3.2 Diagonalisabilitas [F, sec. 5.2]

Akan dipelajari syarat² utk suatu operator linear $T: V \to V$, dgn V ruang vektor berdimensi $n \in \mathbb{N}$ atas lapangan $\mathbb{F}$, agar terdiagonalkan (ada basis β' bagi V yg terdiri dari vektor² eigen dari T shg $[T]_{\beta'}$ merupakan matriks diagonal yg entri² diagonal-nya adl nilai² eigen dari T).

Teorema Himpunan berhingga vektor² eigen (tak nol) dari T yg terkait nilai² eigen berbeda² bersifat bbl.

Bukti

Mis $k \in \mathbb{N}$, dan mis $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ vektor² eigen (tak nol) dari T terkait nilai² eigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ yg berbeda². Adb $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ bbl dgn induksi pada k.

Utk $k=1$, $\{\bar{x}_1\}$ jelas bbl karena hanya terdiri dari satu vektor yg tidak nol. Sekarang misalkan $k \geq 2$ dan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k-1}\}$ bbl. Adb $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ bbl.

Mis $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k \bar{x}_k = \bar{0}. \quad \bigstar$$

Petakan kedua ruas terhadap $T - \lambda_k I_V$, diperoleh

$$(T - \lambda_k I_V)(\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k \bar{x}_k) = (T - \lambda_k I_V)(\bar{0}).$$

Utk setiap $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned}(T - \lambda_k I_V)(\alpha_i \bar{x}_i) &= \alpha_i (T - \lambda_k I_V)(\bar{x}_i) \\ &= \alpha_i [T(\bar{x}_i) - \lambda_k I_V(\bar{x}_i)] \\ &= \alpha_i (\lambda_i \bar{x}_i - \lambda_k \bar{x}_i) \\ &= \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) \bar{x}_i.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)\bar{x}_1+\cdots+\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\bar{x}_{k-1}=\bar{0}.$$

Berdasarkan hipotesis induksi, $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{k-1}\}$ bbl, shg $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)=\cdots=\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)=0$. Karena $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ berbeda², maka $\lambda_1-\lambda_k,\ldots,\lambda_{k-1}-\lambda_k$ tidak nol, shg $\alpha_1=\cdots=\alpha_{k-1}=0$. Substitusikan ke ☆, diperoleh $\alpha_k\bar{x}_k=\bar{0}$. Karena $\bar{x}_k\neq\bar{0}$, maka $\alpha_k=0$. Jadi, $\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k\}$ bbl. ▨

<u>Contoh</u> Dari contoh sebelumnya, operator linear $T:\mathbb{R}[x]_{\leq 2}\to\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dgn aturan $T(f(x))=f(x)+(1+x)f'(x)$ memiliki nilai² eigen $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ terkait ruang² eigen $E_{\lambda_1}=\text{span}\{1\}$, $E_{\lambda_2}=\text{span}\{1+x\}$, $E_{\lambda_3}=\text{span}\{1+2x+x^2\}$. Himp $\beta':=\{1,1+x,1+2x+x^2\}\subseteq\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bbl dan berkardinalitas $3=\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 2})$, shg merupakan basis bagi $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Jadi, T terdiagonalkan, dan

$$[T]_{\beta'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

<u>Akibat</u> Jika T memiliki n nilai eigen berbeda², maka himp n vektor eigen (tak nol) yg terkait dengan n nilai eigen ~~tsb~~ bbl, shg merupakan basis bagi V, artinya T terdiagonalkan.

Jika T tidak memiliki n nilai eigen berbeda², <u>belum tentu</u> T tidak terdiagonalkan. Sebagai contoh, $I_{\mathbb{R}^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ terdiagonalkan, karena jika $\beta=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ maka

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_\beta=\left([I_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}]_\beta\ \ [I_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_\beta\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

yg adl matriks diagonal, padahal polinomial karakteristiknya

$$|[I_{\mathbb{R}^2}]_\beta - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2,$$

shg hanya ada satu nilai eigen, yaitu $\lambda_1 = 1$.

<u>Definisi</u> Suatu polinomial $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ bersifat <u>terfaktorkan linear</u> (linearly factorable/splits) atas $\mathbb{F}$ jika ada $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ (tidak harus berbeda²) sehingga

$$f(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

<u>Contoh</u>

- Polinomial $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ terfaktorkan linear atas $\mathbb{R}$.
- Polinomial $(\lambda^2+1)(\lambda-2)$ tidak terfaktorkan linear atas $\mathbb{R}$.
- Polinomial $(\lambda^2+1)(\lambda-2) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 2)$ terfaktorkan linear atas $\mathbb{C}$.

<u>Teorema</u> Jika polinomial karakteristik dari T tidak terfaktorkan linear atas $\mathbb{F}$, maka T tidak terdiagonalkan.

