PROYEK UTS METODA NUMERIK PREDIKSI CURAH HUJAN DAN HARI HUJAN DI KOTA BANDUNG

Disusun Oleh :

IVAN HARTANA

6161901119

UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

BANDUNG

2021

I PENDAHULUAN

I.I Latar Belakang

Seringkali dalam kehidupan sehari-hari, kita menggunakan suatu model matematika untuk menjelaskan sebuah fenomena nyata. Model matematika yang dibentuk diharapkan dapat digunakan untuk memprediksi suatu nilai di masa depan berdasarkan data-data yang sudah diperoleh di masa lalu. Kita akan membuat sebuah model matematis untuk memprediksi jumlah curah hujan berdasarkan jumlah hari hujan, dan juga sebaliknya, menggunakan metode pencocokan kurva (*curve fitting*). Dalam penelitian ini akan dibahas lebih lanjut mengenai metode regresi dan interpolasi dalam membentuk model matematis yang menjelaskan data historis sehingga dapat digunakan untuk memprediksi fenomena tersebut.

I.II Rumusan Masalah

1. Bagaimana memprediksi jumlah hari hujan di Bandung pada bulan Oktober, November, dan Desember tahun 2019?

2. Bagaimana bentuk model matematis untuk memprediksi jumlah curah hujan pada suatu bulan jika diketahui jumlah hari hujan?

3. Bagaimana bentuk model matematis untuk memprediksi jumlah hari hujan pada bulan jika diketahui jumlah curah hujan?

I.III Tujuan

1. Mengetahui jumlah hari hujan di Bandung pada bulan Oktober, November, dan Desember tahun 2019

2. Menentukan model matematis untuk memprediksi jumlah curah hujan jika diketahui jumlah hari hujan.

3. Menentukan model matematis untuk memprediksi jumlah hari hujan jika diketahui jumlah curah hujan

I.IV Batasan Masalah

1. Instrumen penelitian
   Program yang digunakan adalah Spyder, dengan bahasa pemrograman Python.

2. Data
   Data yang digunakan dalam pembuatan laporan ini adalah data hujan yang diperoleh dari Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) Kota Bandung pada tahun 2014 sampai 2019, yang terdiri atas :
   (a) Tingkat curah hujan Kota Bandung pada Januari 2014 hingga Desember 2019.
   (b) Jumlah hari hujan kota Bandung pada Januari 2014 hingga September 2019.
   (c) Nilai jumlah curah hujan dan jumlah hari hujan tahunan diabaikan.

II LANDASAN TEORI

II.I Regresi Polinomial Orde Dua

Regresi polinomial merupakan metode *curve fitting* dimana kita mencocokkan masing-masing data peubah bebas ke persamaan polinomial hingga orde kedua untuk mencari kurva (regresi polinomial orde dua) yang meminimumkan *the sum of the residual errors* (*Sum of Squared Error*). Berikut merupakan bentuk umum regresi polinomial orde dua:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \varepsilon$$

dengan,

x_i	:	variabel bebas
y_i	:	variabel terikat
a_0, a_1, a_2	:	koefisien regresi
ε	:	galat

Perhitungan galat (*the sum of the squares of the residuals*) dalam regresi polinomial orde dua dapat ditulis sebagai berikut:

$$Sr = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$$

Untuk meminimalkan galat, perhatikan:

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = 0$$

$$-2\sum_{i=0}^{i}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1x_i - \sum_{i=1}^{n} a_2x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1x_i - \sum_{i=1}^{n} a_2x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_1} = 0$$

$$-2\sum_{i=0}^{i} x_i(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_ia_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_2x_i^3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_ia_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_2x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Sr}{\partial a_2} &= 0 \\
-2\sum_{i=0}^{i} x_i^2(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^4 &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_2 x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i
\end{aligned}
$$

$$
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \tag{3}
$$

Dari (1)-(3), maka persamaan normalnya adalah:

$$
\begin{aligned}
na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i
\end{aligned}
$$

