Tugas 2 Pemodelan Matematika

Disusun oleh:
Kelompok 12

Steven Sergio	(6161801001)
Christopher Malvin Hidayat	(6161801025)
Ivan Hartana	(6161901119)

1. Akan dibuat ringkasan dari materi kuliah sepanjang 150-200 kata, tanpa menggunakan simbol maupun angka.

   Sebuah variabel dikatakan berbanding dengan variabel yang lain, jika terdapat konstanta yang tidak nol (disebut konstanta kesebandingan) yang membentuk garis lurus dan melewati titik asal. Kesebandingan memiliki tiga sifat yaitu reflektif, simetrik, dan transitif. Apabila dilihat secara grafis, plot antara variabel pertama dan variabel kedua akan membentuk garis lurus yang melalui titik asal dengan gradiennya adalah konstanta kesebandingan. Keserupaan geometris (kesebangunan) adalah apabila terdapat sebuah objek yang secara geometris memiliki bentuk yang sama dengan objek lain, maka akan dikatakan sebangun jika objek yang satu merupakan hasil pembesaran atau pengecilan objek yang lain. Teorema kesebangunan untuk luas adalah misalkan ada sebuah himpunan dari objek-objek yang sebangun. Untuk setiap objek di himpunan tersebut dengan sebuah nilai luas dan adanya ukuran karakteristik, maka berlaku kesebandingan antara luas dan ukuran karakteristik yang dikuadratkan. Sedangkan teorema kesebangunan untuk volume adalah misalkan ada sebuah himpunan dari objek-objek yang sebangun. Untuk setiap objek di himpunan tersebut dengan sebuah nilai volume dan adanya ukuran karakteristik, maka berlaku kesebandingan antara volume dan ukuran karakteristik yang dipangkatkan tiga. Hubungan variabel yang tidak linear dapat ditransformasikan menjadi hubungan linear. Transformasi ini disebut linearisasi. Terdapat tiga jenis linearisasi yang sering digunakan, yaitu hubungan linearisasi secara logaritmik, eksponensial, dan aljabarik.

2. Seorang pemancing ikan ingin menyatakan berat ikan sebagai suatu fungsi dari panjang ikan itu.

   (a) Dengan menetapkan beberapa asumsi lalu menggunakan kesebandingan, jelaskan mengapa berat ikan dapat dianggap sebanding dengan pangkat tiga dari panjangnya.
   Asumsikan bahwa setiap ikan sebangun dengan ikan yang lain, dan asumsikan berat jenis ikan sama. Ambil juga variabel h yang merupakan panjang ikan dari ujung ekor ke ujung kepalanya, W merupakan berat jenis ikan dan V merupakan variabel bergantung untuk volume ikan. Dari teorema kesebangunan, kita memperoleh hubungan

   $$V \propto h^3.$$

   Kemudian, dari asumsi berat jenis ikan sama kita memperoleh hubungan

   $$W \propto V.$$

   Akan digunakan sifat transitif yang menyatakan jika $y \propto x$ dan $x \propto w$, maka $y \propto w$. Perhatikan bahwa kita telah memiliki hubungan $V \propto h^3$ dan $W \propto V$. Dengan sifat transitif, kita memperoleh hubungan

   $$W \propto h^3.$$

   Dengan demikian, kita telah memperoleh hubungan kesebangunan bahwa berat ikan sebanding dengan pangkat tiga dari panjang ikan.

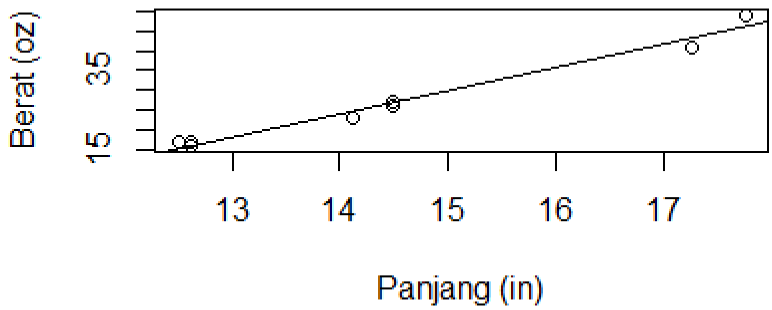
   (b) Akan digunakan data berikut untuk memverifikasi kesebandingan tersebut (dengan membuat plot yang sesuai) dan mengestimasi konstanta kesebandingannya.

