1. Diketahui pemetaan linear $T : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}^2$ dengan aturan $T(f(x)) = (f(1), f'(1))$. Tentukan basis bagi $\mathrm{Ker}(T)$ dan bagi $\mathrm{Im}(T)$. Tentukan pula $\mathrm{null}(T)$ dan $\mathrm{rank}(T)$. Apakah T satu-satu? Apakah T pada?

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} : T(f(x)) = (0,0) \} \\
&= \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} : (f(1), f'(1)) = (0,0) \} \\
&= \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} : f(1) = 0 \text{ dan } f'(1) = 0 \} \\
&= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \text{ dan } a_1 + 2a_2 = 0 \}.
\end{aligned}$$

Karena

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{-R_2 + R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

maka

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0 = t, a_1 = -2t, a_2 = t, \text{ dgn } t \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ t - 2tx + tx^2 : t \in \mathbb{R} \} \\
&= \{ t(1 - 2x + x^2) : t \in \mathbb{R} \} \\
&= \mathrm{span}\{ 1 - 2x + x^2 \}.
\end{aligned}$$

Jelas $\{1 - 2x + x^2\}$ bbl karena anggotanya hanyalah satu polinomial yg tak nol, shg $\{1 - 2x + x^2\}$ basis bagi $\mathrm{Ker}(T)$. Jadi, $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

Karena $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{span}\{1, x, x^2\}$ maka

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{T(1), T(x), T(x^2)\}$$

$$= \text{span}\{(1,0), (1,1), (1,2)\}.$$

Karena $(1,2) = -1(1,0) + 2(1,1)$, maka

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{(1,0), (1,1)\}.$$

Jelas $\{(1,0), (1,1)\}$ bbl karena anggota yg satu bukan kelipatan skalar anggota yg lain. Jadi, $\{(1,0), (1,1)\}$ basis bagi $\text{Im}(T)$, shg $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T)) = 2$.

Karena $\text{null}(T) = 1 \neq 0$ maka T tidak satu-satu.

Karena $\text{rank}(T) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ maka T pada.

2. Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi berhingga atas suatu lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan $T : V \to V$ suatu pemetaan linear dengan sifat bahwa $T \circ T = T$. Buktikan bahwa $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) = V$.

Petunjuk: *Untuk membuktikan bahwa setiap* $\overline{x} \in V$ *merupakan anggota* $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$, *tuliskan* $\overline{x} = [\overline{x} - T(\overline{x})] + T(\overline{x})$.

Mis V ruang vektor berdimensi berhingga atas lapangan $\mathbb{F}$. Mis $T: V \to V$ pemetaan linear dgn sifat $T \circ T = T$.

Utk membuktikan bahwa $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) \subseteq V$, perhatikan bahwa $\mathrm{Ker}(T)$ subruang V dan $\mathrm{Im}(T)$ subruang V, shg $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$ juga subruang dari V, artinya $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) \subseteq V$.

Utk membuktikan bahwa $V \subseteq \overbrace{\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)}^{=\{\overline{u}_1 + \overline{u}_2 \,:\, \overline{u}_1 \in \mathrm{Ker}(T) \text{ dan } \overline{u}_2 \in \mathrm{Im}(T)\}}$. Ambil $\overline{x} \in V$. Perhatikan

$$\overline{x} = [\overline{x} - T(\overline{x})] + T(\overline{x}).$$

Jelas $T(\overline{x}) \in \mathrm{Im}(T)$. Perhatikan bahwa

$$T(\overline{x} - T(\overline{x})) = T(\overline{x}) - T(T(\overline{x})) = T(\overline{x}) - T(\overline{x}) = \overline{0},$$

shg $\overline{x} - T(\overline{x}) \in \mathrm{Ker}(T)$. Jadi, $\overline{x} \in \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

Jadi, $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) = V$.

$\mathrm{Ker}(T)$ adalah himpunan semua pembuat nol.
$\overline{x} - T(\overline{x})$ adl suatu pembuat nol.