Sembarang subhimpunan bbl dari suatu ruang vektor memiliki kardinalitas yang terbatas di atas oleh kardinalitas dari suatu himpunan perentang.

Semua basis bagi suatu ruang vektor memiliki kardinalitas yg sama, yg disebut dimensi dari ruang vektor tsb.

Sembarang subhimpunan dari suatu ruang vektor yg kardinalitasnya sama dgn dimensi dari ruang vektor tsb, jika bbl maka merentang, dan jika merentang maka bbl.

Sembarang subhimpunan bbl dari suatu ruang vektor merupakan basis atau dpt diperbesar menjadi suatu basis.

$\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1. Perluaslah (tambahkanlah dua vektor ke dalam) himpunan $\{(2,4,2,-1),(-1,1,0,0)\}$ sehingga menjadi suatu basis bagi ruang vektor real $\mathbb{R}^4$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{2R_1+R_3 \\ 2R_1+R_4}}{\overset{4R_1+R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{-1\cdot R_1}{\overset{R_2+R_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mis

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dgn barisan OBE yg sama,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, A invertibel, shg sistem $A\bar{x} = \bar{0}$ hanya memiliki solusi trivial (artinya S bbl) dan $A\bar{x} = \bar{y}$ memiliki solusi (artinya

S merentang $\mathbb{R}^4$). Jadi, S merupakan basis bagi $\mathbb{R}^4$.

2. Misalkan W adalah subruang dari $\mathbb{R}^4$ yang beranggotakan semua empatan bilangan real yang komponen-komponennya berjumlah nol. Tentukan suatu basis bagi W, lalu tentukan $\dim(W)$.

Diket

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Adb $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ bbl. Mis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

yaitu

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

shg $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Jadi, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ bbl, shg merupakan basis bagi W. Jadi, $\dim(W) = 3$.

3. Buktikan bahwa sembarang subruang berdimensi tiga dari $\mathbb{F}^{2\times 2}$ pasti memuat suatu matriks diagonal yang tak nol.

W

Petunjuk: *Ambil sembarang subruang berdimensi tiga W dari $\mathbb{F}^{2\times 2}$. Misalkan W' subruang dari $\mathbb{F}^{2\times 2}$ yang beranggotakan semua matriks diagonal. Gunakan kesamaan yang mengaitkan dimensi-dimensi dari $W, W', W \cap W'$, dan $W + W'$ untuk membuktikan bahwa $W \cap W'$ bukan ruang vektor trivial.*

W hrs memuat suatu anggota tak nol dari W'

$$W \cap W' \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Ambil subruang berdimensi tiga W dari $\mathbb{F}^{2\times 2}$. Mis

$$\begin{aligned} W' &:= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Jelas, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ bbl krn anggota yg satu bukan kelipatan skalar dari anggota yg lain. Jadi, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ basis bagi W', shg $\dim(W') = 2$.

Perhatikan bahwa

$$\dim(W) + \dim(W') = \dim(W \cap W') + \dim(W + W'),$$

shg

$$\begin{aligned} \dim(W \cap W') &= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W + W') \\ &= 3 + 2 - \dim(W + W') \\ &= 5 - \dim(W + W'). \end{aligned}$$

Karena $W + W'$ subruang dari $\mathbb{F}^{2\times 2}$ dan $\dim(\mathbb{F}^{2\times 2})$

$= 4$, maka $\dim(W + W') \leqslant 4$, shg

$$\dim(W \cap W') \geqslant 1.$$

Jadi, $W \cap W'$ bukan ruang vektor trivial, shg W memuat sekurang²nya satu anggota tak nol dari W', yaitu suatu matriks diagonal tak nol.

3. Misalkan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ subhimpunan bebas linear dari ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$. Jika $\bar{x} \in V$ dengan $\bar{x} \notin \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$, buktikan bahwa $\{\bar{x}_1 + \bar{x}, \ldots, \bar{x}_n + \bar{x}\}$ bebas linear.

Mis V ruang vektor atas $\mathbb{F}$ dan $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \subseteq V$ bbl. Mis $\bar{x} \in V$ dgn $\bar{x} \notin \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Adb $\{\bar{x}_1 + \bar{x}, \ldots, \bar{x}_n + \bar{x}\}$ bbl. Mis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ memenuhi

$$\alpha_1(\bar{x}_1 + \bar{x}) + \cdots + \alpha_n(\bar{x}_n + \bar{x}) = \bar{0},$$

yaitu

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{x}_n + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\bar{x} = \bar{0}. \quad \star$$

Adb $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$. Andaikan $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, maka $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1} \in \mathbb{F}$ ada. Kalikan kedua ruas $\star$ dgn $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1}$, diperoleh

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1}\alpha_1\bar{x}_1 + \cdots + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1}\alpha_n\bar{x}_n + \bar{x} = \bar{0},$$

shg

$$\bar{x} = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1}\alpha_1 \bar{x}_1 - \cdots - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{-1}\alpha_n \bar{x}_n,$$

kontradiksi dgn $\bar{x} \notin \operatorname{span}\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$. Jadi, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$. Substitusikan ke ☆, diperoleh

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}.$$

Karena $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ bbl, maka $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Jadi, $\{\bar{x}_1 + \bar{x}, \ldots, \bar{x}_n + \bar{x}\}$ bbl.