BAB 2
PEMETAAN LINEAR

Mulai sekarang kita asumsikan semua ruang vektor yg dibicarakan memiliki basis (memiliki dimensi berhingga).

2.1 Pemetaan linear, kernel, dan image [F, sec. 2.1]

Mis V, W ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$.

Definisi Suatu pemetaan $T: V \to W$ dikatakan bersifat linear jika dua sifat berikut terpenuhi:

(i) Utk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in V$ berlaku $T(\bar{x}+\bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y})$.
(T mempertahankan penjumlahan)

(ii) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in V$ berlaku $T(\alpha\bar{x}) = \alpha T(\bar{x})$.
(T mempertahankan perkalian skalar)

Catatan Sifat (i) dan (ii) ekuivalen dengan:

(iii) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in V$ berlaku $T(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y})$.
(T mempertahankan komlin)

Bukti

($\Rightarrow$) Misal (i) dan (ii) benar. Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in V$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} T(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) &= T(\alpha\bar{x}) + T(\beta\bar{y}), \text{ dari (i)} \\ &= \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y}), \text{ dari (ii)}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Misal (iii) benar.

- Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Dari (iii) dgn $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$ diperoleh $T(\bar{x}+\bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y})$. Jadi, (i) benar.

- Ambil $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in V$. Dari (iii) dgn $\beta = 0$ dan $\bar{y} = \bar{0}$ diperoleh $T(\alpha\bar{x}) = \alpha T(\bar{x})$. Jadi, (ii) benar. $\blacksquare$

Utk membuktikan bahwa suatu pemetaan $T: V \to W$ bersifat:

- linear, buktikan (iii).

- tidak linear, buktikan dgn contoh penyangkal bahwa salah satu dari (i) dan (ii) tdk terpenuhi, atau bahwa $T(\bar{0}) \neq \bar{0}$ [karena ini berarti (ii) tdk terpenuhi utk $\alpha = 0$].

Contoh Buktikan bahwa pemetaan $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

tidak linear.

Jawab

Karena $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 0 + 1 \\ 3\cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ maka T tidak linear.

Contoh Buktikan bahwa pemetaan $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

tidak linear.

Jawab

Pilih $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Perhatikan bahwa

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

sedangkan

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0\\1+0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\cdot 1\\0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},$$

shg $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \neq T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Jadi, T tidak linear.

Contoh Buktikan bahwa pemetaan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 - x_2 + x_3\\x_1 - 3x_3\end{pmatrix}$$

bersifat linear.

Jawab

Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$. Tulis $\bar{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ dan $\bar{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ utk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
T(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) &= T\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)\\
&= T\begin{pmatrix}\alpha x_1 + \beta y_1\\\alpha x_2 + \beta y_2\\\alpha x_3 + \beta y_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3)\\(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_3 + \beta y_3)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha(2x_1 - x_2 + x_3) + \beta(2y_1 - y_2 + y_3)\\\alpha(x_1 - 3x_3) + \beta(y_1 - 3y_3)\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix}2x_1 - x_2 + x_3\\x_1 - 3x_3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2y_1 - y_2 + y_3\\y_1 - 3y_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$= \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y})$.

Jadi, T bersifat linear.

Beberapa contoh pemetaan lain yg bersifat linear:

- Utk setiap $n \in \mathbb{N}$, pemetaan $T: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}^{n \times n}$ dgn aturan $T(A) = A^T$ bersifat linear.
- Utk setiap $n \in \mathbb{N}$, pemetaan $T: \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ dgn aturan $T(f(x)) = f'(x)$ bersifat linear.
- Utk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dgn $a < b$, pemetaan $T: C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dgn aturan $T(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ bersifat linear.
- Jika V ruang vektor, <u>pemetaan identitas</u> $I_V : V \to V$ dgn aturan $I_V(\bar{x}) = \bar{x}$ bersifat linear.
- Jika V, W ruang vektor (atas lapangan yg sama), <u>pemetaan nol</u> $T_0 : V \to W$ dengan aturan $T_0(\bar{x}) = \bar{0}$ bersifat linear.

Aturan suatu pemetaan linear dpt ditentukan scr tunggal berdasarkan peta setiap anggota suatu basis bagi domainnya.

<u>Contoh</u> Diket $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ suatu basis bagi ruang vektor real $\mathbb{R}^2$. Tentukan aturan dari satu²nya pemetaan linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ yg memenuhi:

(a) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jawab

Ambil $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Tulis $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ utk suatu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Mis $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dgn demikian,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Jadi,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Petakan kedua ruas oleh T, diperoleh

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (2x_1 - x_2)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Petakan kedua ruas oleh T, diperoleh

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (2x_1 - x_2)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2)\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>Teorema</u> Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V. Utk setiap $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n \in W$ ada tunggal pemetaan linear $T: V \to W$ yg memenuhi $T(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$ utk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$.

