SUATU MODEL PERMAINAN BILIAR

IVAN HARTANA

Jurusan Matematika, Fakultas Teknologi Informasi dan Sains

RINGKASAN. Permainan biliar merupakan salah satu permainan populer yang dilakukan di atas meja dengan dua pemain. Setiap pemain memiliki kesempatan untuk memukul bola putih atau disebut dengan *cue ball* yang akan mengenai bola berwarna lain atau disebut dengan *object ball* dan berusaha untuk memasukkan *object ball* ke dalam lubang yang berada di pojok meja. Permainan biliar yang menjadi acuan pada laporan ini sendiri adalah permainan biliar 8-ball, dengan situasi permainan yang menjadi acuan penyusunan laporan adalah bola yang tersisa di atas meja terdiri atas *cue ball* dan satu buah *object ball* dan apabila *object ball* tersebut masuk ke dalam lubang, pemain yang mendapat giliran akan memenangkan permainan. Dari kondisi tersebut, muncul permasalahan yaitu seberapa sulit bagi pemain yang sedang mendapatkan giliran untuk memasukkan *object ball* ke dalam lubang tersebut. Laporan ini akan menyelidiki pengaruh berbagai posisi bola dan sudut pemukulan yang berpotensi terjadi terhadap tingkat kesulitan dalam memasukkan *object ball* ke lubang. Berdasarkan laporan yang telah disusun, *object ball* yang diletakkan di dekat *cue ball* adalah yang paling mudah untuk masuk ke lubang.

1. PENDAHULUAN

Biliar merupakan sebuah olahraga yang dimainkan di atas meja berukuran persegi panjang dengan beberapa jumlah bola kecil dan tongkat panjang sebagai media untuk memukulnya. Tujuan permainan biliar yaitu memasukkan bola pada lubang dengan terlebih dahulu memukul bola putih untuk menggerakkan bola lainnya.

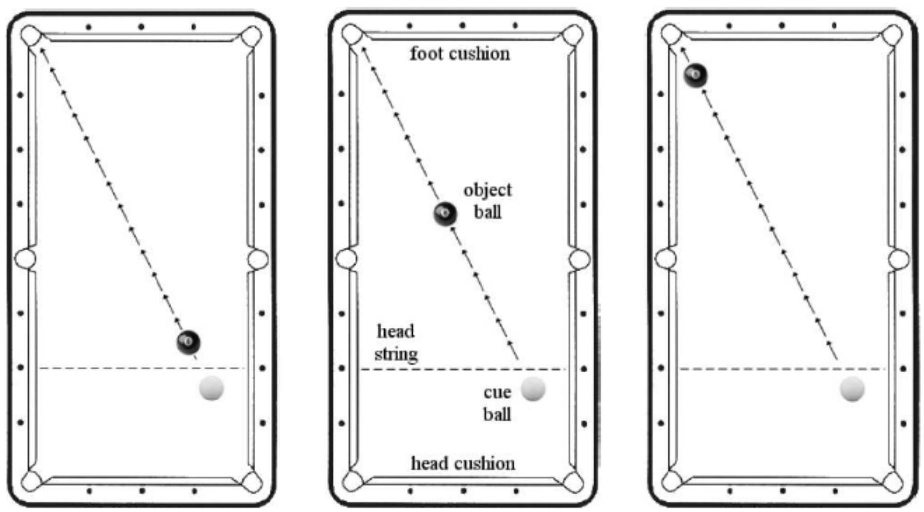
Peraturan permainan biliar adalah sebagai berikut:

(1) Permainan biliar menggunakan 15 bola dengan ketentuan bola berwarna solid memiliki nomor 1 sampai 7, bola dengan strip memiliki nomor 9 sampai 15 dan *object ball*.
(2) Untuk mengawali permainan, digunakan sistem *break*, yang dilakukan dengan pengundian. Setelah pemain melakukan *break* dan apabila ada bola yang masuk, maka pemain tersebut berhak mendapat giliran untuk menembak lagi.
(3) Pemain yang akan melakukan tembakan setelah *break* diperbolehkan memilih bola solid atau strip dengan cara memasukkan bola solid atau strip.
(4) Setiap pemain akan mendapatkan jatah bola masing-masing. Misalnya pemain A mendapat bola solid dan pemain B mendapat bola strip. Setiap pemain harus menghabiskan bolanya baru diperbolehkan memasukkan *object ball*.
(5) Pelanggaran dapat terjadi apabila pemain memasukan *cue ball* atau dengan melakukan tembakan namun bola putih tidak mengenai target. Jika terjadi pelanggaran, maka tim lawan diperbolehkan untuk mengambil giliran.

