1.4 Subruang [F, sec. 1.3]

Definisi Mis $(V,+,\cdot)$ ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Tigaan $(W,+,\cdot)$ disebut subruang dari $(V,+,\cdot)$ jika $W \subseteq V$ dan $(W,+,\cdot)$ ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

Teorema Mis $(V,+,\cdot)$ ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Tigaan $(W,+,\cdot)$ merupakan subruang dari $(V,+,\cdot)$ jika dan hanya jika empat sifat berikut berlaku :

(i) $W \neq \emptyset$,
(ii) $W \subseteq V$,
(iii) Utk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in W$ berlaku $\bar{x}+\bar{y} \in W$.
(ketertutupan thd penjmlhan)
(iv) Utk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in W$ berlaku $\alpha\bar{x} \in W$.
(ketertutupan thd perkalian skalar)

Bukti

Mis $(V,+,\cdot)$ ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$.

$(\Rightarrow)$ Mis $(W,+,\cdot)$ subruang dari $(V,+,\cdot)$. Dgn demikian, $W \subseteq V$ dan $(W,+,\cdot)$ ruang vektor atas $\mathbb{F}$, shg otomatis memenuhi (i)–(iv).

$(\Leftarrow)$ Mis (i)–(iv) berlaku. Adb $W \subseteq V$ dan $(W,+,\cdot)$ ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Dari (i)–(iv) telah diketahui bahwa $W \neq \emptyset$, $W \subseteq V$, dan W tertutup thd $+$ dan $\cdot$. Semua aksioma ruang vektor yg tidak memuat kuantifier eksistensi [semua kecuali (RV3) dan (RV4)] berlaku utk semua vektor di V, shg otomatis berlaku utk semua vektor di $W \subseteq V$. Artinya tinggal dibuktikan (RV3) dan (RV4). Ambil $\bar{x} \in W$. Dari (iv) dgn memilih $\alpha = 0$ diperoleh $\bar{0} = 0\bar{x} \in W$. Dari (iv) dgn memilih $\alpha = -1$ diperoleh $-\bar{x} = (-1)\bar{x} \in W$. ■

Catatan Sifat (iii) dan (iv) ekuivalen dengan:

(v) Utk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in W$ berlaku $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$.
(Ketertutupan thd kombinasi linear)

Bukti

($\Rightarrow$) Mis (iii) dan (iv) berlaku. Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in W$. Dari (iv), $\alpha\bar{x}, \beta\bar{y} \in W$. Dari (iii), $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$.

($\Leftarrow$) Mis (v) berlaku. Utk membuktikan (iii), ambil $\bar{x}, \bar{y} \in W$. Dari (v) dgn memilih $\alpha = \beta = 1$, diperoleh $\bar{x} + \bar{y} = 1\bar{x} + 1\bar{y} \in W$. Utk membuktikan (iv), ambil $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x} \in W$. Dari (v) dgn memilih $\beta = 0$ dan $\bar{y} = \bar{0}$ diperoleh $\alpha\bar{x} = \alpha\bar{x} + 0\bar{0} \in W$. ∎

Diberikan suatu ruang vektor V atas suatu lapangan $\mathbb{F}$ dan suatu himpunan W. Utk membuktikan bahwa:

- W subruang V, buktikan (i), (ii), dan (v).
- W bukan subruang V, buktikan dengan contoh penyangkal bahwa salah satu dari (i)–(iv) tidak terpenuhi, atau bahwa $\bar{0} \notin W$ [karena ini berarti (iv) tidak terpenuhi utk $\alpha = 0$.]

Contoh Mis $n \in \mathbb{N}$. Diket ruang vektor real $\mathbb{R}^n$.

(a) Buktikan bahwa

$$W_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

(b) Buktikan bahwa

$$W_2 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

(c) Buktikan bahwa

$$W_3 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Jawab

(a) (i) Karena $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}) \in W_1$ maka $W_1 \neq \emptyset$.

(ii) Jelas $W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ berdasarkan definisi W_1.

(v) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in W_1$. Tulis $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ utk suatu $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ dengan $x_1 + \dots + x_n = 0$ dan $y_1 + \dots + y_n = 0$.

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} &= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n) \\
&= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta y_1, \dots, \beta y_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \\
&= (z_1, \dots, z_n),
\end{aligned}$$

dengan $z_i := \alpha x_i + \beta y_i \in \mathbb{R}$. Karena

$$\begin{aligned}
z_1 + \dots + z_n &= (\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) \\
&= \alpha(x_1 + \dots + x_n) + \beta(y_1 + \dots + y_n) \\
&= \alpha 0 + \beta 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

maka $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W_1$.

Jadi, W_1 subruang dari $\mathbb{R}^n$.

