UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA

PRINCIPIOS DE LAS COMUNICACIONES

(Tercera Edición)

EDICION DIGITAL

PROBLEMARIO

José E. Briceño M., Dr. Ing.
Profesor Titular, ULA

Mérida, Abril 2005

PROBLEMARIO DE "PRINCIPIOS DE LAS COMUNICACIONES"
CAPITULO I

Estimado Lector:

Es posible que al resolver estos problemas o al transcribirlos pudiera haberse producido algunas erratas. Si Ud. consigue alguna errata, le ruego que me lo comunique para yo hacer la corrección correspondiente.

Puede comunicarse conmigo mediante las siguientes direcciones de correo electrónico:

briceros@hotmail.com o jbriceno@ula.ve

Muchas gracias.

Prof. José Briceño M., Dr. Ing.
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela

CAPITULO I

1.1. Clasifique cada una de las señales siguientes como señales de energía, de potencia o ninguna de las dos. Calcule la energía o la potencia, según el caso.

(a) $x(t) = 2\cos(6\pi t - \pi/2)$. Señal periódica, sinusoidal: señal de potencia.

$$< x^2(t) > = \frac{(2)^2}{2} = 2W$$

(b) $x(t) = A\left|\cos(\omega_c t\right|$. Señal periódica, sinusoidal: señal de potencia. Es una señal rectificada de onda completa.

$$< x^2(t) > = \frac{A^2}{2} W$$

(c) $x(t) = A \cdot t \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})u(t)$. Esta señal converge; es una señal de energía.

$$\text{Energía} = A^2 \int_0^\infty t^2 \exp(-\frac{2t}{\tau})dt = \frac{A^2}{4}\tau^3 \text{ joules}$$

(d) $x(t) = \frac{A\tau}{\tau + jt}$; $\quad |x(t)| = \frac{A\tau}{\sqrt{\tau^2 + t^2}}$. Esta señal converge; es una señal de energía.

$$\text{Energía} = 2\int_0^\infty \frac{A^2\tau^2}{\tau^2 + t^2}dt = A^2\pi\,|\,\tau\,| \text{ joules}$$

(e) $x(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\Pi(\frac{t}{\tau})$. Es una señal acotada; es una señal de energía.

Energía = $A^2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-\frac{2t}{\tau})dt = 1{,}18A^2\tau$ joules

(f) $x(t) = A\exp(\frac{t}{\tau})\cos(2\pi f_c t)$. No converge; no es ni de potencia ni de energía.

(g) $x(t) = A\exp(-\frac{|t|}{\tau})\Pi(\frac{t}{2\tau})\cos(2\pi f_c t)$. Es una señal acotada; es de energía.

Energía = $A^2 2\int_0^{\tau} \exp(-\frac{2t}{\tau})\cos^2(2\pi f_c t)dt$. Hagamos, por ejemplo, A = 10; $\tau = 10^{-3}$ y f_c = 10 kHz. Para estos valores se tiene: Energía = 0,043 joules

(h) $x(t) = \frac{A}{t}\Pi(\frac{t}{\tau})$. No está acotada; no es ni de potencia ni de energía.

(i) $x(t) = \frac{A}{t}\Pi(\frac{t-\tau}{\tau}) = \frac{A}{t}$ para $\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{3\tau}{2}$. Acotada; es de energía

Energía = $A^2 \int_{\tau/2}^{3\tau/2} \frac{1}{t^2}dt = \frac{4}{3}\frac{A^2}{\tau}$ joules

1.2. Grafique las siguientes señales de energía y verifique que sus energías son las dadas.

(a) $x(t) = A\exp(-\frac{|t|}{T})\Pi(\frac{t}{2T})$. Fig. P1.2(a) $\rightarrow$

$x(t) = A\exp(-\frac{|t|}{T})$ para $|t| \le T$

Energía = $A^2 2\int_0^{T} \exp(-\frac{2t}{T})dt = 0{,}8647A^2T$ joules

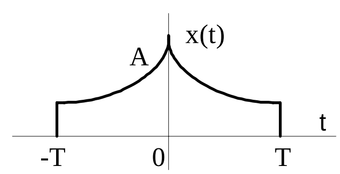


Fig. P1.2(a).

(b) $x(t) = \frac{A}{T}r(t)\Pi(\frac{t-T/2}{T})$. Fig. P1.2(b) $\rightarrow$

$x(t) = \frac{A}{T}t$ para $0 \le t \le T$

Energía = $\frac{A^2}{T^2}\int_0^{T} t^2dt = \frac{1}{3}A^2T$ joules

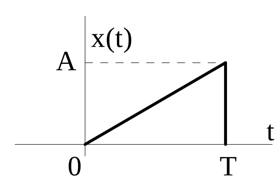


Fig. P1.2(b).

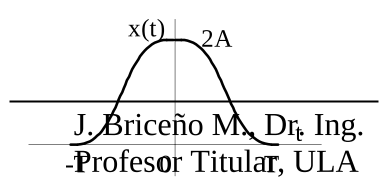


Fig. P1.2(c).

(c) $x(t) = A\left[1+\cos(\frac{\pi t}{T})\right]\Pi(\frac{t}{2T})$. Fig. P1.2(c)

$x(t) = A\left[1+\cos(\frac{\pi t}{T})\right]$ para $|t| \le T$

x(t) es una señal llamada “en coseno elevado”.

Energía = $A^2 2\int_0^T \left[1+\cos(\frac{\pi t}{T})\right]^2 dt = 3A^2T$ joules

1.3. Demuestre que las potencias promedio de las siguientes señales son las correspondientes dadas.

(a) De la Fig. 1.45 del Texto, $x_T(t) = -\frac{A}{T}(t-T)$ en T; A = 10; T = 10^{-3} seg

$$< x_T^2(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{T^2}(t-T)^2 dt = 33{,}33W$$

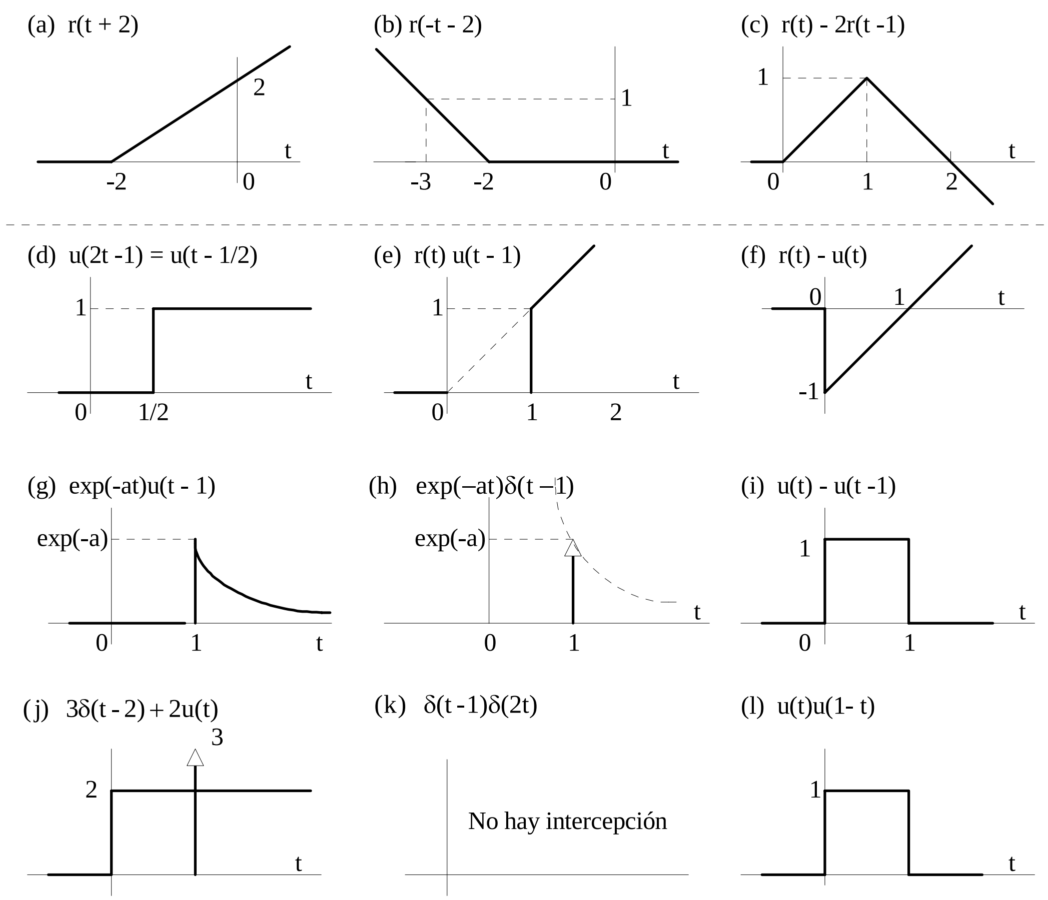
(b) De la Fig. 1.46 del Texto, $x_T(t) = 10\exp(-10^3|t|)$ en T. T = 2 x 10^{-3} seg.

$$< x_T^2(t) >= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 100\exp(-2x10^3 t)dt = 43{,}233W$$

(c) De la Fig. 1.47 delTexto, $x_T(t) = \Pi(\frac{t-T/4}{T/2}) - \Pi(\frac{t-3T/4}{T/2})$ en T; T = 2 ms

$$< x_T^2(t) >= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} dt = 1W$$

1.4. Grafique las siguientes señales:



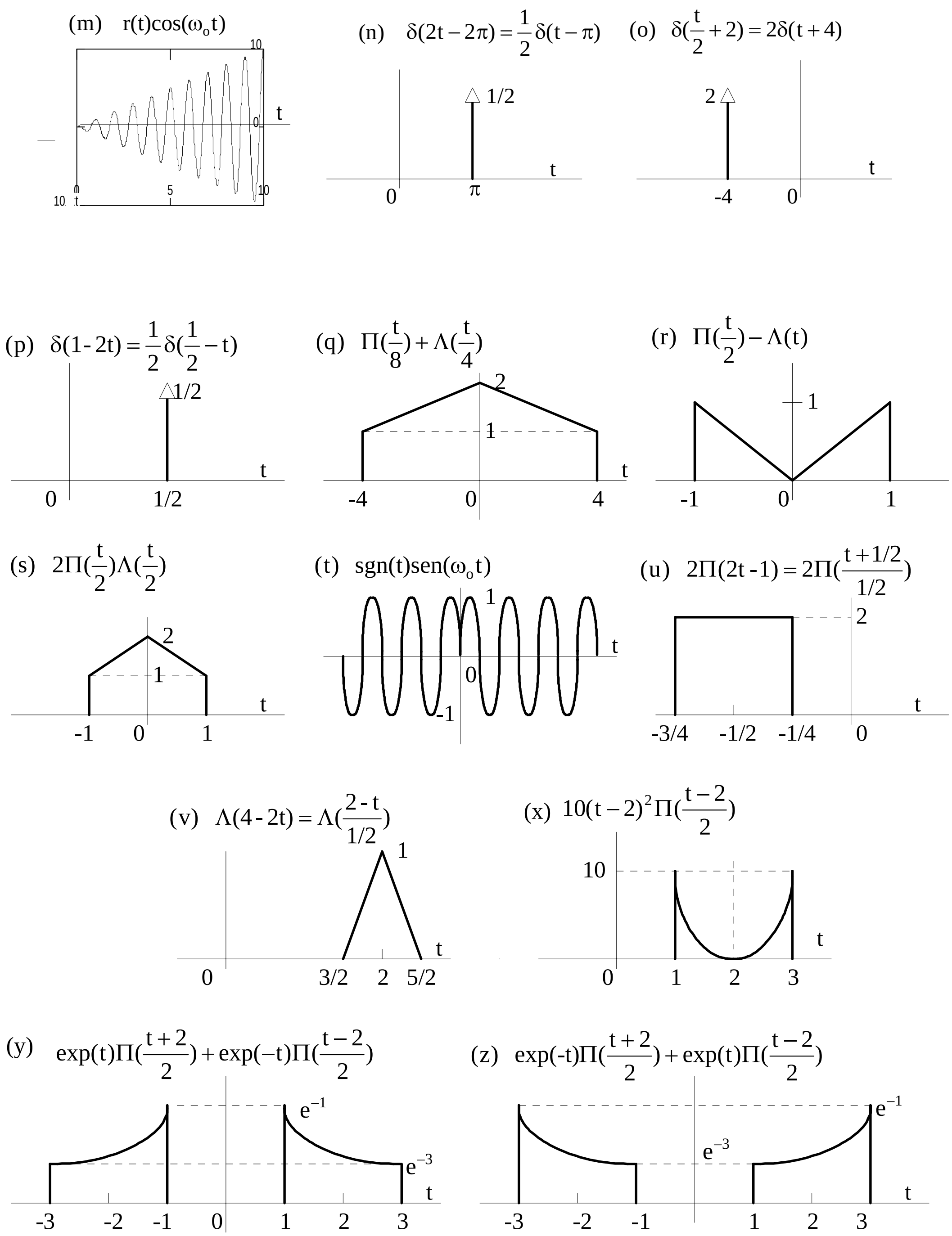

(m) $r(t)\cos(\omega_o t)$
(n) $\delta(2t-2\pi)=\frac{1}{2}\delta(t-\pi)$
(o) $\delta(\frac{t}{2}+2)=2\delta(t+4)$
(p) $\delta(1-2t)=\frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2}-t)$
(q) $\Pi(\frac{t}{8})+\Lambda(\frac{t}{4})$
(r) $\Pi(\frac{t}{2})-\Lambda(t)$
(s) $2\Pi(\frac{t}{2})\Lambda(\frac{t}{2})$
(t) $\mathrm{sgn}(t)\mathrm{sen}(\omega_o t)$
(u) $2\Pi(2t-1)=2\Pi(\frac{t+1/2}{1/2})$
(v) $\Lambda(4-2t)=\Lambda(\frac{2-t}{1/2})$
(x) $10(t-2)^2\Pi(\frac{t-2}{2})$
(y) $\exp(t)\Pi(\frac{t+2}{2})+\exp(-t)\Pi(\frac{t-2}{2})$
(z) $\exp(-t)\Pi(\frac{t+2}{2})+\exp(t)\Pi(\frac{t-2}{2})$

Fig. P1.4

1.5. Verifique las siguientes integrales

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(1-\pi t)\cos(\frac{1}{t})dt;\qquad \delta(1-\pi t)=\delta\left[\pi(\frac{1}{\pi}-t)\right]=\frac{1}{\pi}\delta(\frac{1}{\pi}-t)$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\frac{1}{\pi}-t)\cos(\frac{1}{t})dt=\frac{1}{\pi}\cos(\pi)=-\frac{1}{\pi}$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp[-\mathrm{sen}(t)]\cos(2t)\delta(2t-2\pi)dt;\qquad \delta(2t-2\pi)=\delta[2(t-\pi)]=\frac{1}{2}\delta(t-\pi)$

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\exp[-\mathrm{sen}(t)]\cos(2t)\delta(t-\pi)dt=\frac{1}{2}\pi^2$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+t^2+t+1)\delta(t-3)dt=27+9+3+1=40$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+3)\exp(-t)dt=\exp(3)=20{,}086$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\cos[\pi(t-3)]dt=\cos[\pi(2-3)]=\cos(-\pi)=-1$

(f) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+4)\delta(1-t)dt=(1+4)=5$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+3)\delta(3t-3=9)dt;\quad \delta(3t-9)=\delta[3(t-3)]=\frac{1}{3}\delta(t-3)$

$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+3)\delta(t-3)dt=\frac{1}{3}(27+3)=10$

(h) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2)\delta(\frac{t}{2}-1)dt;\quad \delta(\frac{t}{2}-1)=\delta[\frac{1}{2}(t-2)]=2\delta(t-2)$

$2\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2)\delta(t-2)dt=2(4+2)=12$

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot u(2-t)u(t)dt;\qquad u(2-t)u(t)=\Pi(\frac{t-1}{2})$

$\int_{0}^{2}t\cdot dt=2$

(j) $\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t)+u(t)-u(t-2)]dt;\qquad u(t)-u(t-2)=\Pi(\frac{t-1}{2})$