(6) Pemain yang berhasil memasukkan *object ball* ke dalam lubang setelah semua bola miliknya habis adalah pemenangnya.

Adapun hal-hal yang akan digali pada laporan ini dapat dirumuskan dalam rumusan permasalahan sebagai berikut:

(1) Posisi mana yang menurut pemain paling sulit, kedua tersulit dan yang termudah?
(2) Seberapa jauh jarak bola putih/*cue ball* dan bola hitam/*object ball* yang membuat pukulan menjadi sulit?
(3) Seberapa jauh simpangan yang mungkin dialami oleh *object ball*?



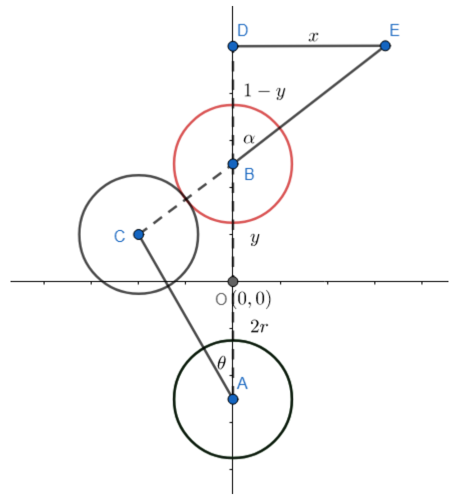
GAMBAR 1. Beberapa Kemungkinan Posisi *Cue Ball* dan *Object Ball*

Adapun, asumsi yang digunakan dalam penyusunan laporan ini adalah sebagai berikut:

(1) Permainan dilakukan hanya untuk dua orang.
(2) Posisi bola biliar seperti pada Gambar 1.
(3) Pemain merupakan pemain yang profesional di mana galat yang terjadi hanya terjadi karena tongkat biliar.
(4) Jari-jari bola adalah r.
(5) Permukaan meja licin dan tumbukan pada bola lenting sempurna.

2. KASUS SATU *OBJECT BALL* DENGAN SUDUT PEMUKULAN SANGAT KECIL

Untuk memulai, tidak akan diperhatikan terlebih dahulu mengenai lubang tempat bola masuk, namun hal yang diperhatikan adalah posisi bola seperti pada Gambar 2 yang dibentuk dalam koordinat kartesius dengan jari-jari dari *cue ball*/(bola putih) dan *object ball*/(bola target) adalah r. *Cue ball* berada di koordinat $A = (0, -2r)$ dan *object ball* berada di koordinat $B = (0, y)$ dengan $0 \leqslant y \leqslant 1$ dan $0 < r < \frac{1}{2}$. *Cue ball* akan dipukul menuju *object ball* dengan adanya sudut pemukulan yaitu θ (θ tidak negatif) dan membuat titik pusat *object ball* B berpindah ke titik E dengan $D = (0, 1)$. Misalkan C adalah titik pusat *cue ball* saat terjadi tumbukan dengan *object ball*, θ juga dapat dilambangkan dengan $\angle BAC$.



GAMBAR 2. Ilustrasi pemukulan *cue ball* yang mengenai *object ball*

Diasumsikan juga bahwa sudut θ sangat kecil yang menyebabkan adanya tumbukan atau dengan kata lain $\sin\theta \leqslant \dfrac{2r}{y+2r}$. Misalkan $x = x(y,\theta,r) = DE$ adalah jarak horizontal simpangan dari *object ball* yang terjadi di garis $y = 1$. Untuk selanjutnya, x akan disebut dengan tingkat kesulitan yang terjadi.

Untuk mencari x, perhatikan terlebih dahulu segitiga BDE dan ambil $\angle DBE = \alpha$, sehingga dengan sifat tangen dalam trigonometri diperoleh

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{DE}{BD} \\ \Leftrightarrow \quad DE &= (BD)\tan\alpha \\ \Leftrightarrow \quad x &= (1-y)\tan\alpha. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan sifat sudut berseberangan diperoleh bahwa $\angle DBE = \angle ABC = \alpha$. Kemudian, perhatikan segitiga ABC. Dengan menggunakan aturan sinus, diperoleh

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC}.$$

Perhatikan juga bahwa segitiga ABC dan segitiga BDE sebangun sehingga $\angle ACB = \theta+\alpha$. Kembali perhatikan persamaan aturan sinus di atas, yang dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned} \frac{2r}{\sin\theta} &= \frac{y+2r}{\sin(\theta+\alpha)} \\ \Leftrightarrow \quad \sin(\theta+\alpha) &= \frac{y+2r}{2r}\sin\theta \end{aligned}$$