(b) Karena $(\underbrace{0,\dots,0}_{n}) \notin W_2$ maka W_2 bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$!

(c) Pilih $(\underbrace{1,\dots,1}_{n}) \in W_3$ dan $-1 \in \mathbb{R}$. Perhatikan

$$-1(\underbrace{1,\dots,1}_{n}) = (\underbrace{-1,\dots,-1}_{n}) \notin W_3.$$

Jadi, W_3 tidak tertutup thd perkalian skalar, shg W_3 bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Catatan

- Untuk setiap ruang vektor V, himpunan $\{\bar{0}\}$ (himpunan trivial) dan V sendiri selalu merupakan subruang dari V.

- Contoh² subruang dari beberapa ruang vektor:

Ruang vektor	Contoh subruang
$\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$	semua garis yg melalui titik asal
$\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$	semua garis yg melalui titik asal
	semua bidang yg melalui titik asal
$\mathbb{F}[x]$ atas $\mathbb{F}$	$\mathbb{F}[x]_{\leq n}$ utk setiap $n \in \mathbb{N}_0$
$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ atas $\mathbb{R}$	$C(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \text{ kontinu}\}$
$\mathbb{F}^{n\times n}$ atas $\mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$	$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks skalar}\}$
	$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks diagonal}\}$

$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks segitiga atas}\}$

$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks segitiga bawah}\}$

$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks simetri (yaitu } A^T = A)\}$

$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ matriks simetri miring (yaitu } A^T = -A)\}$

$\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : tr(A) = 0\}$

<u>Teorema</u> Mis W_1 dan W_2 dua subruang dari suatu ruang vektor V atas suatu lapangan $\mathbb{F}$, maka:

(a) $W_1 \cap W_2$ subruang dari V.

(b) $W_1 \cup W_2$ subruang dari V jika dan hanya jika $W_1 \subseteq W_2$ atau $W_2 \subseteq W_1$.

(c) $W_1 + W_2 := \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 : \bar{u}_1 \in W_1 \text{ dan } \bar{u}_2 \in W_2\}$ subruang dari V.

<u>Bukti</u>

Mis W_1 dan W_2 subruang dari V atas $\mathbb{F}$.

(a) Adb $W_1 \cap W_2$ subruang V.

(i) Krn W_1, W_2 subruang, maka $\bar{0} \in W_1$ dan $\bar{0} \in W_2$ shg $\bar{0} \in W_1 \cap W_2$, artinya $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

(ii) Krn W_1, W_2 subruang, maka $W_1 \subseteq V$ dan $W_2 \subseteq V$, shg $W_1 \cap W_2 \subseteq V$.

(v) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in W_1 \cap W_2$. Krn $\bar{x}, \bar{y} \in W_1 \cap W_2$ maka $\bar{x}, \bar{y} \in W_1$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in W_2$. Karena W_1, W_2 subruang, maka $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W_1$ dan $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W_2$, shg $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W_1 \cap W_2$.

Jadi, $W_1 \cap W_2$ subruang V.

(b) ($\Leftarrow$) Mis $W_1 \subseteq W_2$ atau $W_2 \subseteq W_1$. Adb $W_1 \cup W_2$ subruang V. Jika $W_1 \subseteq W_2$ maka $W_1 \cup W_2 = W_2$ yg diket merupakan subruang dari V. Jika $W_2 \subseteq W_1$ maka $W_1 \cup W_2 = W_1$ yg diket merupakan subruang dari V.

($\Rightarrow$) Mis $W_1 \cup W_2$ subruang dari V. Adb $W_1 \subseteq W_2$ atau $W_2 \subseteq W_1$. Utk keperluan kontradiksi, andaikan $W_1 \not\subseteq W_2$ dan $W_2 \not\subseteq W_1$. Artinya, ada $\bar{x} \in W_1$ dengan $\bar{x} \notin W_2$ dan ada $\bar{y} \in W_2$ dengan $\bar{y} \notin W_1$. Karena $\bar{x} \in W_1$ maka $\bar{x} \in W_1 \cup W_2$. Karena $\bar{y} \in W_2$ maka $\bar{y} \in W_1 \cup W_2$. Karena $W_1 \cup W_2$ subruang, maka $\bar{x} + \bar{y} \in W_1 \cup W_2$, artinya $\bar{x} + \bar{y} \in W_1$ atau $\bar{x} + \bar{y} \in W_2$.

- Jika $\bar{x} + \bar{y} \in W_1$ maka
$$\bar{y} = (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{x} \in W_1,$$
kontradiksi dengan $\bar{y} \notin W_1$.
- Jika $\bar{x} + \bar{y} \in W_2$ maka
$$\bar{x} = (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{y} \in W_2,$$
kontradiksi dengan $\bar{x} \notin W_2$.

