Tugas 3 Pemodelan Matematika

Disusun oleh:

Kelompok 12

Steven Sergio (6161801001)

Christopher Malvin Hidayat (6161801025)

Ivan Hartana (6161901119)

1. Akan dibuat ringkasan dari materi kuliah sepanjang 150-200 kata, tanpa menggunakan simbol maupun angka.

   Suatu model matematika dibedakan menjadi dua yaitu model diskret dan model kontinu. Salah satu model matematika yang sering digunakan adalah model untuk suatu kuantitas yang berubah terhadap waktu. Oleh karena itu, populasi hewan yang bergantung terhadap waktu disebut laju perubahan populasi hewan tersebut pada waktu. Pada pembelajaran ini, akan dibahas bahwa laju hanya bergantung secara eksplisit pada besar populasi saat itu. Model kontinu yang dibahas yaitu model Malthus dan model Verhulst. Model Malthus merupakan model paling sederhana dengan hanya mendeskripsikan tiga macam jenis populasi yaitu konstan selamanya, naik secara eksponensial selamanya, dan turun secara eksponensial selamanya. Model Malthus tidak memperhatikan kapasitas tampung populasi, sehingga populasi dapat bertumbuh secara eksponensial menuju tak hingga yang kurang realistis. Selanjutnya, muncul model baru yaitu model Verhulst atau persamaan diferensial logistik di mana model ini memperhatikan kapasitas tampung. Model Verhulst memodelkan bahwa untuk berapapun nilai awal populasi yang ada, nilai tersebut pasti akan konvergen ke kapasitas populasi. Untuk menganalisis model kontinu terdapat dua cara, yaitu analisis kualitatif dan analisis kestabilan linear. Analisis kualitatif dilakukan apabila fungsi kecepatan sangat rumit, sedangkan analisis kestabilan linear dilakukan dengan mencari turunan pertama fungsi kecepatan terhadap waktu dan melihat kestabilannya.

2. Diketahui suatu modifikasi model Verhulst, yaitu

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{1}$$

   dengan $r > 0$ adalah tingkat reproduksi, $K > 0$ adalah kapasitas tampung, dan $M > 0$ adalah batas minimum ukuran populasi hewan untuk dapat bertahan hidup. Anggaplah $M < K$.

   (a) **Tentukan semua titik tetap model ini.**
   Untuk menentukan semua titik tetap pada model, kita harus menyelidiki pembuat nol pada persamaan (1). Kita tuliskan terlebih dahulu

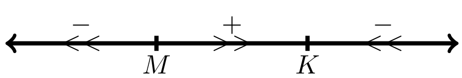
$$r\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N = 0. \tag{2}$$

   Persamaan (2) akan dipenuhi saat

$$\begin{aligned} N &= M, \\ N &= K. \end{aligned}$$

   Jadi, titik tetap dari model tersebut adalah M dan K.

   (b) **Buatlah garis bilangan yang mendeskripsikan tanda dari fungsi kecepatan model ini. Dari garis bilangan ini, tentukan kestabilan setiap titik tetap tersebut.**
   Garis bilangan yang mendeskripsikan tanda fungsi kecepatan model disajikan sebagai berikut.



Gambar 1: Garis bilangan untuk mendeskripsikan tanda dari fungsi kecepatan model

   Berdasarkan Gambar 1, titik tetap M dijauhi oleh jawab dan titik tetap K didekati oleh jawab. Akibatnya, titik tetap M bersifat tidak stabil sedangkan titik tetap K bersifat stabil.

(c) **Hitunglah nilai turunan pertama fungsi kecepatan di setiap titik tetap untuk mengonfirmasi kestabilannya.**

Kita dapat menuliskan persamaan (1) sebagai

$$\begin{aligned} f'(N) &= rN\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{N}{K}\right) \\ &= rN\left(1-\frac{N}{K}-\frac{M}{N}+\frac{M}{K}\right) \\ &= rN-\frac{rN^2}{K}-rM+\frac{rNM}{K} \\ &= r-2\frac{rN}{K}+\frac{rM}{K}. \end{aligned}$$

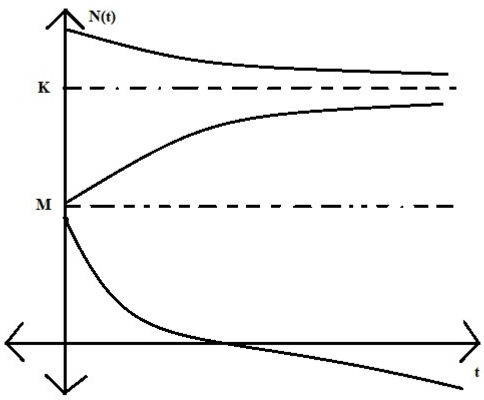
Jadi, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} f'(M) &= r-\frac{rM}{K} = r\left(1-\frac{M}{K}\right), \\ f'(K) &= r-2r+\frac{rM}{K} = r\left(\frac{M}{K}-1\right). \end{aligned}$$

Karena $M < K$, didapat bahwa $f'(M)$ akan bernilai positif, dan $f'(K)$ akan bernilai negatif yang mengklarifikasi bahwa titik tetap M tidak stabil, dan titik K stabil.