Ingat kembali bahwa nilai θ yang dibentuk sangatlah kecil, sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \sin\theta+\alpha &= \frac{y+2r}{2r}\sin\theta \\ \Leftrightarrow \quad \sin\theta &= \frac{y+2r}{2r}\sin\theta-\alpha \\ \Leftrightarrow \quad \theta &= \arcsin\left[\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta-\alpha\right] \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi simpangan x yang menyatakan tingkat kesulitan yaitu

$$\begin{aligned} x &= (1-y)\tan\alpha \\ &= (1-y)\tan\left(\arcsin\left(\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right)-\theta\right), \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$x(y,\theta,r) = (1-y)\tan\left(\arcsin\left(\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right)-\theta\right), \tag{1}$$

untuk $0 < r < \frac{1}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, dan $0 \leqslant \theta \leqslant \arcsin\left(\frac{2r}{y+2r}\right)$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa fungsi simpangan dari *object ball* untuk kasus satu buah *object ball* dengan sudut pemukulan yang sangat kecil telah diperoleh pada persamaan (1). Agar *object ball* mengarah tepat ke target, maka haruslah $\theta \to 0$.

Perhatikan pula untuk suatu $u \to 0$, diketahui bahwa

$$u \approx \sin u \approx \tan u \approx \arcsin u. \tag{2}$$

Menggunakan sifat-sifat trigonometri yang ada pada persamaan (2), fungsi simpangan dari *object ball* dengan $\theta \to 0$ dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x &= (1-y)\tan\left(\arcsin\left(\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right)-\theta\right) \\ &\approx (1-y)\tan\left(\arcsin\left(\left(1+\frac{y}{2r}\right)\theta\right)-\theta\right) \\ &\approx (1-y)\tan\left(\left(1+\frac{y}{2r}\right)\theta-\theta\right) \\ &= (1-y)\tan\left(\left(\theta+\frac{\theta y}{2r}\right)-\theta\right) \\ &= (1-y)\tan\left(\frac{\theta y}{2r}\right) \\ &\approx \left(\frac{(1-y)y}{2r}\right)\theta. \end{aligned}$$

Kemudian, telah diketahui bahwa simpangan dari *object ball* dengan $\theta \to 0$ dinyatakan oleh

$$\begin{aligned} x &\approx \left(\frac{(1-y)y}{2r}\right)\theta \\ &= \left(\frac{y-y^2}{2r}\right)\theta. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa simpangan mendekati maksimum apabila

$$\frac{dx}{dy} \approx 0.$$

Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
& \frac{dx}{dy} && \approx 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{y-y^2}{2r}\right)\theta\right] && \approx 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 1-2y && \approx 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2y && \approx -1 \\
\Leftrightarrow \quad & y && \approx \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, jarak antara *cue ball* dan *object ball* agar pukulan yang dilakukan memiliki kesulitan paling tinggi haruslah mendekati $\frac{1}{2}$ satuan jarak untuk kasus satu buah *object ball* dengan sudut pemukulan yang sangat kecil.

3. Kasus Banyak *Object Ball* dengan Sudut Pemukulan Sangat Kecil

Selanjutnya, akan dilakukan perumuman bagi fungsi simpangan dari *object ball* yang disebut dengan *combination shots*. Apabila pada bab sebelumnya hanya terdapat satu buah *object ball* yang dipukul, pada bab ini terdapat n buah *object ball* yang ditempatkan secara berurutan dengan jarak yang sama antar *object ball* di $(0, y_k)$ untuk $0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n < 1$, dengan $y_{k+1} - y_k > 2r$ untuk $1 \leqslant k < n$. Tujuan dari perumuman ini adalah memukul *cue ball*, lalu *cue ball* mengenai *object ball* pertama, kemudian *object ball* pertama akan mengenai *object ball* kedua dan seterusnya sampai *object ball* ke-n dan akan dicari besar simpangan x di garis $y = 1$ seperti pada ilustrasi pada Gambar 3 dengan $n = 2$.

