1.2 Lapangan [F, Appendix C]

Misalkan $\mathbb{F}$ suatu himpunan tak kosong yg tertutup thdp dua operasi, yaitu

$$+ : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

yg disebut <u>operasi penjumlahan</u> (tidak harus operasi penjumlahan bil real) dan

$$\cdot : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

yg disebut <u>operasi perkalian</u> (tidak harus operasi perkalian bil real). Artinya:

(L0a) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha + \beta \in \mathbb{F}$.
(Ketertutupan thd penjumlahan)

(L0b) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha\beta \in \mathbb{F}$.
(Ketertutupan thd perkalian)

Jika sifat berikut terpenuhi:

(L1) Utk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ berlaku $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$.
(Asosiatif penjumlahan)

maka untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$, kita dpt menuliskan $\alpha+\beta+\gamma$ tanpa menimbulkan keambiguan.

Selanjutnya jika kedua sifat berikut terpenuhi:

(L2) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
(Komutatif penjumlahan)

(L3) Ada $0 \in \mathbb{F}$ shg utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha + 0 = \alpha$.
(Adanya identitas penjumlahan)

maka kita dapat membuktikan bahwa identitas penjumlahan tsb tunggal :

Bukti Misalkan ada dua identitas penjumlahan $0_1, 0_2 \in \mathbb{F}$. Karena 0_1 identitas penjumlahan, maka

$$0_2 + 0_1 = 0_2. \quad \text{(L3)}$$

Karena 0_2 identitas penjumlahan, maka

$$0_1 + 0_2 = 0_1. \quad \text{(L3)}$$

Berdasarkan sifat komutatif penjumlahan (L2), $0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1$, artinya $0_1 = 0_2$. ▨

Jika sifat berikut juga terpenuhi :

(L4) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ ada $-\alpha \in \mathbb{F}$ shg $\alpha + (-\alpha) = 0$.
(Adanya invers penjumlahan)

maka kita dpt membuktikan bahwa setiap anggota $\mathbb{F}$ memiliki invers penjumlahan yg tunggal :

Bukti Ambil $\alpha \in \mathbb{F}$. Misalkan ada dua invers penjumlahan dari α, yaitu $(-\alpha)_1, (-\alpha)_2 \in \mathbb{F}$, maka

$$\begin{aligned}
(-\alpha)_1 &= (-\alpha)_1 + 0, && \text{krn } 0 \text{ identitas penjmlhan (L3)} \\
&= (-\alpha)_1 + [\alpha + (-\alpha)_2], && \text{krn } (-\alpha)_2 \text{ invers penjmlhan dari } \alpha \text{ (L4)} \\
&= [(-\alpha)_1 + \alpha] + (-\alpha)_2, && \text{dari sifat asosiatif penjmlhan (L1)} \\
&= 0 + (-\alpha)_2, && \text{krn } (-\alpha)_1 \text{ invers penjmlhan dari } \alpha \text{ (L2, L4)} \\
&= (-\alpha)_2, && \text{krn } 0 \text{ identitas penjmlhan. (L3)}
\end{aligned}$$

▨

Selanjutnya misalkan sifat² serupa utk perkalian juga terpenuhi:

(L5) Utk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ berlaku $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
(Asosiatif perkalian)

(L6) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha\beta = \beta\alpha$.
(Komutatif perkalian)

(L7) Ada $1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ sehingga utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha 1 = \alpha$.
(Adanya identitas perkalian)

(L8) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ ada $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ shg $\alpha\alpha^{-1} = 1$.
(Adanya invers perkalian)

maka, utk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$, kita dpt menulis $\alpha\beta\gamma$ tanpa menimbulkan keambiguan, dan kita dpt membuktikan bahwa identitas perkalian itu tunggal (latihan) dan setiap anggota $\mathbb{F}\setminus\{0\}$ memiliki invers perkalian yg tunggal (latihan).

Terakhir, misalkan:

(L9) Utk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
(Distributif)

Definisi Tigaan terurut $(\mathbb{F}, +, \cdot)$, dengan $\mathbb{F}, +, \cdot$ sebagaimana terdefinisi di atas (khususnya memenuhi (L0a) dan (L0b)), yg memenuhi sifat (aksioma)

(L1) – (L9) disebut <u>lapangan</u>.

N.B.

- DKL, $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ merupakan lapangan jika semua sifat berikut terpenuhi : asosiatif, komutatif, identitas, dan invers (baik dari + maupun $\cdot$) serta distributif.

- Jika kedua operasi tsb jelas dari konteks, cukup dikatakan bahwa <u>$\mathbb{F}$ merupakan lapangan</u>.

<u>Contoh</u> Himpunan² $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ tertutup thd operasi penjmlhan dan perkalian bil real, serta merupakan lapangan; demikian pula $\mathbb{C}$ thdp operasi penjumlahan dan perkalian bil kompleks.

Diberikan suatu himp tak kosong $\mathbb{F}$, suatu operasi penjmlhan, dan operasi perkalian. Utk membuktikan bahwa :

- <u>$\mathbb{F}$ lapangan</u>, buktikan (atau sebutkan bila jelas) bahwa $\mathbb{F}$ tertutup thdp kedua operasi tsb, dan buktikan (L1) – (L9).

- <u>$\mathbb{F}$ bukan lapangan</u>, buktikan dengan contoh penyangkal bahwa $\mathbb{F}$ tidak tertutup thdp <u>salah satu</u> operasi atau tidak memenuhi <u>salah satu</u> dari (L1) – (L9).

<u>Contoh</u> Buktikan bahwa himpunan

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}\}$$

tertutup thdp operasi penjumlahan dan perkalian bil real, serta merupakan lapangan.