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt+\int_{0}^{2}dt=1+2=3$

(k) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)u(t-t_1)dt;$ para $t_o \geq t_1$, $\delta(t-t_o)u(t-t_1)=\delta(t-t_o)$
para $t_o < t_1$, $\delta(t-t_o)u(t-t_1)=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)u(t-t_1)dt=\begin{cases}1 & \text{para} \quad t_o \geq t_1\\ 0 & \text{para} \quad t_o < t_1\end{cases}$$

(l) $\int_{-\infty}^{t}u(\tau-1)d\tau;$ pero $u(\tau-1)=0$ para $\tau<1$

$$\int_{1}^{t}d\tau=(t-1) \quad \text{para} \quad t\geq 1= r(t-1)$$

1.6. Demuestre que el período de la señal periódica $x(t) = 10\cos^2(t)$ es igual a π.

Solución:

$$x(t)=10\cos^2(t)=5+5\cos(2t)=5+5\cos(2\pi\frac{1}{2\pi}2t)=5+5\cos(2\pi\frac{1}{\pi}t), \text{ de donde}$$

$$f_o=\frac{1}{\pi} \therefore T=\frac{1}{f_o}=\pi$$

1.7. Verifique si las siguientes señales son periódicas, en cuyo caso determine el período.

(a) $x(t)=\cos(6\pi t)+\cos(6\sqrt{2}\pi t)$

$$\left.\begin{array}{l}2\pi\cdot 3T=2\pi m\\ 2\pi\cdot 3\sqrt{2}T=2\pi n\end{array}\right\}\frac{m}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow \text{fracción irracional; la señal no es periódica}$$

(b) $x(t)=10\cos(60\pi t)+5\cos(25t)$

$$\left.\begin{array}{l}2\pi\cdot 30T=2\pi m\\ 2\pi\cdot \dfrac{12{,}5}{\pi}T=2\pi n\end{array}\right\}\frac{m}{n}=\frac{30\pi}{12{,}5}\rightarrow \text{fracción irracional; la señal no es periódica}$$

(c) $x(t)=\cos(60\pi t)+\cos(50\pi t)$

$$\left.\begin{array}{l}2\pi\cdot 30T=2\pi m\\ 2\pi\cdot 25T=2\pi n\end{array}\right\}\frac{m}{n}=\frac{30}{25}\rightarrow \text{fracción racional; la señal es periódica}$$

$$\text{Período } T=\frac{25}{25}=1$$

(d) $x(t)=\cos(\frac{t}{3})+\cos(\frac{t}{7})$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\frac{1}{6\pi}T &= 2\pi m \\ 2\pi\frac{1}{14\pi}T &= 2\pi n \end{aligned}\right\}\frac{m}{n}=\frac{7}{3}\rightarrow \text{fracción racional; la señal es periódica}$$

$$\text{Período } T=\frac{3}{\dfrac{1}{14\pi}}=42\pi$$

(e) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(t-5n)\rightarrow$ señal periódica rectangular amplitud unitaria, de período

Período $T = 5$ y $\tau = 1$.

(f) $x(t)=\cos(5\pi t)+\operatorname{sen}(6\pi t)$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\cdot 2{,}5T &= 2\pi m \\ 2\pi\cdot 3T &= 2\pi n \end{aligned}\right\}\frac{m}{n}=\frac{5}{6}\rightarrow \text{fracción racional; la señal es periódica}$$

Período $T = 5/2{,}5 = 2$

(h) $x(t)=\operatorname{sen}(2t)+\cos(\pi t)$

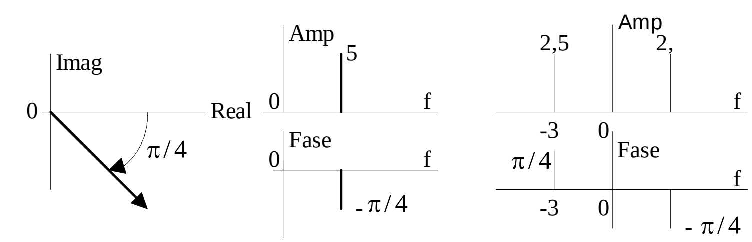
$$\left.\begin{aligned} 2\pi\frac{1}{\pi}T &= 2\pi m \\ 2\pi\frac{1}{2}T &= 2\pi n \end{aligned}\right\}\frac{m}{n}=\frac{2}{\pi}\rightarrow \text{fracción irracional; la señal no es periódica}$$

1.8. Dibujar los fasores y los espectros uni y bilaterales de las señales

(a)

$$x(t)=5\cos(6\pi t-\frac{\pi}{4})$$

$f_o = 3$ Hz



(a) Diagrama Fasorial (b) Espectro Unilateral (c) Espectro Bilateral

Fig. P1.8(a)

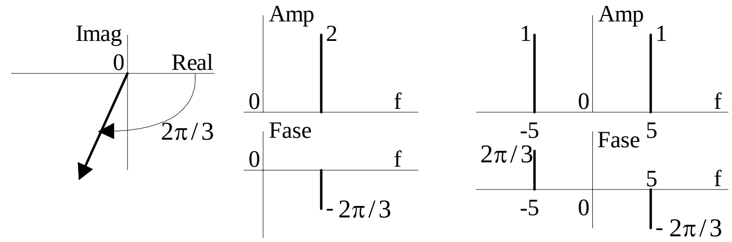
(b)

$$x(t) = 2\,\mathrm{sen}(10\pi t - \frac{\pi}{6}$$

$$= 2\cos[10\pi t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}]$$

$$x(t) = 2\cos(10\pi t - 2\pi/3)$$

$$f_o = 5\ \mathrm{Hz}$$



(a) Diagrama Fasorial (b) Espectro Unilateral (c) Espectro Bilateral

Fig. P1.8(b).

1.9. Demostrar las siguientes transformaciones trigonométricas (Sugerencia: usar fasores)

(a) $x(t) = A_1\cos(\omega_c t) + A_2\cos[(\omega_c + \omega_m)t] = E(t)\cos[\omega_c t + \Psi(t)]$ con $f_c \geq f_m$

donde $E(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_m t)}$ y $\Psi(t) = \mathrm{arctg}\dfrac{A_2\,\mathrm{sen}(\omega_m t)}{A_1 + A_2\cos(\omega_m t)}$

Solución:

$$x(t) = A_1\cos(\omega_c t) + A_2\cos[(\omega_c + \omega_m)t]$$

El diagrama fasorial generalizado de x(t) tiene la forma mostrada en la Fig. P1.9(a).

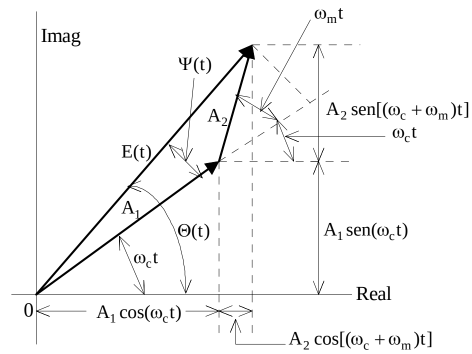


Fig. P1.9(a).

Del diagrama fasorial de la Fig. P1.9(a),

$$E^2(t) = [A_1\cos(\omega_c t) + A_2\cos[(\omega_c + \omega_m)t]^2$$
$$+ [A_1\,\mathrm{sen}(\omega_c t) + A_2\,\mathrm{sen}[(\omega_c + \omega_m)t]^2$$

Desarrollando y ordenando términos llegamos a la expresión

$E^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_m t)$, de donde

$$E(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_m t)}$$

Asimismo, vemos del diagrama que $\Theta(t) = \omega_c t + \Psi(t)$, donde

$\Psi(t) = \mathrm{arctg}\left[\dfrac{A_2\,\mathrm{sen}(\omega_m t)}{A_1 + A_2\cos(\omega_m t)}\right]$. Por la tanto, x(t) se puede expresar en la forma

$$x(t) = E(t)\cos[\Theta(t)] = E(t)\cos[\omega_c t + \Psi(t)]$$

Nótese que $\Psi(t)$ es el ángulo de desfase entre el fasor de x(t) y el fasor de $A_1\cos(\omega_c t)$.

(b) $x(t) = A_1\cos(\omega_c t) + A_2\,\mathrm{sen}[(\omega_c+\omega_m)t] = A_1\cos(\omega_c t) + A_2\cos[(\omega_c+\omega_m)t - \frac{\pi}{2}]$

El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la Fig. P1.9(b).

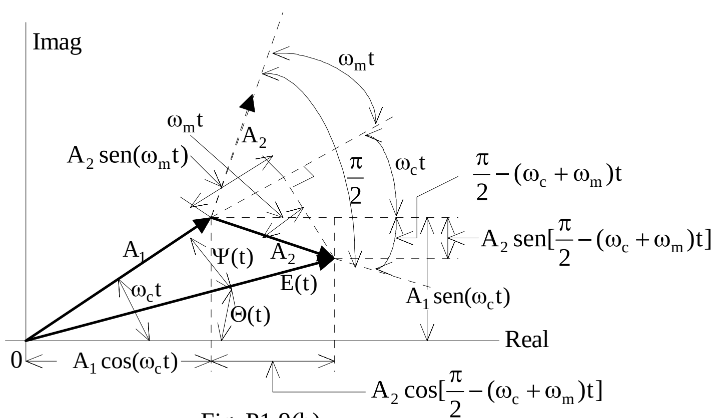


Fig. P1.9(b).

De la Fig. P1.9(b),

$$E^2(t) = \left[A_1\cos(\omega_c t) + A_2\cos[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right]^2 + \left[A_1\,\mathrm{sen}(\omega_c t) - A_2\,\mathrm{sen}[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right]^2$$

$$E^2(t) = \left[+A_1^2\cos^2(\omega_c t) + 2A_1A_2\cos(\omega_c t)\cos[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t] + A_2^2\cos^2[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right] +$$

$$+\left[A_1^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_c t) - 2A_1A_2\,\mathrm{sen}(\omega_c t)\,\mathrm{sen}[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t] + A_2^2\,\mathrm{sen}^2[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right]$$

$$E^2(t) = A_1^2\left[\cos^2(\omega_c t) + \mathrm{sen}^2(\omega_c t)\right] + A_2^2\left[\cos^2[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t] + \mathrm{sen}^2[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right] +$$

$$+2A_1A_2\left[\cos(\omega_c t)\cos[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t] - \mathrm{sen}[\frac{\pi}{2} - (\omega_c+\omega_m)t]\right]$$

El lector puede verificar fácilmente que el tercer término de la expresión anterior es igual a $2A_1A_2\,\mathrm{sen}(\omega_m t)$. Por lo tanto,

$E^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\mathrm{sen}(\omega_m t)$, de donde $E(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\mathrm{sen}(\omega_m t)}$

En cuanto al desfase, del diagrama vemos que $\omega_c t = \Psi(t) + \Theta(t)$, de donde

$\Theta(t) = \omega_c t - \Psi(t)$. También $\quad \Psi(t) = \text{arctg}\dfrac{A_2\cos(\omega_m t)}{A_1 + A_2\,\text{sen}(\omega_m t)}$

El signo menos puede incorporarse a $\Psi(t)$ o dejarse como está.

1.10. Exprese x(t) en la forma polar $x(t) = E(t)\cos[\omega_c t + \Psi(t)]$ y dibuje su diagrama fasorial.

(a) $x(t) = 6\,\text{sen}(50\pi t)\cos(10\pi t) + 10\cos(60\pi t)\cos(20\pi t)$; referencia $f_c = 20$

Solución:

$$x(t) = 6\,\text{sen}(50\pi t)\cos(10\pi t) + 10\cos(60\pi t)\cos(20\pi t)$$

$$x(t) = 3\cos(60\pi t) + 3\cos(40\pi t) + 5\cos(80\pi t) + 5\cos(40\pi t)$$

$$x(t) = 8\cos(40\pi t) + 3\cos(60\pi t) + 5\cos(80\pi t)$$

Sea $40\pi = \omega_c$; $20\pi = \omega_1$; $80\pi = \omega_c + 2\omega_1$. Entonces,

$$x(t) = 8\cos(\omega_c t) + 3\cos[(\omega_c + \omega_1)t] + 5\cos[(\omega_c + 2\omega_1)t].$$

El diagrama fasorial de x(t), referido a f_c, tiene la forma, Fig. P1.10(a) .

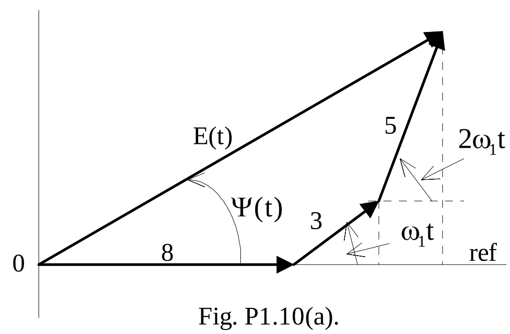


Fig. P1.10(a).

Del diagrama fasorial,

$$E^2(t) = \left[8 + 3\cos(\omega_1 t) + 5\cos(2\omega_1 t)\right]^2 + \\ + \left[3\,\text{sen}(\omega_1 t) + 5\,\text{sen}(2\omega_1 t)\right]^2$$

$$\Psi(t) = \text{arctg}\frac{3\,\text{sen}(\omega_1 t) + 5\,\text{sen}(2\omega_1 t)}{8 + 3\cos(\omega_1 t) + 5\cos(2\omega_1 t)}$$

(b)

$$x(t) = [A_c + A_m\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$$

con $A_c > A_m$ y $f_c >> f_m$

$$x(t) = A_c\cos(\omega_c t) + \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

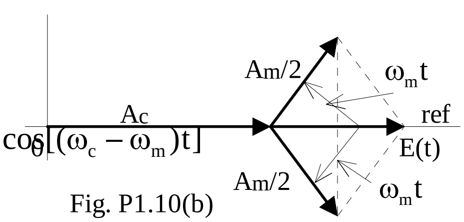


Fig. P1.10(b)

El diagrama fasorial de x(t) tiene la forma mostrada en la Fig. P1.10(b)

Del diagrama fasorial, Fig. P2.10(b),

$$E(t) = A_c + A_m\cos(\omega_m t) \quad \text{y} \quad \Psi(t) = 0$$

Nótese que este es el diagrama fasorial de una Señal Modulada AM, que veremos en el Capítulo VI.

(c) $x(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_m \operatorname{sen}(\omega_m t)\operatorname{sen}(\omega_c t)$ con $A_c > A_m$ y $f_c >> f_m$

$$x(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] - \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

El diagrama fasorial de x(t) tiene la forma, Fig. P1.10(c).

Del diagrama fasorial, Fig. P1.10(c),

$$E(t) = \sqrt{A_c^2 + [2\frac{A_m}{2}\operatorname{sen}(\omega_m t)]^2}$$

$$= \sqrt{A_c^2 + A_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega_m t)}$$

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg}\frac{A_m \operatorname{sen}(\omega_m t)}{A_c}$$

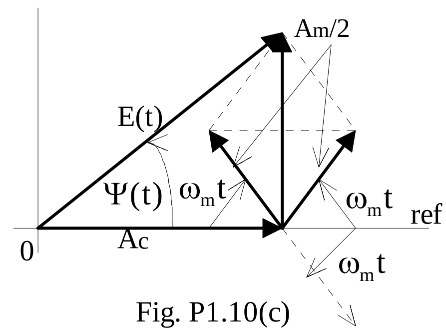


Fig. P1.10(c)

Nótese que este es el diagrama fasorial de una Señal Modulada FM en Banda Angosta, que veremos en el Capítulo VI.

(d) $x(t) = A_c \cos(\omega_c t) + n_c(t)\cos(\omega_c t) - n_s(t)\operatorname{sen}(\omega_c t)$. Esta señal representa a una portadora de frecuencia f_c afectada por ruido blanco pasabanda, concepto que utilizaremos en el estudio de la influencia del ruido en sistemas de comunicación.

$$x(t) = [A_c + n_c(t)]\cos(\omega_c t) - n_s(t)\cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2}),$$

cuyo diagrama fasorial es, Fig. P1.10(d).