Misalkan x_n adalah besar simpangan *object ball* ke-n saat $y = 1$. Menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya (untuk $n = 1$), perhatikan kembali dari atas segitiga EFG, diketahui bahwa

$$x = (1-y)\tan\alpha_2.$$

Nilai α_2 yang dibentuk mendekati nol, sehingga dapat diaproksimasi seperti sebelumnya menjadi

$$x \approx \alpha_2 \cdot (1-y). \tag{3}$$

Selanjutnya perhatikan segitiga BDE, dengan cara yang sama diperoleh

$$\sin(\alpha_2+\alpha_1) = \frac{(y_2-y_1)}{2r}\sin\alpha_1.$$

Ingat kembali bahwa nilai α_1 dan α_2 yang dibentuk mendekati nol, sehingga dapat diaproksimasi dan ditulis ulang sebagai berikut:

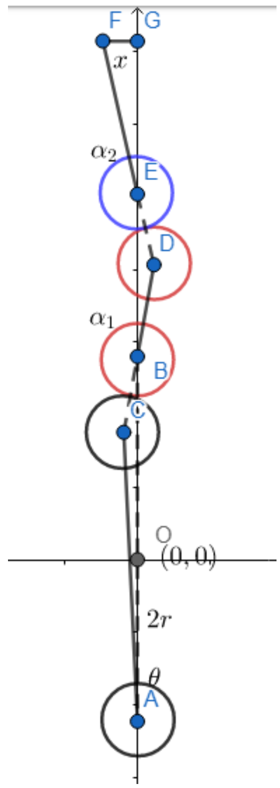
$$\alpha_2 \approx \alpha_1\left(\frac{y_2-y_1-2r}{2r}\right). \tag{4}$$

Terakhir, perhatikan segitiga ABC dan lakukan cara yang sama seperti kasus $n = 1$ sehingga diperoleh

$$\sin(\alpha_1+\theta) = \frac{y_1+2r}{2r}\sin\theta.$$

Sudut α_1 dan θ sangat kecil sehingga dapat diaproksimasi menjadi

$$\alpha_1 \approx \theta\left(\frac{y_1}{2r}\right). \tag{5}$$



GAMBAR 3. Ilustrasi pemukulan *cue ball* yang mengenai *object ball* pertama dan bertumbuk kembali dengan *object ball* kedua sampai *object ball* ketiga.

Perhatikan kembali persamaan simpangan x (3), nilai α_2 pada persamaan tersebut dapat disubstitusi dengan nilai α_2 pada persamaan (4) menjadi

$$x \approx (1 - y_2)\alpha_1 \left(\frac{y_2 - y_1 - 2r}{2r} \right).$$

Persamaan di atas dapat diganti kembali dengan menyubstitusikan nilai α_1 dari persamaan (5) menjadi

$$x \approx (1 - y_n) \left(\frac{y_n - y_{n-1} - 2r}{2r} \right) \dots \left(\frac{y_2 - y_1 - 2r}{2r} \right) \left(\frac{y_1}{2r} \right) \theta.$$

Dari pembahasan di atas pada bab ini, secara umum untuk n buah *object ball*, didapat rumusan x sebagai berikut

$$x \approx (1 - y_n) \left(\frac{y_n - y_{n-1} - 2r}{2r} \right) \dots \left(\frac{y_2 - y_1 - 2r}{2r} \right) \left(\frac{y_1}{2r} \right) \theta. \tag{6}$$

Kemudian, misalkan

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_k &= y_k - y_{k-1} - 2r \text{ untuk } 1 < k < n, \\ z_{n+1} &= 1 - y_n, \end{aligned}$$

dengan penjumlahan z_1 sampai z_{n+1} menghasilkan

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{n+1} = 1 - (n-1)2r,$$

dan persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai

$$x \approx z_{n+1}\left(\frac{z_n}{2r}\right)\left(\frac{z_{n-1}}{2r}\right)\ldots\left(\frac{z_2}{2r}\right)\left(\frac{z_1}{2r}\right)\theta.$$

Dari persamaan di atas, akan dimaksimumkan nilai $z_1 z_2 \ldots z_{n+1}$ dengan syarat $z_1 + z_2 + \ldots + z_{n+1} = 1-(n-1)2r$. Metode yang akan digunakan adalah metode ketaksamaan AM-GM dengan

$$\begin{aligned} \text{AM} &= \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}}{n+1} \\ \text{GM} &= \sqrt[n+1]{z_1 z_2 \ldots z_n z_{n+1}}, \end{aligned}$$

dan syaratnya adalah

$$\begin{aligned} \text{AM} &\geqslant \text{GM} \\ \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}}{n+1} &\geqslant \sqrt[n+1]{z_1 z_2 \ldots z_n z_{n+1}} \\ \left(\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &\geqslant z_1 z_2 \ldots z_n z_{n+1} \\ \left(\frac{1-(n-1)2r}{n+1}\right)^{n+1} &\geqslant z_1 z_2 \ldots z_n z_{n+1}. \end{aligned}$$

Ruas kiri dan ruas kanan dari ketaksamaan tersebut akan bernilai sama jika dan hanya jika

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z_{n+1} = \frac{1-(n-1)2r}{n+1}.$$