Bukti

Definisikan $T: V \to W$ sbg pemetaan dgn aturan utk setiap $\bar{x} \in V$,

$$T(\bar{x}) = \alpha_1 \bar{y}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{y}_n$$

dengan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ satu²nya anggota $\mathbb{F}^n$ yg memenuhi

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n.$$

Adb T linear. Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Karena $\bar{x}, \bar{y} \in V$ maka

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$$

dan

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{x}_1 + \cdots + \beta_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$, shg

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\bar{x}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\bar{x}_n.$$

Dgn demikian,

$$\begin{aligned} T(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\bar{y}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\bar{y}_n \\ &= \alpha(\alpha_1\bar{y}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{y}_n) + \beta(\beta_1\bar{y}_1 + \cdots + \beta_n\bar{y}_n) \\ &= \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y}). \end{aligned}$$

Jadi, T bersifat linear.

Perhatikan bahwa utk setiap $i \in \{1, \ldots, n\}$ berlaku

$$\bar{x}_i = 0\bar{x}_1 + \cdots + 0\bar{x}_{i-1} + 1\bar{x}_i + 0\bar{x}_{i+1} + \cdots + 0\bar{x}_n$$

shg

$$\begin{aligned} T(\bar{x}_i) &= 0\bar{y}_1 + \cdots + 0\bar{y}_{i-1} + 1\bar{y}_i + 0\bar{y}_{i+1} + \cdots + 0\bar{y}_n \\ &= y_i. \end{aligned}$$

Mis ada $U: V \to W$ pemetaan linear yg memenuhi $U(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$ utk setiap $i \in \{1, \ldots, n\}$. Adb $U = T$. Utk itu, hrs dibuktikan bahwa utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku $U(\bar{x}) = T(\bar{x})$. Ambil $\bar{x} \in V$, maka

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, shg

$$T(\bar{x}) = \alpha_1 \bar{y}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{y}_n.$$

Di lain pihak, karena U linear, maka

$$\begin{aligned} U(\bar{x}) &= U(\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n) \\ &= \alpha_1 U(\bar{x}_1) + \cdots + \alpha_n U(\bar{x}_n) \\ &= \alpha_1 \bar{y}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{y}_n. \end{aligned}$$

Jadi, $U(\bar{x}) = T(\bar{x})$. Dgn demikian, pemetaan T dgn sifat di atas tunggal. ▨

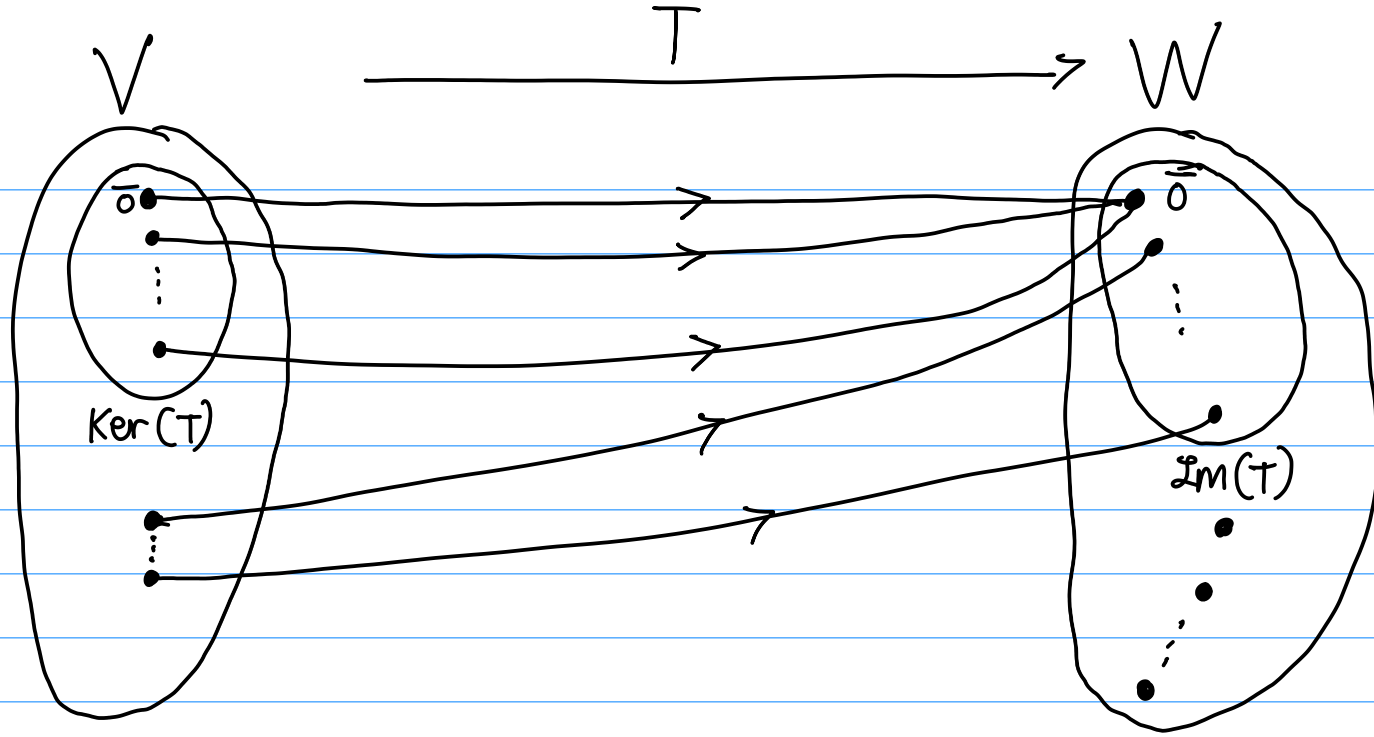
<u>Definisi</u> <u>Kernel</u> (atau <u>inti</u>) dari pemetaan $T : V \to W$ adalah

