Tugas 4 Pemodelan Matematika

Disusun oleh:
Kelompok 12

Steven Sergio	(6161801001)
Christopher Malvin Hidayat	(6161801025)
Ivan Hartana	(6161901119)

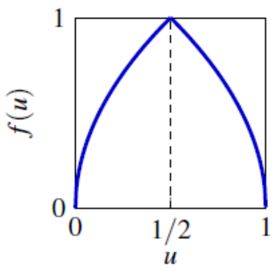
1. Akan dibuat ringkasan dari materi kuliah sepanjang 150-200 kata, tanpa menggunakan simbol maupun angka.

   Model diskrit menganggap reproduksi terjadi secara serentak dengan selang waktu antar reproduksi tetap. Sama seperti model kontinu, akan diasumsikan bahwa perubahaan tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu, tetapi hanya kepada populasinya. Pada umumnya, setiap model kontinu dapat dibuat dan dipelajari versi diskritnya, ada yang memiliki perilaku yang mirip, ada pula yang berbeda jauh. Model Malthus versi diskrit memiliki perilaku yang mirip dengan versi kontinu, sedangkan model Verhulst versi diskrit memiliki perilaku yang berbeda dengan versi kontinu. Model Malthus versi diskrit dan kontinu sama-sama memiliki suatu faktor pengali yang tak nol dimana apabila faktor tersebut lebih besar dari satu populasi akan tumbuh secara eksponensial, sama dengan satu populasi akan konstan dan lebih kecil dari satu populasi akan surut secara eksponensial. Perbedaannya dengan model kontinu adalah titik batas dalam versi diskrit adalah satu sedangkan versi kontinu adalah nol. Model Verhulst versi diskrit memiliki perbedaan karena dalam kasus diskrit terdapat kemungkinan selain konvergen ke satu titik atau divergen, yaitu konvergen ke suatu batas yang disebut siklus-2. Siklus dalam model Verhulst akan terus berlanjut yang menyebabkan perilaku jawab menjadi *chaos*. Sehingga untuk model Verhulst, lebih baik dicari fungsi kepadatan peluangnya. Dengan mencari fungsi kepadatan peluang, maka dapat mencari ekspektasi dari populasi tersebut.

2. Perhatikan model populasi

$$u_{t+1} = f(u_t), \text{ dengan } f(u) = \begin{cases} \sqrt{2u}, & \text{jika } 0 \leqslant u \leqslant 1/2; \\ \sqrt{2-2u}, & \text{jika } 1/2 < u \leqslant 1, \end{cases}$$

   di mana untuk setiap $t \in \mathbb{N}_0$, $u_t \in [0,1]$ menyatakan persentase keterisian habitat pada saat t. Gambar di bawah adalah grafik $f(u)$ terhadap u.



   (a) **Buktikan bahwa $u = \sqrt{3} - 1$ merupakan titik tetap dari model tersebut. Kemudian, dengan analisis kestabilan linear, buktikan bahwa titik tetap ini titik stabil.**
   Untuk membuktikan titik tetap $u = \sqrt{3} - 1$ merupakan titik stabil, pertama-tama kita mengambil

$$N^* = \sqrt{3} - 1. \tag{1}$$

   Kita mengetahui apabila persamaan berikut terpenuhi, maka N^* merupakan titik tetap.

$$f(N^*) = N^* \tag{2}$$

   Perhatikan bahwa $N^* = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}732$, sehingga $N^* > \frac{1}{2}$. Oleh karena itu, kita hanya akan memeriksa batas $1/2 < u \leqslant 1$.