Del diagrama fasorial, Fig. P1.10(d),

$$E(t) = \sqrt{[A_c + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$$

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg}\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)}$$

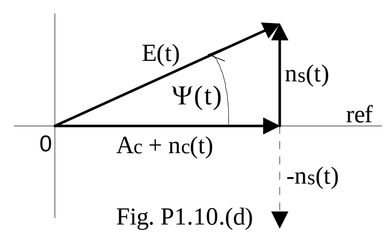


Fig. P1.10.(d)

1.11. Demuestre que si $x(t) = x(t+T)$, entonces,

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_0^T x(t)dt \quad y \quad \int_T^{T+t} x(t)dt = \int_0^t x(t)dt$$

Solución:

Sea el cambio de variables $t = \tau - T \therefore dt = d\tau$.

Si $x(t+T) = x(t)$, entonces $x(\tau - T + T) = x(\tau) = x(\tau - T)$ [A]

Consideremos ahora:

$\int_\alpha^\beta x(t)dt$; haciendo $t = \tau - T$ y usando [A],

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau - T)d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau)d\tau$$

Cambiando t por τ, $\int_\alpha^\beta x(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t)dt$ [B]

Se puede escribir también: $\int_{a-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{a-T/2}^{-T/2} x(t)dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} x(t)dt$

Aplicando [B] la primera integral del miembro derecho, obtenemos:

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{a+T/2}^{T/2} x(t)dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{-T/2}^{a+T/2} x(t)dt + \int_{a+T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Por consiguiente, $\int_{a-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$

Si $a = \frac{T}{2}$, $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_0^T x(t)dt$

Si $\alpha = 0$ y $\beta = t$, entonces, de [B]: $\int_0^t x(t)dt = \int_T^{t+T} x(t)dt$

1.12. En las señales periódicas siguientes, verifique que el coeficiente de Fourier X_n es el dado. Desarrolle también $x_T(t)$ en serie de Fourier con A = 8.

(a) De la Fig. 1.48 del Texto,

$$x_T(t) = \frac{4A}{T}(t + \frac{T}{4})\Pi(\frac{t + T/8}{T/4}) - \frac{4A}{T}(t - \frac{T}{4})\Pi(\frac{t - T/8}{T/4}) \quad \text{en } T$$

Señal simétrica, $\phi_n = 0$

$$X_n = \frac{8A}{T^2}\int_0^{T/4} -(t - \frac{T}{4})\cos(2\pi n f_o t)dt = \frac{16A}{4\pi^2 n^2}\left[\frac{1-\cos(n\frac{\pi}{2})}{2}\right]$$

$$= \frac{16A}{4\pi^2 n^2}\text{sen}^2(n\frac{\pi}{4}) = \frac{A}{4}\text{sinc}^2(\frac{n}{4}); \quad A = 8, \quad X_o = \frac{A}{4} = 2$$

$X_1 = 1{,}621$; $X_2 = 0{,}811$; $X_3 = 0{,}18$

$$x_T(t) = 2 + 3{,}242\cos(\omega_o t) + 1{,}621\cos(2\omega_o t) + 0{,}36\cos(3\omega_o t) + \cdots\cdots$$

(b) De la Fig. 1.49 del Texto, $x_T(t) = A\cos(2\pi f_o t)$ en T; $f_o = \dfrac{1}{T}$

Señal simétrica, $\phi_n = 0$.

$$X_n = \frac{2A}{T}\int_0^{T/4}\cos(2\pi f_o t)\cos(2\pi n f_o t)dt = -\frac{A}{\pi}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n^2-1}$$

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{-A(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)} & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases}$$

A = 8; $X_o = \dfrac{A}{\pi} = 2{,}546$; $X_2 = 0{,}849$; $X_4 = -0{,}17$; $X_6 = 0{,}073$

$$x_T(t) = 2{,}546 + 1{,}698\cos(2\omega_o t) - 0{,}34\cos(4\omega_o t) + 0{,}146\cos(6\omega_o t) - \cdots\cdots$$

(c) De la Fig. 1.50 del Texto, $x_T(t) = \dfrac{A}{T}t$ en T

$$X_n = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\exp(-j2\pi n f_o t)dt = j\frac{2A\pi n}{(2\pi n)^2} = j\frac{A}{2\pi n} \text{ para todo n y } n \neq 0;\ \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

$$X_o = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\cdot dt = \frac{A}{2} = \frac{8}{2} = 4;\quad |X_1| = 1{,}273;\quad |X_2| = 0{,}637;\quad |X_3| = 0{,}424$$

El desarrollo en serie de Fourier es una serie de senos de la forma

$$x_T(t) = 4 + 2{,}546\,\text{sen}(\omega_o t) + 1{,}273\,\text{sen}(2\omega_o t) + 0{,}849\,\text{sen}(3\omega_o t) + \cdots\cdots$$

(d) De la Fig. 1.51 del Texto, $x_T(t) = A\exp(-\dfrac{t}{T})$ en T

$$X_n = \frac{A}{T}\int_0^T \exp(-\frac{t}{T})\exp(-j2\pi n f_o t)dt = -A\frac{\exp(-j2\pi n - 1) - 1}{1 + j2\pi n}$$

$$X_n = -A\frac{\exp(-1) - 1}{1 + j2\pi n} = \frac{0{,}6321A}{1 + j2\pi n};\quad \phi_n = -\text{arctg}(2\pi n);\quad A = 8$$

$$|X_o| = 5{,}057;\quad |X_1| = 0{,}795;\quad |X_2| = 0{,}401;\quad |X_3| = 0{,}268$$

$$\phi_1 = -80{,}96^o;\quad \phi_2 = -85{,}45^o;\quad \phi_3 = -86{,}96^o$$

$$x_T(t) = 5{,}057 + 1{,}59\cos(\omega_o t - 80{,}96^o) + 0{,}802\cos(2\omega_o t - 85{,}45^o) +$$
$$+ 0{,}268\cos(3\omega_o t - 86{,}96^o) + \cdots\cdots$$

(e) De la Fig. 1.52 del Texto, $x_T(t) = \frac{A}{T^2}t^2$ en T

$$X_n = \frac{A}{T^3}\int_0^T t^2 \exp(-j2\pi n f_o t)dt = -\frac{A}{4}\frac{j2\pi n - 2\pi^2 n^2}{-j\pi^3 n^3}$$

$$X_n = \frac{A(1+j\pi n)}{2\pi^2 n^2}; \quad \phi_n = \text{arctg}(\pi n); \quad X_o = \frac{A}{T^3}\int_0^T t^2 dt = \frac{A}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}667$$

$$|X_1| = 1{,}336; \quad |X_2| = 0{,}645; \quad |X_3| = 0{,}427$$

$$\phi_1 = 72{,}343^o; \quad \phi_2 = 80{,}95^o; \quad \phi_3 = 83{,}943^o$$

$$x_T(t) = 2{,}667 + 2{,}672\cos(\omega_o t + 72{,}343^o) + 1{,}289\cos(2\omega_o t + 80{,}96^o) +$$
$$+ 0{,}854\cos(3\omega_o t + 83{,}94^o) + \cdots\cdots$$

(f) Sea la Fig. P1.12 (Fig. 1.53 del Texto)

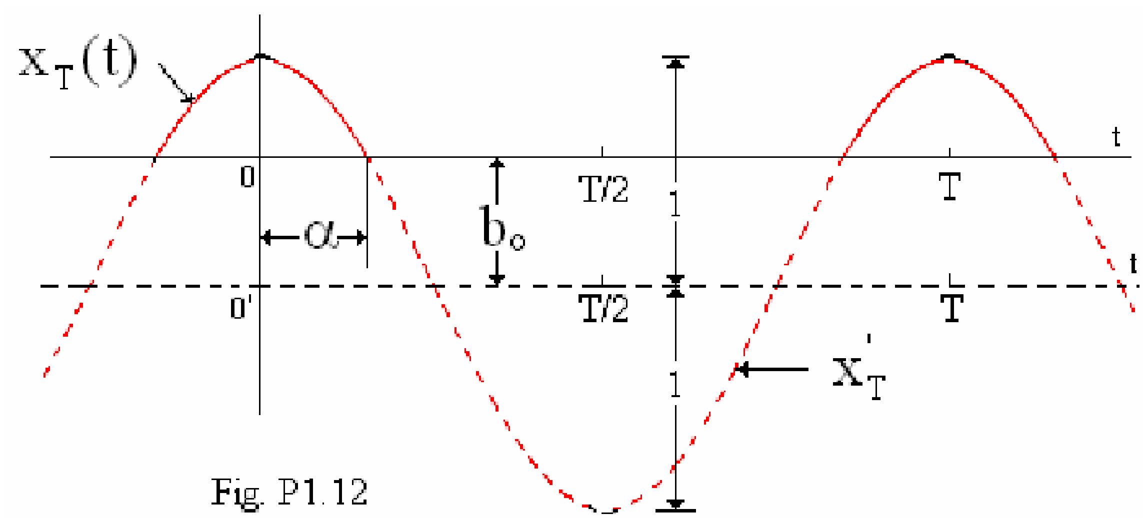


Fig. P1.12

$T = 2\pi$; En la Fig. 1.53 del Texto, hagamos $\beta = \frac{\alpha T}{\pi}$; $\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha T}{2\pi} = \alpha$

donde α es una medida del desplazamiento b_o de $x_T(t)$. α varía entre 0 y $\pi/2$ mientras que b_o varía entre 1 y cero; por lo tanto, $b_o = \cos(\alpha)$

En relación con el eje 0', $x_T' = \cos(\frac{2\pi t}{T}) = \cos(t)$

En relación con el eje 0, $x_T(t) = x_T'(t) - b_o$, pero $b_o = \cos(\alpha)$. Entonces,

$x_T(t) = \cos(t) - \cos(\alpha)$ en T. Señal simétrica

$$X_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\alpha}[\cos(t) - \cos(\alpha)]\cos(nt)dt$$

$$X_n = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(\alpha)\mathrm{sen}(n\alpha) - n\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(n\alpha)}{n(n+1)(n-1)}; \qquad \phi_n = 0$$

para todo n, excepto $n = \pm 1$ y $n = 0$

$$X_o = \frac{\mathrm{sen}(\alpha) - \alpha\cdot\cos(\alpha)}{\pi}; \quad X_1 = \frac{1}{2\pi}[\alpha - \frac{\mathrm{sen}(2\alpha)}{2}]$$

Para desarrollar $x_T(t)$ en Serie de Fourier, vamos a suponer que $\alpha = \pi/4$ y que la amplitud de $x'_T(t)$ es de 100 en vez de 1 (En la práctica estos valores son altos). Entonces,

$X_o = 4,8$; $X_1 = 4,5$; $X_2 = 3,8$; $X_3 = 2,7$; $X_4 = 1,5$; ...., de donde

$$x_T(t) = 4,8 + 9,1\cos(\omega_o t) + 7,5\cos(2\omega_o t) + 5,3\cos(3\omega_o t) + 3\cos(4\omega_o t) + \cdots\cdots$$

1.13. La señal (d) del Problema 1.12 se aplica a un filtro pasabajo de ganancia 2 y ancho de banda B = 2500 Hz. Si A = 10 y T = 1 ms, compruebe que

(a) La potencia de entrada al filtro es de 43,233 W

(b) La salida del filtro es

$$y(t) = 12,642 + 3,975\cos(2\pi x10^3 t - 80,96^o) + 2,006\cos(4\pi x10^3 t - 85,45^o)$$

(c) La potencia de salida del filtro es de 169,73 W

Solución:

Del Problema 1.12(d): $|X_n| = \frac{0,6321A}{\sqrt{1+4\pi^2 n^2}}$; A = 10; T = 10^{-3} s; $f_o = 10^3$; ganancia = 2

La separación entre componentes es de 1000 Hz. Como B = 2500 Hz, por el filtro pasarán solamente las componentes X_o, X_1 y X_2.

(a) Potencia de entrada. $x_T(t) = 10\exp(-\frac{t}{T})$ en T

$$< x_T^2(t) >= 10^3\int_0^{10^{-3}} 100\exp(-2\cdot 10^3 t)dt = 43,24\ \mathrm{W}$$

(b) Salida del filtro. De los resultados del Problema 1. 12, para A = 10 y f_o = 1000

$$y(t) = 12,642 + 3,974\cos(2000\pi t - 80,96^o) + 2,006\cos(4000\pi t - 85,45^o)$$

(d) Potencia de salida del filtro.

$$< y^2(t) = 4[X_o^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2]$$

$$< y^2(t) >= 4[(0{,}6{,}321)^2 + 2(0{,}994)^2 + 2(0{,}501)^2] = 169{,}73\text{ W}$$

1.14. La señal rectificada de media onda del Problema 1.12(b) se aplica a un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda B = 400 Hz. Si A = 100 y f_o = 60 Hz, demuestre que el Factor de Rizado a la salida del filtro es del 48,24%.

Solución:

Datos: B = 400 Hz; A = 100; Señal rectificada del Problema 1.12(b)

Del Problema 1.12(b), $$X_n = \begin{cases} \dfrac{-100(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)} & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases}$$

Puesto que el filtro deja pasar hasta 400 Hz y solamente existen componentes con n par, el filtro dejará pasar las componentes X_o, X_2, X_4 y X_6. De los datos del Problema 1.12(b),

$$\text{Factor de Rizado\%} = \sqrt{\frac{2\sum_{n=2}^{N}|X_n|^2}{X_o^2}}100 = \sqrt{\frac{2[(0{,}849)^2 + (-0{,}17)^2 + (0{,}073)^2]}{(2{,}546)^2}}100 = 48{,}24\%$$

1.15.(a) Dibuje el espectro de potencia $|X_n|^2$ vs nf_o de las tres señales del Problema 1.3. (Tome seis componentes a cada lado del origen).

(b) Si estas tres señales se aplican separadamente a un filtro pasabanda de ganancia unitaria, de ancho de banda B = 1400 Hz y centrado en f_c = 1500 Hz, determine las correspondientes potencias de salida del filtro.

Solución:

(a) 1. Señal Diente de Sierra: $x_T(t) = -\dfrac{A}{T}(t-T)$ en T; A = 10; $f_o = 1000$ Hz

$$X_n = \frac{-A}{T^2}\int_0^T (t-T)\exp(-j2\pi nf_o t)dt = -5\frac{j\pi n}{n^2\pi^2} = -\frac{j5}{\pi n};\quad |X_n| = \frac{5}{\pi n}$$

$X_o = -10^7\int_0^{10^{-3}}(t-10^{-3})dt = 5$; $|X_o|^2 = 25$; $|X_1|^2 = 6{,}416$; $|X_2|^2 = 0{,}401$; $|X_3|^2 = 0{,}079$;
$|X_4|^2 = 0{,}025$; $|X_5|^2 = 0{,}01$; $|X_6|^2 = 0{,}005$.

El espectro de potencia tiene la forma (frecuencias positivas solamente)

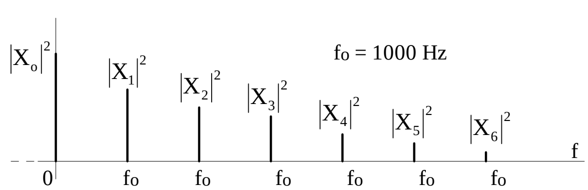


Fig. P1.15.

2. Señal Exponencial. $x_T(t) = 10\exp(-10^3|t|)$ en T; $T = 2$ ms; $f_o = 500$ Hz

$$X_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 10\exp(-10^3 t)\cos(2\pi n f_o t)dt = \frac{10[1-(-1)^n\exp(-1)]}{1+\pi^2 n^2}$$

$$X_o^2 = 39{,}958;\ |X_1|^2 = 1{,}584;\ |X_2|^2 = 0{,}024; |X_3|^2 = 0{,}023;\ \text{etc.}$$

El espectro tiene la misma forma que la de la Fig. P1.15, pero con las componentes a las frecuencias 0, 500 Hz, 1000 Hz, 1500 Hz, 2000 Hz, 2500 Hz, etc.

