2.5 Perubahan basis [F, sec. 2.5]

Diket $T: V \to W$ pemetaan linear, dgn V, W ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ dgn dimensi n, m dan basis β, γ.

$$\begin{tikzcd}
\overset{\mathbb{F}^n}{[\bar{x}]_\beta} \arrow[rr, "L_{[T]_\beta^\gamma}"] \arrow[d, bend left, "\varphi_\beta^{-1}"] & & \overset{\mathbb{F}^m}{[T]_\beta^\gamma [\bar{x}]_\beta = [T(\bar{x})]_\gamma} \arrow[d, bend left, "\varphi_\gamma^{-1}"] \\
\underset{V}{\bar{x}} \arrow[rr, "T"] \arrow[u, bend left, "\varphi_\beta"] & & \underset{W}{T(\bar{x})} \arrow[u, bend left, "\varphi_\gamma"]
\end{tikzcd}$$

dgn basis β dan dimensi n

dgn basis γ dan dimensi m

Adb bahwa pemetaan $\varphi_\beta : V \to \mathbb{F}^n$ dgn aturan $\varphi_\beta(\bar{x}) = [\bar{x}]_\beta$ merupakan isomorfisma.

Mis $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$.

Adb φ_β linear

Ambil $a, b \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Tulis $\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$ dan $\bar{y} = \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_n \bar{x}_n$ utk suatu $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$.

Perhatikan

$$\varphi_\beta(a\bar{x} + b\bar{y}) = \varphi_\beta\big(a(\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n) + b(\beta_1\bar{x}_1 + \dots + \beta_n\bar{x}_n)\big)$$

$$= \varphi_\beta\big((a\alpha_1 + b\beta_1)\bar{x}_1 + \dots + (a\alpha_n + b\beta_n)\bar{x}_n\big)$$

$$= \big[(a\alpha_1 + b\beta_1)\bar{x}_1 + \dots + (a\alpha_n + b\beta_n)\bar{x}_n\big]_\beta$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha_1 + b\beta_1 \\ \vdots \\ a\alpha_n + b\beta_n \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= a[\bar{x}]_\beta + b[\bar{y}]_\beta$$

$$= a\,\varphi_\beta(\bar{x}) + b\,\varphi_\beta(\bar{y}).$$

Jadi, φ_β linear.

<u>Adb φ_β satu-satu</u>

Karena

$$\begin{aligned} Ker(\varphi_\beta) &= \{\bar{x} \in V : \varphi_\beta(\bar{x}) = \bar{0}\} \\ &= \left\{\bar{x} \in V : [\bar{x}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{\bar{x} \in V : \bar{x} = 0\bar{x}_1 + \cdots + 0\bar{x}_n\} \\ &= \{\bar{x} \in V : \bar{x} = \bar{0}\} \\ &= \{\bar{0}\}, \end{aligned}$$

maka $null(\varphi_\beta) = 0$, shg φ_β satu-satu.

<u>Adb φ_β pada</u>

Menurut Teorema Rank-Nulitas,

$$rank(\varphi_\beta) = dim(V) - null(\varphi_\beta) = n - 0 = n = dim(\mathbb{F}^n),$$

shg φ_β pada.

Dengan demikian, φ_β merupakan isomorfisma.

Secara sama dpt dibuktikan $\varphi_\gamma : W \to \mathbb{F}^m$ dgn aturan $\varphi_\gamma(\bar{y}) = [\bar{y}]_\gamma$ juga merupakan isomorfisma.