$$\mathrm{Ker}(T) := \{\bar{x} \in V : T(\bar{x}) = \bar{0}\}$$

yaitu himpunan semua anggota V yg dipetakan ke vektor nol di W. <u>Image</u> (atau <u>peta</u> atau <u>range</u>) dari pemetaan $T : V \to W$ adalah

$$\mathrm{Im}(T) := \{T(\bar{x}) : \bar{x} \in V\}$$

yaitu himpunan semua peta dari anggota² V (himp semua anggota W yg memiliki prapeta di V).



Catatan

- Utk $I_V : V \to V$ berlaku $\mathrm{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$ dan $\mathrm{Im}(T) = V$.
- Utk $T_0 : V \to W$ berlaku $\mathrm{Ker}(T) = V$ dan $\mathrm{Im}(T) = \{\bar{0}\}$.

Teorema Mis $T : V \to W$ pemetaan linear, maka
(i) $\mathrm{Ker}(T)$ subruang V, dan
(ii) $\mathrm{Im}(T)$ subruang W.

Bukti latihan.

Definisi Mis $T : V \to W$ pemetaan linear. Nulitas dari T adl $\mathrm{null}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$. Rank dari T adl $\mathrm{rank}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$.

Teorema Rank-Nulitas

Mis $T : V \to W$ pemetaan linear, maka

$$\mathrm{rank}(T) + \mathrm{null}(T) = \dim(V).$$

Bukti

Mis $\dim(V) = n$ dan $\text{null}(T) = k$, di mana $k \leq n$.
Mis $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ basis bagi $\text{Ker}(T)$, yg merupakan subhimpunan bbl dari V, shg dpt diperbesar mjd suatu basis bagi V, misalkan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n\}$.
Adb $\{T(\bar{x}_{k+1}), \ldots, T(\bar{x}_n)\}$ basis bagi $\text{Im}(T)$.

Ambil $\bar{y} \in \text{Im}(T)$. Krn $\bar{y} \in \text{Im}(T)$ maka ada $\bar{x} \in V$ shg $T(\bar{x}) = \bar{y}$. Karena $\bar{x} \in V$ maka

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k \bar{x}_k + \alpha_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Petakan kedua ruas oleh T, diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{y} = T(\bar{x}) &= \alpha_1 T(\bar{x}_1) + \cdots + \alpha_k T(\bar{x}_k) + \alpha_{k+1} T(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\bar{x}_n) \\
&= \alpha_1 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 + \alpha_{k+1} T(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\bar{x}_n) \\
&= \alpha_{k+1} T(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\bar{x}_n),
\end{aligned}$$

di mana kita telah memakai fakta bahwa $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k \in \text{Ker}(T)$. Jadi, $\{T(x_{k+1}), \ldots, T(\bar{x}_n)\}$ merentang $\text{Im}(T)$.

Adb $\{T(\bar{x}_{k+1}), \ldots, T(\bar{x}_n)\}$ bbl. Mis $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_{k+1} T(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\bar{x}_n) = \bar{0},$$

yaitu

$$T(\alpha_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n) = \bar{0},$$

artinya $\alpha_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n \in \text{Ker}(T)$. Artinya

$$\alpha_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n = \beta_1 \bar{x}_1 + \cdots + \beta_k \bar{x}_k$$

utk suatu $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{F}$. Dgn demikian,

$$(-\beta_1)\bar{x}_1 + \cdots + (-\beta_k)\bar{x}_k + \alpha_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}.$$

Karena $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K, \bar{x}_{K+1}, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl, maka $\beta_1 = \dots = \beta_K = \alpha_{K+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Jadi, $\{T(\bar{x}_{K+1}), \dots, T(\bar{x}_n)\}$ bbl, shg merupakan basis bagi $Im(T)$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} rank(T) + null(T) &= \dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) \\ &= (n-K) + K \\ &= n, \end{aligned}$$

sebagaimana yg diinginkan. $\boxtimes$

Pertanyaan Apakah ada pemetaan linear $T : \mathbb{R}^{99} \to \mathbb{R}^{100}$ dengan $rank(T) = null(T)$?

