1.3 Ruang vektor [F, sec. 1.2]

Definisi Misalkan $\mathbb{F}$ suatu lapangan. Tigaan terurut $(V, +, \cdot)$ yg terdiri dari himpunan tak kosong V, pemetaan
$$+ : V^2 \to V, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$$
yg disebut penjumlahan, dan pemetaan
$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\alpha, \bar{x}) \mapsto \alpha\bar{x}$$
yg disebut perkalian skalar, disebut ruang vektor atas $\mathbb{F}$ jika sifat² (aksioma²) berikut berlaku:

(RV0a) Utk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in V$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in V$.
(ketertutupan terhadap penjumlahan)

(RV0b) Utk setiap $\bar{x} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha\bar{x} \in V$.
(ketertutupan terhadap perkalian skalar)

(RV1) Utk setiap $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ berlaku $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x} + (\bar{y}+\bar{z})$.
(asosiatif penjumlahan)

(RV2) Utk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in V$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.
(komutatif penjumlahan)

(RV3) Ada $\bar{0} \in V$ shg utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$.
(adanya identitas penjumlahan)

(RV4) Utk setiap $\bar{x} \in V$ ada $-\bar{x} \in V$ shg $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$.
(adanya invers penjumlahan)

(RV5) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in V$ berlaku $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$.
(distributif)

(RV6) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in V$ berlaku $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$.
(distributif)

(RV7) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in V$ berlaku $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$.

(RV8) Utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku $1\bar{x} = \bar{x}$.

N.B.

- Anggota² V disebut vektor ; anggota² $\mathbb{F}$ disebut skalar.
- Dgn cara spt sebelumnya dpt dibuktikan bahwa identitas penjumlahan di (RV3) tunggal [dan disebut vektor nol ; itulah yg dimaksud dengan $\bar{0}$ di (RV4)] dan setiap vektor memiliki invers penjumlahan yg tunggal.
- Jika operasi²nya jelas dari konteks, cukup dikatakan bahwa V merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$.
- Ruang vektor atas $\mathbb{R}$ (atas $\mathbb{C}$) disebut juga ruang vektor real (kompleks).

Diberikan suatu lapangan $\mathbb{F}$, suatu himpunan tak kosong V, suatu operasi penjmlhan, dan operasi perkalian skalar. Utk membuktikan bahwa:

- V ruang vektor atas $\mathbb{F}$, buktikan (atau sebutkan bila jelas) bahwa V tertutup terhadap kedua operasi tersebut, dan buktikan (RV1) – (RV8).
- V bukan ruang vektor atas $\mathbb{F}$, buktikan dgn contoh penyangkal bhw V tidak tertutup thd salah satu operasi atau tidak memenuhi salah satu dari (RV1) – (RV8).

Contoh Misalkan $\mathbb{F}$ lapangan. Buktikan bahwa

$$\mathbb{F}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{F}\}$$

terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar per komponen berikut merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$:

(i) Utk setiap $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{F}^2$,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2$,

$$\alpha(x_1, x_2) := (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Jawab

Jelas bahwa $\mathbb{F}^2$ tertutup thd kedua operasi tsb. Adb bahwa (RV1) – (RV8) terpenuhi.

(RV1) Ambil $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$, $\bar{z} = (z_1, z_2)$ utk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{F}$.
Perhatikan

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) + (z_1, z_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)\end{aligned}$$

$$= \left((x_1+y_1)+z_1,\ (x_2+y_2)+z_2\right)$$

$$= \left(x_1+(y_1+z_1),\ x_2+(y_2+z_2)\right)$$

$$= (x_1, x_2) + (y_1+z_1,\ y_2+z_2)$$

$$= (x_1, x_2) + \left((y_1, y_2) + (z_1, z_2)\right)$$

$$= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}).$$

(RV2) Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ utk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$

$$= (x_1+y_1,\ x_2+y_2)$$

$$= (y_1+x_1,\ y_2+x_2)$$

$$= (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$$

$$= \bar{y} + \bar{x}.$$

(RV3) Pilih $\bar{0} = (0,0) \in \mathbb{F}^2$. Ambil $\bar{x} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\bar{x} + \bar{0} = (x_1, x_2) + (0,0)$$

$$= (x_1+0,\ x_2+0)$$

$$= (x_1, x_2)$$

$$= \bar{x}.$$

(RV4) Ambil $\bar{x} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Pilih $-\bar{x} = (-x_1, -x_2)$. Perhatikan

$$\bar{x} + (-\bar{x}) = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$$
$$= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2))$$
$$= (0, 0)$$
$$= \bar{0}.$$