Contoh Tentukan matriks representasi dari pemetaan linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dengan

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

terhadap basis :

ⓐ $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ⓑ $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Jawab

ⓐ Kita hitung

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-6)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sehingga

$$[T]_\beta = \left(\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\beta \; \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\beta \; \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Kita hitung

$$T\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

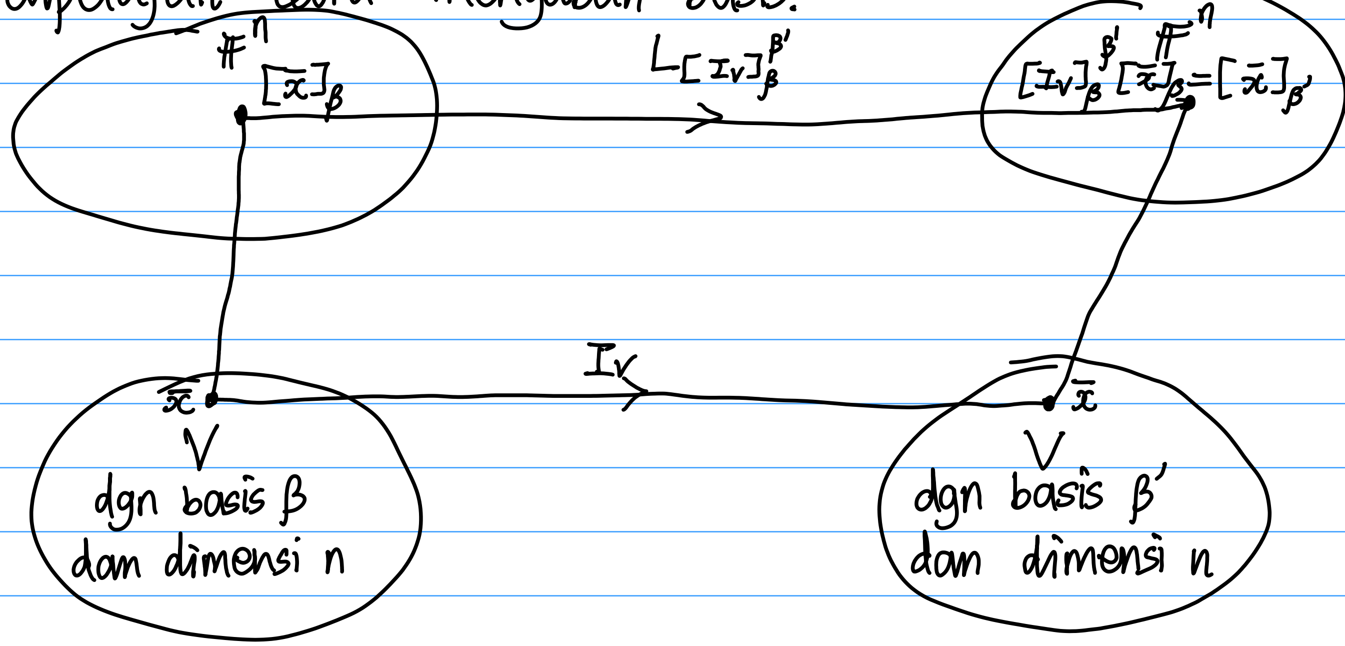
$$T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

shg

$$[T]_\beta = \left(\left[T\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\beta \quad \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\beta \quad \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Jadi, dengan mengubah basis scr tepat, matriks representasi dari suatu pemetaan bisa dijadikan sederhana, misalnya berupa matriks diagonal. Akan dipelajari cara mengubah basis.



Mis $\beta = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ dan $\beta' = \{\bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_n'\}$ dua basis bagi ruang vektor V. Perubahan basis dari β ke β' dilakukan melalui pemetaan identitas $I_V : V \to V$ yg matriks representasinya thd basis β dan β' adl

$$[I_V]_{\beta}^{\beta'} = \left([I_V(\bar{x}_1)]_{\beta'} \ \cdots \ [I_V(\bar{x}_n)]_{\beta'} \right)$$

$$= \left([\bar{x}_1]_{\beta'} \ \cdots \ [\bar{x}_n]_{\beta'} \right),$$

shg utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku

$$[I_V(\bar{x})]_{\beta'} = [I_V]_{\beta}^{\beta'} [\bar{x}]_{\beta},$$

yaitu

$$[\bar{x}]_{\beta'} = [I_V]_{\beta}^{\beta'} [\bar{x}]_{\beta}.$$

Matriks $[I_V]_{\beta}^{\beta'}$ disebut matriks transisi atau matriks pengubah koordinat dari β ke β'. Matriks ini mengubah semua koordinat thd β mjd koordinat thd β'. Inversnya, yaitu

$$\left([I_V]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I_V]_{\beta'}^{\beta},$$

merupakan matriks transisi dari β' ke β.

