1.6 Bebas linear dan bergantung linear [J, sec. 1.3]

Mis V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$, dan $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subseteq V$.

Definisi

- Himp $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ dikatakan bebas linear (bbl) jika skalar² $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ yg memenuhi $\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}$ hanyalah $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
- Himp $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ dikatakan bergantung linear (bgl) jika tidak bbl, artinya ada skalar² $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ yg tidak semuanya nol yg memenuhi $\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}$.

Untuk lengkapnya, kita sepakati bahwa $\emptyset$ bbl.

Catatan

- Kita juga mengatakan bahwa vektor² $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ bersifat bbl dan bgl.
- Sembarang himp yg memuat vektor nol pasti bgl, karena koefisien dari vektor nol ini dpt diambil tidak nol. Misalnya,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

bgl, karena

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Contoh Apakah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ bbl/bgl di $\mathbb{R}^2$?

Jawab

Mis $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ini adl SPL homogen yg matriks lengkapnya

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistem ini memiliki tak berhingga banyaknya jawab.
Jadi, $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\}$ bgl.

<u>Contoh</u> Apakah $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ bbl/bgl di $\mathbb{R}^2$?

<u>Jawab</u>
Mis $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Ini adl SPL homogen yg matriks lengkapnya

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{-R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{2R_2+R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Sistem ini memiliki jawab tunggal, yaitu $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$.
Jadi, $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ bbl.

<u>Catatan</u>

- Himp $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subseteq \mathbb{F}^m$ <u>bbl</u> jika dan hanya jika SPL homogen

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \bar{0}$$

memiliki jawab tunggal, dan <u>bgl</u> jika dan hanya jika SPL tsb memiliki jawab tak berhingga banyaknya.

- Jika $n > m$, maka SPL tsb memiliki lebih banyak variabel daripada persamaan, shg memiliki jawab tak berhingga banyaknya, artinya $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl.

Teorema

Mis $k \in \mathbb{N}$ dan $k \geq n$.

(i) Jika $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ bgl.

(ii) Jika $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ bbl, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl.

(Tanpa simbol: Setiap superhimpunan dari suatu himpunan bgl juga bgl. Setiap subhimpunan dari suatu himpunan bbl juga bbl.)

Bukti

Adb (i) ; (ii) kontraposisinya. Mis $k \in \mathbb{N}$ dan $k \geq n$. Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl. Artinya, ada $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ yg tidak semuanya nol shg

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0},$$

yaitu

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n + 0\bar{x}_{n+1} + \dots + 0\bar{x}_k = \bar{0}.$$

Artinya, ada cara menyatakan $\bar{0}$ sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ dgn tidak semua koefisiennya nol (krn $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tidak semuanya nol). Jadi, $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ bgl. $\blacksquare$

Teorema

(i) Himpunan $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl jika dan hanya jika ada $i \in \{1, \dots, n\}$ shg $\bar{x}_i \in \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\}$.

(ii) Vektor $\bar{x}_i \in \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\}$ jika dan hanya jika $\text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n\} = \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$.

Bukti

(i) ($\Rightarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl. Artinya ada $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ yg tidak semuanya nol shg

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}.$$

Tanpa mengurangi keumuman, $\alpha_1 \neq 0$. Artinya $\alpha_1^{-1} \in \mathbb{F}$ ada. Kalikan kedua ruas pers terakhir dengan α_1^{-1}, diperoleh

$$\alpha_1^{-1}\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_1^{-1}\alpha_n\bar{x}_n = \bar{0},$$

yaitu

$$\bar{x}_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)\bar{x}_2 + \cdots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)\bar{x}_n,$$

yg artinya $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$.

($\Leftarrow$) Mis, tanpa mengurangi keumuman, $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$. Artinya ada $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ shg

$$\bar{x}_1 = \beta_2\bar{x}_2 + \cdots + \beta_n\bar{x}_n,$$

yaitu

$$\bar{x}_1 + (-\beta_2)\bar{x}_2 + \cdots + (-\beta_n)\bar{x}_n = \bar{0}.$$

Artinya ada cara menuliskan $\bar{0}$ sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ dgn koefisien yg tidak semuanya nol (krn koefisien $\bar{x}_1$ adl 1). Jadi, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bgl.