Tabel 1: Data Panjang dan Berat Ikan

Panjang (in)	14,5	12,5	17,25	14,5	12,625	17,75	14,125	12,625
Berat (oz)	27	17	41	26	17	49	23	16

Pertama-tama, dengan bantuan *software* RStudio, data pada tabel disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut.

Sebagai catatan, grafik di atas melewati titik (0,0), namun tidak tergambarkan karena terdapat perbedaan skala antara sumbu x dan sumbu y.



Gambar 1: Plot panjang ikan terhadap berat ikan

Kemudian, akan diestimasi konstanta kesebandingan berdasarkan data pada tabel.
Misalkan pangkat tiga dari panjang ikan dinyatakan oleh x, berat ikan dinyatakan oleh W, panjang ikan dinyatakan oleh h, dan konstanta kesebandingan dinyatakan oleh c.
Kita juga telah mendapatkan hubungan kesebangunan bahwa berat ikan sebanding dengan pangkat tiga dari panjang ikan (sebagai pengingat, pangkat tiga dari panjang ikan juga sebanding dengan volume ikan), sehingga berdasarkan informasi di atas, kita memperoleh suatu hubungan, yaitu

$$W = c \cdot h^3 = c \cdot x. \tag{1}$$

Untuk memudahkan pencarian konstanta kesebandingan, akan disajikan data panjang ikan dari Tabel 1 dengan data pangkat tiga dari panjang ikan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 2: Data Panjang dan Volume Ikan

Panjang (in)	14,5	12,5	17,25	14,5	12,625	17,75	14,125	12,625
Volume (in^3)	3048,625	1953,125	5132,953	3048,62	2012,307	5592,359	2818,158	2012,307

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, kita dapat membentuk sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{cases} 3048{,}625c &= 27, \\ 1953{,}125c &= 17, \\ 5132{,}953c &= 41, \\ 3048{,}625c &= 26, \\ 2012{,}307c &= 17, \\ 5592{,}359c &= 49, \\ 2818{,}158c &= 23, \\ 2012{,}307c &= 16. \end{cases}$$

Sistem persamaan di atas juga dapat disajikan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 3048{,}625 \\ 1953{,}125 \\ 5132{,}953 \\ 3048{,}625 \\ 2012{,}307 \\ 5592{,}359 \\ 2818{,}158 \\ 2012{,}307 \end{pmatrix} (c) = \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 41 \\ 26 \\ 17 \\ 49 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Untuk membentuk suatu persamaan linear, kedua ruas dikalikan dengan transpose dari matriks koefisien sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (3048{,}625^2 + 1953{,}125^2 + 5132{,}953^2 + 3048{,}625^2 + 2012{,}307^2 + 5592{,}359^2 + 2818{,}158^2 + 2012{,}307^2)(c) = \\ (3048{,}625 \cdot 27 + 1953{,}125 \cdot 17 + 5132{,}953 \cdot 41 + 3048{,}625^2 \cdot 26 + 2012{,}307 \cdot 17 + 5592{,}359 \cdot 49 \\ + 2818{,}158 \cdot 23 + 2012{,}307^2 \cdot 16). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan *software* RStudio, kita memperoleh suatu koefisien kesebandingan, yaitu $c = 0{,}008436761$.

(c) Akan diperkirakan berat ikan yang panjangnya 18,5 in.
Dari persamaan (1), telah diketahui hubungan

$$W = c \cdot x.$$

Sebagaimana telah dibahas sebelumnya, W adalah berat ikan (oz), c adalah konstanta kesebangunan, h merupakan panjang ikan (in), dan x merupakan volume ikan yang sebanding dengan pangkat tiga dari panjang ikan. Untuk ikan dengan panjang 18,5 in, perkiraan berat ikan tersebut dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W &= 0{,}008436761 \cdot 18{,}5^3 \\ &= 53{,}4184 \end{aligned}$$

Dengan demikian, berat ikan yang panjangnya 18,5 in adalah 53,4184 oz.