Contoh Diket ruang vektor real $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dgn basis²: $\beta = \{1-x, 2-x\}$ dan $\beta' = \{x, 1+x\}$. Karena

$$1-x = (-2)x + 1\,(1+x),$$
$$2-x = (-3)x + 2\,(1+x),$$

maka matriks transisi dari β ke β' adl

$$[I_V]_{\beta}^{\beta'} = \left([1-x]_{\beta'} \ [2-x]_{\beta'} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sekarang perhatikan $5-4x \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. Karena

$$5-4x = 3(1-x) + 1(2-x),$$

maka

$$[5-4x]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Apakah $[5-4x]_{\beta'}$? Dgn menggunakan matriks transisi dari β ke β' diperoleh

$$\begin{aligned}
[5-4x]_{\beta'} &= [I_V]_\beta^{\beta'} [5-4x]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Utk mengecek, perhatikan bahwa

$$-9x + 5(1+x) = 5-4x.$$

Pemetaan linear $T: V \to V$ (dari suatu ruang vektor V ke V sendiri) disebut <u>operator linear</u>. Mis β, β' basis² bagi V. Akan dipelajari cara mengubah matriks representasi dari T jika basis yg dipakai berubah dari β mjd β'.

Utk setiap $\bar{x} \in V$ berlaku

$$\begin{aligned}
[T(\bar{x})]_{\beta'} &= [I_V]_\beta^{\beta'} [T(\bar{x})]_\beta \\
&= [I_V]_\beta^{\beta'} [T]_\beta [\bar{x}]_\beta \\
&= \underbrace{[I_V]_\beta^{\beta'} [T]_\beta [I_V]_{\beta'}^{\beta}}_{= [T]_{\beta'}} [\bar{x}]_{\beta'}.
\end{aligned}$$

Jadi, berlaku

$$[T]_{\beta'} = [I_V]_{\beta}^{\beta'} [T]_{\beta} [I_V]_{\beta'}^{\beta} = [I_V]_{\beta}^{\beta'} [T]_{\beta} \left([I_V]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1}.$$

Contoh Diket ruang vektor real $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dgn basis:
$\beta = \{1-x, 2-x\}$ dan $\beta' = \{x, 1+x\}$. Dlm contoh sebelumnya telah dihitung matriks transisi dari β ke β', yaitu

$$[I_V]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mis diket operator linear $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dgn aturan

$$T(x_1 + x_2 x) = -x_2 + 3x_1 x.$$

Karena

$$T(1-x) = 1 + 3x = -7(1-x) + 4(2-x),$$
$$T(2-x) = 1 + 6x = -13(1-x) + 7(2-x),$$

maka

$$[T]_{\beta} = \left([T(1-x)]_{\beta} \quad [T(2-x)]_{\beta} \right) = \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Apakah $[T]_{\beta'}$? Dengan menggunakan matriks transisi,

$$[T]_{\beta'} = [I_V]_{\beta}^{\beta'} [T]_{\beta} \left([I_V]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definisi Mis $n \in \mathbb{N}$. Matriks $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ dikatakan bersifat similar jika ada matriks invertibel $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ sehingga

$$B = PAP^{-1}.$$

Dgn demikian, matriks² representasi suatu operator linear thd berbagai basis bersifat similar satu sama lain.

BAB 3
DIAGONALISASI

3.1 Nilai eigen dan vektor eigen [F, sec. 5.1]

Diberikan $T : V \to V$ operator linear di ruang vektor V berdimensi berhingga atas lapangan $\mathbb{F}$.

Masalah Carilah (jika ada) suatu basis β bagi V shg $[T]_\beta$ merupakan matriks diagonal.