Dgn demikian kita telah membuktikan yg diinginkan.

(C) latihan. $\blacksquare$

1.5 Kombinasi linear dan rentang [J, sec. 1.1]

Mis V suatu ruang vektor atas suatu lapangan $\mathbb{F}$.
Mis $n \in \mathbb{N}$ dan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq V$.

Definisi Suatu kombinasi linear (komlin) dari himpunan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ adl suatu vektor $\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$, di mana $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ disebut koefisien² dari komlin tsb.

Catatan

- Kita juga mengatakan bhw $\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n$ adl komlin dari vektor-vektor $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.

- Tanpa simbol : Suatu komlin dari sebanyak berhingga vektor adl suatu hasil penjumlahan dari kelipatan² skalar dari vektor² tsb.

Contoh Diket ruang vektor real $\mathbb{R}^2$. Dua contoh komlin dari $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ adl

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Apakah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan komlin dari $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$?

Perhatikan SPL

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks lengkapnya

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Karena SPL tsb inkonsisten (tidak mempunyai jawab), maka $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bukan komlin dari $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Definisi Suatu subhimpunan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq V$ dikatakan merentang (atau membangun) ruang vektor V jika setiap vektor di V merupakan komlin dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$.

Contoh Apakah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ merentang $\mathbb{R}^2$?

Jawab

Ambil $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$. Tulis $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ utk suatu $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Mis $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ini adl SPL yg matriks lengkapnya

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ -2 & 4 & y_2 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 0 & 2y_1+y_2 \end{array}\right).$$

Sistem ini inkonsisten untuk, misalnya, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jadi, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ tidak merentang $\mathbb{R}^2$.

Contoh Apakah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ merentang $\mathbb{R}^2$?

Jawab

Ambil $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$. Tulis $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ utk suatu $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Mis $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ yaitu } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ini adl SPL yg matriks lengkapnya

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ -2 & 3 & y_2 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ 0 & -1 & 2y_1+y_2 \end{array}\right)$$

$$\overset{-1R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 1 & -2y_1-y_2 \end{array}\right) \overset{2R_2+R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3y_1-2y_2 \\ 0 & 1 & -2y_1-y_2 \end{array}\right).$$

Sistem ini konsisten utk setiap $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$. Jadi, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ merentang $\mathbb{R}^2$.

Catatan Mis $m, n \in \mathbb{N}$ dan $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subseteq \mathbb{F}^m$.

- Vektor $\bar{y} \in \mathbb{F}^m$ merupakan komlin dari $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ jika dan hanya jika SPL

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \bar{y}$$

bersifat <u>konsisten</u>.

- Himp $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ <u>merentang $\mathbb{F}^m$</u> jika dan hanya jika SPL di atas <u>konsisten untuk setiap $\bar{y} \in \mathbb{F}^m$</u>.

<u>Definisi</u> [J, Def. 1.1.2] <u>Span</u> (atau <u>rentang</u>) dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ adalah

$$\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} := \{\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

yaitu himp semua komlin dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Untuk lengkapnya, kita sepakati bahwa $\operatorname{span} \emptyset := \{\bar{0}\}$.

<u>Catatan</u> Kita juga mengatakan bahwa $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ adl span dari <u>vektor-vektor</u> $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$.

<u>Teorema</u> Himp $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ subruang dari V.

<u>Bukti</u>

Adb $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ subruang dari V.

(i) Karena $\bar{0} = 0\bar{x}_1 + \cdots + 0\bar{x}_n \in \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ maka $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \neq \emptyset$.

(ii) Karena V ruang vektor maka semua komlin dari $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ termuat di V. Artinya, $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq V$.

(v) Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Tulis $\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n$ dan $\bar{y} = \beta_1 \bar{x}_1 + \cdots + \beta_n \bar{x}_n$

untuk suatu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Perhatikan

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \alpha(\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n) + \beta(\beta_1\bar{x}_1 + \cdots + \beta_n\bar{x}_n)$$

$$= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\bar{x}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\bar{x}_n,$$

artinya $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$.

Jadi, $\operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ subruang dari V. ▨

<u>Teorema</u> Misalkan $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \geq n$. Jika $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ merentang V.

(<u>Tanpa simbol</u> : Setiap superhimpunan berhingga dari suatu himpunan perentang juga merupakan himpunan perentang.)

<u>Bukti</u> Misalkan $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \geq n$. Misalkan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V. Adb $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ merentang V. Ambil $\bar{y} \in V$. Karena $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ merentang V, maka ada $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ shg

$$\bar{y} = \alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n$$

$$= \alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n + 0\bar{x}_{n+1} + \cdots + 0\bar{x}_k,$$

artinya $\bar{y} \in \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$. Jadi, $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$ merentang V. ▨