(ii) Tanpa mengurangi keumuman, adb $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ jika dan hanya jika $\text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} = \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$.

($\Leftarrow$) Mis $\text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} = \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Karena $\bar{x}_1 = 1.\bar{x}_1 + 0\bar{x}_2 + \cdots + 0\bar{x}_n \in \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ dan $\text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} = \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ maka $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$.

($\Rightarrow$) Mis $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$. Adb $\text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ dan $\text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$.

(i) Ambil $\bar{y} \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$, maka ada $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ shg $\bar{y} = \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n = 0\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n \in \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$.

(ii) Ambil $\bar{y} \in \text{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$, maka ada $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ shg

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n.$$

Karena $\bar{x}_1 \in \text{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$, maka ada $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ shg

$$\bar{x}_1 = \beta_2\bar{x}_2 + \cdots + \beta_n\bar{x}_n.$$

Dgn substitusi diperoleh

$$\bar{y} = \alpha_1(\beta_2\bar{x}_2 + \cdots + \beta_n\bar{x}_n) + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n$$

$$= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)\bar{x}_2 + \cdots + (\alpha_1\beta_n + \alpha_n)\bar{x}_n,$$

shg $\bar{y} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq \operatorname{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$. ■

Catatan

Utk $n=2$, teorema di atas bag. (i) berbunyi:

"Dua vektor bgl jika dan hanya jika salah satunya merupakan kelipatan skalar yg lain."

Contoh Buktikan bahwa subhimpunan $\{f_1, f_2, f_3\}$ dari ruang vektor real $\mathcal{F}([0,2\pi], \mathbb{R})$ bgl, jika $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$, dan $f_3(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

Bukti

Perhatikan bahwa utk setiap $x \in [0, 2\pi]$ berlaku

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) &= \cos x \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \sin x \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin x, \end{aligned}$$

yaitu

$$f_3(x) = \tfrac{1}{2} f_1(x) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} f_2(x).$$

Artinya,

$$f_3 = \tfrac{1}{2} f_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} f_2.$$

Karena f_3 komlin dari $\{f_1, f_2\}$ maka $\{f_1, f_2, f_3\}$ bgl.

1.7 Basis [J, sec. 1.4]

Mis V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$, dan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq V$.

Definisi

Himp $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merupakan basis bagi V jika $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bbl dan $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} = V$. Utk lengkapnya, kita sepakati bahwa basis bagi $\{\bar{0}\}$ adl $\emptyset$ (yg sebelumnya telah disepakati bbl dan merentang $\{\bar{0}\}$).

Catatan

- Karena span$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subseteq V$, maka tiga pernyataan berikut ekuivalen:
  (i) span$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} = V$,
  (ii) span$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \supseteq V$,
  (iii) $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V (setiap vektor di V komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$).
- Tanpa simbol: Suatu basis adl suatu himp perentang yg bbl.

Contoh Tentukan suatu basis bagi span$\{1+2x+3x^2, 1+x, 5+8x+9x^2, 3+3x\}$.

Jawab

Mis
$$V := \text{span}\{1+2x+3x^2, 1+x, 5+8x+9x^2, 3+3x\}.$$
Perhatikan bahwa
$$5+8x+9x^2 = 3(1+2x+3x^2) + 2(1+x).$$
Oleh karena itu,
$$V = \text{span}\{1+2x+3x^2, 1+x, 3+3x\}.$$
Perhatikan bahwa
$$3+3x = 3(1+x).$$
Oleh karena itu,
$$V = \text{span}\{1+2x+3x^2, 1+x\}.$$
Jelas $\{1+2x+3x^2, 1+x\}$ bbl (krn anggota yg satu bukan kelipatan skalar dari yg lain). Jadi, $\{1+2x+3x^2, 1+x\}$ basis bagi V.

