1.8 Dimensi [J, sec. 1.4]

Mis V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$.

<u>Teorema</u> Jika ada subhimpunan dari V berkardinalitas $n \in \mathbb{N}$ yg merentang V, maka semua subhimpunan berkardinalitas lebih dari n bgl (DKL, semua subhimpunan bbl berkardinalitas paling besar n).

<u>Bukti</u>

Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subseteq V$ merentang V. Ambil $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\} \subseteq V$, dengan $m > n$. Untuk membuktikan $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}$ bgl, cukup dibuktikan bahwa himpunan

$$A := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{F}^m : \alpha_1 \bar{y}_1 + \dots + \alpha_m \bar{y}_m = \bar{0}\}$$

tak berhingga. Karena $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka

$$\bar{y}_1 = \beta_{1,1} \bar{x}_1 + \dots + \beta_{1,n} \bar{x}_n,$$
$$\vdots$$
$$\bar{y}_m = \beta_{m,1} \bar{x}_1 + \dots + \beta_{m,n} \bar{x}_n,$$

dengan semua $\beta_{i,j} \in \mathbb{F}$. Dengan demikian,

$$A = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{F}^m : \alpha_1(\beta_{1,1}\bar{x}_1 + \dots + \beta_{1,n}\bar{x}_n) + \dots + \alpha_m(\beta_{m,1}\bar{x}_1 + \dots + \beta_{m,n}\bar{x}_n) = \bar{0}\}$$

$$= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{F}^m : (\beta_{1,1}\alpha_1 + \dots + \beta_{m,1}\alpha_m)\bar{x}_1 + \dots + (\beta_{1,n}\alpha_1 + \dots + \beta_{m,n}\alpha_m)\bar{x}_n = \bar{0}\}$$

$$\supseteq \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{F}^m : \underbrace{\beta_{1,1}\alpha_1 + \dots + \beta_{m,1}\alpha_m = 0, \dots, \beta_{1,n}\alpha_1 + \dots + \beta_{m,n}\alpha_m = 0}_{\text{SPL dlm } m \text{ variabel } \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ dgn } n \text{ pers}}\}.$$

Karena $m > n$, maka himpunan terakhir tak berhingga, shg A juga tak berhingga. Jadi, $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}$ bgl ▨

Akibat Jika V memiliki basis, maka setiap basis bagi V memiliki kardinalitas yg sama.

Bukti

Andaikan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ dan $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m\}$ dua basis bagi V dengan $n \neq m$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $n > m$. Berdasarkan teorema terakhir, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bgl, kontradiksi dgn pengandaian bahwa $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ basis. ▨

Dgn demikian, kardinalitas yg sama dari basis² suatu ruang vektor dpt diberi nama yg mengacu pd ruang vektor itu saja. Nama yg biasa dipakai adl dimensi.

Definisi Dimensi dari V, dinotasikan $\dim(V)$, adl kardinalitas dari suatu basis bagi V (jika V memiliki basis) atau ∞ (jika V tidak memiliki basis).

Karena $\emptyset$ basis bagi $\{\bar{0}\}$, maka $\dim(\{\bar{0}\}) = 0$. Beberapa ruang vektor dpt kita tentukan dimensinya berdasarkan basis standarnya:

Ruang vektor	Dimensi
$\mathbb{F}^n$ atas $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$	n
$\mathbb{F}^{m \times n}$ atas $\mathbb{F}$, $m, n \in \mathbb{N}$	mn
$\mathbb{F}[x]_{\leq n}$ atas $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$	$n+1$

Akibat Jika V ruang vektor dgn $\dim(V) = n$, maka:

(i) semua himp n vektor yg bbl merentang V.

(ii) semua himp n vektor yg merentang V bbl.

Bukti

Mis $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ basis bagi V.

(i) Andaikan $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ bbl tetapi tidak merentang V.
Artinya ada $\bar{y}_{n+1} \in V$ dengan $\bar{y}_{n+1} \notin \text{span}\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$.
Dgn demikian, $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}_{n+1}\}$ bbl [karena seandainya bgl, maka ada $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$ yg tidak semuanya nol shg

$$\alpha_1 \bar{y}_1 + \dots + \alpha_n \bar{y}_n + \alpha_{n+1} \bar{y}_{n+1} = \bar{0},$$

maka haruslah $\alpha_{n+1} \neq 0$, sebab jika $\alpha_{n+1} = 0$ maka $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ (krn $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ bbl), sehingga diperoleh $\bar{y}_{n+1} = (-\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_1)\bar{y}_1 + \dots + (-\alpha_{n+1}^{-1}\alpha_n)\bar{y}_n$, kontradiksi].
Jadi, ada subhimpunan berkardinalitas n yg merentang V (yaitu basisnya) dan ada subhimpunan berkardinalitas lebih dari n yg bbl (yaitu $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}_{n+1}\}$).
Kontradiksi dgn teorema pertama subbab ini.