(d) **Gambarkan semua kemungkinan yang berbeda secara kualitatif dari bentuk kurva $N(t)$ terhadap t.**

Penggambaran semua kemungkinan yang berbeda secara kualitatif dari bentuk kurva $N(t)$ terhadap t disajikan dalam gambar di bawah ini.



Gambar 2: Grafik kurva $N(t)$ terhadap t

(e) **Berdasarkan gambar tersebut, jelaskan semua kemungkinan nilai $\lim_{x\to\infty} N(t)$ yang bergantung pada parameter-parameter yang ada.**

Terdapat beberapa kemungkinan nilai $\lim_{x\to\infty} N(t)$, yaitu saat $N(0) < M$, populasi akan menurun terus sampai menuju negatif tak hingga, saat $M < N(0) < K$, populasi akan meningkat menuju K atau konvergen ke K, dan saat $N(0) > K$, populasi akan menurun menuju K atau konvergen menuju K.

(f) **Kapan pertumbuhan populasi paling cepat?**

Pertumbuhan populasi paling cepat terjadi ketika $\frac{dN}{dt} = 0$, sehingga kita dapat menulis

$$\begin{aligned} f'(N) &= 0 \\ r-2\frac{rN}{K}+\frac{rM}{K} &= 0 \\ 2\frac{rN}{K} &= r+\frac{rM}{K} \\ N &= \frac{K+M}{2}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, pertumbuhan populasi paling cepat adalah pada saat $N = \frac{K+M}{2}$.

(g) **Buktikan bahwa jawab eksak dari model ini dengan nilai awal $N(0) = N_0$ adalah**

$$N(t) = \frac{K(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0 - K)}{(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - (N_0 + K)}.$$

Perhatikan persamaan (1). Kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= r\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \\
\frac{dN}{dt} &= rN\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{K-N}{K}\right) \\
\frac{dN}{dt} &= \frac{r}{K}(N-M)(K-N) \\
\frac{r}{K}dt &= \frac{dN}{(N-M)(K-N)} \\
\int \frac{r}{K}dt &= \int \frac{dN}{(N-M)(K-N)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) untuk ruas kanan dimodifikasi terlebih dahulu menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(N-M)(K-N)} &= \frac{A}{N-M} + \frac{B}{K-N} \\
&= \frac{A(K-N) + B(N-M)}{(N-M)(K-N)} \\
&= \frac{AK - AN + BN - BM}{(N-M)(N-K)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Kita memperoleh kesamaan

$$\begin{aligned}
&N^1 \to 0 = -A + B \to A = B, \\
&N^0 \to 1 = AK - BM \to 1 = BK - BM \to B = \frac{1}{K-M} \text{ dan } A = \frac{1}{K-M}.
\end{aligned}$$

Persamaan (4) menjadi

$$\frac{1}{(N-M)(N-K)} = \frac{\frac{1}{K-M}}{N-M} + \frac{\frac{1}{K-M}}{K-N}. \tag{5}$$

Subtitusikan ruas kanan persamaan (5) ke ruas kanan persamaan (3) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{r}{K}dt &= \int \tfrac{dN}{(N-M)(K-N)} \\
&= \int \left[\tfrac{\frac{1}{K-M}}{N-M} + \tfrac{\frac{1}{K-M}}{K-N}\right] dN \\
\Leftrightarrow \qquad \tfrac{r}{K}t + C &= \tfrac{1}{K-M}\ln(N-M) - \tfrac{1}{K-M}\ln(K-N) \\
&= \tfrac{1}{K-M}\left[\ln(N-M) - \ln(K-N)\right] \\
&= \tfrac{1}{K-M}\ln\left(\tfrac{N-M}{K-N}\right) \\
\tfrac{r}{K}t(K-M) + C &= \ln\left(\tfrac{N-M}{K-N}\right).
\end{aligned}$$

Dengan mengeksponensialkan kedua ruas, kita mendapatkan

$$\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]C = \frac{N-M}{K-N}. \tag{6}$$