Jadi, fungsi simpangan x untuk n buah *object ball* dengan θ mendekati nol dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x &\approx z_{n+1}\left(\frac{z_n}{2r}\right)\left(\frac{z_{n-1}}{2r}\right)\ldots\left(\frac{z_2}{2r}\right)\left(\frac{z_1}{2r}\right)\theta \\ &= \left(\frac{1-(n-1)2r}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{(2r)^n}\theta \\ &= \left(\frac{1-(n-1)2r}{(n+1)2r}\right)^{n+1} 2r\theta. \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa terdapat dua asumsi yang digunakan, yaitu

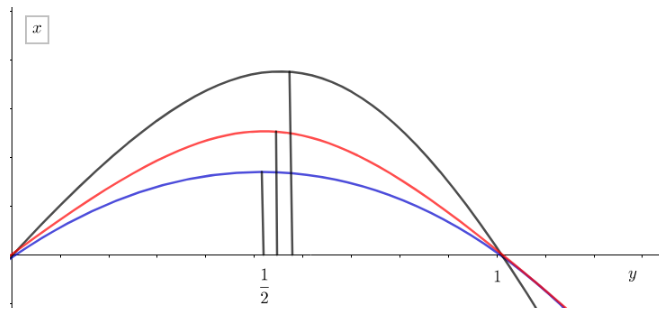
- $\dfrac{x_2}{x_1} \approx \dfrac{4}{27}\dfrac{(1-2r)^3}{2r}$,
- Jari jari bola adalah 1,125".

Tingkat kesulitan untuk mengarahkan bola ke target untuk setiap n jumlah *object ball* dapat diketahui dengan menghitung $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{x_n}{x_1}$. Dengan skala panjang y adalah 1 memberikan nilai yang sesuai dengan $\bar{r}$ diaproksimasi mendekati 0,014. Oleh karena itu, diperoleh $\dfrac{x_2}{x_1} = 5$, yang menandakan bahwa pukulan kombinasi dua buah *object ball* lebih sulit lima kali lipat dibandingkan hanya dengan satu buah *object ball*. Data tingkat kesulitan untuk mengarahkan *object ball* ke target untuk berbagai jumlah *object ball* disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 1. Tingkat kesulitan untuk mengarahkan *object ball* ke target untuk berbagai jumlah *object ball*

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D_n	5	17	42	79	120	140	140	120	81	47	23	9,1	3,1	0,89	0,21	0,041

Pada kasus satu bola dengan nilai θ yang lebih realistis, perhatikan bahwa tingkat kesulitan D_n dipengaruhi oleh y, θ dan r.



Gambar 4. Grafik Dn terhadap n

Garis biru menyatakan bahwa untuk θ yang sangat kecil, ukuran kesulitan akan mencapai tingkat maksimum apabila y sekitar $\dfrac{1}{2}$. Jika θ diperbesar maka nilai y yang menyebabkan x maksimum juga akan berubah seperti pada garis berwarna merah dan hitam.

Selanjutnya akan dilakukan analisa pembuktian bahwa fungsi ukuran kesulitan dari Gambar 4 di atas cekung ke bawah yang menandakan bahwa turunan kedua turunan fungsi tersebut terhadap y bernilai negatif. Pada penjelasan sebelumnya, telah diketahui bahwa

$$x = f(y) = (1 - y)\tan\alpha.$$

Selain itu, juga diketahui bahwa

$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{y + 2r}{2r}\sin\theta. \tag{7}$$

Kemudian, turunan pertama untuk $f(y)$ adalah

$$f'(y) = -\tan\alpha + (1 - y)\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy}. \tag{8}$$

Dengan menurunkan kedua ruas pada $\sin(\theta + \alpha) = \dfrac{y + 2r}{2r}\sin\theta$ terhadap y, diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos(\theta + \alpha)\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{1}{2r}\sin\theta \\
\frac{d\alpha}{dy} &= \frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta + \alpha).
\end{aligned}$$

Adapun, turunan kedua untuk $f(y)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f''(y) = &-\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy} - \sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy} \\ &+ (1-y)\left(2\sec^2\alpha\tan\alpha\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \sec^2\alpha\frac{d^2\alpha}{dy^2}\right). \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} = \frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta+\alpha)\frac{d\alpha}{dy}.$$

Substitusi $\frac{d\alpha}{dy}$ dan $\frac{d^2\alpha}{dy^2}$ yang diperoleh ke $f''(y)$ akan menghasilkan persamaan berikut:

$$f''(y) = \frac{d\alpha}{dy}\sec^2\alpha(-2+\mathcal{J})$$

dengan

$$\mathcal{J} = (1-y)\frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta+\alpha)(2+\tan\alpha+\tan(\theta+\alpha)).$$