(ii) Andaikan $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ merentang V tetapi tidak bbl.
Artinya, ada vektor di dalamnya yg merupakan komlin dr vektor² lainnya. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan vektor ini adl $\bar{y}_1 \in \text{span}\{\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$.
Dgn demikian, $V = \text{span}\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\} = \text{span}\{\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$.
Jadi, ada subhimpunan berkardinalitas $n-1$ yg merentang V (yaitu $\{\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$) dan ada subhimpunan berkardinalitas lebih dari $n-1$ yg bbl (yaitu basisnya).
Kontradiksi dgn teorema pertama subbab ini $\blacksquare$

Teorema Perluasan Basis

Jika V memiliki basis, maka semua subhimpunan berhingga yg bbl memenuhi tepat satu dari dua sifat berikut:

(i) merupakan basis bagi V, atau

(ii) dapat diperbesar menjadi suatu basis bagi V (yaitu dgn menambah sebanyak berhingga vektor di luar rentangnya).

Bukti

Mis V memiliki basis. Ambil subhimp bbl $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \subseteq V$. Berdasarkan teorema pertama subbab ini, $0 \leq r \leq \dim(V)$. Jika $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ merentang V, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ basis bagi V. Jika tidak, maka ada $\bar{x}_{r+1} \in V$ dengan $\bar{x}_{r+1} \notin \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$, artinya $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}\}$ bbl [karena seandainya bgl, yaitu ....].

Selanjutnya, jika $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}\}$ merentang V, maka $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}\}$ basis bagi V. Jika tidak, maka ada $\bar{x}_{r+2} \in V$ dengan $\bar{x}_{r+2} \notin \text{span}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}\}$, artinya $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}\}$ bbl.

Demikian seterusnya. Karena V memiliki basis, maka proses ini akan berhenti saat kardinalitas himp tsb adl $\dim(V)$, dan himp ini merupakan basis bagi V. $\blacksquare$

Teorema Mis V ruang vektor yg memiliki basis. Setiap subruang W dari V juga memiliki basis. Lebih lanjut, $\dim(W) \leq \dim(V)$, dengan kesamaan jjd jhj $W = V$.

Bukti

Mis V ruang vektor yg memiliki basis. Ambil subruang W dari V. Ambil sembarang subhimpunan bbl dari W. Dgn proses spt pd bukti Teorema Perluasan Basis, subhimpunan ini merupakan basis bagi W atau dpt diperbesar mjd suatu basis bagi W. [Jaminan bahwa proses tsb. berhenti adl fakta bahwa semua subhimpunan bbl dari W jg merupakan subhimpunan bbl dari V, shg kardinalitasnya paling besar $\dim(V)$.] Jadi, W memiliki basis, misalkan β. Karena β subhimpunan bbl dari V maka $|\beta| = \dim(W) \leq \dim(V)$. Jika $|\beta| = \dim(W) = \dim(V)$, maka β merentang V (akibat terakhir), shg $W = V$. Jika $|\beta| = \dim(W) < \dim(V)$, maka jelas $W \neq V$. ∎

Teorema Mis V ruang vektor yg memiliki basis. Jika W_1, W_2 subruang V, maka

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Bukti

Mis V ruang vektor yg memiliki basis, maka semua subruang dari V memiliki basis. Mis $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ basis bagi $W_1 \cap W_2$. Karena $W_1 \cap W_2$ subruang W_1, maka $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ dpt diperluas mjd suatu basis bagi W_1, mis $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\ell\}$. Karena $W_1 \cap W_2$ subruang W_2, maka $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ dpt diperluas mjd suatu basis bagi W_2, mis $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$. Adb $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\ell, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$ basis bagi $W_1 + W_2$.