Dengan nilai awal $N(0) = N_0$, didapat

$$C = \frac{N_0 - M}{K - N_0}. \tag{7}$$

Dengan diperolehnya nilai C, persamaan (6) dapat dilanjutkan prosesnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right](K-N) &= \frac{N-M}{C} \\
K\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] - N\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] &= \frac{N}{C} - \frac{M}{C} \\
K\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] + \frac{M}{C} &= N\left(\frac{1}{C} + \exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]\right).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita dapat menuliskan ekspresi bagi N sebagai

$$\begin{aligned} N &= \frac{K\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] + \frac{M}{C}}{\left(\frac{1}{C} + \exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]\right)} \\ &= \frac{\frac{KC\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]+M}{C}}{\frac{1+C\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]}{C}} \\ &= \frac{KC\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] + M}{1 + C\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]}. \end{aligned} \tag{8}$$

Subtitusi nilai C dari persamaan (7) ke ruas kanan persamaan (8), sehingga kita memperoleh

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\frac{N_0-M}{K-N_0}K\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] + M}{1 + \frac{N_0-M}{K-N_0}\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]} \\ &= \frac{\frac{K(N_0-M)\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]+M(K-N_0)}{K-N_0}}{\frac{(K-N_0)+(N_0-M)\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]}{K-N_0}} \\ &= \frac{K(N_0-M)\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right] + M(K-N_0)}{(K-N_0) + (N_0-M)\exp\left[\frac{r}{K}t(K-M)\right]} \\ &= \frac{K(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0-K)}{(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - N_0 + K}. \end{aligned}$$

(h) **Gunakan jawab eksak tersebut untuk menghitung semua kemungkinan nilai $\lim\limits_{x\to\infty} N(t)$ sebagai verifikasi jawaban soal (e).**

Akan dicari nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} N(t)$ sebagai verifikasi jawaban soal (e).

Berdasarkan Gambar 2 dan jawaban pada butir (e), kita dapat menulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} N(t) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{K(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0-K)}{(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - N_0 + K} \\ &\overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{K(N_0-M)\frac{K-M}{K}re^{\frac{K-M}{K}rt}}{(N_0-M)\frac{K-M}{K}re^{\frac{K-M}{K}rt}} \\ &= \lim_{t\to+\infty} K \\ &= K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} N(t) &= \lim_{t\to-\infty} \frac{K(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0-K)}{(N_0-M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - N_0 + K} \\ &\overset{H}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{K(N_0-M)\frac{K-M}{K}re^{\frac{K-M}{K}rt}}{(N_0-M)\frac{K-M}{K}re^{\frac{K-M}{K}rt}} \\ &= \lim_{t\to-\infty} K \\ &= K. \end{aligned}$$

Terdapat perbedaan dengan hasil kualitatif dengan hasil kuantitatif. Perhatikan bahwa dalam model terdapat kelemahan di mana model tersebut dapat bernilai negatif yang mengartikan populasi bernilai negatif untuk t tertentu.

(i) **Misalkan sekumpulan harimau Benggala di sebuah taman konservasi memiliki kapasitas tampung 100 dan membutuhkan ukuran populasi minimum 10 untuk dapat bertahan hidup. Dengan tingkat reproduksi tahunan 1 dan populasi awal 15, perkirakanlah waktu pemeliharaan yang diperlukan sampai populasinya menjadi 80 ekor dengan menggunakan jawab eksak dan jawab numerik dari metode Euler dengan memilih jarak antartitik cukup kecil agar diperoleh akurasi yang baik.**

- **Dengan jawab eksak.**

  Misalkan,

$$\begin{aligned} K &: \text{ kapasitas tampung,} \\ M &: \text{ populasi minimum,} \\ r &: \text{ tingkat reproduksi tahunan,} \\ N_0 &: \text{ populasi awal,} \\ N_t &: \text{ populasi saat } t. \end{aligned}$$

Berdasarkan soal di atas, kita mengetahui bahwa

$$\begin{aligned} K &= 100, \\ M &= 10, \\ r &= 1, \\ N_0 &= 15, \\ N_t &= 80. \end{aligned}$$

Maka dapat kita selesaikan dengan menggunakan persamaan,

$$N(t) = \frac{K(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - M(N_0 - K)}{(N_0 - M)e^{\frac{K-M}{K}rt} - N_0 + K}. \tag{9}$$