II.II Interpolasi

Interpolasi merupakan sebuah metode *curve fitting* yang menghubungkan titik-titik dari sebuah data dan memperkirakan suatu fungsi yang menjelaskan data sehingga dapat digunakan untuk memprediksi suatu nilai yang berada di antara pasangan titik pada data. Untuk $n + 1$ pasangan titik (x, y), akan hanya ada satu kurva polinomial berderajat n yang melewati titik-titik tersebut. Misalkan dua titik di kurva $x - y$ dapat dihubungkan oleh garis linear dan tiga buah titik dapat dihubungkan oleh kurva parabola. Polinomial interpolasi inilah metode dimana kita menentukan fungsi polinomial berderajat n yang melewati semua $n + 1$ pasangan titik (x, y). Dalam mencari polinomial interpolasi, dapat digunakan interpolasi Newton dan juga interpolasi Lagrange.

- Interpolasi Newton
  Polinomial newton orde n:
  $f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0]$
  Dengan beda terbagi hingga untuk masing-masing orde adalah:

  - Beda terbagi terhingga (*finite divided difference*) orde 1:
  $$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i - x_j)}{x_i - x_j}$$
  - Beda terbagi terhingga (*finite divided difference*) orde 2:
  $$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$
  - Beda terbagi hingga (*finite divided difference*) orde n:
  $$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, ..., x_1] - f[x_{n-1}, ..., x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

  Untuk galat interpolasi Newton adalah:
  $$R_n \cong f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}..., x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

- Lagrange
  Polinomial Lagrange adalah perkembangan dari metode interpolasi Newton dimana metode ini tidak melakukan perhitungan beda terbagi hingga dalam membentuk polinomial interpolasi. Polinomial Lagrange orde n:
  $$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$
  dengan,
  $$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

III PEMBAHASAN

III.I Data yang Digunakan

Berikut merupakan data jumlah hari hujan dan jumlah curah hujan di Bandung tahun 2014-2019.

Tabel 1: Data Tahun 2014

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	309	27
Februari	88,9	17
Maret	418,7	25
April	217,6	22
Mei	176,7	23
Juni	195,5	20
Juli	180,6	15
Agustus	119,8	12
September	0,6	3
Oktober	65	11
November	296,5	26
Desember	316,4	25

Tabel 2: Data Tahun 2015

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	188	22
Februari	189,1	20
Maret	318,6	28
April	285,2	25
Mei	322,4	23
Juni	58,8	26
Juli	0,3	5
Agustus	6,9	4
September	43,2	4
Oktober	37,9	5
November	455	24
Desember	311,5	23

Tabel 3: Data Tahun 2016

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	188	23
Februari	189,1	23
Maret	318,6	30
April	285,2	29
Mei	322,4	27
Juni	58,8	21
Juli	0,3	23
Agustus	6,9	17
September	43,2	25
Oktober	37,9	29
November	455	30
Desember	311,5	23

Tabel 4: Data Tahun 2017

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	65,3	23
Februari	199,3	24
Maret	389,3	27
April	220,2	27
Mei	222,3	18
Juni	106,4	17
Juli	39,1	14
Agustus	48,4	6
September	90,8	12
Oktober	345,3	24
November	442,2	25
Desember	129,9	20

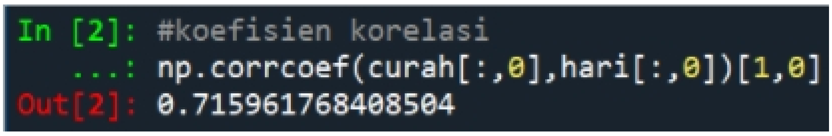
Tabel 5: Data Tahun 2018

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	191	28
Februari	239,3	23
Maret	292	25
April	297,6	23
Mei	123,9	15
Juni	33,4	15
Juli	0,3	3
Agustus	38,9	7
September	40,8	8
Oktober	124,8	18
November	483,2	23
Desember	323,5	22

Tabel 6: Data Tahun 2019

Bulan	Curah Hujan	Hari Hujan
Januari	231,6	24
Februari	269,1	24
Maret	222,7	25
April	298,9	25
Mei	245,7	23
Juni	26,5	4
Juli	13,4	4
Agustus	0,2	4
September	55	3
Oktober	84,2	NA
November	270,7	NA
Desember	313,5	NA

Sesuai dengan batasan masalah, data jumlah hari hujan pada bulan Oktober, November, dan Desember tahun 2019 diabaikan karena tidak lengkap. Pertama-tama akan dicari korelasi antara variabel jumlah hari hujan dan variabel jumlah curah hujan. Dengan menggunakan program, diperoleh koefisien korelasi antara kedua variabel yaitu sebesar 0,71596, yang berarti kedua variabel memiliki hubungan searah (karena bernilai positif) dan memiliki hubungan yang cukup kuat (karena mendekati 1), sehinngga dapat dibuat model matematis dari kedua variabel.