3. Señal Cuadrada. $x_T(t) = \Pi(\frac{t-T/4}{T/2}) - \Pi(\frac{t-3T/2}{T/2})$ en T; $f_o = 10^3$ Hz; $T = 10^{-3}$

$$X_n = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} \exp(-j2\pi n f_o t)dt - \int_{T/2}^{T}\exp(-j2\pi n f_o t)dt\right]$$

$$X_n = \frac{1}{2}\frac{[-2\exp(-jn\pi)+1+\exp(-j2\pi n)]}{jn\pi} = \frac{1}{2}\frac{-2(-1)^n+2}{jn\pi}$$

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{2}{jn\pi} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases} \qquad |X_n|^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\ \text{para n impar;}\quad X_o = 0$$

$$|X_1|^2 = 0{,}405;\ |X_3|^2 = 0{,}045;\ |X_5|^2 = 0{,}016;\ |X_7|^2 = 0{,}008;\ |X_9|^2 = 0{,}005;\ \text{etc.}$$

El espectro es similar al de la Fig. P1.15, pero con las componentes a las frecuencias 1 kHz, 3 kHz, 5 kHz, 7 kHz, 9 kHz, etc.

(b) Filtro Pasabanda, ganancia unitaria, B = 1400 Hz, f_c = 1500 Hz. La banda de paso del filtro se extiende desde 800 Hz hasta 2200 Hz

1. Señal Diente de Sierra.

f_o = 1000 Hz. Solamente pasan las componentes X_1 y X_2 de 1000 Hz y 2000 Hz, respectivamente.

Potencia de salida: $<y^2(t)> = 2[X_1^2 + X_2^2] = 2(6{,}416 + 0{,}401) = 13{,}634$ W

2. Señal Exponencial.

$f_o = 500$ Hz; n impar. Pasa solamente la componente X_3 de 1500 Hz.

Potencia de Salida: $<y^2(t)> = 2X_3^2 = 2x4{,}453 = 8{,}906$ W

3. Señal Cuadrada.

f_o = 1000 Hz; n impar. Pasa solamente la componente X_1 de 1000 Hz.

Potencia de salida: $<y^2(t)> = 2X_1^2 = 2x0{,}405 = 0{,}810$ W

1.16. Sea la señal periódica de la Fig. P1.16 (Fig. 1.54 del Texto). Aplique el concepto de Transformada de Fourier de Señales Periódicas.

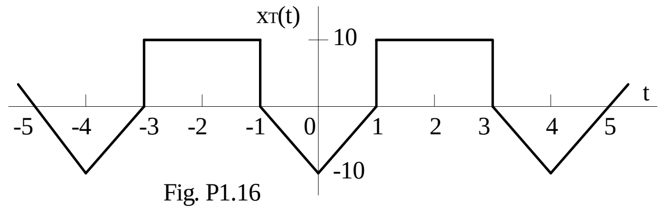


Fig. P1.16

Demuestre:

(a) Que el Coeficiente de Fourier X_n es

$$X_n = 5(-1)^n \sin c(\frac{n}{2}) - 2,5 \sin c^2(\frac{n}{4}); \quad \phi_n = 0; \quad X_o = 2,5$$

(b) Que si la señal se aplica a una resistencia de 1000 Ohm, la potencia disipada en la resistencia es de 266,67 mW.

Solución:

(a) De la Fig. P1.16, la señal generatriz $x_g(t)$ de $x(t)$ es:

$$x_g(t) = -10\Lambda(t) + 10\Pi(\frac{t-2}{2}),$$ cuya transformada de Fourier es

$$X_g(f) = -10 \sin c^2(f) + 20 \sin c(2f)\exp(-j4\pi f);$$ el período de $x(t)$ es T = 4.

$$X_n = \frac{1}{4}\left[-10 \sin c^2(\frac{n}{4}) + 20 \sin c(\frac{n}{2})\exp(-j\pi n)\right]$$

pero $\cos(n\pi)=(-1)^n$; $\quad \text{sen}(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$

Entonces, $\quad X_n = 5(-1)^n \sin c(\frac{n}{2}) - 2,5 \sin c^2(\frac{n}{4})$ para n impar. $X_o = 2,5$; $\phi_n = 0$

(b) La potencia disipada en una carga de R_L Ohm es $P_L = \dfrac{<x^2(t)>}{R_L}$

Hay que definir a x(t) en el intervalo T: $x(t) = \begin{cases} 10(t-1) & \text{para } 0 \le t<1 \\ 10 & \text{para } 1 \le t<2 \end{cases}$ en T/2

$$<x^2(t)> = 2\int_0^1 100(t-1)^2 dt + 2\int_1^2 100 dt = 266,67 \text{ W}$$

$$P_L = \frac{266,67}{1000} = 0,26667 \text{ W} = 266,67 \text{ mW}$$

1.17. Suponga que el circuito eléctrico de la Fig. P1.17 (Fig. 1.55 del Texto) tiene un voltaje aplicado v(t) de la forma

$$v(t) = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} |V_n| \cos(2\pi n f_o t + \theta_n)$$

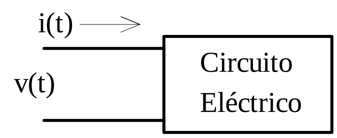


Fig. P1.17

La corriente correspondiente vendrá dada por

$$i(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \cos(2\pi n f_o t + \phi_n).$$

Si se define la potencia promedio de entrada al circuito en la forma $P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\cdot i(t)dt$, demuestre que la potencia de entrada se puede expresar en la forma $P = V_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|V_n|\cdot|I_n|}{2}\cos(\theta_n - \phi_n)$

Solución:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)i(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [V_o + \sum_{n=1}^{\infty}|V_n|\cos(2\pi n f_o t + \theta_n)]\,[I_o + \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\cos(2\pi n f_o t + \phi_n]dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{[V_o I_o + V_o\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\cos(2\pi n f_o t + \phi_n) + I_o\sum_{n=1}^{\infty}|V_n|\cos(2\pi n f_o t + \theta_n) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}|V_n|\cos(2\pi n f_o t + \theta_n)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\cos(2\pi n f_o t + \phi_n)]\}dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} V_o I_o dt + V_o\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi n f_o t + \phi_n)dt +$$
$$+ I_o\sum_{n=1}^{\infty}|V_n|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi n f_o t + \theta_n)dt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}|V_n|\cdot|I_n|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi n f_o t + \theta_n)\cdot\cos(2\pi n f_o t + \phi_n)\cdot dt$$

La primera integral es simplemente igual a $V_o I_o$; la segunda y tercera integrales son iguales a cero porque la integración se hace dentro de un período completo del coseno. La cuarta integral es igual a $\frac{1}{2}\cos(\theta_n - \phi_n)$. Por lo tanto,

$$P = V_o I_o + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|V_n||I_n|\cos(\theta_n - \phi_n)$$

1.18. El voltaje aplicado al circuito eléctrico de la Fig. 1.55 del Texto es

$$v(t) = V_o \cos(2\pi f_o t)$$

y la corriente i(t) tiene la forma $i(t) = I_o \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Pi(\frac{t-nT}{T/2}) - \Pi(\frac{t-nT-T/2}{T/2})\right]$.

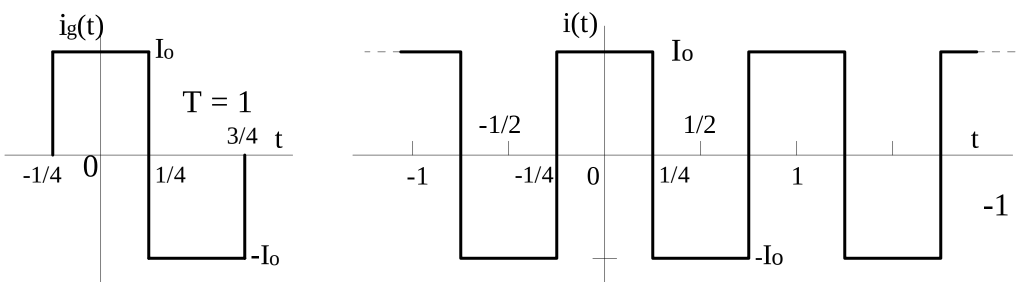
(a) Demuestre que la potencia instantánea p(t) = v(t) i(t), para T = 1, es

$p(t) = V_o I_o |\cos(2\pi t)|$ en T. Nótese que p(t) tiene la forma de una señal rectificada de onda completa.

(b) Demuestre que la potencia promedio es $< p^2(t) >= \frac{1}{2} V_o^2 I_o^2$.

Solución:

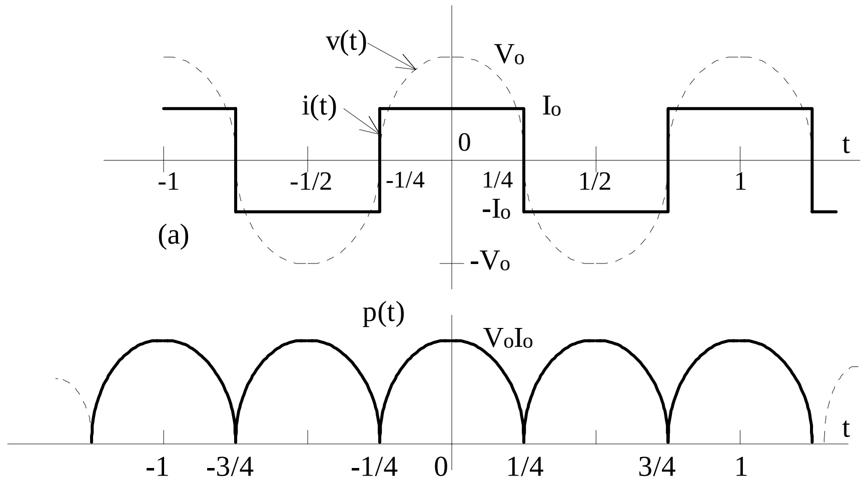
Veamos primero la forma de i(t). La señal i(t) es periódica y su función generatriz $i_g(t)$ se obtiene para n = 0. Entonces, para n = 0, $i_g(t) = I_o\left[\Pi(\frac{t}{T/2}) - \Pi(\frac{t-T/2}{T/2})\right]$. En la Fig. P1.18(a) se muestra $i_g(t)$ e i(t) para T = 1.



(a) Señal Generatriz (b) Corriente

Fig. P1.18(a)

En la Fig. P1.18(b) se muestra gráficamente la formación del producto v(t) por i(t) que es la potencia instantánea, y la forma final de p(t), siendo $p(t) = V_o I_o |\cos(2\pi t)|$ cuando T = 1. Nótese que p(t) tiene la forma de una señal rectificada de onda completa. Nótese también que el período de p(t) es T = ½.



(b) Potencia instantánea $p(t) = v(t)\, i(t)$

Fig. P1.18(b)

(b) El período de p(t) es T/2, entonces,

$$< p^2(t) >= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} V_o^2 I_o^2 \cos^2(2\pi t)dt = 4(V_o I_o)^2 \int_0^{1/4} \cos^2(2\pi t)dt$$

$$= \frac{V_o^2 I_o^2}{2}$$

1.19. La señal $v(t) = \sqrt{2}110\cos(2\pi f_o t)$, con f_o = 60 Hz, se aplica a un rectificador de media onda. El rectificador alimenta a una carga de 50 Ohm.

(a) Demuestre que el Coeficiente de Fourier de la corriente i(t) que circula por la carga es

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}110(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{50\pi(n^2-1)} & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases} \quad ; \quad I_o = 0{,}99 \text{ Amp}; \quad \phi_n = 0$$

(b) El desarrollo de i(t) en Serie de Fourier es

$$i(t) = 0{,}99 + 0{,}66\cos(240\pi t) - 0{,}132\cos(480\pi t) +$$
$$+ 0{,}057\cos(720\pi t) - 0{,}031\cos(960\pi t) + ...$$

Solución:

(a) $v(t) = \sqrt{2}110\cos(2\pi f_o t)$; $i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$; T= $\dfrac{1}{60}$; f_o = 60 Hz; R = 50 Ohm

La señal de salida rectificada tiene la forma de la Fig. P1.19.

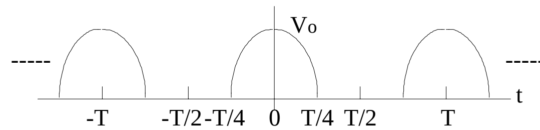


Fig. P1.19

La corriente será

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{\sqrt{2}110\cos(2\pi f_o t)}{50} \text{ en T}$$

El Coeficiente de Fourier de i(t) será

$$I_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} \frac{\sqrt{2}110}{50}\cos(120\pi t)\cos(120\pi nt)dt$$

$$I_n = \frac{120\sqrt{2}110}{50}\int_0^{1/240} \cos(120\pi t)\cos(120\pi nt)dt$$

$$I_n = -\frac{110\sqrt{2}}{50}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{\pi(n+1)(n-1)} = \frac{110\sqrt{2}}{50\pi}\frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{n^2-1} \quad \text{para n par}$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{110\sqrt{2}}{50\pi}\dfrac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{n^2-1} & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases} ; \quad I_o = 0{,}99 \text{ Amp}; \quad \phi_n = 0$$

El desarrollo de Fourier de i(t) es:

$$i(t) = 0{,}99 + 0{,}66\cos(240\pi t) - 0{,}132\cos(480\pi t) + + 0{,}057\cos(720\pi t) - 0{,}031\cos(960\pi t) + \ldots\ldots..$$

1.20.` Sea la Fig. P1.20 (Fig. 1.56 del Texto).

(a) Demuestre que el Coeficiente de Fourier de x(t) es

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{8A}{3\pi^2 n^2} & \text{para impar} \\ 0 & \text{para n par y } n \neq 0 \end{cases}$$

$$X_o = \frac{A}{3}; \quad \phi_n = 0$$

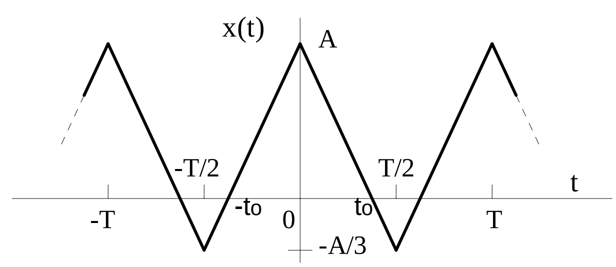


Fig. P1.20

(b) Demuestre que la potencia promedio de x(t), para A = 10, es $<x^2(t)> = 25,926$ W

(c) La señal x(t) se pasa por un filtro pasabajo, de ganancia unitaria y ancho de banda de 35 Hz. Si T= 0,1 y A = 10, demuestre que la potencia de salida del filtro es de 26,915 W.

Solución:

(a) La forma de la señal se presta para calcular los coeficientes de Fourier mediante la Transformada de Fourier. La señal generatriz se puede expresar en la forma

$x_g(t) = -\frac{A}{3}\Pi(\frac{t}{T}) + \frac{4A}{3}\Lambda(\frac{t}{T/2})$, cuya transformada de Fourier es

$$X_g(f) = -\frac{AT}{3}\operatorname{sinc}(Tf) + \frac{4AT}{6}\operatorname{sinc}^2(\frac{Tf}{2})$$

$$X_n = \frac{1}{T}\left[-\frac{AT}{3}\operatorname{sinc}(\frac{nT}{T}) + \frac{4AT}{6}\operatorname{sinc}^2(\frac{nT}{2T})\right] = -\frac{A}{3}\operatorname{sinc}(n) + \frac{4A}{6}\operatorname{sinc}^2(\frac{n}{2})$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{8A}{\pi^2 n^2} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par y } n \neq 0 \end{cases} \qquad \phi_n = 0$$

El lector puede demostrar fácilmente que $X_o = A/3$.

(b) Para calcular la potencia promedio de x(t) , hay que definir x(t) en forma analítica dentro del intervalo T. Primero hay que hallar el valor t_o mostrado en la Fig. P1.20. t_o es el punto por donde la señal cruza el eje t. Por triángulos semejantes,

$\frac{A}{t_o} = \frac{4A/3}{T/2}$; de donde $t_o = \frac{3T}{8}$. Por lo tanto, la señal x(t) será

$$x(t) = \begin{cases} \frac{8A}{3T}(t + t_o) & \text{para } -\frac{T}{2} \le t < 0 \\ -\frac{8A}{3T}(t - t_o) & \text{para } 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t_o = \frac{3T}{8}.$$

La potencia de entrada al filtro será, para A = 10 y T = 0,1,

$$<x^2(t)> = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left[-\frac{8A}{3T}(t - \frac{3T}{8})\right]^2 dt = 25,926 \text{ W}$$

(c) Ancho de Banda del filtro = 35 Hz; $f_o = 10$ Hz.