<u>Bukti</u>

Adb kontraposisinya. Mis T terdiagonalkan, adb polinomial karakteristik dari T terfaktorkan linear atas $\mathbb{F}$. Karena T terdiagonalkan, maka ada basis β bagi V shg $[T]_\beta$ diagonal, mis

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dgn demikian, polinomial karakteristiknya,

$$|[T]_\beta - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Jadi, polinomial karakteristik dari T terfaktorkan linear. ■

Contoh Mis $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R})$ dgn $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = e^x$. Dapat dibuktikan bahwa $\beta := \{f_1, f_2, f_3\}$ adl basis $V := \operatorname{span}\beta$, dan operator $T : V \to V$ dgn aturan $T(f) = f'$ memiliki matriks representasi

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

shg polinomial karakteristiknya

$$|[T]_\beta - \lambda I| = (1 - \lambda)(1 + \lambda^2).$$

Karena polinomial ini tidak terfaktorkan linear atas $\mathbb{R}$, maka T tidak terdiagonalkan.

Jika polinomial karakteristik dari T terfaktorkan linear atas $\mathbb{F}$, belum tentu T terdiagonalkan. Contohnya akan diberikan nanti.

Definisi Mis λ_i nilai eigen dari operator linear T dgn polinomial karakteristik $f(\lambda)$.

• <u>Multiplisitas aljabar</u> dari λ_i adalah
$am(\lambda_i) := \max\{\ell \in \mathbb{N} : (\lambda - \lambda_i)^\ell \text{ habis membagi } f(\lambda)\}$,
yaitu pangkat dari faktor $\lambda - \lambda_i$ dlm pemfaktoran lengkap dari $f(\lambda)$.

• <u>Multiplisitas geometri</u> dari λ_i adalah

$$gm(\lambda_i) := \dim(E_{\lambda_i}).$$

<u>Teorema</u> utk setiap nilai eigen λ_i dr operator linear T berlaku $gm(\lambda_i) \leq am(\lambda_i)$.

<u>Bukti</u>

Mis $k := gm(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$. Adb $k \leq am(\lambda_i)$. Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ basis bagi E_{λ_i}. Karena $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\} \subseteq V$ bbl, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ dpt diperbesar mjd suatu basis bagi V, mis $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n\}$. Perhatikan

$$[T]_\beta = \Big([T(\bar{x}_1)]_\beta \ \cdots \ [T(\bar{x}_k)]_\beta \ [T(\bar{x}_{k+1})]_\beta \ \cdots \ [T(\bar{x}_n)]_\beta \Big)$$

$$= \Big([\lambda_i \bar{x}_1]_\beta \ \cdots \ [\lambda_i \bar{x}_k]_\beta \ [T(\bar{x}_{k+1})]_\beta \ \cdots \ [T(\bar{x}_n)]_\beta \Big)$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{baris } k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & \Big| & & \Big| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & [T(\bar{x}_{k+1})]_\beta & \cdots & [T(\bar{x}_n)]_\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \Big| & & \Big| \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Jadi, polinomial karakteristik dari T adl

$$|[T]_\beta - \lambda I| = (\lambda_i - \lambda)^k g(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k (-1)^k g(\lambda),$$
untuk suatu polinomial $g(\lambda)$, dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama sebanyak k kali. Jadi, $(\lambda-\lambda_i)^k$ habis membagi $|[T]_\beta - \lambda I|$. Oleh karena itu, $k \leq am(\lambda_i)$. ■

Teorema Mis semua nilai eigen dari T adalah $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Jika $\beta_1, \ldots, \beta_k$ basis bagi ruang² eigen yg terkait nilai² eigen tsb, maka $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k$ bbl.

Bukti

Mis
$$\beta_1 = \{\bar{x}_{1,1}, \ldots, \bar{x}_{1,n_1}\}, \ \ldots, \ \beta_k = \{\bar{x}_{k,1}, \ldots, \bar{x}_{k,n_k}\}.$$
Mis
$$\alpha_{1,1}\bar{x}_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,n_1}\bar{x}_{1,n_1} + \cdots + \alpha_{k,1}\bar{x}_{k,1} + \cdots + \alpha_{k,n_k}\bar{x}_{k,n_k} = \bar{0}$$
di mana semua $\alpha_{i,j} \in \mathbb{F}$. Mis
$$\bar{y}_1 := \alpha_{1,1}\bar{x}_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,n_1}\bar{x}_{1,n_1},$$
$$\vdots$$
$$\bar{y}_k := \alpha_{k,1}\bar{x}_{k,1} + \cdots + \alpha_{k,n_k}\bar{x}_{k,n_k}.$$
Jadi,
$$\bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_k = \bar{0}.$$
Andaikan ada $\bar{y}_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, yg bukan vektor nol, mis $\bar{y}_1 \neq \bar{0}$, maka $\bar{y}_1 = (-1)\bar{y}_2 + \cdots + (-1)\bar{y}_k \in \text{span}\{\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_k\}$, kontradiksi dgn fakta bahwa $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\}$ bbl (karena $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$ adl vektor² eigen terkait nilai² eigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ yg berbeda²). Jadi, pengandaian tsb salah, artinya $\bar{y}_1 = \cdots = \bar{y}_k = \bar{0}$, yaitu
$$\alpha_{1,1}\bar{x}_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,n_1}\bar{x}_{1,n_1} = \bar{0},$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{k,1}\bar{x}_{k,1} + \cdots + \alpha_{k,n_k}\bar{x}_{k,n_k} = \bar{0}.$$

