencari integral (1)

5. Untuk penyelesaian integral (2), ubah integralnya menjadi

$$\int_N^\infty f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

6. Gunakan rumus yang sama pada langkah 2) sampai 4) sehingga didapat rumus untuk mencari integral (2)

7. Terakhir, jumlahkan integral (1) dengan integral (2) untuk mendapatkan solusi dari I

8. Untuk tambahan, persentase galat relatifnya dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\text{Nilai Sebenarnya} - \text{Nilai Aproksimasi}}{\text{Nilai Sebenarnya}} \right| \times 100\%$$

***Output*/Keluaran**: Hasil aproksimasi secara numerik dari integral tak wajar dengan batas 0 sampai ∞ yaitu penjumlahan dari integral (1) dan integral (2)

3.4.2 Algoritma Penyelesaian Integral I dengan Aturan Simpson 1/3

***Input*/Masukkan**:

- Data dari N, dengan N adalah bilangan real positif yang lebih besar dari 0
- Data dari n, dengan n adalah bilangan asli

Langkah-langkah:

1. Bagi integral menjadi dua bagian dengan batas integral dari 0 sampai N dan N sampai ∞

2. Hitung integral dengan batas 0 sampai N dengan rumus aturan simpson 1/3 komposit seperti persamaan (21)

3. Hitung integral dengan batas N sampai ∞ dengan rumus aturan simpson 1/3 komposit seperti persamaan dengan mengubah batas dan fungsinya seperti persamaan (36)

4. Jumlahkan kedua hasil integral di langkah 2 dan 3

5. Hitung persentase galat relatif (ε_t)

***Output*/Keluaran**: Hasil integral dengan batas 0 sampai N, hasil integral dengan batas N sampai ∞, hasil integral 0 sampai ∞, dan persentase galat relatif (ε_t).

4 Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan laporan tersebut, kami dapat menyimpulkan bahwa

Banyak Titik	Galat Aturan Trapesium	Galat Aturan Simpson 1/3 Komposit
3	$\left\lvert \frac{0,682689-0,640913}{0,682689} \right\rvert = 6,119331\%$	$\left\lvert \frac{0.6826890.693237}{0.682689} \right\rvert = 1.545066\%$
5	$\left\lvert \frac{0,6826890,672522}{0,682689} \right\rvert = 1.489258\%$	$\left\lvert \frac{0,6826890,683058}{0,682689} \right\rvert = 0,054051\%$
17	$\left\lvert \frac{0.682689-0.682059}{0.682689} \right\rvert = 0,092282\%$	$\left\lvert \frac{0.6826890,682689}{0,682689} \right\rvert = 0\%$

1. Dengan metode Kuadratur Gauss Komposit kita memperoleh hasil integral dari fungsi $p(s)$ sebesar 0,6826895. Nilai ini dianggap sebagai nilai eksak beserta menjadi dasar dalam memperbandingkan nilai galat dari Aturan Trapesium dan Aturan Simpson 1/3. Kelompok kami mengambil 3 titik ($n = 3, 5, 17$) sebagai gambaran perilaku dari galat kedua aturan tersebut. Saat $n = 3$ terlihat jelas bahwa Aturan Trapesium memiliki persentase galat relatif yang lebih besar dibanding Aturan Simpson 1/3. Lalu, saat $n = 5$ solusi simpson sudah mulai mendekati solusi eksaknya sekaligus diperoleh persentase galat yang relatif lebih kecil, yaitu sebesar $0,053994\%$ dibanding trapesium sebesar $1,489354\%$. Kemudian untuk $n = 17$, solusi Aturan Trapesium hampir menyerupai solusi eksaknya. Sehingga Aturan Trapesium sudah cukup berhimpit dan apabila galatnya ditinjau secara kuantitatif dapat dicermati bahwa galatnya sudah mencapai nilai yang relatif kecil yaitu 0.092282%. Jadi semakin banyak titik yang digunakan untuk menghampiri integral dari fungsi $p(s)$, maka hasil aproksimasinya akan semakin akurat. Serta pada tabel di atas kita dapat melihat bahwa penggunaan Aturan Simpson 1/3 nampak lebih akurat dalam memprediksi luasan integral $p(s)$ dibandingkan dengan Aturan Trapesium.

2. Untuk soal nomor 2 dihitung aproksimasi I menggunakan dua metode, yaitu dengan Aturan Titik Tengah dan Aturan Simpson 1/3 Komposit. Untuk Aturan Titik Tengah, didapat nilai aproksimasi I sebesar $3,1426$ dengan persentase galat relatifnya sebesar $0,0320648\%$. Untuk Aturan Simpson 1/3 Komposit, didapat nilai aproksimasi I sebesar $3,1416$ dengan persentase galat relatifnya sebesar $0,000233843\%$. Dari kedua metode tersebut dapat disimpulkan bahwa Aturan Simpson 1/3

Komposit lebih akurat dalam mengaproksimasi integral I karena memiliki persentase galat yang lebih kecil dibandingkan dengan Aturan Titik Tengah.

4.2 Saran

Oleh karena keterbatasan waktu, kedepannya kami dapat menghitung E_a (estimasi error) secara komputasi untuk masing-masing metoda atau aturan yang dipakai. Tak hanya itu, kedepannya kami dapat harap dapat lebih lebih rapih, teratur, dan terstruktur dalam hal pembuatan kode program *Python*.

Daftar Pustaka

1. Chapra, Steven C., dan Raymond P. Canale. (2006). *Numerical Methods for Engineers (7th ed)*. Boston: McGraw-Hill Higher Education.

2. Press, William H. dkk. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed)*. New York: Cambridge University Press.

3. Anton, Howard. Irl, Bivens., dan Stephen Davis. (2012). *Calculus: Early Transcendentals (10th ed)*. Hoboken: Wiley.