Berdasarkan informasi yang ada, kita dapat menulis

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{100(15-10)e^{\frac{100-10}{100}t} - 10(15-100)}{(15-10)e^{\frac{100-10}{100}t} - 15 + 100} \\ 80 &= \frac{100(15-10)e^{\frac{100-10}{100}t} - 10(15-100)}{(15-10)e^{\frac{100-10}{100}t} - 15 + 100} \\ 80 &= \frac{500e^{\frac{9t}{10}} - 10(-85)}{5e^{\frac{9t}{10}} + 85} \\ 80(5e^{\frac{9t}{10}} + 85) &= 500e^{\frac{9t}{10}} + 850 \\ 400(e^{0,9t}) + 6800 &= 500(e^{0,9t}) + 850 \\ 400(e^{0,9t}) &= 500(e^{\frac{9t}{10}}) - 5950 \\ -100(e^{0,9t}) &= -5950 \\ e^{0,9t} &= 59,5 \\ 0,9t &= \ln(59,5) \\ t &\approx 4,53997. \end{aligned}$$

Dengan demikian, waktu pemeliharaan yang dibutuhkan sampai populasi harimau Benggala menjadi 80 ekor diperkirakan selama 4,53997 tahun berdasarkan jawab eksak.

- **Dengan jawab numerik.**
  Akan digunakan metode Euler pada model

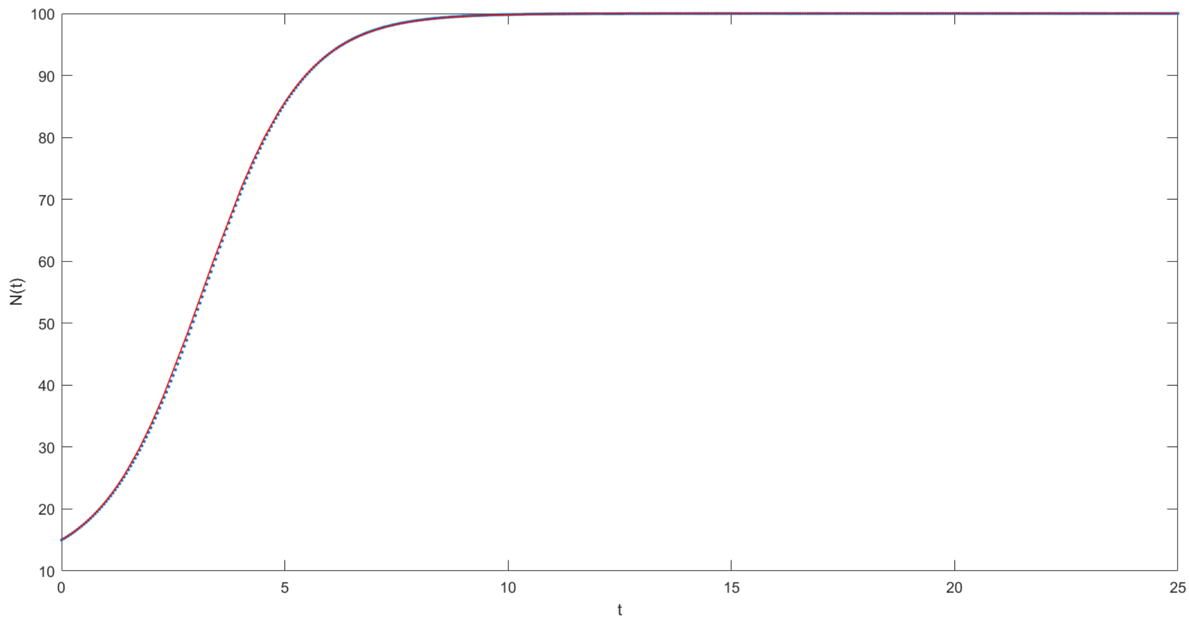
$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$

untuk memperkirakan waktu pemeliharaan harimau Benggala secara numerik. Misalkan kita pilih $h = 0,05$, untuk setiap $i \in N_0$, maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned} N_i + 1 &= N_i + f(N_i)h \\ &= N_i + (1 - \frac{10}{N_i})(1 - \frac{N_i}{100})N_i \cdot 0.5 \\ &= -0,005(N_i)^2 + 1,55N_i - 5. \end{aligned}$$

Dengan bantuan *software* MATLAB, diperkirakan waktu pemeliharaan yang dibutuhkan sampai populasi harimau Benggala menjadi 80 ekor adalah selama 4,6 tahun berdasarkan jawab numerik.

Di halaman selanjutnya, diberikan gambar grafik yang membandingkan jawaban secara eksak dan jawaban secara numerik. Grafik dibuat dengan *software* MATLAB.



Gambar 3: Jawaban secara numerik (dinyatakan oleh titik-titik biru) dan jawaban secara eksak (dinyatakan oleh garis merah)