Como el filtro tiene un ancho de banda de 35 Hz y f_o = 10 Hz, él dejará pasar solamente las componentes X_o, X_1, X_2 y X_3 . Por lo tanto, su potencia de salida será, aplicando el Teorema de Parseval,

$$<y^2(t)> = X_o^2 + 2\left[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right] = 25{,}915 \ \text{W}$$

1.21. Sean las dos señales periódicas de la Fig. P1.21.

(a) Demuestre que sus correspondientes Coeficientes de Fourier son

$$X_n = j2A\frac{\text{sen}^2(\frac{n\pi}{4})}{n\pi}; \quad X_o = 0; \ \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

$$Y_n = \begin{cases} -j2A\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi(n^2-1)} & \text{para n impar } \neq \pm 1 \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$$

$$Y_o = 0; \quad Y_1 = j\frac{2A}{3\pi}; \qquad \theta_n = \frac{\pi}{2}$$

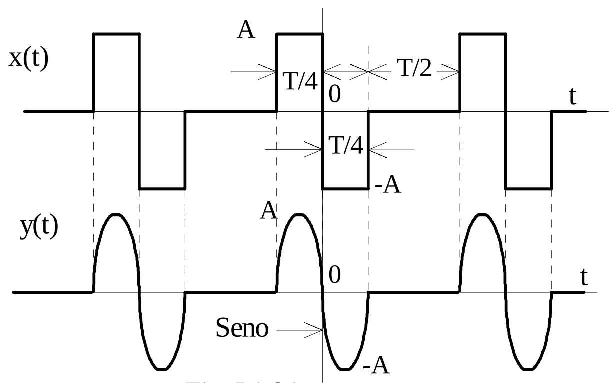


Fig. P1.21

(b) Demuestre que las potencias de x(t) y de y(t) están relacionadas mediante la expresión

$$<y^2(t)> = \frac{<x^2(t)>}{2} = \frac{A^2}{4}$$

Solución:

(a) Para x(t) utilicemos el método de la Transformada de una Señal Periódica.

La señal generatriz de x(t) es

$$x_g(t) = A\Pi(\frac{t+T/8}{T/4}) - A\Pi(\frac{t-T/8}{T/4})$$

$$X_g(f) = \frac{AT}{4}\text{sinc}(\frac{Tf}{4})\exp(j2\pi\frac{T}{8}f) - \frac{AT}{4}\text{sinc}(\frac{Tf}{4})\exp(-j2\pi\frac{T}{8}f)$$

$$X_g(f) = j\frac{AT}{2}\text{sinc}(\frac{Tf}{4})\text{sen}(\frac{\pi Tf}{4})$$

$$X_n = \frac{1}{T}\left[j\frac{AT}{2}\text{sinc}(\frac{Tn}{4T})\text{sen}(\frac{\pi nT}{4T})\right] = j\frac{A}{2}\text{sinc}(\frac{n}{4})\text{sen}(\frac{n\pi}{4})$$

$$X_n = j\frac{A}{2}\frac{\text{sen}(\frac{n\pi}{4})}{\frac{n\pi}{4}}\text{sen}(\frac{n\pi}{4}) = j\frac{2A}{n\pi}\text{sen}^2(\frac{n\pi}{4}); \quad X_o = 0; \;\; \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

Para la señal y(t) vamos a usar la integral. De la Fig. P1.21, definimos y(t):

$$y(t) = -A\text{sen}(\frac{4\pi t}{T}) \;\; \text{para} \;\; -\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{4}\text{; es una señal impar}$$

$$Y_n = -j\frac{2}{T}\int_0^{T/4} -A\text{sen}(\frac{4\pi t}{T})\text{sen}(\frac{2\pi nt}{T})dt\text{. Integrando,}$$

$$Y_n = -j2A\frac{\text{sen}(\frac{n\pi}{2})}{\pi(n^2-4)} = \begin{cases} -j\dfrac{2A(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi(n^2-4)} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}; \quad Y_o = 0; \;\; \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

(b) Cálculo de las potencias:

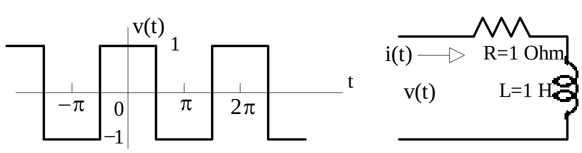
$$\text{Para x(t),} \qquad <x^2(t)> = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Para y(t),} \qquad <y^2(t)> = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} A^2\text{sen}^2(\frac{4\pi t}{T})dt = \frac{A^2}{4}\text{. Se verifica que}$$

$$<y^2(t)> = \frac{<x^2(t)>}{2} = \frac{A^2}{4}$$

1.22. El voltaje periódico de la Fig. P1. 22(a) se aplica al circuito RL serie mostrado en (b).

Demuestre que: (a) $I_n = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n(1+jn)\pi} & \text{para n impar} \\ 0 \;\; \text{para n par} \end{cases}$



(a) Fig. P1.22 (b)

(b) El desarrollo en serie de Fourier de la corriente i(t) es

$$i(t) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-45^o) - \frac{1}{3\sqrt{10}}\cos(3t-71{,}56^o) + \frac{1}{5\sqrt{26}}\cos(5t-78{,}69^o) \text{ -.........}\right]$$

Solución:

(a) De la Fig. 1.58 el Texto, $v(t) = \Pi(\frac{t}{\pi}) - \Pi(\frac{t-\pi}{\pi})$ en T.

Señal simétrica; $T = 2\pi$; $f_o = 1/2\pi$. Para el circuito serie RL: $Z(f) = R + j2\pi fL$

$$V_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos(nt)dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)dt\right] = \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$$

R = 1 ; L = 1 ; Para $f = nf_o$ y $f_o = 1/2\pi$, $Z_n = R + j2\pi n f_o L = 1 + jn$

Entonces,

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi(1+jn)} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases} \quad ; \qquad \phi_n = -\mathrm{arctg}(n)$$

(b) $|I_n| = \dfrac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi\sqrt{1+n^2}}$; $I_o = 0$; $I_1 = \dfrac{2}{\pi\sqrt{2}}$; $I_3 = \dfrac{-2}{3\pi\sqrt{10}}$; $I_5 = \dfrac{2}{5\pi\sqrt{26}}$; $I_7 = \dfrac{-2}{7\pi\sqrt{50}}$

$\phi_1 = -45^o$; $\phi_3 = -71{,}56^o$; $\phi_5 = -78{,}69^o$; $\phi_7 = -81{,}87^o$

$$i(t) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-45^o) - \frac{1}{3\sqrt{10}}\cos(3t-71{,}56^o) + \frac{1}{5\sqrt{26}}\cos(5t-78{,}69^o) - \cdots\cdots\right]$$

1.23. Verifique los siguientes pares de Transformadas de Fourier.

Sea $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

(a) $x(t-t_o)\exp(-j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f+f_c)\exp[-j2\pi t_o(f+f_c)]$

Apliquemos los Teoremas de la TF con la notación

$X(f) = TF\{x(t)\}$ y $x(t) = TF^{-1}\{X(f)\}$

Sea $y(t) = x(t-t_o)\exp(-j2\pi f_c t) \Leftrightarrow Y(f) = TF\{x(t-t_o)\exp(-j2\pi f_c t)\}$

$Y(f) = TF\{x(t-t_o)\}|_{f\to f+f_c} = [X(f)\exp(-j2\pi t_o f)]\,|_{f\to f+f_c}$; de donde

$Y(f) = X(f+f_c)\exp[-j2\pi t_o(f+f_c)]$

Para el signo positivo del exponencial el procedimiento es el mismo.

(b) $x(t) = A\exp(-a|t|) \Leftrightarrow X(f) = \dfrac{2aA}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$. Aplicando la integral de Fourier,

$$X(f) = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a|t|)\exp(-j2\pi ft)dt = 2A\int_{0}^{\infty} \exp(-at)\cos(2\pi ft)dt$$

$$X(f) = \frac{2aA}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

(c) $x(t) = A[1 - \exp(-at)]u(t) = Au(t) - A\exp(-at)u(t) = x_1(t) - x_2(t)$

Del Ejemplo 1.18 del Texto,

$$x_1(t) = Au(t) \Leftrightarrow X_1(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{j2\pi f}$$

Del Ejemplo 1.16 del Texto,

$x_2(t) = A\exp(-at)u(t) \Leftrightarrow X_2(f) = \dfrac{A}{a + j2\pi f}$. Entonces,

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{j2\pi f} - \frac{A}{a + j2\pi f} = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{aA + jA2\pi f - jA2\pi f}{j2\pi f(a + j2\pi f)}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{aA}{j2\pi f(a + j2\pi f)}$$

(d) $x(t) = At\exp(-at)u(t)$. Mediante la Integral de Fourier,

$$X(f) = A\int_{0}^{\infty} t\exp(-at)\exp(-j2\pi ft)dt = \frac{A}{(a + j2\pi f)^2}$$

(e) $x(t) = A\exp(-at)u(t)\cos(2\pi f_c t)$. Sea $x_1(t) = A\exp(-at)u(t)$. Del Ejemplo 1.16 del Texto,

$x_1(t) = A\exp(-at)u(t) \Leftrightarrow X_1(f) = \dfrac{A}{a + j2\pi f}$. Y del Teorema de la Modulación,

$x_1(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}[X_1(f + f_c) + X_1(f - f_c)] = X(f)$. De donde,

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\frac{1}{a + j2\pi(f + f_c)} + \frac{1}{a + j2\pi(f - f_c)}\right]$$

(f) $x(t) = A\exp(-a|t|)\cos(2\pi f_c t)$. Sea $x_1(t) = A\exp(-a|t|)$. Del Problema 1.17(b),

$$x_1(t) = A\exp(-a|t|) \Leftrightarrow X_1(f) = \frac{2aA}{a^2 + 4\pi^2 f^2},$$ y del Teorema de la Modulación,

$$X(f) = \frac{1}{2}[X_1(f + f_c) + X_1(f - f_c)] = \frac{aA}{a^2 + 4\pi^2(f + f_c)^2} + \frac{aA}{a^2 + 4\pi^2(f - f_c)^2}$$

(g) $x(t) = A\exp(-\frac{t^2}{2a^2})$; $x(t)$ es par. Mediante la Integral de Fourier,

$$X(f) = 2A\int_0^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2a^2})\cos(2\pi ft)dt = \frac{aA\sqrt{2\pi}}{[\exp(\pi^2 a^2 f^2)]^2} = A\sqrt{2\pi a^2}[\exp(-2\pi^2 a^2 f^2)]$$

1.24. Ventana de Ponderación de Hamming.

La "Ventana de Hamming", utilizada en el procesamiento de señales, está definida en la forma

$$x(t) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(\frac{\pi t}{T}) & \text{para } |t| \le T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} = \left[0{,}54 + 0{,}46\cos(\frac{\pi t}{T})\right]\Pi(\frac{t}{2T})$$

(a) Grafique x(t) para T = 1 seg.

(b) Demuestre que $X(f) = 1{,}08\text{sinc}(2Tf) + 0{,}46\text{sinc}(2Tf + 1) + 0{,}46\text{sinc}(2Tf - 1)$

(c) Grafique X(f) para T = 1 ms. Verifique que el primer cero de X(f) ocurre a f = 1 kHz.

Solución:

(a) En la Fig. P1.24(a) se grafica la Ventana de Hamming. Nótese que ella es una señal en coseno elevado.

(b) $x(t) = 0{,}54\Pi(\frac{t}{2T}) + 0{,}46\Pi(\frac{t}{2T})\cos(\frac{\pi t}{T})$

Sea $x_1(t) = \Pi(\frac{t}{2T}) \Leftrightarrow X_1(f) = 2T\text{sinc}(2Tf)$

$x_2(t) = \Pi(\frac{t}{2T})\cos(2\pi\frac{1}{2T}t) \Leftrightarrow X_2(f)$; y del Teorema de la Modulación

$$X_2(f) = \frac{1}{2}\left[2T\text{sinc}[2T(f + \frac{1}{2T})] + 2T\text{sinc}[2T(f - \frac{1}{2T})\right]$$

$$X(f) = 0{,}54TX_1(f) + 0{,}46X_2(f) = 1{,}08T\text{sinc}(2Tf) + 0{,}46T[\text{sinc}(2Tf + 1) + \text{sinc}(2Tf - 1)]$$

En la Fig. P1.24(b) se grafica el espectro de la Ventana de Hamming para $T = 10^{-3}$.

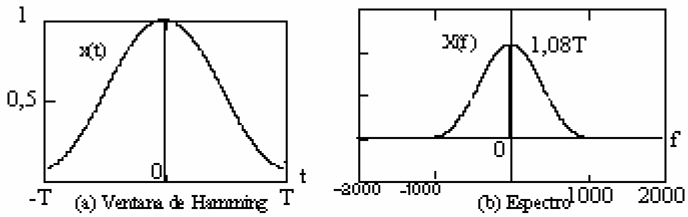


Fig. P1.24

Nótese, Fig. P1.24, que el espectro es prácticamente cero para frecuencias superiores a 1000 Hz, es decir, para frecuencias superiores a 1/T. Esta es una característica muy útil en el procesamiento de señales.

1.25. Sea la secuencia de impulsos de la Fig. P1.25.

(a) Demuestre que su transformada de Fourier X(f) es

$$X(f) = 10^{-3}\operatorname{sinc}\left(\frac{f}{10^3}\right)\begin{bmatrix} \exp(-j10^{-3}\pi f) + \exp(-j5x10^{-3}\pi f) + \\ +3\exp(-j7x10^{-3}\pi f) \end{bmatrix}$$

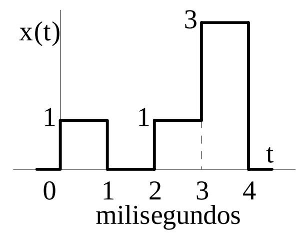


Fig. P1.25.

(b) Grafique |X(f)| y verifique que el primer cero de |X(f)| está a una frecuencia de 1000 Hz.

(c) Demuestre que la energía contenida dentro del primer cero de |X(f)| es el 90,3% de la energía total de la señal.

Solución:

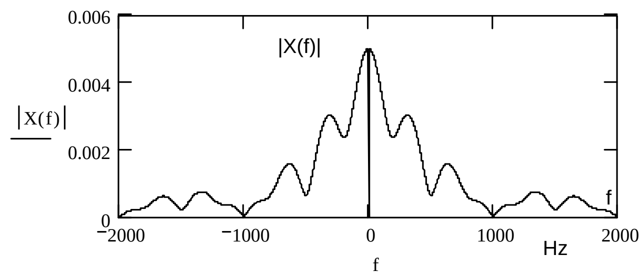
De la Fig. P1.25: $x(t) = \Pi\left(\frac{t-0,5x10^{-3}}{10^{-3}}\right) + \Pi\left(\frac{t-2,5x10^{-3}}{10^{-3}}\right) + 3\Pi\left(\frac{t-3,5x10^{-3}}{10^{-3}}\right)$

$$X(f) = 10^{-3}\operatorname{sinc}(10^{-3}f)\exp\left(-j2\pi\frac{10^{-3}}{2}f\right) + 10^{-3}\operatorname{sinc}(10^{-3}f)\exp(-j2\pi x2,5x10^{-3}f) +$$

$$+3x10^{-3}\operatorname{sinc}(10^{-3}f)\exp(-j2\pi x3,5x10^{-3}f)$$

$$X(f) = 10^{-3}\operatorname{sinc}\left(\frac{f}{10^3}\right)\left[\exp(-j10^{-3}\pi f) + \exp(-j5x10^{-3}\pi f) + 3\exp(-j7x10^{-3}\pi f)\right]$$

(b) Con ayuda de MATHCAD en la figura siguiente se grafica |X(f)|.



Nótese que el primer cero de |X(f))| está a 1000 Hz.

(c) La energía total de x(t) viene dada por la integral

$$\text{EnergíaTotal} = E = \int_0^{10^{-3}} dt + \int_{2x10^{-3}}^{3x10^{-3}} dt + \int_{3x10^{-3}}^{4x10^{-3}} 9dt = 11x10^{-3} \text{ joules}$$

La energía dentro del primer cero vendrá dada por

$$E_B = \int_{-1000}^{1000} |X(f)|^2\, df = 9{,}931x10^{-3} \quad \text{joules}$$

Por lo tanto, $\frac{E_B}{E} = \frac{9{,}931x10^{-3}}{11x10^{-3}} = 0{,}903$; de donde $E_B = 0{,}903\,E$

La energía dentro del primer cero es el 90,3% de la energía total de la señal.

