3.3 Teorema Cayley-Hamilton [J, sec. 6.1]

Mis $\mathbb{F}$ suatu lapangan.

Lemma Utk setiap $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ berlaku

$$A\,\mathrm{adj}(A) = |A|\,I.$$

N.B. Jika A invertibel (artinya A^{-1} ada dan $|A| \neq 0$) maka dgn mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{|A|}A^{-1}$ dari kiri, diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A),$$

yaitu rumus eksplisit dari invers matriks.

Bukti

Ambil $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ambil $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
[A\,\mathrm{adj}(A)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\,[\mathrm{adj}(A)]_{k,j} && \text{(def. perkalian matriks)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\,[\mathrm{cof}(A)]^{T}_{k,j} && \text{(def. adj(A))}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\,[\mathrm{cof}(A)]_{j,k} && \text{(def. transpos).}
\end{aligned}$$

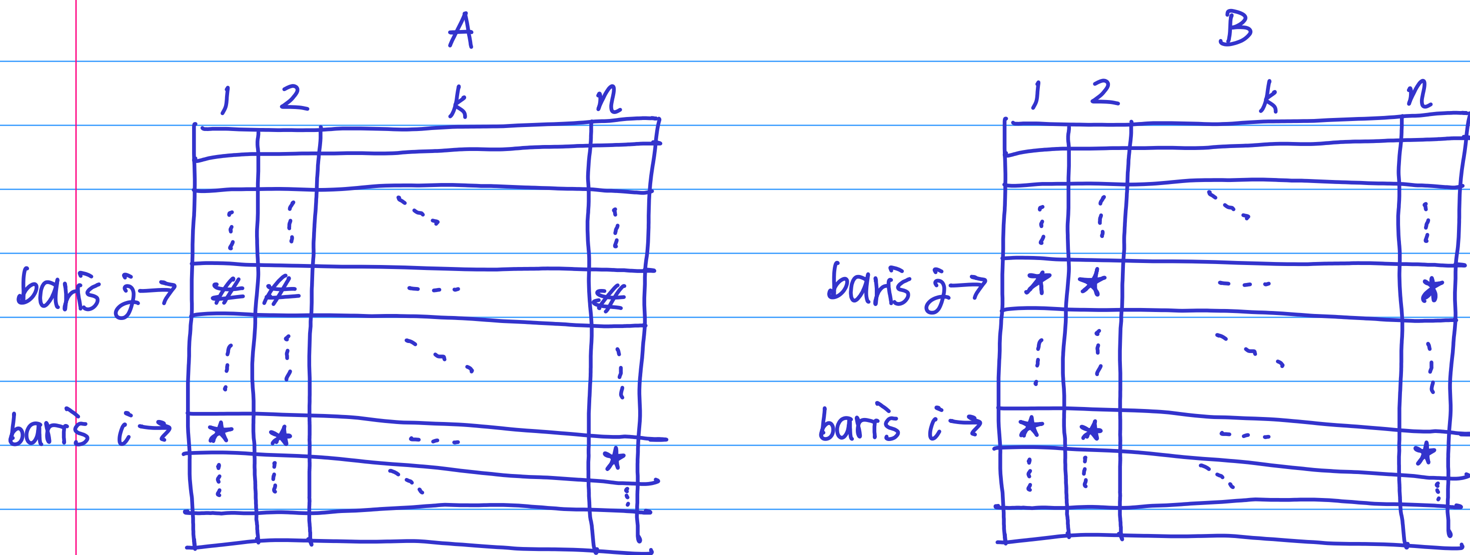
- Mis $i = j$. Bentuk terakhir adl

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\,[\mathrm{cof}(A)]_{i,k} = |A|,$$

berdasarkan ekspansi kofaktor sepanjang baris i.

• Mis $i \neq j$. Bentuk terakhir adl

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}[\mathrm{cof}(A)]_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} B_{j,k}[\mathrm{cof}(B)]_{j,k} = |B| = 0,$$



berdasarkan ekspansi kofaktor sepanjang baris j, di mana matriks B diperoleh dari matriks A dgn cara mengganti entri² baris j dgn entri² baris i. (Alasan $|B| = 0$ adl krn baris i dan baris j dari matriks B adl sama; salah satu baris tsb dpt dinolkan dgn OBE tipe 3 lalu $|B|$ dpt dihitung dgn ekspansi kofaktor sepanjang baris nol tsb.)

Jadi,

$$[A\,\mathrm{adj}(A)]_{i,j} = \begin{cases} |A|, & \text{jika } i = j; \\ 0, & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

DKL,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}_{n\times n} = |A|\,I. \quad \blacksquare$$

Matriks persegi dpt disubstitusikan ke dlm suatu polinomial. Misalnya, jika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

dan $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda^1 + 2\lambda^0$, maka

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 3A^1 + 2A^0 \\ &= A^2 - 3A + 2I \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

<u>Teorema Cayley-Hamilton utk matriks</u>

Mis $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Jika $p(\lambda) := |A - \lambda I|$ adl polinomial karakteristik dari A, maka $p(A) = \mathcal{O}$. [DKL, setiap matriks persegi merupakan pembuat nol dari polinomial karakteristiknya.]