Diketahui bahwa $\tan\alpha < \tan(\theta+\alpha)$, sehingga dapat ditulis bahwa

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \sec(\theta+\alpha)(2\tan\alpha+\tan(\theta+\alpha)) &< sec(\theta+\alpha)(3\tan(\theta+\alpha)) \\ &= \frac{3\sin(\theta+\alpha)}{\cos^2(\theta+\alpha)} \\ &= \frac{3\sin(\theta+\alpha)}{1-\sin^2(\theta+\alpha)} \\ &= \frac{3\sin\theta\left(\frac{y+2r}{2r}\right)}{1-\sin^2\theta\left(\frac{y+2r}{2r}\right)^2}. \end{aligned}$$

Maka, $\mathcal{J}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &< \frac{1-y}{2r}\left(\frac{2r}{1+2r}\right)\frac{3\left(\frac{2r}{1+2r}\right)\left(\frac{y+2r}{2r}\right)}{1-\left(\frac{2r}{1+2r}\right)^2\left(\frac{y+2r}{2r}\right)^2} \\ &= \frac{3(y+2r)}{1+y+4r} \\ &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{J} < \frac{3}{2}$, maka terbukti bahwa $f''(y) < 0$ dan fungsi ukuran kesulitan cekung ke bawah.

4. Kasus Satu *Object Ball* dengan Sudut Pemukulan Sembarang

Kemudian, perhatikan kembali fungsi simpangan x yang terdapat pada persamaan (1). Dari persamaan tersebut, dapat diketahui bahwa $f(0) = f(1) = 0$. Sebelumnya juga telah diketahui bahwa $f''(y) < 0$, sehingga fungsi f memiliki nilai maksimum di selang $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Namun, perlu diingat bahwa untuk kasus satu *object ball* dengan $\theta \to 0$, fungsi simpangan mencapai maksimum ketika $y \approx \frac{1}{2}$, sehingga untuk kasus satu *object ball* dengan sembarang θ, fungsi simpangan mencapai maksimum pada selang $\frac{1}{2} < y < 1$.

Maka, untuk membuktikan bahwa fungsi simpangan mencapai maksimum pada selang $\frac{1}{2} < y < 1$, akan ditunjukkan bahwa $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Perhatikan bahwa persamaan (1) dinyatakan sebagai

$$x = f(y) = (1 - y)\tan\left(\arcsin\left[\left(1 + \frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right] - \theta\right).$$

Kemudian, dari persamaan (7), diketahui bahwa

$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{y + 2r}{2r}\sin\theta.$$

Telah diketahui turunan pertama dari fungsi f sebagaimana tercantum pada persamaan (8), yaitu

$$f'(y) = -\tan\alpha + (1 - y)\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy}.$$

Telah diketahui juga bahwa $\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta + \alpha)$, sehingga dengan memilih $y = \frac{1}{2}$, diperoleh

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\tan\alpha + \frac{1}{2}\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy} \\ &= -\tan\alpha + \frac{1}{2}\sec^2\alpha\frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta + \alpha). \end{aligned}$$

Perhatikan pula bahwa $\sec^2\alpha > \sec\alpha$, sehingga perhitungan untuk mendapatkan $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ di atas dapat dilanjutkan dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\tan\alpha + \frac{1}{2}\sec^2\alpha\frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta + \alpha) \\ &> -\tan\alpha + \frac{1}{4r}\sec\alpha\sin\theta\sec(\theta + \alpha) \\ &= \sec\alpha[-\sin\alpha + (\sin(\theta + \alpha) - \sin\alpha)\sec(\theta + \alpha)] \\ &= \sec\alpha\sec(\theta + \alpha)[-\sin\alpha\cos(\theta + \alpha) + \sin(\theta + \alpha) - \sin\theta]. \end{aligned}$$

Misalkan $\mathcal{L} = -\sin\alpha\cos(\theta + \alpha) + \sin(\theta + \alpha) - \sin\theta$, maka $\mathcal{L} = 0$ jika $\alpha = 0$. Untuk menunjukkan bahwa $\mathcal{L} > 0$, maka perlu ditunjukkan bahwa $\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} > 0$.