Teorema Mis $T : V \to W$ pemetaan linear. Jika $V = span\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, maka $Im(T) = span\{T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n)\}$

Bukti
Mis $T : V \to W$ pemetaan linear. Mis $V = span\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$.

Karena $Im(T)$ subruang dan $T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n) \in Im(T)$ maka $span\{T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n)\} \subseteq Im(T)$.

Sekarang tinggal dibuktikan $Im(T) \subseteq span\{T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n)\}$.
Ambil $\bar{y} \in Im(T)$. Artinya ada $\bar{x} \in V$ shg $T(\bar{x}) = \bar{y}$.
Karena $\bar{x} \in V$ maka

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Petakan kedua ruas oleh T, diperoleh

$$\bar{y} = T(\bar{x}) = \alpha_1 T(\bar{x}_1) + \dots + \alpha_n T(\bar{x}_n).$$

Jadi, $\bar{y} \in \text{span}\{T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n)\}$. Dgn demikian, $Im(T) \subseteq \text{span}\{T(\bar{x}_1), \dots, T(\bar{x}_n)\}$. ∎

<u>Teorema</u> Pemetaan linear $T: V \to W$ bersifat:

(i) satu-satu jika dan hanya jika $\text{null}(T) = 0$, dan

(ii) pada jika dan hanya jika $\text{rank}(T) = \dim(W)$.

<u>Bukti</u>

(i) ($\Rightarrow$) Mis $T: V \to W$ satu². Mis $\bar{x} \in V$ memenuhi $T(\bar{x}) = \bar{0} = T(\bar{0})$. Karena T satu², maka $\bar{x} = \bar{0}$. Ini berarti $Ker(T) = \{\bar{0}\}$, shg $\text{null}(T) = 0$.

($\Leftarrow$) Mis $\text{null}(T) = 0$, artinya $Ker(T) = \{\bar{0}\}$. Ambil $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Misalkan $T(\bar{x}) = T(\bar{y})$. Artinya, $T(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$. Dgn demikian, $\bar{x} - \bar{y} \in Ker(T) = \{\bar{0}\}$, shg $\bar{x} - \bar{y} = 0$, yaitu $\bar{x} = \bar{y}$. Jadi, T satu-satu.

(ii) ($\Rightarrow$) Mis $T: V \to W$ pada. Artinya, $Im(T) = W$. Dgn demikian, $\text{rank}(T) = \dim(Im(T)) = \dim(W)$.

($\Leftarrow$) Mis $\text{rank}(T) = \dim(W)$. Artinya, $\dim(Im(T)) = \dim(W)$. Karena $Im(T)$ subruang W, maka $Im(T) = W$. Artinya, T pada. ∎

<u>Contoh</u> Diket pemetaan linear $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan aturan

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) - f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}.$$

Tentukan basis bagi $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$. Tentukan pula $\mathrm{null}(T)$ dan $\mathrm{rank}(T)$. Apakah T satu²? Apakah T pada?

Jawab

Perhatikan bahwa

$$\ker(T) = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : T(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : \begin{pmatrix} f(1)-f(2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : f(1)-f(2) = 0 \text{ dan } f(0) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : (a_0+a_1+a_2) - (a_0+2a_1+4a_2) = 0 \text{ dan } a_0 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : -a_1 - 3a_2 = 0 \text{ dan } a_0 = 0 \right\}.$$

Karena

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

maka

$$\ker(T) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : (a_0, a_1, a_2) = (0, -3t, t) \text{ dgn } t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (-3t)x + tx^2 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t(-3x + x^2) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ -3x + x^2 \right\}.$$

Jelas $\{-3x+x^2\}$ bbl krn hanya terdiri dari satu polinomial tak nol, shg merupakan basis bagi Ker(T). Jadi, $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

Karena $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{span}\{1, x, x^2\}$, maka

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \text{span}\{T(1), T(x), T(x^2)\} \\ &= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$\text{Im}(T) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Jelas $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ bbl (krn anggota yg satu bukan kelipatan yg lain), shg merupakan basis bagi Im(T). Jadi, $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Karena $\text{null}(T) \neq 0$ maka T tidak satu-satu.
Karena $\text{rank}(T) \neq \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$ maka T tidak pada.