3. Diketahui data sebagai berikut.

Tabel 3: Data x dan y

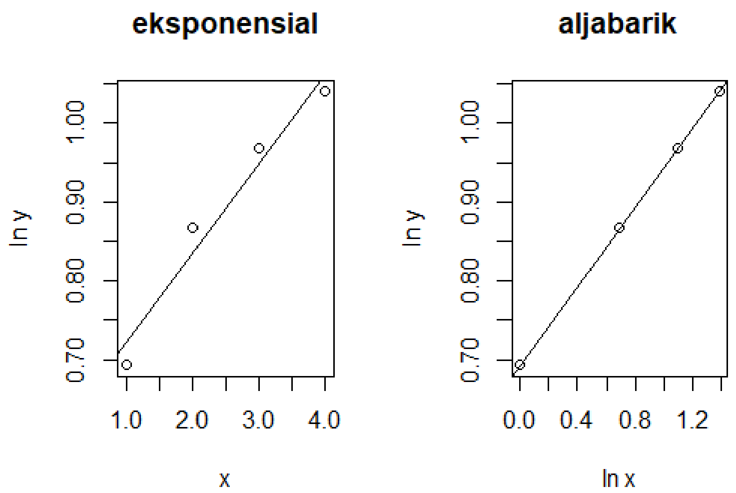
x	1	2	3	4
y	2,000	2,378	2,632	2,828

(a) Berdasarkan data di atas, akan diperiksa kebergantungan y terhadap x, apakah lebih tepat dianggap eksponensial atau aljabarik.
Dari data pada Tabel 3, kita memperoleh data sebagai berikut.

Tabel 4: Logaritma natural dari x dan y

$\ln x$	0	0,6931472	1,0986123	1,3862944
$\ln y$	0,6931472	0,8662598	0,9677440	1,0395697

Berikut merupakan plot perbandingan kebergantungan y terhadap x berdasarkan informasi pada Tabel 3 dan Tabel 4.



Gambar 2: Perbandingan hubungan linearisasi antara x dan y

Berdasarkan Gambar 2 di atas, dapat disimpulkan bahwa kebergantungan y terhadap x lebih tepat dianggap aljabarik karena seluruh plot pada grafik $\ln x$ terhadap $\ln y$ membentuk garis lurus. Adapun, plot pada grafik x terhadap $\ln y$ sama sekali tidak membentuk garis lurus.

(b) Akan ditentukan suatu ekspresi hampiran untuk nilai y dinyatakan dalam x dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.
Sudah diketahui dari soal sebelumnya bahwa data pada Tabel 3 berhubungan secara aljabarik, sehingga terjadi hubungan linear antara $\ln y$ dan $\ln x$ yang dinyatakan sebagai

$$y = ax^b.$$

Dengan mengambil logaritma natural dari kedua ruas, kita memperoleh

$$\ln y = \ln a + b \ln x. \tag{2}$$

Akan dicari terlebih dahulu nilai dari koefisien a dan b dengan membentuk sistem persamaan linear (SPL) berdasarkan persamaan (2) dan informasi pada Tabel 4.

$$\begin{cases} 0{,}6931472 &= \ln a + b \cdot 0 \\ 0{,}8662598 &= \ln a + b \cdot 0{,}6931472 \\ 0{,}9677440 &= \ln a + b \cdot 1{,}0986123 \\ 1{,}0395697 &= \ln a + b \cdot 1{,}3862944 \end{cases}$$

SPL tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}6931472 \\ 1 & 1{,}0986123 \\ 1 & 1{,}3862944 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6931472 \\ 0{,}8662598 \\ 0{,}9677440 \\ 1{,}0395697 \end{pmatrix}.$$

Kemudian, kita melakukan langkah-langkah berikut guna memperoleh konstanta a dan b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}6931472 \\ 1 & 1{,}0986123 \\ 1 & 1{,}3862944 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}6931472 \\ 1 & 1{,}0986123 \\ 1 & 1{,}3862944 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}6931472 \\ 1 & 1{,}0986123 \\ 1 & 1{,}3862944 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0{,}6931472 \\ 0{,}8662598 \\ 0{,}9677440 \\ 1{,}0395697 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3{,}1780539 \\ 3{,}1780539 & 3.60921419005049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5667207 \\ 3{,}10477067001344 \end{pmatrix}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 4 & 3{,}1780539 \\ 3{,}1780539 & 3.60921419005049 \end{pmatrix}$.
Dengan memperhatikan bahwa $A^{-1}A = I$, kita dapat menulis sebagai berikut.

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3{,}5667207 \\ 3{,}10477067001344 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6931169330777994348 \\ 0{,}2499180292973641286 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan uraian di atas, kita memperoleh informasi sebagai berikut.

$$\ln a = 0{,}6931169330777994348 \rightarrow a = 1{,}999939506$$
$$b = 0{,}2499180292973641286$$

Jadi, ekspresi untuk hampiran untuk nilai y dinyatakan dalam x yang didekatkan secara aljabarik adalah

$$y = 1{,}999939506 \cdot x^{0{,}2499180292973641286}.$$