Mendiagonalkan T berarti mencari basis β yg demikian. Jika basis β yg demikian ada, maka T dikatakan bersifat terdiagonalkan (atau dapat didiagonalkan atau diagonalisabel).

Mis $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ dan

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

maka, utk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(\star) \quad [T(\bar{x}_i)]_\beta = [T]_\beta [\bar{x}_i]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{baris } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{baris } i \\ \\ \\ \\ \end{array},$$

yg artinya

$$T(\bar{x}_i) = 0\bar{x}_1 + \cdots + 0\bar{x}_{i-1} + \lambda_i \bar{x}_i + 0\bar{x}_{i+1} + \cdots + 0\bar{x}_n = \lambda_i \bar{x}_i.$$

Jadi, masalah mencari basis β di atas menjadi masalah mencari skalar $\lambda_i \in \mathbb{F}$ dan vektor $\bar{x}_i \in V$ yg memenuhi

$$T(\bar{x}_i) = \lambda_i \bar{x}_i .$$

Skalar $\lambda_i \in \mathbb{F}$ yg demikian disebut <u>nilai eigen</u> dari T, dan vektor $\bar{x}_i \in V$ yg demikian disebut <u>vektor eigen</u> dari T yg terkait nilai eigen λ_i. Karena $\bar{x}_i$ anggota basis β, maka kita menghendaki bahwa $\bar{x}_i \neq \bar{0}$. Jadi,

<u>Teorema</u> Operator linear $T : V \to V$ terdiagonalkan jika dan hanya jika ada basis $\beta = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ yang terdiri dari vektor² eigen dari T; dlm hal itu berlaku

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

di mana, utk setiap $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{x}_i$ adl vektor eigen yg terkait nilai eigen λ_i.

<u>Contoh</u> Mis $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ pemetaan dgn aturan $T(f) = f'$, di mana $C^\infty(\mathbb{R})$ adl ruang vektor yg beranggotakan semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yg terdiferensialkan tak berhingga kali. Utk setiap $k \in \mathbb{R}$, definisikan $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dgn $f_k(x) = e^{kx}$. Utk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$T(f_k)(x) = f_k'(x) = k e^{kx} = k f_k(x),$$

shg $T(f_k) = k f_k$. Artinya, f_k merupakan vektor eigen dari T yg terkait nilai eigen k.

Akan dipelajari cara mencari nilai² eigen λ_i dari T.
Dari (✩) diperoleh

$$
\begin{aligned}
[T]_\beta [\bar{x}_i]_\beta &= \lambda_i [\bar{x}_i]_\beta \\
&= \lambda_i I [\bar{x}_i]_\beta ,
\end{aligned}
$$

yaitu

$$([T]_\beta - \lambda_i I)[\bar{x}_i]_\beta = \bar{0},$$

yg artinya SPL homogen $([T]_\beta - \lambda_i I)\bar{x} = \bar{0}$ memiliki solusi non-trivial $[\bar{x}_i]_\beta \neq \bar{0}$. Ini terjadi jika dan hanya jika

$$|[T]_\beta - \lambda_i I| = 0.$$

Jadi, nilai² eigen λ_i dari T adl akar² dari $|[T]_\beta - \lambda I|$; ini adl suatu polinomial dlm λ dgn derajat n (artinya T memiliki paling banyak n nilai eigen berbeda) dan koefisien utama $(-1)^n$.

Perhatikan bahwa, utk sembarang basis β' bagi V,

$$
\begin{aligned}
|[T]_{\beta'} - \lambda I| &= \left| [I_V]_\beta^{\beta'} [T]_\beta \left([I_V]_\beta^{\beta'}\right)^{-1} - \lambda [I_V]_\beta^{\beta'} I \left([I_V]_\beta^{\beta'}\right)^{-1} \right| \\
&= \left| [I_V]_\beta^{\beta'} \left([T]_\beta - \lambda I\right) \left([I_V]_\beta^{\beta'}\right)^{-1} \right| \\
&= \left|[I_V]_\beta^{\beta'}\right| \cdot |[T]_\beta - \lambda I| \cdot \frac{1}{\left|[I_V]_\beta^{\beta'}\right|} \\
&= |[T]_\beta - \lambda I| .
\end{aligned}
$$

Jadi, polinomial tsb tidak bergantung pada basis bagi V yg digunakan, shg dpt diberi nama yg mengacu pada T saja:

Definisi Utk sembarang basis β bagi V, polinomial $|[T]_\beta - \lambda I|$ sama, dan disebut <u>polinomial karakteristik</u> dari T. Semua nilai eigen dari T merupakan semua akar dari polinomial ini.