Ambil $\bar{w} \in W_1 + W_2$. Tulis $\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ utk suatu $\bar{w}_1 \in W_1$ dan $\bar{w}_2 \in W_2$. Karena $\bar{w}_1 \in W_1$ maka

$$\bar{w}_1 = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k \bar{x}_k + \beta_1 \bar{y}_1 + \cdots + \beta_\ell \bar{y}_\ell$$

utk suatu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{F}$. Karena $\bar{w}_2 \in W_2$ maka

$$\bar{w}_2 = \gamma_1 \bar{x}_1 + \cdots + \gamma_k \bar{x}_k + \delta_1 \bar{z}_1 + \cdots + \delta_m \bar{z}_m$$

utk suatu $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathbb{F}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \\ &= (\alpha_1+\gamma_1)\bar{x}_1 + \cdots + (\alpha_k+\gamma_k)\bar{x}_k + \beta_1\bar{y}_1 + \cdots + \beta_\ell \bar{y}_\ell \\ &\quad + \delta_1 \bar{z}_1 + \cdots + \delta_m \bar{z}_m.\end{aligned}$$

Jadi, $\bar{w} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\ell, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$.

Mis $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k + \beta_1\bar{y}_1 + \cdots + \beta_\ell\bar{y}_\ell + \gamma_1\bar{z}_1 + \cdots + \gamma_m\bar{z}_m = \bar{0}. \quad \bigstar$$

Dgn demikian,

$$\gamma_1\bar{z}_1 + \cdots + \gamma_m\bar{z}_m = (-\alpha_1)\bar{x}_1 + \cdots + (-\alpha_k)\bar{x}_k + (-\beta_1)\bar{y}_1 + \cdots + (-\beta_\ell)\bar{y}_\ell.$$

Ruas kiri anggota W_2, sedangkan ruas kanan anggota W_1. Akibatnya, ruas kiri anggota $W_1 \cap W_2$. Artinya

$$\gamma_1\bar{z}_1 + \cdots + \gamma_m\bar{z}_m = \delta_1\bar{x}_1 + \cdots + \delta_k\bar{x}_k$$

utk suatu $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \mathbb{F}$. Dgn demikian,

$$(-\delta_1)\bar{x}_1 + \cdots + (-\delta_k)\bar{x}_k + \gamma_1\bar{z}_1 + \cdots + \gamma_m\bar{z}_m = \bar{0}.$$

Karena $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$ bbl, maka $\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$. Substitusikan ke $\bigstar$, diperoleh

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_k\bar{x}_k + \beta_1\bar{y}_1 + \cdots + \beta_\ell\bar{y}_\ell = \bar{0}.$$

Karena $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\ell\}$ bbl, maka $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$. Jadi, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\ell, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m\}$ bbl, shg merupakan basis bagi $W_1 + W_2$.

Dengan demikian,

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = k + (k+\ell+m) = 2k+\ell+m$$

dan

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = (k+\ell) + (k+m) = 2k+\ell+m.$$

Dengan demikian kita telah membuktikan yg diinginkan. $\blacksquare$

Contoh ruang vektor yg tdk memiliki basis

Jika suatu ruang vektor memiliki basis, maka kardinalitas subhimpunan bblnya terbatas di atas oleh dimensinya. Jadi, utk membuktikan bahwa suatu ruang vektor tidak memiliki basis, cukup dibuktikan keberadaan suatu barisan tak berhingga subhimpunan bbl dengan kardinalitas yg membesar tanpa batas.

- Ruang vektor $\mathbb{F}[x]$ atas $\mathbb{F}$ tidak memiliki basis krn
$$(\{1\}, \{1,x\}, \{1,x,x^2\}, \ldots, \{1,x,x^2,\ldots,x^n\}, \ldots)$$
adl barisan subhimpunan bbl dgn kardinalitas yg membesar tanpa batas.

- Ruang vektor real $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ tidak memiliki basis. Buktinya sbb. Utk setiap $n \in \mathbb{N}$ mis $f_n \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x = \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{jika } x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$
Ambil $n \in \mathbb{N}$. Mis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ memenuhi
$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \cdots + \alpha_n f_n = \overline{0},$$
dengan $\overline{0} \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ adl fungsi yg memetakan argumennya ke nol. Artinya, utk setiap $x \in [0,1]$,
$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0.$$
Substitusikan $x = \frac{1}{1}$, diperoleh
$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \text{ shg } \alpha_1 = 0.$$
Substitusikan $x = \frac{1}{2}$, diperoleh
$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \text{ shg } \alpha_2 = 0.$$

Demikian seterusnya. Terakhir, substitusikan $x = \frac{1}{n}$, diperoleh

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 1 = 0, \text{ shg } \alpha_n = 0.$$

Jadi, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, artinya $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ bbl.
Karena ini berlaku utk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\left(\{f_1\}, \{f_1, f_2\}, \{f_1, f_2, f_3\}, \ldots, \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}, \ldots\right)$$

adl barisan subhimpunan bbl dgn kardinalitas yg membesar tanpa batas.