Substitusi nilai N^* dari persamaan (1) ke persamaan (2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}-1) &= \sqrt{2-2(\sqrt{3}-1)} \\ &= \sqrt{2-2\sqrt{3}+2} \\ &= \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}-1 = N^*. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\sqrt{3}-1$ merupakan titik tetap untuk u_{t+1}.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa titik tetap tersebut tidak stabil, dengan mencari turunan pertama yang dimutlakkan dari $f(N^*)$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{rrcl} & f(N) &=& \sqrt{2-2u} \\ \Leftrightarrow & f'(N) &=& \frac{1}{2}(2-2u)^{-\frac{1}{2}}(-2) \\ & &=& \frac{-1}{\sqrt{2-2u}} \\ \Leftrightarrow & f'\left(\sqrt{3}-1\right) &=& \frac{-1}{\sqrt{2-2(\sqrt{3}-1)}} \\ & &=& \frac{-1}{\sqrt{2-2\sqrt{3}+2}} \\ & &=& \frac{-1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\ & &=& \frac{-1}{\sqrt{3}-1} \\ \Leftrightarrow & \left|f'(\sqrt{3}-1)\right| &=& \frac{1}{\sqrt{3}-1} > 1. \end{array}$$

Karena $|f(N^*)| > 0$, maka titik $\sqrt{3}-1$ tidak stabil.

(b) **Misalkan** $y \in [0,1]$. **Tentukan** $f^-1([0,y])$.
Kita akan mencari $f^-1([0,y])$ dengan pembagian dua kasus.

- Untuk kasus $0 \leqslant u \leqslant 1/2$, kita dapat menulis

$$\begin{array}{rrcl} & f(u) &=& \sqrt{2u} \\ \Leftrightarrow & f^2(u) &=& 2u \\ \Leftrightarrow & u &=& \frac{f^2(u)}{2} \\ \Leftrightarrow & f^{-1}(u) &=& \frac{u^2}{2}. \end{array}$$

  Kita mendapatkan $\left[0, \frac{u^2}{2}\right]$.

- Untuk kasus $1/2 < u \leqslant 1$, kita dapat menulis

$$\begin{array}{rrcl} & f(u) &=& \sqrt{2-2u} \\ \Leftrightarrow & f^2(u) &=& 2-2u \\ \Leftrightarrow & f^2(u)-2 &=& -2u \\ & &=& 1-\frac{f^2(u)}{2} \\ \Leftrightarrow & f^{-1}(u) &=& 1-\frac{u^2}{2}. \end{array}$$

  Kita mendapatkan $\left[1-\frac{u^2}{2}, 1\right]$.

Dengan demikian, kita memperoleh

$$f^{-1}(0,[y]) = \left[0.\frac{u^2}{2}\right] \cup \left[1-\frac{u^2}{2}, 1\right].$$

(c) **Buktikan bahwa persamaan Frobenius-Perron dari model di atas dapat dituliskan sebagai**

$$\rho(y) = y\left[\rho\left(\frac{y^2}{2}\right) + \rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Persamaan Frobenius-Perron dari model di atas dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho(y) &= \frac{d}{dy}\left[\int_0^{\frac{y^2}{2}} \rho(u)du + \int_{1-\frac{y^2}{2}}^{1} \rho(y)dy\right] \\
&= \frac{d}{dy}\left[\int_0^{\frac{y^2}{2}} \rho(u)du - \int_{1}^{1-\frac{y^2}{2}} \rho(u)du\right] \\
&= \frac{d}{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}\left[\int_0^{\frac{y^2}{2}} \rho(u)du\right]\frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dy} - \frac{d}{d\left(1-\frac{y^2}{2}\right)}\left[\int_1^{1-\frac{y^2}{2}} \rho(u)du\right]\frac{d\left(1-\frac{y^2}{2}\right)}{dy} \\
&= \rho\left(\frac{y^2}{2}\right)y - \rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right)(-y) \\
&= y\rho\left(\frac{y^2}{2}\right) + y\rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right) \\
&= y\left[\rho\left(\frac{y^2}{2}\right) + \rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa persamaan Frobenius-Perron dapat dituliskan seperti pada persamaan (3).