1.26. La señal $x(t) = \exp(-t)u(t)$ se aplica al circuito RC de la Fig. 1.60 del Texto.

Demuestre que la transformada de Fourier de la salida es $Y(f) = \frac{j2\pi f}{(1+j2\pi f)^2}$

Solución:

$x(t) = \exp(-t)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$. Pero del circuito RC,

$$Y(f) = \frac{R}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} X(f) = \frac{j2\pi fRC}{1+j2\pi fRC} X(f), \quad \text{con } R = 1 \text{ y } C = 1,$$

$Y(f) = \frac{j2\pi f}{1+j2\pi f} X(f)$; pero como $X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$, entonces

$$Y(f) = \frac{j2\pi f}{(1+j2\pi f)^2}$$

1.27. La misma entrada del Problema anterior se aplica al circuito RL de la Fig. 1.61 del Texto. Demuestre que $Y(f) = \dfrac{1}{(1+j2\pi f)^2}$

Solución:

Del circuito de la Fig. 1.61 del Texto, $Y(f) = \dfrac{R}{R + j2\pi fL}X(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f}X(f)$

Como $X(f) = \dfrac{1}{1+j2\pi f}$, entonces $Y(f) = \dfrac{1}{(1+j2\pi f)^2}$

1.28. Demuestre que las transformadas de Fourier X(f) de las señales x(t) siguientes son las dadas.

(a) De la Fig. 1.62 del Texto, $x(t) = A\cos(t)\Pi(\frac{t}{\pi}) = A\cos(2\pi\frac{1}{2\pi}t)\Pi(\frac{t}{\pi}) \Leftrightarrow X(f)$

$\Pi(\frac{t}{\pi}) \Leftrightarrow \pi \mathrm{sinc}(\pi f)$, $f_c = 1/2\pi$; y por el Teorema de la Modulación,

$$X(f) = \frac{A\pi}{2}\left[\mathrm{sinc}[\pi(f+\frac{1}{2\pi})] + \mathrm{sinc}[\pi(f-\frac{1}{2\pi})]\right]$$

$$X(f) = \frac{A\pi}{2}\left[\mathrm{sinc}(\pi f+\frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(\pi f-\frac{1}{2})\right]$$

(b) De la Fig. 1.63 del Texto, $x(t) = \frac{A}{2}t\cdot\Pi(\frac{t}{4})$; señal impar

$$X(f) = -j2\int_0^2 \frac{A}{2}t\,\mathrm{sen}(2\pi ft)dt = \frac{jA}{4}\left[\frac{4\cos(4\pi f)}{\pi f} - \frac{\mathrm{sen}(4\pi f)}{\pi^2 f^2}\right]$$

$$X(f) = jA\left[\frac{\cos(4\pi f)}{\pi f} - \frac{\mathrm{sen}(4\pi f)}{\pi^2 f^2}\right]$$

(c) Parábolas; $x(t) = x_1(t) + x_1(t-2)$, donde $x_1(t) = At^2\Pi(t-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow X_1(f)$

$$x_2(t) = x_1(t-2) \Leftrightarrow X_2(f) = X_1(f)\exp(-j2\pi 2f) = X_1(f)\exp(-j4\pi f)$$

$$X_1(f) = A\int_0^1 t^2\exp(-j2\pi ft)dt$$

$$X_1(f) = \frac{A}{4}\,\frac{j2\pi f\exp(-j2\pi f) + \exp(-j2\pi f) - 2\pi^2 f^2\exp(-j2\pi f) - 1}{j\pi^3 f^3}$$

$$X_1(f)=\frac{A}{4}\left[\frac{\exp(-j2\pi f)[(1+j\pi f)^2-\pi^2 f^3]-1}{j\pi^3 f^3}\right]$$

$$X(f)=X_1(f)[1+\exp(-j4\pi f)]=X_1(f)\exp(-j2\pi f)[\exp(j2\pi f)+\exp(-j2\pi f)]$$

$X(f)=2\cos(2\pi f)\exp(-j2\pi f)X_1(f)$. Reemplazando X_1 (f),

$$X(f)=\frac{A}{j2\pi^3 f^3}\cos(2\pi f)\exp(-j2\pi f)\left[\exp(-j2\pi f)[(1+j\pi f)^2-\pi^2 f^2]-1\right]$$

$$X(f)=\frac{A}{j2\pi^3 f^3}\cos(2\pi f)\exp(-j4\pi f)\left[(1+j\pi f)^2-\pi^2 f^2-\exp(j2\pi f)\right]$$

(c) Trapecio, $x(t)=2A\Lambda(\frac{t}{T/2})-A\Lambda(\frac{t}{T/4})$

$$X(f)=2A\frac{T}{2}\text{sinc}^2(\frac{T}{2}f)-A\frac{T}{4}\text{sinc}^2(\frac{T}{4}f)=\frac{AT}{4}[4\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T})-\text{sinc}^2(\frac{f}{4/T})]$$

(d) De la Fig. 1.66 del Texto, $x(t)=x_1(t)+x_1(t+4t_o)+x_1(t-4t_o)$

$$x_1(t)=A\cos(20t)=A\cos(2\pi\frac{10}{\pi}t);\quad 2\pi\frac{10}{\pi}t_o=\frac{\pi}{2}\therefore t_o=\frac{\pi}{40};\ 4t_o=\frac{\pi}{10}$$

$$x_2(t)=x_1(t+\frac{\pi}{10})\Leftrightarrow X_2(f)=X_1(f)\exp(j2\pi\frac{\pi}{10}f)=X_1(f)\exp(j\frac{\pi^2}{5}f)$$

$$x_3(t)=x_1(t-\frac{\pi}{10})\Leftrightarrow X_3(f)=X_1(f)\exp(-j\frac{\pi^2}{5}f)$$

$$X_1(f)=2\int_0^{\pi/40}A\cos(20t)\cos(-j2\pi ft)dt=\frac{10A\cos(\frac{\pi^2 f}{20})}{100-\pi^2 f^2}\text{, de donde}$$

$$X(f)=\frac{10A\cos(\frac{\pi^2 f}{20})}{100-\pi^2 f^2}\left[1+2\cos(\frac{\pi^2 f}{5})\right]$$

1.29. Sea $x(t)=10\exp(-|t|)$. Calcule el ancho de banda B dentro del cual está contenido el 80% de la energía de la señal. [Respuesta: B = 0,15056Hz].

Solución:

$$x(t)=10\exp(-|t|)\Leftrightarrow X(f)=\frac{20}{1+4\pi^2 f^2};\ \text{Energía Total } E_t=2\int_0^{\infty}100\exp(-2t)dt=100\ \text{joules}$$

Si en el ancho de banda B está contenido el 80% de la energía, entonces,

$2\int_0^B \frac{400}{(1+4\pi^2 f^2)^2} df = 80$ joules. Resolviendo la integral,

$200\frac{2\pi B + \mathrm{arctg}(2\pi B) + 4\pi^2 B^2 \mathrm{arctg}(2\pi B)}{\pi(1+4\pi^2 B^2)} = 80$, expresión que se reduce a la ecuación

$(1+4\pi^2 B^2)[\mathrm{arctg}(2\pi B) - \frac{2\pi}{5}] + 2\pi B = 0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos

B = 0,15056 Hz.

1.30. La señal $x(t) = t\exp(-Kt)u(t)$ se pasa por un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda B. Calcule el ancho de banda B del filtro a fin de que la energía de salida del filtro sea el 80% de la energía a la entrada. Expresar B en función de K.

Solución:

Del Problema 1.1(c) con K = 1/τ y A = 1,

Energía Total de entrada $E_t = \int_0^\infty t^2 \exp(-2Kt)dt = \frac{1}{4K^3}$. También, del Problema 1.23(d),

$x(t) = t\exp(-Kt)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{(K + j2\pi f)^2}$; $|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{(K^2 - 4\pi^2 f^2)^2 + 16K^2\pi^2 f^2}}$

Para la salida: $E_s = 2\int_0^B \frac{df}{(K^2 - 4\pi^2 f^2)^2 + 16K^2\pi^2 f^2} = \frac{0,8}{4K^3}$

Resolviendo la integral,

$$\frac{1}{2}\frac{2K\pi B + K^2 \mathrm{arctg}(2\pi\frac{B}{K}) + 4\pi^2 B^2 \mathrm{arctg}(2\pi\frac{B}{K})}{K^3\pi(K^2 + 4\pi^2 B^2} = \frac{0,2}{K^3}$$

Esta expresión se puede reducir a la ecuación siguiente:

$[1 + 4\pi^2(\frac{B}{K})^2][\mathrm{arctg}(2\pi\frac{B}{K}) - 0,4\pi] + 2\pi\frac{B}{K} = 0$

Resolviendo esta ecuación para B/K, obtenemos:

$\frac{B}{K} = 0,15056$ o también $B = 0,15056K$

1.31. Sea $x(t) = \mathrm{sinc}^2(10t)$. Demuestre que

(a) su espectro de energía es $G_x(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}\left[1 - \dfrac{|f|}{5} + \dfrac{f^2}{100}\right] & \text{para } |f| \le 10 \\ 0 & \text{para } 10 \le |f| \end{cases}$

(b) Su energía total es $E_x = 1/15$ joules

Solución:

(a) $x(t) = \mathrm{sinc}^2(10t) \Leftrightarrow X(f) = \dfrac{1}{10}\Lambda(\dfrac{f}{10}) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}(f+10) & \text{para } -10 \le f < 0 \\ -\dfrac{1}{100}(f-10) & \text{para } 0 \le f \le 10 \end{cases}$

Espectro de energía $G_x(f) = |X(f)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{100}(1 + \dfrac{f}{5} + \dfrac{f^2}{100}) & \text{para } -10 \le f < 0 \\ \dfrac{1}{100}(1 - \dfrac{f}{5} + \dfrac{f^2}{100}) & \text{para } 0 \le f \le 10 \end{cases}$

En forma compacta, $G_x(f) = \dfrac{1}{100}(1 - \dfrac{|f|}{5} + \dfrac{f^2}{100})$ para $|f| \le 10$

(b) Energía total $E_t = 2\int_0^{10} \dfrac{1}{10^4}(f^2 - 20f + 100)df = 0{,}067 = \dfrac{1}{15}$ joules.

1.32. En las figuras siguientes verifique la correspondencia $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, es decir, dada x(t) determine X(f), y viceversa.

Solución:

(a) Fig. 1.67 del Texto. $\phi(f) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{para } f < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{para } f \ge 0 \end{cases}$

$$X(f) = A\Pi(\frac{f + f_o/2}{f_o})\exp(j\frac{\pi}{2}) + A\Pi(\frac{f - f_o/2}{f_o})\exp(-j\frac{\pi}{2})$$

$X(f) = jA[\Pi(\dfrac{f + f_o/2}{f_o}) - \Pi(\dfrac{f - f_o/2}{f_o})]$. De donde,

$$x(t) = jAf_o \mathrm{sinc}(f_o t)\exp(-j2\pi\frac{f_o}{2}t) - jAf_o \mathrm{sinc}(f_o t)\exp(j2\pi\frac{f_o}{2}t)$$

$$x(t) = 2Af_o \text{sinc}(f_o t)\text{sen}(\pi f_o t) = \frac{2A}{\pi t}\text{sen}^2(\pi f_o t)$$

Vamos ahora hacia atrás. Dada x(t) determinar X(f).

$x(t) = \frac{2A}{\pi t}\text{sen}^2(\pi f_o t)$; esta es una señal impar. Por integración directa,

$$X(f) = -2j\int_0^{\infty}\frac{2A}{\pi t}\text{sen}^2(\pi f_o t)\text{sen}(2\pi ft)dt = \frac{-jA}{2}\left[2\text{sgn}(f) - \text{sgn}(f+f_o) + \text{sgn}(-f+f_o)\right]$$

El lector puede verificar que esta expresión es igual a

$$X(f) = \frac{-Aj}{2}\left[-2\Pi(\frac{f+f_o/2}{f_o}) + 2\Pi(\frac{f-f_o/2}{f_o})\right] = A\left[j\Pi(\frac{f+f_o/2}{f_o}) - j\Pi(\frac{f-f_o/2}{f_o})\right]$$

$$X(f) = A\Pi(\frac{f+f_o/2}{f_o})\exp(j\frac{\pi}{2}) + A\Pi(\frac{f-f_o/2}{f_o})\exp(-j\frac{\pi}{2})$$

que es la expresión que representa a la Fig. 1.67 del Texto, parte anterior.

(b) De la Fig. 1.68 del Texto,

$$\phi(f) = -\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_o} = -2\pi\frac{1}{4f_o} \therefore t_o = \frac{1}{4f_o};\quad X(f) = A\left[\Lambda(\frac{f+f_o}{2B}) + \Lambda(\frac{f-f_o}{2B})\right]\exp(-j2\pi\frac{1}{4f_o}f)$$

$$x(t) = ATF^{-1}\left\{\Lambda(\frac{f+f_o}{2B}) + \Lambda(\frac{f-f_o}{2B})\right\}\Big|_{t\to t-\frac{1}{4f_o}}$$

$$x(t) = \left[2AB\text{sinc}^2(2Bt)\exp(-j2\pi f_o t) + 2AB\text{sinc}^2(2Bt)\exp(j2\pi f_o t)\right]\Big|_{t\to t-\frac{1}{4f_o}}$$

$$x(t) = 2AB\text{sinc}^2[2B(t-\frac{1}{4f_o})][\exp[-j2\pi f_o(t-\frac{1}{4f_o})] + \exp[j2\pi f_o(t-\frac{1}{4f_o})]$$

$$x(t) = 4AB\text{sinc}^2[2B(t-\frac{1}{4f_o})]\cos[2\pi f_o(t-\frac{1}{4f_o})]$$

Vamos ahora hacia atrás. Dada x(t) determinar X(f).

$$x(t) = 4AB\text{sinc}^2[2B(t-\frac{1}{4f_o})]\cos[2\pi f_o(t-\frac{1}{4f_o})]$$

$$X(f) = 4AB\,TF\left\{\text{sinc}^2(2Bt)\cos(2\pi f_o t)\right\}\exp(-j2\pi\frac{1}{4f_o}f)$$

y del Teorema de la Modulación

$$TF\{\cdots\} = \frac{1}{2}\left[TF\{sinc^2(2Bt)\}|_{f\to f+f_o} + TF\{sinc^2(2Bt)\}|_{f\to f-f_o}\right]$$

$$TF\{\cdots\} = \frac{1}{4B}\left[\Lambda(\frac{f+f_o}{2B}) + \Lambda(\frac{f-f_o}{2B})\right],\ \text{de donde}$$

$X(f) = A\left[\Lambda(\frac{f+f_o}{2B}) + \Lambda(\frac{f-f_o}{2B})\right]\exp(-j2\pi\frac{1}{4f_o}f)$ que es la misma expresión de la parte anterior.

(c) De la Fig. 1.69 del Texto, $\phi(f) = -\frac{4\pi}{1}f = -2\pi 2f$; $t_o = 2$

$$X(f) = \left[\Pi(\frac{f}{2}) - \Lambda(f)\right]\exp(-j4\pi f)$$

$$x(t) = 2sinc(2t)|_{t\to t-2} - sinc^2(t)|_{t\to t-2} = 2sinc[2(t-2)] - sinc^2(t-2)$$

$$x(t) = \frac{sen[2\pi(t-2)]}{\pi(t-2)} - \frac{sen^2[\pi(t-2)]}{[\pi(t-2)]^2}$$

Ahora vamos hacia atrás. Dada x(t) determinar X(f).

$$x(t) = \frac{sen[2\pi(t-2)]}{\pi(t-2)} - \frac{sen^2[\pi(t-2)]}{[\pi(t-2)]^2} = 2sinc[2(t-2)] - sinc^2(t-2)$$

$$X(f) = TF\{2sinc(2t)\}\exp(-j2\pi 2f) - TF\{sinc^2(t)\}\exp(-j2\pi 2f)$$

$X(f) = \left[\Pi(\frac{f}{2}) - \Lambda(f)\right]\exp(-j4\pi f)$ que es la misma expresión anterior.