Teorema Himp $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merupakan basis bagi V jhj setiap vektor di V dpt dituliskan sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ secara tunggal.

Bukti

($\Rightarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V. Ambil $\bar{y} \in V$. Karena $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka $\bar{y}$ dpt dituliskan sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Adb bhw penulisan komlin tsb tunggal. Misalkan

$$\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$$

dan

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Dengan mengurangkan diperoleh

$$\bar{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\bar{x}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{x}_n.$$

Karena $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl, shg $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$, artinya $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Jadi, penulisan komlin tsb tunggal.

($\Leftarrow$) Mis setiap vektor di V dpt dituliskan sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ scr tunggal. Adb $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V. Karena setiap vektor di V dpt dituliskan sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, maka span$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} = V$. Utk membuktikan bhw $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl, mis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}.$$

Kita mengetahui bahwa

$$0\bar{x}_1 + \dots + 0\bar{x}_n = \bar{0}.$$

Karena penulisan $\bar{0} \in V$ sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ tunggal, maka $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, artinya $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl. Jadi, $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V. $\blacksquare$

Pada umumnya, suatu ruang vektor memiliki tak berhingga banyaknya basis. Utk beberapa ruang vektor ada basis khusus yg disebut <u>basis standar (basis baku)</u>. Contohnya,

- Himp
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{F}^3$$
merupakan basis bagi $\mathbb{F}^3$, dan disebut <u>basis standar bagi $\mathbb{F}^3$</u>. Utk setiap $n \in \mathbb{N}$, himp
$$\{ \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \} \subseteq \mathbb{F}^n,$$
dengan $\bar{e}_i$ vektor dgn entri ke-i yg adl 1 dan semua entri lainnya nol, merupakan basis standar bagi $\mathbb{F}^n$.

- Himp
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{F}^{2 \times 2}$$
merupakan <u>basis standar bagi $\mathbb{F}^{2 \times 2}$</u>. Utk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, himp
$$\{ E_{i,j} : i \in \{1, \dots, m\} \text{ dan } j \in \{1, \dots, n\} \} \subseteq \mathbb{F}^{m \times n},$$
dengan $E_{i,j}$ matriks dgn entri-(i,j) yg adl 1 dan semua entri lainnya nol, merupakan <u>basis standar bagi $\mathbb{F}^{m \times n}$</u>.

- Untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$, himp
$$\{1, x, \dots, x^n\}$$
merupakan basis standar bagi $\mathbb{F}[x]_{\leq n}$.

Himpunan $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ basis standar bagi $\mathbb{R}^3$.

- Jika anggotanya dikurangi satu, mis menjadi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, maka himp ini tidak merentang $\mathbb{R}^3$, krn sembarang vektor dgn komponen ketiga tidak nol bukan komlin dari himp tsb. Artinya, himp tsb tdk dpt diperkecil shg tetap merentang $\mathbb{R}^3$.

• Jika anggotanya ditambah satu, mis menjadi $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, maka himp ini tidak bbl, krn sistem

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

yaitu

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

memiliki lebih banyak variabel drpd persamaan. Artinya, himp tsb tidak dpt diperbesar shg tetap bbl.

Dua pengamatan di atas berlaku scr umum:

<u>Teorema</u> Himp $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V jhj $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merupakan himp vektor <u>minimal</u> yg merentang V. [Artinya, himp itu tidak dapat diperkecil (dikurangi satu anggotanya) shg tetap merentang V.]

<u>Bukti</u>

($\Rightarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V, artinya $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl dan merentang V. Andaikan $\{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V. Karena $\bar{x}_1 \in V$ dan $\{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka

$$\bar{x}_1 = \alpha_2\bar{x}_2 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Artinya,

$$\bar{x}_1 + (-\alpha_2)\bar{x}_2 + \dots + (-\alpha_n)\bar{x}_n = \bar{0}.$$

Jadi, ada cara menuliskan $\bar{0}$ sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ dgn koef² yg tdk semuanya nol (krn koef $\bar{x}_1$ adl 1). Kontradiksi dgn $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl.