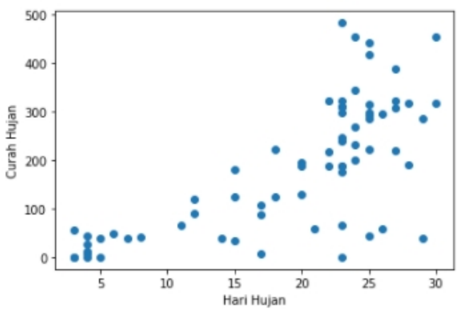


```
In [2]: #koefisien korelasi
   ...: np.corrcoef(curah[:,0],hari[:,0])[1,0]
Out[2]: 0.715961768408504
```

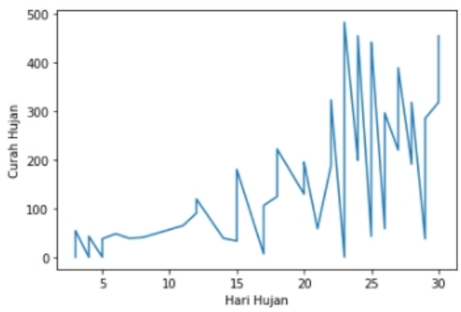
Gambar 1: *Syntax* Koefisien Korelasi

III.II Model Matematis untuk Memprediksi Jumlah Curah Hujan jika Diketahui Jumlah Hari Hujan

Dalam memprediksi jumlah curah hujan pada suatu bulan dan tahun tertentu dengan diketahui data mengenai jumlah hari hujan pada suatu bulan dan tahun tersebut digunakan metode regresi dan interpolasi. Dengan menggunakan data yang ada, kita membuat *scatter* (persebaran titik) yang menggambarkan hubungan antara kedua variabel, dimana jumlah hari hujan sebagai variabel bebas (x) dan jumlah curah hujan sebagai variabel terikat (y).



Gambar 2: *Scatter*



Gambar 3: Interpolasi

Berdasarkan plot *scatter* pada Gambar 2, dapat dilihat bahwa *trendline* atau garis regresi yang paling menggambarkan plot adalah polinomial berderajat dua (membentuk parabola). Dari *scatter* di atas, dapat juga dibuat plot interpolasi dari kedua variabel (Gambar 3). Dapat diamati bahwa model interpolasi di atas kurang cocok untuk digunakan untuk mendeskripsikan jumlah curah hujan berdasarkan jumlah hari hujan. Oleh karena itu, akan digunakan metode regresi polinomial orde dua dengan meminimalkan fungsi SSE (*Sum of Squared Error*) untuk membuat model matematis dalam memprediksi jumlah curah hujan.

Untuk membuat model regresi polinomial orde dua, pasangan data(x,y) yang diperlukan adalah minimal tiga pasang, sehingga dapat dibuat persamaan normalnya. Menggunakan data yang diberikan, maka persamaan normal untuk mencari persamaan regresi polinomial berderajat dua adalah sebagai berikut:

```
#diketahui hari hujan, ditanya curah hujan
print('Misal: C=(a0)+(a1)H+(a2)H^2')
#persamaan normal
#n(a0)+(H1)(a1)+(H2)(a2)=C1
#(H1)(a0)+(H2)(a1)+(H3)(a2)=C1H1
#(H2)(a0)+(H3)(a1)+(H4)(a2)=C1H2
A = np.array([ [n,H1,H2], [H1,H2,H3], [H2,H3,H4] ])
B = np.array([C1,C1H1,C1H2])
C = np.linalg.solve(A,B)
a0=float(C[0:1]);a1=float(C[1:2]);a2=float(C[2:3])
```