Jawab

Akan dibuktikan ketertutupannya dulu. Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tulis $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}$ dan $\beta = \beta_1 + \beta_2\sqrt{2}$ untuk suatu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + (\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\end{aligned}$$

karena $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \in \mathbb{Q}$, dan

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2})(\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}) \\ &= (\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\end{aligned}$$

karena $\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \in \mathbb{Q}$.

Jadi, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tertutup thdp operasi penjumlahan dan perkalian bil real.

Adb $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ memenuhi (L1)-(L9).

(L1) Ambil $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tulis $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2\sqrt{2}$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{2}$ untuk suatu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= \left((\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + (\beta_1 + \beta_2\sqrt{2})\right) + (\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{2}) \\ &= \left((\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)\sqrt{2}\right) + (\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{2}) \\ &= \left((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1\right) + \left((\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2\right)\sqrt{2} \\ &= \left(\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1)\right) + \left(\alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2)\right)\sqrt{2} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + \left((\beta_1 + \gamma_1) + (\beta_2 + \gamma_2)\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + ((\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}) + (\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{2}))$$
$$= \alpha + (\beta + \gamma).$$

(L2) latihan

(L3) Pilih $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Ambil $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tulis $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}$ utk suatu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Perhatikan

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) \\ &= (\alpha_1 + 0) + (\alpha_2 + 0)\sqrt{2} \\ &= \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(L4) Ambil $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tulis $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}$ utk suatu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Pilih $-\alpha = (-\alpha_1) + (-\alpha_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Perhatikan

$$\begin{aligned} \alpha + (-\alpha) &= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}) + ((-\alpha_1) + (-\alpha_2)\sqrt{2}) \\ &= (\alpha_1 + (-\alpha_1)) + (\alpha_2 + (-\alpha_2))\sqrt{2} \\ &= 0 + 0\sqrt{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(L5) latihan

(L6) latihan

(L7) Pilih $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$. ---- (latihan)

(L8) Ambil $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$. Tulis $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2}$ utk suatu

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ yg tidak keduanya nol. Pilih

$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2} + \frac{(-\alpha_2)}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

(Perhatikan bahwa $\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 \neq 0$, sebab jika $\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 = 0$ maka $\alpha_1 \pm \alpha_2\sqrt{2} = 0 = 0 + 0\sqrt{2}$, shg $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, kontradiksi.)

Perhatikan

$$\alpha\alpha^{-1} = (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2})\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2} + \frac{(-\alpha_2)}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2}\sqrt{2}\right)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2})(\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{2})\frac{1}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2}$$

$$= (\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2)\frac{1}{\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2}$$

$$= 1.$$

(L9) latihan.

Jadi, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ merupakan lapangan.

Contoh Buktikan bahwa himpunan² berikut thdp operasi penjmlhan dan perkalian bil real bukan lapangan:

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Jawab

(a) Karena identitas penjumlahan bil real yaitu $0 \notin \mathbb{N}$ maka $\mathbb{N}$ bukan lapangan.

(b) Pilih $2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Jelas bahwa utk setiap $\beta \in \mathbb{Z}$

berlaku $2\beta \neq 1$. Jadi, 2 tidak memiliki invers perkalian, shg $\mathbb{Z}$ bukan lapangan.

(c) Pilih $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$. Jelas bahwa utk setiap $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ berlaku $2\beta \neq 1$. Jadi, 2 tidak memiliki invers perkalian, shg $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bukan lapangan.

<u>Contoh</u> Buktikan bahwa himpunan semua matriks real invertibel 2×2 thdp operasi penjumlahan dan perkalian matriks bukan lapangan.

<u>Bukti</u>

Karena $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (yaitu identitas penjmlhan matriks 2×2) tidak termuat di himpunan tsb maka himpunan tsb bukan lapangan.

<u>Teorema</u> [F, hlm 555] Mis $\mathbb{F}$ suatu lapangan, maka

(i) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $\alpha 0 = 0$.

(ii) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$.

(iii) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

<u>Bukti</u>

(i) Ambil $\alpha \in \mathbb{F}$. Karena $0 \in \mathbb{F}$ identitas penjumlahan, maka

$$0 + 0 = 0.$$

Kalikan kedua ruas dgn α dari kiri, diperoleh

$$\alpha(0 + 0) = \alpha 0.$$

Sifat distributif memberikan

$$\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha 0.$$

Tambahkan kedua ruas dengan $-(\alpha 0)$ dari kanan, diperoleh

$$(\alpha 0 + \alpha 0) + (-(\alpha 0)) = \alpha 0 + (-(\alpha 0)).$$

Sifat asosiatif penjumlahan memberikan

$$\alpha 0 + (\alpha 0 + (-(\alpha 0))) = \alpha 0 + (-(\alpha 0)).$$

Sifat invers penjumlahan memberikan

$$\alpha 0 + 0 = 0.$$

Sifat identitas penjumlahan memberikan

$$\alpha 0 = 0.$$

(ii) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Adb dulu bahwa $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$.
Sifat invers penjumlahan memberikan

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

Kalikan kedua ruas dgn β dari kanan, diperoleh

$$[\alpha + (-\alpha)]\beta = 0\beta.$$

Sifat komutatif perkalian dan distributif memberikan

$$\alpha\beta + (-\alpha)\beta = \beta 0.$$

Butir (i) memberikan

$$\alpha\beta + (-\alpha)\beta = 0.$$

Ketunggalan invers penjumlahan memberikan $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$. Selanjutnya harus dibuktikan bahwa $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$; caranya serupa (latihan).

(iii) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Dengan menggunakan (ii) dua kali diperoleh

$$(-\alpha)(-\beta) = -(\alpha(-\beta)) = -(-(\alpha\beta)) = \alpha\beta. \qquad \blacksquare$$