($\Leftarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ himp minimal yg merentang V. Andaikan $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bgl, artinya ada $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$

yg tdk semuanya nol shg

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}.$$

Tanpa mengurangi keumuman, $\alpha_1 \neq 0$. Artinya $\alpha_1^{-1} \in \mathbb{F}$ ada. Kalikan kedua ruas pers terakhir dgn α_1^{-1}, diperoleh

$$\alpha_1^{-1}\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_1^{-1}\alpha_n \bar{x}_n = \bar{0},$$

yaitu

$$\bar{x}_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)\bar{x}_2 + \cdots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)\bar{x}_n.$$

Adb $\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V. Ambil $\bar{y} \in V$. Karena $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V maka ada $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ shg

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \beta_1 \bar{x}_1 + \cdots + \beta_n \bar{x}_n \\ &= \beta_1 \left[(-\alpha_1^{-1}\alpha_2)\bar{x}_2 + \cdots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)\bar{x}_n \right] + \cdots + \beta_n \bar{x}_n \\ &= (-\beta_1 \alpha_1^{-1}\alpha_2 + \beta_2)\bar{x}_2 + \cdots + (-\beta_1 \alpha_1^{-1}\alpha_n + \beta_n)\bar{x}_n, \end{aligned}$$

yg artinya $\bar{y} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\{\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V, kontradiksi dgn minimalitas dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bbl, shg merupakan basis bagi V. ▨

<u>Teorema</u> Himp $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V ghj $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merupakan himp vektor <u>maksimal</u> yg bbl di V. [Artinya, himp itu tidak dapat diperbesar (ditambah satu anggotanya) shg tetap bbl di V.]

<u>Bukti</u>

($\Rightarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V, artinya $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bbl dan merentang V. Andaikan ada $\bar{y} \in V$ shg $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$ bbl. Krn $\bar{y} \in V$ dan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka

$$\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$$

utk suatu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Artinya,

$$(-\alpha_1)\bar{x}_1 + \dots + (-\alpha_n)\bar{x}_n + \bar{y} = \bar{0}.$$

Artinya ada cara menuliskan $\bar{0}$ sbg komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$ dgn koef² yg tdk semuanya nol (krn koef dari $\bar{y}$ adl 1). Kontradiksi dgn $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$ bbl. Jadi, $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ himp vektor maksimal yg bbl di V.

($\Leftarrow$) Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ himp vektor maksimal yg bbl di V. Andaikan $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ tidak merentang V. Artinya ada $\bar{y} \in V$ yg bukan komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$.

Berdasarkan kemaksimalan, $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$ bgl. Artinya ada $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{F}$ yg tdk semuanya nol shg

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n + \alpha\bar{y} = \bar{0}. \qquad \star$$

Perhatikan bahwa $\alpha \neq 0$, sebab jika $\alpha = 0$ maka $\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n = \bar{0}$, shg $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ krn $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ bbl, kontradiksi dgn $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}\}$ bgl. Karena $\alpha \neq 0$ maka $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ ada. Kalikan kedua ruas $\star$ dengan α^{-1}, diperoleh

$$\alpha^{-1}\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_n\bar{x}_n + \alpha^{-1}\alpha\bar{y} = \bar{0},$$

yaitu

$$\bar{y} = (-\alpha^{-1}\alpha_1)\bar{x}_1 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)\bar{x}_n,$$

kontradiksi dengan $\bar{y}$ bukan komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V, shg $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merupakan basis bagi V. ∎

<u>Ringkasan</u> Suatu basis dpt didefinisikan sbg:

(i) suatu himpunan perentang yg bbl,

(ii) suatu himpunan yg dpt dipakai utk menuliskan setiap vektor sbg komlin scr tunggal,

(iii) suatu himpunan perentang minimal,

(iv) suatu himpunan bbl maksimal.