1.33. Sea el sistema de la Fig. 1.70 del Texto. El filtro pasabajo tiene ganancia unitaria y un ancho de banda de 50 Hz.

$$x_1(t) = \exp(-0{,}01t)\cos(2\pi\cdot 10^6 t)u(t);\quad x_2(t) = 10\cos(2\pi\cdot 10^6 t)$$

Demuestre que $y(t) \approx 5\exp(-0{,}01t)u(t)$

Solución:

A la salida del multiplicador, $x_3(t) = 10\exp(-0{,}01t)\cos^2(2\pi\cdot 10^6 t)\,u(t)$

$$x_3(t) = 10\exp(-0{,}01t)\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi 2\cdot 10^6 t)]u(t)$$

$$x_3(t) = 5\exp(-0{,}01t)u(t) + 5\exp(-0{,}01t)\cos(2\pi 2\cdot 10^6 t)u(t)$$

El segundo término de $x_3(t)$ tiene un espectro centrado en 2 MHz, muy por encima de 50 Hz que es el ancho de banda del filtro. El espectro de salida del filtro es entonces,

$$Y(f) \approx TF\{5\exp(-0{,}01t)u(t)\} = \frac{X_1(f)}{2};\ \text{ o también } \quad y(t) = 5\exp(-0{,}01t)u(t)$$

Nótese que $|Y(f)| = \dfrac{|X_1(f)|}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{(0{,}01)^2 + 4\pi^2 f^2}}$; $|Y(0)| = 500$ y $|Y(50)| = 0{,}016$. Esto quiere decir que casi el 100% de $|X_1|/2$ pasa a la salida.

1.34. Mediante la transformada de Fourier de la señal generatriz, demuestre que los coeficientes de Fourier X_n de las siguientes señales periódicas son las correspondientes dadas.

(a) De la Fig. 1.71 del Texto, la señal generatriz es

$$x_g(t) = A\Pi(\frac{t}{T}) + A\Lambda(\frac{t}{T/2}) \Leftrightarrow X_g(f) = AT\text{sinc}(Tf) + \frac{AT}{2}\text{sinc}^2(\frac{T}{2}f)$$

$$X_n = \frac{1}{T}X_g(\frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\left[AT\text{sinc}(T\frac{n}{T}) + \frac{AT}{2}\text{sinc}^2(\frac{T}{2}\frac{n}{T})\right]$$

$$X_n = A[\text{sinc}(n) + \frac{1}{2}\text{sinc}^2(\frac{n}{2})] = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi^2 n^2} & \text{para n impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para n par} \end{cases} \quad ; \quad \phi_n = 0$$

También, $\quad X_o = \dfrac{1}{T}[AT + \dfrac{1}{2}AT] = \dfrac{3}{2}A$

(b) De la Fig. 1.72 del Texto, la señal generatriz es

$$x_g(t) = A\exp(-\frac{|t|}{2T})\Pi(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow X_g(f) = 2\int_0^{T/2} A\exp(-\frac{t}{2T})\cos(2\pi ft)dt$$

$$X_g(f) = 4AT\frac{-\exp(-\frac{1}{4})\cos(\pi fT) + 4\pi fT\exp(-\frac{1}{4})\text{sen}(\pi fT) + 1}{1 + 16\pi^2 n^2 T^2 f^2}$$

$$X_n = \frac{1}{T}X_g(\frac{n}{T}) = 4A\frac{-\exp(-\frac{1}{4})\cos(n\pi) + 1}{1 + 16\pi^2 n^2} = 4A\frac{1 - (-1)^n\exp(-\frac{1}{4})}{1 + (4\pi n)^2}; \quad \phi_n = 0$$

$$X_o = 4A[1-\exp(-\frac{1}{4})] = 0{,}885\ A$$

1.35. Sea el sistema de la Fig. 1.73 del Texto, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales aleatorias.

$B = 5$ kHz; $f_c = 100$ kHz. El filtro es pasabajo y de ganancia de potencia 2.

En la salida calcule la relación S_1/S_2 donde S_1 es la potencia a la salida debida a $x_1(t)$, mientras que S_2 es la potencia a la salida debida a $x_2(t)$.

Solución:

$$x_1(t) \Rightarrow S_{x1}(f) = 10^{-3}\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]$$

$$x_2(t) \Rightarrow S_{x2}(f) = 10^{-4}\left[\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + \Lambda(\frac{f-f_c}{B})\right]$$

Las potencias se calculan separadamente.

Para $x_1(t)$ sola.

A la salida del multiplicador, $x_{31}(t) = x_1(t)2\cos(2\pi f_c t)$. De acuerdo con el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia,

$$x_{31}(t) \Rightarrow S_{x31}(f) = [S_{x1}(f+f_c) + S_{x1}(f-f_c)] = 10^{-3}\left[2\Pi(\frac{f}{2B}) + \Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]$$

El filtro pasabajo deja pasar solamente las componentes dentro de $|f| \le B$ con ganancia 2, entonces,

$S_{y1}(f) = 4x10^{-3}\Pi(\frac{f}{2B})$, cuya potencia es $S_1 = 4x10^{-3}$ x $2x5x10^{-3} = 40$ W

Para $x_2(t)$ sola.

A la salida del multiplicador, $x_{32}(t) = x_2(t)2\cos(2\pi f_c t)$.

$$x_{32}(t) \Rightarrow S_{x32}(f) = 10^{-4}\left[2\Lambda(\frac{f}{B}) + \Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + \Lambda(\frac{f-f_c}{B})\right]$$

A la salida con ganancia 2,

$S_{y2}(f) = 4x10^{-4}\Lambda(\frac{f}{B})$, cuya potencia es $S_2 = 4x10^{-4}$ $x5x10^{3} = 2$ W

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{40}{2} = 20 \quad \text{y en dB} \quad \left[\frac{S_1}{S_2}\right]_{dB} = 10\log_{10}(\frac{S_1}{S_2}) = 13{,}01\,\text{dB}$$

1.36. En las figuras siguientes se muestra el espectro de señales moduladas de la forma

$x_c(t) = x(t)A\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X_c(f)$.

(a) Dada $X_c(f)$ en forma gráfica, determinar x(t)

(b) Dada x(t), determinar $X_c(f)$ cuya forma gráfica se da

Solución:

(a) y (b) De la Fig. 1.74 del Texto:

$$X_c(f) = A\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + A\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + A\Pi(\frac{f-f_c}{2B}) + A\Lambda(\frac{f-f_c}{B})$$

$$X_c(f) = A\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right] + A\left[\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + \Lambda(\frac{f-f_c}{B})\right]$$

$$x_c(t) = A\left[2B\text{sinc}(2Bt)\exp(-j2\pi f_c t) + 2B\text{sinc}(2Bt)\exp(j2\pi f_c t)\right] +$$

$$+ A\left[B\text{sinc}^2(Bt)\exp(-j2\pi f_c t) + B\text{sinc}^2(Bt)\exp(j2\pi f_c t)\right]$$

$x_c(t) = 2B\left[2\text{sinc}(2Bt) + \text{sinc}^2(Bt)\right]A\cos(2\pi f_c t)$. Por consiguiente,

$$x(t) = 2B\left[2\text{sinc}(2Bt) + \text{sinc}^2(Bt)\right] = 2B\left[\frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{\pi Bt} + \frac{\text{sen}^2(\pi Bt)}{(\pi Bt)^2}\right]$$

Ahora vamos hacia atrás.

Sea $x_c(t) = x(t)A\cos(2\pi f_c t)$ donde $x(t) = 2B\left[\frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{\pi Bt} + \frac{\text{sen}^2(\pi Bt)}{(\pi Bt)^2}\right]$

$$x(t) = 2B\left[2\text{sinc}(2Bt) + \text{sinc}^2(Bt)\right] \Leftrightarrow X(f)$$

$X(f) = 2B\left[\frac{2}{2B}\Pi(\frac{f}{2B}) + \frac{1}{B}\Lambda(\frac{f}{B})\right] = 2\Pi(\frac{f}{2B}) + 2\Lambda(\frac{f}{B})$. Y de acuerdo con el Teorema de la Modulación,

$X_c(f) = A\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + A\Pi(\frac{f-f_c}{2B}) + A\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + A\Lambda(\frac{f-f_c}{B})$ que tiene la misma forma dada en la Fig. 1.74 del Texto.

(b) De la Fig. 1.75 del Texto,

$$\frac{A}{2}\cos(2\pi\frac{1}{f_o}f) \therefore 2\pi\frac{1}{f_o}B = \frac{\pi}{2} \therefore f_o = 4B = \frac{1}{t_o}$$

$$X_c(f)=\frac{A}{2}\left[\cos[2\pi\frac{1}{4B}(f+f_c)]\Pi(\frac{f+f_c}{2B})\right]+\frac{A}{2}\left[\cos[2\pi\frac{1}{4B}(f-f_c)]\Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]$$

$$x_c(t)=\frac{A}{2}TF^{-1}\left\{\cos(2\pi\frac{1}{4B}f)\Pi(\frac{f}{2B})\right\}\exp(-j2\pi f_c t)+$$

$$+\frac{A}{2}TF^{-1}\left\{\cos(2\pi\frac{1}{4B})\Pi(\frac{f}{2B})\right\}\exp(j2\pi f_c t)$$

$x_c(t)=TF^{-1}\left\{\cos(2\pi\frac{1}{4B}f)\Pi(\frac{f}{2B})\right\}A\cos(2\pi f_c t)$; por consiguiente,

$x(t)=TF^{-1}\left\{\cos(2\pi\frac{1}{4B}f)\Pi(\frac{f}{2B})\right\}$, y por el Teorema de la Modulación,

$x(t)=\frac{1}{2}\left[2B\,\text{sinc}[2B(t+\frac{1}{4B})]+2B\,\text{sinc}[2B(t-\frac{1}{4B})]\right]$, de donde

$$x(t)=B\left\{\text{sinc}[2B(t+\frac{1}{4B})]+\text{sinc}[2B(t-\frac{1}{4B})]\right\}$$

Ahora vamos hacia atrás.

Sea $x_c(t)=x(t)A\cos(2\pi f_c t)$, donde $x(t)=B\left\{\text{sinc}[2B(t+\frac{1}{4B})]+\text{sinc}[2B(t-\frac{1}{4B})]\right\}$

Determinar $X_c(f)$.

$$X(f)=B\ TF\left\{\text{sinc}[2B(t+\frac{1}{4B})]\right\}+B\ TF\left\{\text{sinc}[2B(t-\frac{1}{4B})]\right\}$$

$TF\left\{\text{sinc}[2B(t+\frac{1}{4B})]\right\}=\frac{1}{2B}\Pi(\frac{f}{2B})\exp(j2\pi\frac{1}{4B}f)$ y

$$TF\left\{\text{sinc}[2B(t-\frac{1}{4B})]\right\}=\frac{1}{2B}\Pi(\frac{f}{2B})\exp(-j2\pi\frac{1}{4B}f)$$

$X(f)=\Pi(\frac{f}{2B})\cos(2\pi\frac{1}{4B}f)$. Y por el Teorema de la Modulación,

$$X_c(f)=\frac{A}{2}\left[\cos[2\pi\frac{1}{4B}(f+f_c)]\Pi(\frac{f+f_c}{2B})+\cos[2\pi\frac{1}{4B}(f-f_c)]\Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]$$

que tiene la misma forma dada en la Fig. 1.75 del Texto.

1.37. Considere la función z(t) = x(t) + y(t), donde x(t) e y(t) son ortogonales para todo t, es decir, < x(t) y(t) > = 0. Demuestre que

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \quad \text{y} \quad < z^2(t) >=< x^2(t) > + < y^2(t) >$$

Solución:

$$R_z(\tau) =< z(t)z(t+\tau) >=< [x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)] >$$

$$R_z(\tau) =< x(t)x(t+\tau) + x(t)y(t+\tau) + y(t)x(t+\tau) + y(t)y(t+\tau) >$$

$$R_z(\tau) =< x(t)x(t+\tau) > + < x(t)y(t+\tau) > + < y(t)x(t+\tau) > + < y(t)y(t+\tau) >$$

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau)$$

pero como $< x(t)y(t) >= 0$ para todo t, entonces $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$, de donde

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$$

$$< z^2(t) >=< [x(t)+y(t)]^2 >=< x^2(t) + 2x(t)y(t) + < y^2(t) >$$

$$< z^2(t) >=< x^2(t) > +2 < x(t)y(t) > + < y^2(t) >$$

pero como <x(t) y(t)> = 0, entonces

$$< z^2(t) >=< x^2(t) > + < y^2(t) >$$

1.38. Sea $x(t) \Rightarrow S_x(f) = 10^{-9}\left[\Lambda(\frac{f+10^4}{10^3}) + \Lambda(\frac{f-10^4}{10^3})\right]$ W/Hz.

Si $x_c(t) = 4x(t)\cos(2\pi 10^4 t) \Rightarrow S_{xc}(f)$, determine la potencia promedio de una señal z(t) cuya densidad espectral de potencia es

$$S_z(f) = S_{xc}(f)\Pi(\frac{f}{2x10^3}) \quad \text{W/Hz}$$

Solución:

$$S_{xc}(f) = 4S_x(f+f_c) + 4S_x(f-f_c) = 4x10^{-9}[\Lambda(\frac{f+10^4+10^4}{10^3}) + \Lambda(\frac{f-10^4}{10^3}) +$$

$$+\Lambda(\frac{f+10^4-10^4}{10^3}) + \Lambda(\frac{f-10^4-10^4}{10^3})]$$

$S_{xc}(f) = 4x10^{-9}\left[2\Lambda(\frac{f}{10^3}) + \Lambda(\frac{f+2x10^4}{10^3}) + \Lambda(\frac{f-2x10^4}{10^3})\right]$ que tiene la forma mostrada en la Fig. P1.38.

Puesto que

$$S_z(f) = S_{xc}(f)\Pi\left(\frac{f}{2x10^3}\right)$$

Entonces

$$S_z(f) = 8x10^{-9}\Lambda(\frac{f}{10^3})$$

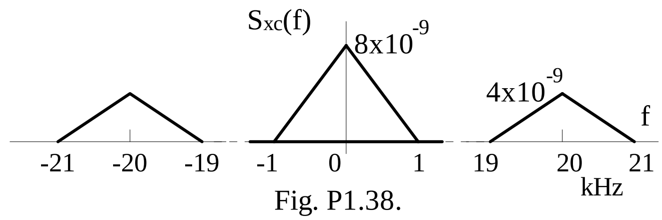


Fig. P1.38.

$$< z^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = 10^3 x8x10^{-9} = 8x10^{-6} = 8\mu W$$

(b) De la Fig. 1.76(a) del Texto,

$$S_{x1}(f) = 10^{-3}\exp(-\frac{|f|}{10^6})\left[\Pi(\frac{f+15x10^3}{10^4}) + \Pi(\frac{f-15x10^3}{10^4})\right]$$

Su potencia promedio será: $< x_1^2(t) >= 2x10^{-3}\int_{10^4}^{2x10^4}\exp(-\frac{f}{10^6})df = 19,7\ W$

De la Fig. 1.76(b) del Texto, $S_{x2}(f) = 10^{-11}f^2\left[\Pi(\frac{f+15x10^3}{10^4}) + \Pi(\frac{f-15x10^3}{10^4})\right]$

Su potencia promedio será: $< x_2^2(t) >= 2x10^{-11}\int_{10^4}^{2x10^4} f^2 df = 46,67\ W$

(c) 1. De la Fig. 1.76(a) podemos definir

$$S_{x1}(f) = \begin{cases} 10^{-3}\exp(\frac{f}{10^6}) & \text{para -20 kHz} \le f \le \text{-10 kHz} \\ 10^{-3}\exp(-\frac{f}{10^6}) & \text{para 10 kHz} \le f \le \text{20 kHz} \end{cases}$$

$S_{x1}(f)$ es una función par de f; por lo tanto, su antitransformada de Fourier, que es la función de autocorrelación, es

$R_{x1}(\tau) = 10^{-3}x2\int_{10^4}^{2x10^4}\exp(-\frac{f}{10^6})df$. Resolviendo la integral,

$$R_{x1}(\tau) = -1,98x10^3\frac{0,99\cos(4x10^4\pi\tau) - 1,98x10^6\pi\tau\mathrm{sen}(4x10^4\pi\tau) - \cos(2x10^4\pi\tau) + 2x10^6\pi\tau\mathrm{sen}(2x10^4\pi\tau)}{(1+4x10^{12}\pi^2\tau^2)}$$

Para $\tau = 0$, $<x_1^2(t) >= R_{x1}(0) = 19,7$, resultado ya obtenido en la parte (b).