Gambar 4: *Syntax* Persamaan Regresi Jumlah Curah Hujan

Dengan menggunakan pemrograman Python, kita selesaikan sistem persamaan normal tersebut sehingga diperoleh koefisien-koefisien polinom regresi. Maka, persamaan regresi untuk memprediksi jumlah curah hujan di suatu bulan tertentu jika diketahui jumlah hari hujannya adalah

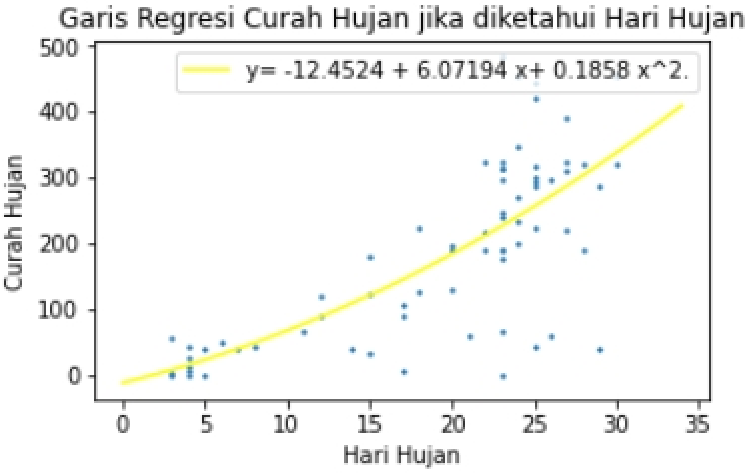
$$y = 0,1858x^2 + 6,0719x - 12,4524 \tag{4}$$

dimana

x : jumlah hari hujan

y : jumlah curah hujan

Berikut ini merupakan grafik dari model matematis untuk memprediksi jumlah curah hujan jika diketahui jumlah hari hujan.



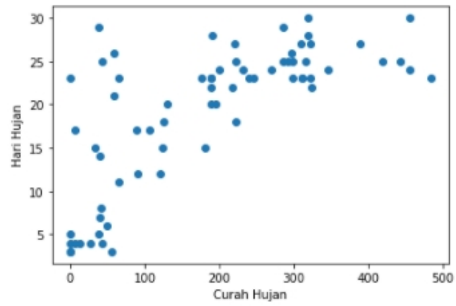

```
In [29]: curah_regresi= -12.45241667702571 + 6.071935332799701*hari+
0.18580383261885566*(hari**2)
    ...: st_curah=float(sum(np.power(np.subtract(curah,curah_bar),2)))
    ...: sr_curah=float(sum(np.power(np.subtract(curah,curah_regresi),2)))
    ...: r2_curah=float((st_curah-sr_curah)/st_curah)
    ...: print(r2_curah)
0.5181730008292793
```

Gambar 5: *Syntax* Koefisien Determinasi

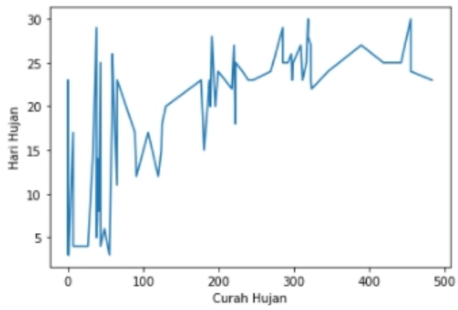
Untuk memeriksa apakah persamaan regresi yang telah didapatkan merupakan model yang cocok untuk menggambarkan data, akan diperiksa nilai dari koefisien determinasi. Dari Gambar 5, hasil koefisien determinasi adalah 0,5181730008292793 atau 52% yang menunjukkan bahwa 52% dari ketidakpastian awal sudah dapat dijelaskan oleh model regresi polinomial kuadratik atau persamaan regresi di atas (Persamaan 4) dapat digunakan untuk menentukan jumlah curah hujan di kota Bandung.