(RV5) Ambil $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2)$ utk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$
$$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2))$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2)$$
$$= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)$$
$$= \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}.$$

(RV6) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$(\alpha + \beta)\bar{x} = (\alpha + \beta)(x_1, x_2)$$
$$= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2)$$
$$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$$
$$= \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}.$$

(RV7) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta\bar{x}) &= \alpha(\beta(x_1, x_2)) \\
&= \alpha(\beta x_1, \beta x_2) \\
&= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) \\
&= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2) \\
&= (\alpha\beta)(x_1, x_2) \\
&= (\alpha\beta)\bar{x}.
\end{aligned}$$

(RV8) Ambil $\bar{x} \in \mathbb{F}^2$. Tulis $\bar{x} = (x_1, x_2)$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
1\bar{x} &= 1(x_1, x_2) \\
&= (1x_1, 1x_2) \\
&= (x_1, x_2) \\
&= \bar{x}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{F}^2$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

Dapat dibuktikan bahwa :

- Utk setiap $n \in \mathbb{N}$, himpunan

$$\mathbb{F}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar per komponen berikut merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$:

(i) Utk setiap $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

[<u>Catatan</u> Ada dua representasi dari anggota² $\mathbb{F}^n$: $(x_1, \dots, x_n)$ atau $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; keduanya boleh dipakai.]

- Utk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, himpunan $\mathbb{F}^{m \times n}$ dengan anggota² semua matriks $m \times n$ dengan entri² anggota $\mathbb{F}$ thd operasi penjumlahan matriks dan operasi perkalian skalar dgn matriks biasa merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

- Untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$, himpunan

$$\mathbb{F}[x]_{\leq n} := \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

dengan anggota semua polinomial dlm variabel x berderajat paling tinggi n thdp operasi penjumlahan dan perkalian skalar <u>per suku</u> berikut merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$:

(i) Utk setiap $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,\ b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \in \mathbb{F}[x]_{\leq n}$,

$$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n.$$

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]_{\leq n}$,

$$\alpha(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) := (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \dots + (\alpha a_n)x^n.$$

Demikian pula himpunan $\mathbb{F}[x]$ dgn anggota semua polinomial dlm variabel x thdp operasi² yg sama.

- Utk setiap $S \neq \emptyset$, himpunan $\mathcal{F}(S, \mathbb{F})$ yg beranggotakan semua fungsi dari S ke $\mathbb{F}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar <u>per titik</u> berikut merupakan ruang vektor atas $\mathbb{F}$:

(i) Utk setiap $f, g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F})$, fungsi $f+g : S \to \mathbb{F}$ memiliki aturan
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
utk setiap $x \in S$.

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F})$, fungsi $\alpha f : S \to \mathbb{F}$ memiliki aturan
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$
utk setiap $x \in S$.

<u>Contoh pembuktian aksioma (RV5):</u>

Ambil $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $f, g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F})$. Adb bahwa
$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.$$

Domain dan kodomain dari $\alpha(f+g)$ dan $\alpha f + \alpha g$ sudah sama, shg tinggal dibuktikan bhw utk setiap $x \in S$ berlaku $[\alpha(f+g)](x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$.

Ambil $x \in S$. Perhatikan
$$\begin{aligned}[\alpha(f+g)](x) &= \alpha (f+g)(x), \text{ dari (ii)} \\ &= \alpha[f(x) + g(x)], \text{ dari (i)} \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x), \text{ dari sifat distributif di } \mathbb{F} \\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x), \text{ dari (ii)} \\ &= (\alpha f + \alpha g)(x), \text{ dari (i)}.\end{aligned}$$

Teorema [F, Thm. 1.2]

Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{F}$, maka

(i) Utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku $0\bar{x} = \bar{0}$.

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in V$ berlaku $(-\alpha)\bar{x} = \alpha(-\bar{x}) = -(\alpha\bar{x})$.

(iii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha\bar{0} = \bar{0}$.

(Bukti : mirip bukti teorema terakhir di subbab 1.2.)