BAB 1
RUANG VEKTOR

1.1 Pendahuluan [V, sec. 2.1, 2.2, 3.1]

Suatu himpunan adl suatu kumpulan tak terurut objek² matematis yg berbeda satu sama lain; objek² ini disebut anggota (atau unsur) himp tsb. Suatu himpunan dapat ditulis berupa daftar anggota²nya yg dipisah²kan oleh koma dan diawali dan diakhiri sepasang kurung kurawal. Tulisan

$$\{1, 2, 3\} \qquad ☆$$

berarti himpunan dengan anggota² 1, 2, 3.

Dua himpunan sama jika anggota²nya sama:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}.$$

Himpunan kosong, yaitu himpunan tanpa anggota, dinotasikan $\{\}$ atau $\emptyset$, bukan $\{\emptyset\}$, $\{0\}$, maupun 0.

Untuk menamai himpunan ☆ dengan B (simbol baru) kita menulis

$$B = \{1, 2, 3\} \quad \text{atau} \quad B := \{1, 2, 3\}.$$

Keduanya merupakan kesamaan; namun tanda operator penugasan ":=" mempertegas bahwa kesamaan tsb merupakan definisi yg sedang dibuat. Kita boleh juga menulis

$$\{1, 2, 3\} =: B \quad \text{tetapi tidak} \quad \{1, 2, 3\} := B.$$

Banyaknya anggota himpunan berhingga B disebut <u>kardinalitas</u> dari B dan dinotasikan $|B|$.
Jadi, $|B| = 3$.

<u>Himpunan bilangan asli</u> adl

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

di mana tanda <u>elipsis</u> "..." menggantikan penulisan anggota² yg jelas dari konteks.

<u>Himpunan bil bulat non-negatif</u> adl

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

<u>Himpunan bil bulat</u> adl

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Himpunan

$$\{x : x \text{ bersifat } \mathcal{P}\}$$

adl himpunan semua objek x yg bersifat $\mathcal{P}$. Jika A adl suatu himpunan, himpunan

$$\{x \in A : x \text{ bersifat } \mathcal{P}\}$$

adl himpunan semua objek x di A yg bersifat $\mathcal{P}$.
Tanda ":" dlm notasi di atas dpt diganti dgn "|".

<u>Himpunan bil rasional</u> adl

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0\right\}.$$

<u>Himpunan bil real</u> dan <u>himpunan bil kompleks</u> masing² dinotasikan $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$.

Kalimat "x adl anggota himp B" ditulis $x \in B$, sedangkan "x bukan anggota himp B" ditulis $x \notin B$. Pernyataan² berikut benar:

$$1 \in \{1, \{1,2\}\}, \quad 2 \notin \{1, \{1,2\}\},$$
$$\text{dan} \quad \{2,1\} \in \{1, \{1,2\}\}.$$

Suatu himpunan A disebut subhimpunan dari B (atau B superhimpunan dari A), ditulis $A \subseteq B$, jika semua anggota A termuat di B:

$$\boxed{A \subseteq B \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \forall x \in A,\ x \in B.}$$

jhj / jikka

Jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$ maka A disebut subhimpunan murni dari B (atau B superhimpunan murni dari A) dan ditulis $A \subset B$ atau $A \subsetneq B$ atau $A \subsetneqq B$.

Contohnya,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Perlu diingat bahwa

$$\boxed{A = B \quad \text{jika dan hanya jika} \quad A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A.}$$

Misalkan A dan B dua himpunan. Gabungan, irisan, dan selisih dari A dan B adalah himpunan²

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\},$$
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\},$$
$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}.$$

$(= \{x \in A : x \notin B\})$

Suatu barisan adl suatu kumpulan terurut objek^2 matematis yg tidak harus berbeda satu sama lain; objek^2 ini disebut suku (atau komponen) barisan tsb. Banyaknya suku suatu barisan berhingga disebut panjang barisan tsb. Suatu barisan dpt ditulis berupa daftar suku^{2}nya yg dipisah^{2}kan oleh koma dan diawali dan diakhiri sepasang kurung biasa. Tulisan

$$(1, 2, 3)$$

berarti barisan dgn panjang 3 dan suku^2 1, 2, 3.

Dua barisan sama jika panjangnya sama dan suku^2 yg seletak sama, shg

$$(1,2,3) \neq (3,2,1) \quad \text{dan} \quad (1,2,3) \neq (1,1,2,3).$$

Pasangan terurut, tigaan terurut, empatan terurut, dst. adl istilah lain utk barisan berpanjang 2, 3, 4, dst.

Hasil kali Cartesius dari A dan B adl himpunan semua pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$:

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Suatu pemetaan / fungsi / transformasi f dari suatu himp A ke suatu himp B, ditulis $f : A \to B$, adl suatu objek matematis yg mengaitkan setiap anggota A, misalkan x (disebut argumen dari f), dengan tepat satu anggota B yg ditulis $f(x)$.

Dlm simbol,

$$f : A \to B, \qquad x \mapsto f(x).$$

Dlm hal ini, $f(x)$ disebut peta dari x (terhadap f), dan x disebut prapeta dari $f(x)$ (terhadap f). Himp A dan B masing² disebut domain (daerah asal) dan kodomain (daerah kawan) dari f.

Peta dari subhimpunan $X \subseteq A$ adl

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\} \subseteq B.$$

Dua fungsi $f_1 : A_1 \to B_1$ dan $f_2 : A_2 \to B_2$ sama, ditulis $f_1 = f_2$, jika $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, dan untuk setiap $x \in A_1 = A_2$ berlaku $f_1(x) = f_2(x)$.

Pemetaan f bersifat satu² jika setiap anggota kodomainnya memiliki paling banyak satu prapeta:

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y,$$

dan bersifat pada jika setiap anggota kodomainnya memiliki paling sedikit satu prapeta:

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A, \ f(x) = y.$$

Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ pemetaan, maka pemetaan g komposisi f adl

$$g \circ f : A \to C, \qquad x \mapsto g(f(x)).$$

Pemetaan $f : A \to B$ dikatakan bersifat invertibel jika ada pemetaan $g : B \to A$ sehingga $(f \circ g)(y) = y$ untuk setiap $y \in B$ dan $(g \circ f)(x) = x$ untuk setiap $x \in A$. Jika pemetaan g ini ada, maka g dpt dibuktikan tunggal;

g disebut <u>invers</u> dari f dan dinotasikan f^{-1}. Dapat dibuktikan bahwa <u>f invertibel jika dan hanya jika f satu-satu dan pada.</u>

Suatu <u>operasi</u> dlm suatu himpunan A adl suatu pemetaan dari $A^2 := A \times A$ ke A. Sebagai contoh, operasi pengurangan dlm himp bil bulat terdefinisi sebagai

$$- : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, \qquad (x, y) \mapsto x - y.$$

Operasi pengurangan dlm himp bil asli <u>tidak</u> terdefinisi, karena, misalnya, $(1, 2) \in \mathbb{N}^2$ tetapi $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$. Kita juga mengatakan bahwa <u>$\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi pengurangan</u> (hasil pengurangan dua bil bulat merupakan bil bulat), tetapi <u>$\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan</u> (hasil pengurangan dua bil asli tidak selalu merupakan bil asli).