



Tugas 3

Pemodelan Matematika

Jonathan Hoseana, Ph.D.

Untuk menghitung: komputer hanya boleh dipakai untuk soal-soal bertanda [📐]; kalkulator boleh dipakai untuk semua soal. Pelanggaran panduan penulisan dapat berakibat pengurangan nilai.

1. Buatlah sebuah ringkasan dari materi kuliah pekan ini sepanjang 150–200 kata, tanpa menggunakan simbol maupun angka. [30]

2. Diketahui suatu modifikasi model Verhulst, yaitu

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{M}{N} \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) N,$$

dengan $r > 0$ adalah tingkat reproduksi, $K > 0$ adalah kapasitas tampung, dan $M > 0$ adalah batas minimum ukuran populasi hewan untuk dapat bertahan hidup. Anggaplah $M < K$.

- (a) Tentukan semua titik tetap model ini. [5]
- (b) Buatlah garis bilangan yang mendeskripsikan tanda dari fungsi kecepatan model ini. Dari garis bilangan ini, tentukan kestabilan setiap titik tetap tersebut (stabil atau tidak stabil). [5]
- (c) Hitunglah nilai turunan pertama fungsi kecepatan di setiap titik tetap untuk mengonfirmasi kestabilannya. [5]
- (d) Gambarkan semua kemungkinan yang berbeda secara kualitatif dari bentuk kurva $N(t)$ terhadap t . [5]
- (e) Berdasarkan gambar tersebut, jelaskan semua kemungkinan nilai $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ yang bergantung pada parameter-parameter yang ada. [5]
[Suatu kekurangan model ini: $N(t)$ dapat bernilai negatif.]
- (f) Kapan pertumbuhan populasi paling cepat? Jelaskan. [10]
- (g) Buktikan bahwa jawab eksak dari model ini dengan nilai awal $N(0) = N_0$ adalah [10]

$$N(t) = \frac{K(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0 - K)}{(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - N_0 + K}. \quad [10]$$

- (h) Gunakan jawab eksak tersebut untuk menghitung semua kemungkinan nilai $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ sebagai verifikasi jawaban soal (e). Jelaskan mengapa ada perbedaan. [10]
[Petunjuk: Selidiki bentuk kurva $N(t)$ terhadap t dalam kasus di mana ada perbedaan.]
- (i) [📐] Misalkan sekumpulan harimau Benggala di sebuah taman konservasi memiliki kapasitas tampung 100 dan membutuhkan ukuran populasi minimum 10 untuk dapat bertahan hidup. Dengan tingkat reproduksi tahunan 1 dan populasi awal 15, perkirakanlah waktu pemeliharaan yang diperlukan sampai populasinya menjadi 80 ekor dengan menggunakan jawab eksak dan jawab numerik dari metode Euler dengan memilih jarak antartitik cukup kecil agar diperoleh akurasi yang baik. Buatlah plot kedua jawab ini. [15]