III.III Model Matematis untuk Memprediksi Jumlah Hari Hujan jika Diketahui Jumlah Curah Hujan

Dalam memprediksi jumlah hari hujan pada suatu bulan dan tahun tertentu dengan diketahui data mengenai jumlah curah hujan pada suatu bulan dan tahun tersebut, akan digunakan metode regresi dan interpolasi. Dengan menggunakan data, terlebih dahulu kita akan membuat *scatter* (persebaran titik) yang menggambarkan hubungan antara kedua variabel, dimana jumlah curah hujan sebagai variabel bebas (x) dan jumlah hari hujan sebagai variabel terikat (y).



Gambar 6: *Scatter*



Gambar 7: Interpolasi

Berdasarkan *scatter* pada Gambar 6, dapat dilihat bahwa *trendline* atau garis regresi yang paling menggambarkan plot adalah polinomial berderajat dua. Pada Gambar 7, ditunjukkan model interpolasi dari pasangan data (jumlah curah hujan, jumlah hari hujan). Metode interpolasi kurang cocok dalam menggambarkan model matematis yang diinginkan dibandingkan dengan metode regresi.

Dalam membuat model regresi polinomial orde dua, pasangan data(x, y) yang diperlukan adalah minimal tiga pasang, dimana syarat ini terpenuhi oleh data yang diberikan. Untuk mencari persamaan regresinya, dengan meminimalkan fungsi SSE (*Sum of Squared Error*), kita bentuk persamaan normal untuk regresi polinomial berderajat dua sebagai berikut:

```
#diketahui curah hujan, ditanya hari hujan
print('Misal:H=(b0)+(b1)C+(b2)C^2')
#persamaan normal
#n(b0)+(C1)(b1)+(C2)(b2)=H1
#(C1)(b0)+(C2)(b1)+(C3)(b2)=C1H1
#(C2)(b0)+(C3)(b1)+(C4)(b2)=C2H1
D = np.array([ [n,C1,C2], [C1,C2,C3], [C2,C3,C4] ])
E = np.array([H1,C1H1,C2H1])
F = np.linalg.solve(D,E)
b0=float(F[0:1]);b1=float(F[1:2]);b2=float(F[2:3])
```

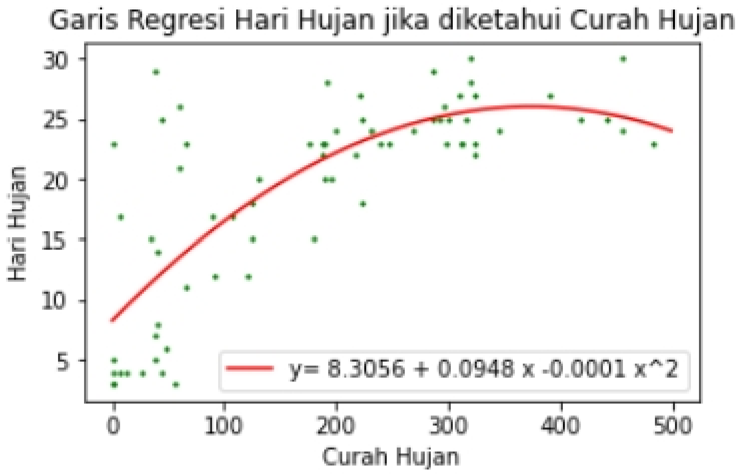
Gambar 8: *Syntax* Persamaan Regresi Jumlah Hari Hujan

Dengan menggunakan pemrograman Python, kita selesaikan sistem persamaan normal sehingga diperoleh koefisien-koefisien polinom regresi. Maka, persamaan regresi untuk memprediksi jumlah hari hujan di suatu bulan tertentu jika diketahui jumlah curah hujannya adalah

$$y = -0,0001x^2 + 0,0948x + 8,3056 \tag{5}$$

dimana
x : jumlah curah hujan
y : jumlah hari hujan

Berikut adalah grafik dari model matematis untuk memprediksi jumlah hari hujan jika diketahui jumlah curah hujan:




```
In [30]: hari_regresi=
(8.305585988313624)+(0.09477151084750207)*curah-0.00012692620157457154*(curah**
2)
    ...: st_hari=float(sum(np.power(np.subtract(hari,hari_bar),2)))
    ...: sr_hari=float(sum(np.power(np.subtract(hari,hari_regresi),2)))
    ...: r2_hari=float((st_hari-sr_hari)/st_hari)
    ...: print(r2_hari)
0.5892697021853363
```