Oleh karena itu, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} &= \cos(\theta+\alpha) - \cos\alpha\cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha\sin(\theta+\alpha) \\ &> \cos(\theta+\alpha) - \cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha\sin(\theta+\alpha) \\ &= \sin\alpha\sin(\theta+\alpha) \\ &> 0.\end{aligned}$$

Karena $\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} > 0$, maka $\mathcal{L} > 0$ dan $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Dengan demikian, telah berhasil dibuktikan bahwa fungsi simpangan dari *object ball* dengan sembarang θ mencapai maksimum pada selang $\frac{1}{2} < y < 1$.

Dengan kata lain, agar pukulan terhadap satu buah *object ball* dengan sudut pemukulan sembarang yang dilakukan adalah yang memiliki kesulitan paling tinggi, jarak antara *cue ball* dengan *object ball* haruslah di antara $\frac{1}{2}$ satuan jarak dan 1 satuan jarak.

5. Kasus Satu *Object Ball* dengan Jarak Antar Bola Tertentu

Perhatikan bahwa fungsi simpangan dari *object ball* adalah

$$x = f(y) = (1-y)\tan\left(\arcsin\left[\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right] - \theta\right),$$

yang telah tertera pada persamaan (1). Telah diperoleh pula turunan pertama dari fungsi simpangan tersebut, yaitu

$$f'(y) = -\tan\alpha + (1-y)\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dy},$$

di mana

$$\alpha = \arcsin\left[\left(1+\frac{y}{2r}\right)\sin\theta\right] - \theta$$

dan

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\sin\theta}{2r}\sec(\theta+\alpha).$$

Pada bab ini, posisi *object ball* akan **ditetapkan** di $y \approx 0$ (*object ball* berada di dekat *cue ball*) atau $y \approx 1$ (*object ball* berada di dekat target). Hal ini berbeda dengan bab sebelumnya di mana *object ball* terletak **di antara** $y = 0$ dan $y = 1$.

Oleh karena itu, akan diselidiki posisi *object ball* yang memudahkan *object ball* bergerak menuju target apabila dipukul. Asumsikan bahwa *object ball* yang terletak di dekat *cue ball* lebih mudah mencapai target ketika dipukul, sehingga perlu ditunjukkan bahwa $f'(0) < -f'(1)$.

Dengan memisalkan $a = \frac{1}{2r}$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}f'(0) &= a\cdot\tan\theta, \\ -f'(1) &= \tan\left(\arcsin\left[(1+a)\sin\theta\right] - \theta\right),\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\arctan(a\cdot\tan\theta) + \theta < \arcsin((1+a)\sin\theta).$$

Turunkan kedua ruas terhadap θ, sehinga diperoleh ketaksamaan sebagai berikut:

$$\frac{a\sec^2\theta}{1+a^2\tan\theta}+1<\frac{(1+a)\cos\theta}{\sqrt{1-(1+a)^2\sin^2\theta}}.$$

Lakukan manipulasi aljabar terhadap ketaksamaan sehingga diperoleh

$$a^2\sin^2\theta(3-(a^2+2a+3)\sin^2\theta)>0.$$

Perhatikan bahwa $\sin\theta<\dfrac{1}{a+1}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}3-(a^2+2a+3)\sin^2\theta &> 3-\frac{a^2+2a+3}{(a+1)^2}\\ &=\frac{3(a+1)^2-(a^2+2a+3)}{(a+1)^2}\\ &=\frac{2a(a+2)}{(a+1)^2}\\ &>0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $f'(0)<-f'(1)$. Hal ini menunjukkan bahwa *object ball* yang diletakkan di dekat *cue ball* lebih mudah untuk mencapai target ketika dipukul dibandingkan dengan *object ball* yang diletakkan di dekat target itu sendiri.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $f(1-u)>f(u)$ untuk $0<u<\dfrac{1}{2}$. Misalkan:

$$g(y)=\frac{f(y)}{y(1-y)}.$$

Jika $f(1-y)>f(y)$, maka

$$\frac{f(1-y)}{y(1-y)}>\frac{f(y)}{y(1-y)}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan $g(y)$ naik. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}g'(y)&=\frac{f'(y)\cdot y(1-y)-f(y)\cdot((1-y)-y)}{(y(1-y))^2}\\ &=\frac{f'(y)}{y(1-y)}+\frac{f(y)(2y-1)}{y^2(1-y)^2}\\ &=\frac{y\sec^2\alpha\frac{\sin\theta}{r}\sec(\theta+\alpha)-\tan\alpha}{y^2}.\end{aligned}$$

Perlu diingat bahwa

$$\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta=\frac{y}{2r}\sin\theta,$$

sehingga dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g'(y) &= \frac{2\sec^2\alpha(\sin\theta+\alpha)-\sin\theta)\sec(\theta+\alpha)-\tan\alpha}{y^2} \\
&> \frac{(\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta)\sec(\theta+\alpha)-\tan\alpha}{y^2} \\
&= \frac{(\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta)\sec(\theta+\alpha)-\tan\alpha}{y^2} \\
&= \frac{\sec\alpha\sec(\theta+\alpha)}{y^2}((\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)) \\
&= \frac{\sec\alpha\sec(\theta+\alpha)}{y^2}\sin\theta(1-\cos\alpha)>0 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa hasilnya adalah positif, maka telah terbukti bahwa $g(y)$ adalah fungsi yang naik terhadap y, sehingga telah terbukti bahwa $f(1-u)>f(u)$ untuk $0<u<\frac{1}{2}$.