<u>Bukti</u>

Karena $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ memiliki derajat n dan koefisien utama $(-1)^n$, maka

$$|A - \lambda I| = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n), \quad (*)$$

utk suatu $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$.

Karena matriks $A - \lambda I$ memiliki entri² berupa polinomial dlm λ dgn derajat paling tinggi 1, maka matriks $\operatorname{adj}(A - \lambda I) = [\operatorname{cof}(A - \lambda I)]^T$ memiliki entri² berupa polinomial dlm λ dgn derajat paling tinggi $n-1$, shg

$$\operatorname{adj}(A-\lambda I) = B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}, \quad **$$

utk suatu $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Berdasarkan lemma,

$$(A-\lambda I)\operatorname{adj}(A-\lambda I) = |A-\lambda I|\, I. \quad ***$$

Substitusikan * dan ** ke ***, diperoleh

$$(A-\lambda I)(B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)I.$$

Dgn menyamakan koefisien² $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, \lambda^0$ di kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}
-B_0 &= (-1)^n I,\\
AB_0 - B_1 &= (-1)^n a_1 I,\\
AB_1 - B_2 &= (-1)^n a_2 I,\\
&\vdots\\
AB_{n-1} &= (-1)^n a_n I.
\end{aligned}$$

Kalikan kesamaan² di atas msg² dgn $A^n, A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A^0$ dari kiri, diperoleh

$$\begin{aligned}
-A^nB_0 &= (-1)^n A^n,\\
A^nB_0 - A^{n-1}B_1 &= (-1)^n a_1 A^{n-1},\\
A^{n-1}B_1 - A^{n-2}B_2 &= (-1)^n a_2 A^{n-2},\\
&\vdots\\
AB_{n-1} &= (-1)^n a_n I.
\end{aligned}$$

Jumlahkan semuanya, diperoleh

$$\Theta = (-1)^n(A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_nI) = p(A). \blacksquare$$

Definisi Suatu polinomial di $\mathbb{F}[\lambda]$ bersifat monik jika koefisien utamanya adl 1. Polinomial minimal dari suatu matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ adl polinomial monik $q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ berderajat terkecil shg $q(A) = \mathcal{O}$ (polinomial monik berderajat terkecil yg dibuat nol oleh matriks A).

Teorema Polinomial minimal dari suatu matriks tunggal dan habis membagi polinomial karakteristiknya.

Bukti

Mis $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Andaikan A memiliki dua polinomial minimal berbeda $q_1(\lambda), q_2(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$. Kedua polinomial ini monik, berderajat sama (karena jika tidak sama maka yg derajatnya lebih besar bukan polinomial minimal), dan memenuhi $q_1(A) = q_2(A) = \mathcal{O}$. Karena $q_1(\lambda)$ dan $q_2(\lambda)$ monik, maka $r(\lambda) := q_1(\lambda) - q_2(\lambda)$ adl polinomial berderajat lebih kecil yg memenuhi $r(A) = q_1(A) - q_2(A) = \mathcal{O} - \mathcal{O} = \mathcal{O}$. Kontradiksi dgn fakta bahwa $q_1(\lambda)$ dan $q_2(\lambda)$ adl polinomial minimal.

Mis $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ polinomial karakteristik dari A dan $q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ polinomial minimal dari A, maka berdasarkan pembagian polinomial, ada polinomial $F(\lambda), G(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ dengan

$$p(\lambda) = q(\lambda)F(\lambda) + G(\lambda),$$

dgn derajat dari $G(\lambda)$ kurang dari derajat dari $q(\lambda)$. Andaikan $G(\lambda)$ bukan polinomial nol, maka $G(\lambda) = p(\lambda) - q(\lambda)F(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ polinomial berderajat lebih kecil yg memenuhi $G(A) = p(A) - q(A)F(A) = \mathcal{O} - \mathcal{O} = \mathcal{O}$. Kontradiksi dgn fakta bahwa $q(\lambda)$ polinomial minimal. Jadi, $G(\lambda) = \mathcal{O}$, artinya $q(\lambda)$ habis membagi $p(\lambda)$. $\blacksquare$

Contoh Diket matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Tent polinomial karakteristik dari A.

(b) Tent (jika ada) A^{-1} dgn Teorema Cayley-Hamilton.

(c) Tent polinomial minimal dari A.

Jawab

(a) Kita bentuk matriks

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

shg polinomial karakteristik dari A adl

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2)$$

$$= -6\lambda + 2\lambda^2 + 4 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

(b) Berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton,

$$-A^3 + 5A^2 - 8A + 4I = O.$$

Dgn demikian,

$$I = \frac{1}{4}(A^3 - 5A^2 + 8A) = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)A.$$

Artinya,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Polinomial minimal dari A monik dan habis membagi

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Kita hitung

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O,$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O,$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O,$$

$$(A-2I)(A-I) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}.$$

Jadi, polinomial minimal dari A adl $q(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$.