Gambar 9: *Syntax* Koefisien Determinasi

Setelah didapatkan persamaan regresi, dicari nilai koefisien determinasi dari model matematis yang telah kita peroleh. Dari Gambar 9, hasil koefisien determinasi adalah 0,5892697021853363 atau 59% yang menunjukkan bahwa 59% dari ketidakpastian awal sudah dapat dijelaskan oleh model regresi polinomial berderajat dua sehingga Persamaan 5 dinilai cukup baik untuk digunakan dalam memprediksi jumlah hari hujan di Kota Bandung.

III.IV Prediksi Jumlah Hari Hujan di Bandung pada bulan Oktober, November, dan Desember tahun 2019

Berdasarkan model matematis yang telah kita bahas di atas, untuk memprediksi jumlah hari hujan pada suatu bulan tertentu jika diketahui curah hujan pada bulan tersebut dapat digunakan persamaan regresi polinomial derajat dua sebagai berikut (Persamaan 5):

$$y = -0,0001x^2 + 0,0948x + 8,3056$$

dimana
x : jumlah hari hujan
y : jumlah curah hujan

Jadi, mencari jumlah hari hujan pada bulan Oktober, September dan Desember tahun 2019, kita dapat mensubstitusikan nilai curah hujan pada bulan-bulan yang dicari tersebut ke persamaan regresi yang telah kita peroleh.

- Pada bulan Oktober 2019, nilai curah hujannya adalah 84,2. Oleh karena itu, jumlah hari hujan pada bulan Oktober adalah

  $$y = -0,0001(84,2)^2 + 0,0948(84,2) + 8,3056 = 15,3855 \approx 16$$

- Pada bulan November 2019, nilai curah hujannya adalah 270,7. Oleh karena itu, jumlah hari hujan pada bulan November adalah

  $$y = -0,0001(270,7)^2 + 0,0948(270,7) + 8,3056 = 24,6593 \approx 25$$

- Pada bulan Desember 2019, nilai curah hujannya adalah 313,5. Oleh karena itu, jumlah hari hujan pada bulan Desember adalah

  $$y = -0,0001(313,5)^2 + 0,0948(313,5) + 8,3056 = 25,5419 \approx 26$$

IV PENUTUP

IV.I Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan laporan tersebut dapat kita simpulkan sebagai berikut,

- Model matematis untuk memprediksi jumlah curah hujan jika diketahui jumlah hari hujan yang diperoleh dengan metode regresi polinomial berderajat dua adalah $y = 0,1858x^2 + 6,0719x - 12,4524$ dengan x sebagai jumlah hari hujan dan y sebagai jumlah curah hujan.
- Model matematis untuk memprediksi jumlah hari hujan jika diketahui jumlah curah hujan yang diperoleh dengan polinomial berderajat dua adalah $y = -0,0001x^2 + 0,0948x - 8,3056$ dengan x sebagai jumlah curah hujan dan y sebagai jumlah hari hujan.
- Metode intepolasi polinomial tidak digunakan dalam membuat model matematis karena kurang cocok dalam menggambarkan pasangan data yang diberikan.
- Dalam memprediksi jumlah hari hujan pada bulan Oktober, November, dan Desember tahun 2019 digunakan model matematis yang diperoleh dengan metode regresi polinomial orde dua. Prediksi jumlah hari hujan pada bulan Oktober, November, dan Desember 2019 secara berurutan adalah sebanyak 16 hari, 25 hari, dan 26 hari.

V DAFTAR PUSTAKA

Novia Fatimah. 2015. Aplikasi Interpolasi Newton menggunakan Borland Delphi 5.0. Teknologi dan Rekayasa Volume 20. 1. 26-51.

Lydia Jessica Susianto. 2020. Perbandingan Model Regresi Polinomial dan Model Regresi Kernel Nadaraya-Watson : Studi Kasus Harga Emas di Indonesia. Skripsi. Universitas Santa Dharma. Yogyakarta.

Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. 2015. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill. New York.