Contoh Tentukan semua nilai eigen dari operator linear $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dengan

$$T(f(x)) = f(x) + (1+x)f'(x).$$

Jawab

Mis $\beta = \{1, x, x^2\}$. Kita hitung

$$T(1) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2,$$
$$T(x) = 1 + 2x = 1\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2,$$
$$T(x^2) = 2x + 3x^2 = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 3\cdot x^2,$$

shg

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} [T(1)]_\beta & [T(x)]_\beta & [T(x^2)]_\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$[T]_\beta - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Polinomial karakteristik dari T adl

$$\left|[T]_\beta - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

Jadi, semua nilai eigen dari T adl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$.

Akan dipelajari cara mencari vektor² eigen dari T. Mis β basis bagi V dan $\lambda_i \in \mathbb{F}$ nilai eigen dari T. Ruang solusi dari SPL homogen

$$([T]_\beta - \lambda_i I)\bar{x} = \bar{0}$$

adl

N kapital
ruang nol

$$\begin{aligned}
\mathrm{Null}([T]_\beta - \lambda_i I) &= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : ([T]_\beta - \lambda_i I)\bar{x} = \bar{0}\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : [T]_\beta \bar{x} = \lambda_i \bar{x}\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : [T]_\beta \varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1}(\bar{x})) = \lambda_i \varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : [T]_\beta [\varphi_\beta^{-1}(\bar{x})]_\beta = \varphi_\beta(\lambda_i \varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : [T(\varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))]_\beta = \varphi_\beta(\lambda_i \varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : \varphi_\beta(T(\varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))) = \varphi_\beta(\lambda_i \varphi_\beta^{-1}(\bar{x}))\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : T(\varphi_\beta^{-1}(\bar{x})) = \lambda_i \varphi_\beta^{-1}(\bar{x})\} \\
&= \{\bar{x} \in \mathbb{F}^n : \varphi_\beta^{-1}(\bar{x}) \text{ vektor eigen } T \text{ terkait nilai eigen } \lambda_i\}.
\end{aligned}$$

Jadi, himp semua vektor eigen T terkait nilai eigen λ_i adalah

$$E_{\lambda_i} := \{\varphi_\beta^{-1}(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathrm{Null}([T]_\beta - \lambda_i I)\}.$$

Himp ini disebut ruang eigen dari T yg terkait nilai eigen λ_i.

Contoh (lanjutan contoh sebelumnya)

Semua nilai eigen dari operator linear $T : \mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ dengan $T(f(x)) = f(x) + (1+x)f'(x)$ adl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3$. Akan ditentukan ruang eigen yg terkait dgn msg² nilai eigen tsb.

- Utk $\lambda_1 = 1$, kita selesaikan

$$([T]_\beta - \lambda_1 I)\bar{x} = \bar{0}, \quad \text{yaitu} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-R_3+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_3}{\overset{-R_1+R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

sehingga

$$\mathrm{Null}([T]_\beta - \lambda_1 I) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jadi, ruang eigen dari T yg terkait nilai eigen $\lambda_1 = 1$ adl

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{ \varphi_\beta^{-1}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ t\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 : t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ t \cdot 1 : t \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathrm{span}\{1\}. \end{aligned}$$

- Utk $\lambda_2 = 2$ --- $E_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{1+x\}$.
- Utk $\lambda_3 = 3$ --- $E_{\lambda_3} = \mathrm{span}\{1+2x+x^2\}$.