Akan dipelajari Teorema Cayley-Hamilton utk operator linear. Mis V ruang vektor berdimensi berhingga atas lapangan $\mathbb{F}$.

- Jika $T: V \to V$ operator linear dan $n \in \mathbb{N}$, maka
$$T^n := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}$$
dan $T^0 := I_V$.

- Jika $T_1 : V \to V$ dan $T_2 : V \to V$ operator linear maka $T_1 + T_2 : V \to V$ adl pemetaan dgn aturan
$$(T_1 + T_2)(\bar{x}) := T_1(\bar{x}) + T_2(\bar{x}).$$
Dapat dibuktikan bahwa $T_1 + T_2$ operator linear.

- Jika $T: V \to V$ operator linear dan $\alpha \in \mathbb{F}$ maka $\alpha T : V \to V$ adl pemetaan dgn aturan
$$(\alpha T)(\bar{x}) := \alpha T(\bar{x}).$$
Dapat dibuktikan bahwa αT operator linear.

<u>Teorema Cayley-Hamilton utk operator linear</u>

Mis $T: V \to V$ operator linear. Jika $p(\lambda)$ adl polinomial karakteristik dari T, maka $p(T) = T_0$. [DKL, setiap operator linear merupakan pembuat nol dari polinomial karakteristiknya.]

Bukti

Mis $T: V \to V$ operator linear. Mis $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V, $A := [T]_\beta$, dan polinomial karakteristik dari T adl

$$p(\lambda) := |A - \lambda I| = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n),$$

utk suatu $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, maka

$$p(T) = (-1)^n(T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1}T + a_n I_V).$$

Ambil $\bar{x} \in V$. Perhatikan

$$p(T)(\bar{x}) = (-1)^n(T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1}T + a_n I_V)(\bar{x})$$

$$= (-1)^n\left[T^n(\bar{x}) + a_1 T^{n-1}(\bar{x}) + \dots + a_{n-1}T(\bar{x}) + a_n I_V(\bar{x})\right]$$

Jadi,

$$[p(T)(\bar{x})]_\beta = (-1)^n\left[[T^n(\bar{x})]_\beta + a_1[T^{n-1}(\bar{x})]_\beta + \dots + a_{n-1}[T(\bar{x})]_\beta + a_n[I_V(\bar{x})]_\beta\right]$$

$$= (-1)^n\left[[T^n]_\beta[\bar{x}]_\beta + a_1[T^{n-1}]_\beta[\bar{x}]_\beta + \dots + a_{n-1}[T]_\beta[\bar{x}]_\beta + a_n[\bar{x}]_\beta\right]$$

$$= (-1)^n\left[[T]_\beta^n + a_1[T]_\beta^{n-1} + \dots + a_{n-1}[T]_\beta + a_n I\right][\bar{x}]_\beta$$

$$= (-1)^n\left[A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n I\right][\bar{x}]_\beta$$

$$= p(A)[\bar{x}]_\beta$$

$$= \bar{0},$$

yg artinya (dgn memetakan kedua ruas thd φ_β^{-1}) $p(T)(\bar{x}) = \bar{0}$. Jadi, $p(T)$ adl pemetaan nol. ∎

<u>Definisi</u> <u>Polinomial minimal</u> dari operator linear $T: V \to V$ adl polinomial monik $q(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ berderajat terkecil shg $q(T) = T_0$.

Teorema Polinomial minimal dari suatu operator linear tunggal dan habis membagi polinomial karakteristiknya.

Bukti serupa dgn sebelumnya. ∎

Contoh Mis $n \in \mathbb{N}_0$. Tent polinomial minimal dari operator linear $T : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dgn

$$T(f(x)) = f'(x).$$

Jawab

Mis $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Perhatikan

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n,$$

$$T(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n,$$

$$T(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n,$$

$$\vdots$$

$$T(x^n) = nx^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + nx^{n-1} + 0 \cdot x^n.$$

Jadi,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} [T(1)]_\beta & [T(x)]_\beta & [T(x^2)]_\beta & \cdots & [T(x^n)]_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

shg

$$[T]_\beta - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Polinomial karakteristik dari T adl

$$|[T]_\beta - \lambda I| = (-\lambda)^{n+1} = (-1)^{n+1}\lambda^{n+1}.$$

Dgn demikian, kemungkinan² polinomial minimal dari T hanyalah $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{n+1}$. Karena $T(x) = 1 \neq 0$, $T^2(x^2) = 2 \cdot 1 \neq 0$, $T^3(x^3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \neq 0, \ldots, T^n(x^n) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \neq 0$, maka $T, T^2, T^3, \ldots, T^n$ bukan pemetaan nol, shg $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n$ bukan polinomial minimal dari T. Jadi, polinomial minimal dari T adl $q(\lambda) = \lambda^{n+1}$.