(d) **Buktikan bahwa $\rho(y) = cy$, dengan $c > 0$, memenuhi persamaan Frobenius-Perron tersebut.**
Perhatikan persamaan (3). Kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
\rho(y) &= y\left(\rho\left(\frac{y^2}{2}\right) + \rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right) \\
&= y\left(c\left(\frac{y^2}{2}\right) + c\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right) \\
&= y\left(c\left(\frac{y^2}{2}\right) + c - c\left(\frac{y^2}{2}\right)\right) \\
&= cy.
\end{aligned}$$

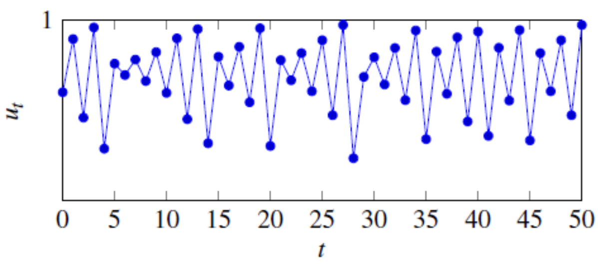
Dengan demikian, terbukti bahwa $\rho(y) = cy$, dengan $c > 0$, memenuhi persamaan Frobenius-Perron.

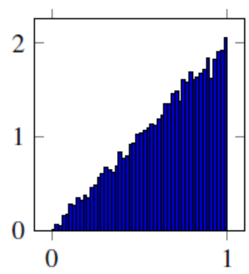
(e) **Tentukan nilai c agar ρ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang atas $[0, 1]$.**

$$\begin{array}{rcl}
1 &=& \int_0^1 \rho(y)\,dy \\
&=& \int_0^1 cy\,dy \\
&=& \frac{c}{2}y^2\Big|_0^1 \\
&=& \frac{c}{2}[1^2 - 0] \\
&=& \frac{c}{2} \\
\Leftrightarrow \quad c &=& 2.
\end{array}$$

Agar ρ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang atas $[0, 1]$, haruslah $c = 2$.

(f) **Berikut adalah plot $\{(t, u_t)\}_{t=0}^{50}$ dan histogram kepadatan dengan 50 kelas dari $\{u_t\}_{t=0}^{10.000}$, di mana $(u_t)_{t=0}^{\infty}$ adalah jawab dari model di atas dengan nilai awal $u_0 = 0{,}6$.**





Dengan menggunakan ρ, hitunglah:

i. **peluang bahwa persentase keterisian habitat pada suatu saat bernilai lebih dari 50%,**
Perhatikan bahwa kita telah memperoleh $c = 2$ dari soal sebelumnya, sehingga kita memperoleh suatu fungsi kepadatan peluang, yaitu

$$\rho(y) = 2y. \tag{4}$$

Berdasarkan fungsi kepadatan peluang pada persamaan (4), kita dapat menentukan peluang bahwa persentase keterisian habitat pada suatu saat bernilai lebih dari 50% sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{1} 2y\,dy &= y^2\Big|_{0,5}^{1}\\ &= 1^2 - 0{,}5^2\\ &= 0{,}75.\end{aligned}$$

Jadi, peluang persentaste keterisian habitat lebih dari 50% adalah 0,75.

ii. **rata-rata dan variansi dari persentase keterisian habitat sepanjang waktu.**
Rata-rata persentase keterisian dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y] = \int_0^1 y\cdot\rho(y)\,dy &= \int_0^1 y\cdot 2y\,dy\\ &= \int_0^1 2y^2\,dy\\ &= \frac{2}{3}y^3\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}[1-0]\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Adapun, variansi persentase keterisian habitat dapat dihitung dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(y) &= \mathrm{E}\left[Y^2\right] - (\mathrm{E}[Y])^2\\ &= \int_0^1 y^2\cdot\rho(y)\,dy - \left(\int_0^1 y\cdot\rho(y)\,dy\right)^2\\ &= \int_0^1 y^2\cdot 2y\,dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2\\ &= \int_0^1 2y^3\,dy - \frac{4}{9}\\ &= \frac{1}{2}y^4\Big|_0^1 - \frac{4}{9}\\ &= \frac{1}{2}[1-0] - \frac{4}{9}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9}\\ &= \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita memperoleh rata-rata dan variansi persentase keterisian habitat sepanjang waktu masing-masing adalah $\frac{2}{3}$ dan $\frac{1}{18}$.