6. *Extreme Pool*

Hal terakhir yang akan dibahas adalah nilai ekstrim dari x. Untuk memulai, misalkan terlebih dahulu $\theta_{\max}$ sebagai nilai terbesar θ yang masuk akal di $(0,1)$ atau dapat ditulis $\theta_{\max}=\arcsin\left(\frac{2r}{1+2r}\right)$. Sebuah nilai θ yang lebih besar dari $\theta_{\max}$ tidak akan menghasilkan nilai ekstrim x.

Dengan menetapkan nilai y dan r, nilai x akan berbanding lurus dengan θ. Notasikan perpindahan maksimum $m(y,r):=(x,\theta_{\max},r)$. Apabila nilai r diberikan dan $0\leqslant y\leqslant 1$, maka secara itungan $m(y,\bar{r})\approx 0{,}29$ untuk $y\approx 0{,}61$. Selanjutnya, misalkan nilai r yang mendekati nol, karena x berbanding terbalik dengan r (untuk nilai tetap y dan θ), ada nilai maksimum M dari x untuk $0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\max}$, $0<r<\frac{1}{2}$, dan $0<y<1$ yaitu

$$M=\lim_{r\to 0^+}\max_{0<y<1} m(y,r).$$

Perhatikan juga bahwa

$$x\left(y,\arcsin\left(\frac{2r}{1+2r}\right),r\right)=(1-y)\tan\left[\arcsin\left(\frac{y+2r}{1+2r}\right)-\arcsin\left(\frac{2r}{1+2r}\right)\right].$$

Dengan membuat $r\to 0$, persamaan di atas menjadi

$$x=(1-y)\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Perhatikan saat $y=0$, maka nilai x adalah nol dan untuk y mendekati 1 nilai x akan positif. Turunan dari persamaan di atas adalah

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-(1-y)(y^2+y-1)}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Akan dicari nilai maksimum, maka akan dicari hasil dari $\frac{dx}{dy}=0$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \frac{-(1-y)(y^2+y-1)}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \frac{-(1-y)(y^2+y-1)}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow \quad y &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}6180\ldots,
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\lim_{r\to 0^+} y_r = \frac{1}{\phi},$$

dengan ϕ adalah *golden ratio*.

7. Kesimpulan

Berdasarkan laporan yang telah disusun, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut.

(1) Jarak antara *cue ball* dan *object ball* agar pukulan yang dilakukan memiliki kesulitan paling tinggi haruslah mendekati $\frac{1}{2}$ satuan jarak untuk kasus satu buah *object ball* dengan sudut pemukulan yang sangat kecil.

(2) Jarak antara *cue ball* dan *object ball* agar pukulan yang dilakukan memiliki kesulitan paling tinggi haruslah di antara $\frac{1}{2}$ satuan jarak dan 1 satuan jarak untuk kasus satu buah *object ball* dengan sudut pemukulan sembarang.

(3) Dalam kasus satu *object ball* dengan jarak antar bola yang ditetapkan, *object ball* yang diletakkan di dekat *cue ball* lebih mudah untuk mencapai target ketika dipukul dibandingkan dengan *object ball* yang diletakkan di dekat target itu sendiri.

(4) Dalam kasus banyak *object ball* dengan sudut pemukulan sangat kecil, tingkat kesulitan untuk mengarahkan *object ball* ke-n ke target mengalami peningkatan sampai terdapat 8 *object ball* di atas meja biliar. Apabila terdapat 9 atau lebih *object ball* di atas meja biliar, tingkat kesulitan ini akan berkurang.

(5) Dengan menetapkan nilai y dan r, nilai x akan berbanding lurus dengan θ, di mana

$$\lim_{r\to 0^+} y_r = \frac{1}{\phi}, \text{ dengan } \phi \text{ adalah } \textit{golden ratio}.$$

Pustaka

[1] R. Mabry, The Hardest Straight-In Pool Shot, *The College Mathematics Journal*, **41** (2010), 49–57.