Karena $\beta_1, \ldots, \beta_k$ msg² merupakan basis, maka semua $\alpha_{i,j}$ haruslah nol. Jadi, $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k$ bbl. ∎

<u>Teorema</u> Mis polinomial karakteristik dari T terfaktorkan linear atas $\mathbb{F}$. Operator linear T terdiagonalkan jika dan hanya jika untuk setiap nilai eigen λ_i berlaku $gm(\lambda_i) = am(\lambda_i)$.

<u>Bukti</u>

Mis semua nilai eigen dari T adl $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Karena polinomial karakteristik dari T terfaktorkan linear atas $\mathbb{F}$, maka

$$am(\lambda_1) + \cdots + am(\lambda_k) = n.$$

($\Rightarrow$) Mis T terdiagonalkan, artinya ada basis β bagi V yg terdiri dari vektor² eigen dari T. Utk setiap $i \in \{1, \ldots, k\}$, mis basis β tsb terdiri dari sebanyak n_i vektor eigen terkait nilai eigen λ_i; himp n_i vektor eigen ini bbl di E_{λ_i} sehingga $n_i \leq \dim(E_{\lambda_i}) = gm(\lambda_i)$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} n = |\beta| = n_1 + \cdots + n_k &\leq gm(\lambda_1) + \cdots + gm(\lambda_k) \\ &\leq am(\lambda_1) + \cdots + am(\lambda_k) = n. \end{aligned}$$

Artinya,

$$gm(\lambda_1) + \cdots + gm(\lambda_k) = am(\lambda_1) + \cdots + am(\lambda_k),$$

yaitu

$$0 = \underbrace{[am(\lambda_1) - gm(\lambda_1)]}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{[am(\lambda_k) - gm(\lambda_k)]}_{\geq 0}.$$

Karena setiap suku penjumlahan di ruas kanan non-negatif dan hasil penjumlahannya nol, maka suku² tsb haruslah semuanya nol. DKL,

$gm(\lambda_i) = am(\lambda_i)$ utk setiap $i \in \{1, \ldots, k\}$.

($\Leftarrow$) Mis $gm(\lambda_i) = am(\lambda_i)$ utk setiap nilai eigen λ_i. Adb T terdiagonalkan, artinya harus dicari basis β bagi V yg terdiri dari vektor² eigen dari T. Mis $\beta_1, \ldots, \beta_k$ msg² basis bagi ruang eigen yg terkait nilai eigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Pilih $\beta = \beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k$. Himpunan ini bbl (berdasarkan teorema sebelumnya) dan berkardinalitas

$$\begin{aligned} |\beta| &= |\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_k| \\ &= |\beta_1| + \cdots + |\beta_k| \\ &= gm(\lambda_1) + \cdots + gm(\lambda_k) \\ &= am(\lambda_1) + \cdots + am(\lambda_k) \\ &= n, \end{aligned}$$

sehingga merupakan basis bagi V. $\blacksquare$

Contoh Mis $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R})$ dgn $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$, dan $f_3(x) = x^2e^x$. Dapat dibuktikan bahwa $\beta := \{f_1, f_2, f_3\}$ merupakan basis bagi $V :=$ span β, dan operator linear $T : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dgn aturan $T(f) = f'$ memiliki matriks representasi

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sehingga polinomial karakteristiknya

$$|[T]_\beta - \lambda I| = (1-\lambda)^3.$$

Jadi, T hanya memiliki satu nilai eigen, yaitu $\lambda_1 = 1$. Dapat dibuktikan bahwa $E_{\lambda_1} = \text{span}\{e^x\}$.

Jadi, $gm(\lambda_1) = 1$ tetapi $am(\lambda_1) = 3$, shg T tidak terdiagonalkan.

<u>Contoh</u> Diket operator linear $T : \mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ dgn

$$T(f(x)) = f(1) + f'(0)x + (f'(0) + f''(0))x^2.$$

Mis $\beta := \{1, x, x^2\}$. Dapat dibuktikan bahwa

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

shg

$$|[T]_\beta - \lambda I| = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Jadi, semua nilai eigen dari T adl $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$.
Dapat dibuktikan bahwa

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\{1, -x^2 + x\} \quad \text{dan} \quad E_{\lambda_2} = \text{span}\{1 + x^2\}.$$

Jadi, utk setiap $i \in \{1, 2\}$ berlaku $gm(\lambda_i) = am(\lambda_i)$, shg T terdiagonalkan. Pilih $\beta' := \{1, -x^2 + x\} \cup \{1 + x^2\}$ $= \{1, -x^2 + x, 1 + x^2\}$, shg

$$[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$