



Tugas 4

Pemodelan Matematika

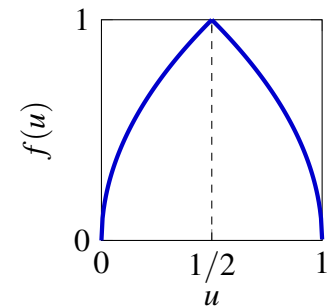
Jonathan Hoseana, Ph.D.

Untuk menghitung: komputer tidak boleh dipakai; kalkulator boleh dipakai untuk semua soal. Pelanggaran panduan penulisan dapat berakibat pengurangan nilai.

1. Buatlah sebuah ringkasan dari materi kuliah pekan ini sepanjang 150–200 kata, tanpa menggunakan simbol maupun angka. [30]

2. Perhatikan model populasi

$$u_{t+1} = f(u_t), \text{ dengan } f(u) = \begin{cases} \sqrt{2u}, & \text{jika } 0 \leq u \leq 1/2; \\ \sqrt{2-2u}, & \text{jika } 1/2 < u \leq 1, \end{cases}$$



di mana, untuk setiap $t \in \mathbb{N}_0$, $u_t \in [0, 1]$ menyatakan persentase keterisian habitat pada saat t . Gambar di samping adalah grafik $f(u)$ terhadap u .

- (a) Buktikan bahwa $u = \sqrt{3} - 1$ merupakan titik tetap dari model tersebut. Kemudian, dengan analisis kestabilan linear, buktikan bahwa titik tetap ini tidak stabil. [10]

- (b) Misalkan $y \in [0, 1]$. Tentukan $f^{-1}([0, y])$. [10]

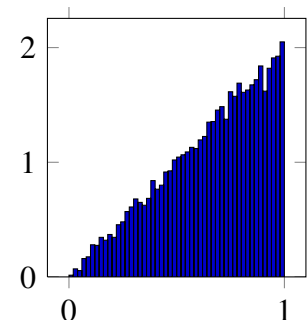
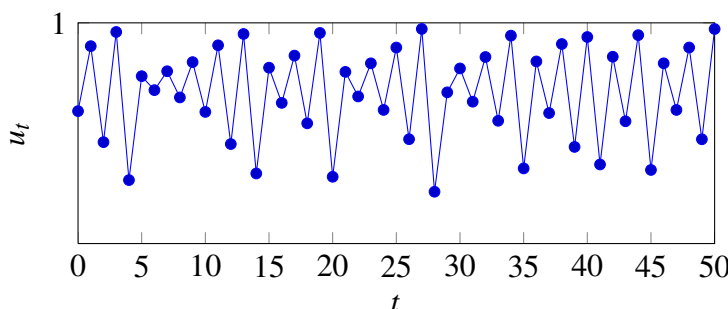
- (c) Buktikan bahwa persamaan Frobenius-Perron dari model di atas dapat dituliskan sebagai

$$\rho(y) = y \left[\rho \left(\frac{y^2}{2} \right) + \rho \left(1 - \frac{y^2}{2} \right) \right]. \quad [15]$$

- (d) Buktikan bahwa $\rho(y) = cy$, dengan $c > 0$, memenuhi persamaan Frobenius-Perron tersebut. [10]

- (e) Tentukan nilai c agar ρ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang atas $[0, 1]$. [10]

- (f) Berikut adalah plot $\{(t, u_t)\}_{t=0}^{50}$ dan histogram kepadatan dengan 50 kelas dari $\{u_t\}_{t=0}^{10.000}$, di mana $(u_t)_{t=0}^{\infty}$ adalah jawab dari model di atas dengan nilai awal $u_0 = 0,6$.



Dengan menggunakan ρ , hitunglah:

- (i) peluang bahwa persentase keterisian habitat pada suatu saat bernilai lebih dari 50%, [5]
- (ii) rata-rata dan variansi dari persentase keterisian habitat sepanjang waktu. [10]