2. De la Fig. 1.76(b) del Texto,

$S_{x2}(f) = 10^{-11} f^2$ para $10 \text{ kHz} \le f \le 20 \text{ kHz}$. Esta es una función par de f.

$R_{x2}(\tau) = 2x10^{-11}\int_{10^4}^{2x10^4} f^2 \cos(2\pi\tau f)df$. MATHCAD nos da,

$$R_{x2}(\tau) = -\frac{1}{2x10^{11}} \frac{\text{sen}(4x10^4\pi\tau)(1-8x10^8\pi^2\tau^2) - \text{sen}(2x10^4\pi\tau)(1-2x10^8\pi^2\tau^2) - 4x10^4\pi\tau\cos(4x10^4\pi\tau) + 2x10^4\pi\tau\cos(2x10^4\pi\tau)}{\pi^3\tau^3}$$

La potencia de la señal viene dada por $< x_2^2(t) >= \lim_{\tau\to 0} R_{x2}(\tau) = R_{x2}(0)$

Y con ayuda de MATHCAD obtenemos $< x_2^2(t) >= 46,67$, que es el mismo valor calculado en la parte (b).

1.39. A la entrada de un filtro pasabajo, de ganancia 2 y ancho de banda de 5 kHZ, se aplica una señal x(t) cuya función de autocorrelación es $R_x(\tau) = 10\sin^2(10^4\tau)$.

Demuestre que a la salida del filtro

$R_y(\tau) = 20\sin c(10^4\tau) + 10\sin c^2(5x10^3\tau)$ y $<y^2(t) >= 30$ W

Solución:

$$H(f) = 2\Pi(\frac{f}{10^4}); \quad x(t) \Rightarrow R_x(\tau) = 10\sin c^2(10^4\tau) \Leftrightarrow S_x(f) = 10^{-3}\Pi(\frac{f}{10^4})$$

$$|H(f)|^2 = 4\Pi(\frac{f}{10^4}); \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = 4S_x(f)\Pi(\frac{f}{10^4})$$

En la Fig. P1.39 se muestra la forma de $S_y(f)$.

De la Fig. P1.39,

$$S_y(f) = 2x10^{-3}\Pi(\frac{f}{10^4}) + 2x10^{-3}\Lambda(\frac{f}{5x10^3})$$

$$R_y(\tau) = 20\sin c(10^4\tau) + 10\sin c^2(5x10^3\tau)$$

$< y^2(t) > = R_y(0) = 20 + 10 = 30$ W

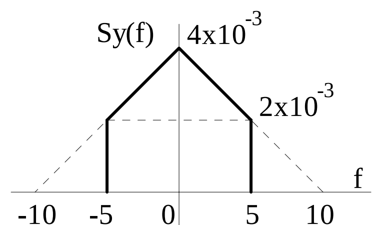


Fig. P1.39

J. Briceño M., Dr. Ing.
Profesor Titular, ULA

1.40. A la entrada del detector coherente, Fig. P1.40, se aplica una señal x(t) cuya función de autocorrelación es

$$R_x(\tau) = 20\,\text{sinc}^2(5x10^3\tau)\cos(2\pi 10^5\tau)$$

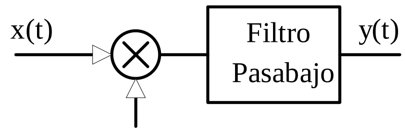


Fig. P1.40(a).

(a) Dibuje la forma de la densidad espectral de potencia a la entrada y salida del filtro.

Solución:

$$x(t) \Rightarrow R_x(\tau) = 20\,\text{sinc}^2(5x10^3\tau)\cos(2\pi 10^5\tau) \Leftrightarrow S_x(f); \quad f_c = 10^5 \text{ Hz}$$

$$20\,\text{sinc}^2(5x10^3\tau) \Leftrightarrow 4x10^{-3}\Lambda(\frac{f}{5x10^3}); \quad S_x(f) = 2x10^{-3}\left[\Lambda(\frac{f+10^5}{5x10^2}) + \Lambda(\frac{f-10^5}{5x10^5})\right]$$

A la salida del multiplicador o entrada del filtro (de ganancia unitaria), la función de autocorrelación es

$$R_i(\tau) = R_x(\tau)\cos(2\pi f_c\tau) \Leftrightarrow S_i(f) = \frac{1}{2}\left[S_x(f+f_c) + S_x(f-f_c)\right]$$

$$S_i(f) = 2x10^{-3}\left[2\Lambda(\frac{f}{5x10^3}) + \Lambda(\frac{f+2x10^5}{5x10^3}) + \Lambda(\frac{f-2x10^5}{5x10^3})\right]$$

El filtro deja pasar solamente las componentes de baja frecuencia, de donde,

$S_o(f) = 4x10^{-3}\Lambda(\frac{f}{5x10^3})$. En la Fig. P1.40(b) se muestran estas densidades espectrales.

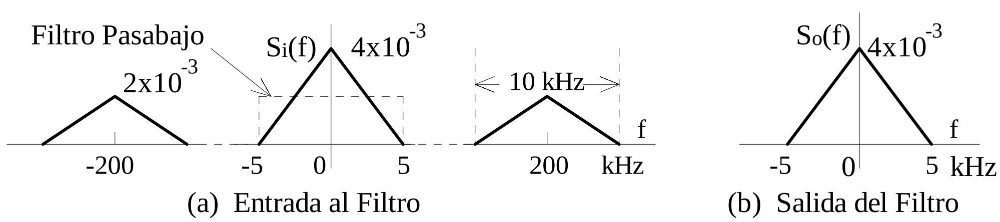


Fig. P1.40(b).

(b)

$$S_o(f) = 4x10^{-3}\Lambda(\frac{f}{5x10^3}) \Leftrightarrow R_o(\tau) = 20\,\text{sinc}^2(5x10^3\tau)$$

$$< y^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f)df = 5x10^3 x 4x10^{-3} = 20 \text{ W}$$

$$< y^2(t) >= R_o(0) = 20 \text{ W}$$

1.41. A la entrada del filtro RL de la Fig. 1.78 del Texto, se aplica ruido blanco cuya densidad espectral de potencia es $\eta/2$. Calcule la función de autocorrelación, la densidad espectral de potencia y la potencia promedio a la salida del filtro.

Solución:

Para el filtro RL: $H(f) = \dfrac{R}{R + j2\pi fL} = \dfrac{R}{L}\dfrac{1}{\frac{R}{L} + j2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = \dfrac{R}{L}\exp(-\dfrac{R}{L}t)u(t)$

$S_{ni}(f) = \dfrac{\eta}{2}$; $|H(f)|^2 = (\dfrac{R}{L})^2 \dfrac{1}{(\frac{R}{L})^2 + (2\pi f)^2}$. La densidad espectral a la salida será

$S_y(f) = (\dfrac{R}{L})^2 \dfrac{\eta}{2} \dfrac{1}{(\frac{R}{L})^2 + (2\pi f)^2}$. Y la correspondiente función de autocorrelación,

$$R_y(\tau) = (\frac{R}{L})^2 \frac{\eta}{2} TF^{-1}\left\{\frac{1}{(\frac{R}{L})^2 + (2\pi f)^2}\right\} = (\frac{R}{L})^2 \frac{\eta}{2}\left[\frac{1}{2(\frac{R}{L})}\exp(-\frac{R}{L}|\tau|)\right]$$

$R_y(\tau) = \dfrac{R}{L}\dfrac{\eta}{4}\exp(-\dfrac{R}{L}|\tau|)$. Para $\tau = 0$, la potencia promedio de salida del filtro será

$$< y^2(t) >= R_y(0) = \frac{R}{L}\frac{\eta}{4}$$

1.42. Determine la densidad espectral de potencia de la señal compleja $x(t) = A\exp(j2\pi f_o t)$ utilizando el Teorema de Wiener-Kintchine.

Solución:

$x(t) = A\exp(j2\pi f_o t)$. Vemos que x(t) es compleja; por lo tanto, de la expresión 1.121,

$R_x(\tau) =< x^*(t)x(t+\tau) >$, $x(t+\tau) = A\exp[j2\pi f_o(t+\tau)]$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}A^2\int_0^T \exp(-j2\pi f_o t)\exp[j2\pi f_o(t+\tau)]dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \exp(j2\pi f_o \tau)dt$$

$$R_x(\tau) = A^2\exp(j2\pi f_o\tau) \Leftrightarrow S_x(f) = A^2\delta(f - f_o)$$

$$< x^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f - f_o)df = A^2$$

O también $< x^2(t) >= R_x(0) = A^2$

1.43. Demuestre que si $x(t) \Rightarrow S_x(f)$, entonces $y(t)=x(t)-x(t-T) \Rightarrow S_y(f)=4S_x(f)\text{sen}^2(\pi Tf)$.

Solución:

$$R_y(\tau) = <y(t)y(t+\tau)> = <[x(t)-x(t-T)][x(t+\tau)-x(t-T+\tau)]>$$
$$R_y(\tau) = <x(t)x(t+\tau) - x(t)x(t-T+\tau) - x(t-T)x(t+\tau) + x(t-T)x(t-T+\tau)>$$

Sea $R_x(\tau) = <x(t)x(t+\tau)>$.

Para

$t \to t-T, \quad R_x(\tau) = <x(t-T)x(t-T+\tau)>$

$\tau \to \tau+T, \quad R_x(\tau+T) = <x(t)x(t+T+\tau)>$

hagamos $t \to t\text{-}T$, $R_x(\tau+T) = <x(t-T)x(t+\tau)>$; entonces,

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) - R_x(\tau-T) - R_x(\tau+T) + R_x(\tau)$$

$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(\tau-T) - R_x(\tau+T)$. Por transformada de Fourier,

$$S_y(f) = 2S_x(f) - [S_x(f)\exp(-j2\pi Tf) + S_x(f)\exp(j2\pi Tf)] = 2S_x(f) - 2S_x(f)\cos(2\pi Tf)$$
$$S_y(f) = 2S_x(f)[1-\cos(2\pi Tf)] = 4S_x(f)\text{sen}^2(\pi Tf)$$

1.44. Demuestre que

(a) Si x(t) tiene una función de autocorrelación $R_x(\tau) = \frac{A^2}{4}[1+\Lambda(\frac{\tau}{T_b})]$, donde $T_b = \frac{1}{f_b}$,

entonces, si $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t)$, determinar su densidad espectral de potencia $S_y(f)$.

Solución:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4}\Lambda(\frac{\tau}{T_b}) \Leftrightarrow S_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f) + \frac{A^2}{4f_b}\text{sinc}^2(\frac{f}{f_b})$$

Mediante el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia,

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_y(f) = \frac{1}{4}\left[S_x(f+f_c) + S_x(f-f_c)\right]$$

$$S_y(f) = \frac{A^2}{16}\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right] + \frac{A^2}{16f_b}\left[\text{sinc}^2(\frac{f+f_c}{f_b}) + \text{sinc}^2(\frac{f-f_c}{f_b})\right]$$

Esta es la densidad espectral de potencia de una señal digital ASK, que veremos en el Capítulo V.

(b) Si $x(t) \Rightarrow R_x(\tau) = A^2\Lambda(\frac{\tau}{T_b}) \Leftrightarrow S_x(f) = \frac{A^2}{f_b}\text{sinc}^2(\frac{f}{f_b})$, entonces,

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_y(f) = \frac{A^2}{4f_b}\left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f+f_c}{f_b}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f-f_c}{f_b}\right)\right]$$

Esta es la densidad espectral de potencia de una señal digital PSK/DPSK, que veremos en el Capítulo V.

1.45. En el Ejemplo 1.32 del Texto se determinó la función de autocorrelación de una señal periódica rectangular.

Determinar la densidad espectral correspondiente.

Solución:

Del Ejemplo 1.32 del Texto, $R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{\tau - nT}{T/2}\right)$, Esta es una señal periódica cuya señal generatriz es $R_{gx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\Lambda\left(\frac{\tau}{T/2}\right) \Leftrightarrow S_{gx}(f) = \frac{A^2 T}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right)$

$$X_n = \frac{1}{T}S_{gx}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\frac{A^2 T}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T}{2}\frac{n}{T}\right) = \frac{A^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right),$$

de donde $X_n = \begin{cases} \dfrac{A^2}{(n\pi)^2} & \text{para n impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para n par} \end{cases} \qquad X_o = \dfrac{A^2}{4}$

De la expresión 1.102 del Texto, $S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A^2}{(n\pi)^2}\delta(f - nf_o)$ para n impar y $n \neq 0$.

También,

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^2}{(n\pi)^2}\delta(f - nf_o) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f) + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}\delta(f - nf_o)\right] \quad \text{para n impar.}$$

1.46. Se tiene una señal x(t) cuya función de autocorrelación es $R_x(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{a}\right)$. Se tiene también una señal y(t) cuya densidad espectral es $S_y(f) = \frac{S_x(f)}{1 + (2\pi b f)^2}$, donde $S_x(f)$ es la densidad espectral de x(t).

Demuestre que la función de autocorrelación de y(t) es

$R_y(\tau) = \frac{a}{a^2 - b^2}\left[a\exp\left(-\frac{|\tau|}{a}\right) - b\exp\left(-\frac{|\tau|}{b}\right)\right]$, y la correspondiente potencia promedio,

$$< y^2(t) >= R_y(0) = \frac{a}{a+b}$$

Solución:

$$R_x(\tau) = \exp(-\frac{|\tau|}{a}) \Leftrightarrow S_x(f) = \frac{2}{a}\frac{1}{(\frac{1}{a})^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2a}{1+(2\pi af)^2} \text{. Entonces,}$$

$S_y(f) = 2a\frac{1}{1+(2\pi af)^2}\frac{1}{1+(2\pi fb)^2}$. Para reducir esta expresión a una forma fácil de operar, hagamos lo siguiente:

$$S_y(f) = \frac{2a}{a^2-b^2}\frac{a^2-b^2+(2\pi abf)^2-(2\pi abf)^2}{[1+(2\pi af)^2][1+(2\pi bf)^2]} = \frac{2a}{a^2-b^2}\frac{a^2+a^2(2\pi bf)^2-b^2-b^2(2\pi af)^2}{[1+(2\pi af)^2][1+(2\pi bf)^2]}$$

$$S_y(f) = \frac{2a}{a^2-b^2}\frac{a^2[1+(2\pi bf)^2]-b^2[1+(2\pi af)^2]}{[1+(2\pi af)^2][1+(2\pi bf)^2]}. \quad \text{Separando las fracciones,}$$

$$S_y(f) = \frac{2a}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2[1+(2\pi bf)^2]}{[1+(2\pi af)^2][1+(2\pi bf)^2]} - \frac{b^2[1+(2\pi af)^2]}{[1+(2\pi af)^2][1+(2\pi bf)^2]}\right]$$

$$S_y(f) = \frac{2a}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{1+(2\pi af)^2} - \frac{b^2}{1+(2\pi bf)^2}\right]$$

Por Transformada de Fourier Inversa de $S_y(f)$ podemos determinar $R_x(\tau)$. En efecto,

$$R_y(\tau) = \frac{2a}{a^2-b^2}TF^{-1}\left\{\frac{a^2}{1+(2\pi af)^2} - \frac{b^2}{1+(2\pi bf)^2}\right\}\text{; pero,}$$

$$TF^{-1}\left\{\frac{a^2}{1+(2\pi af)^2}\right\} = TF^{-1}\left\{\frac{1}{(\frac{1}{a})^2+(2\pi f)^2}\right\} = \frac{a}{2}\exp(-\frac{|\tau|}{a})\text{;} \quad \text{y en la misma forma,}$$

$$TF^{-1}\left\{\frac{b^2}{1+(2\pi bf)^2}\right\} = \frac{b}{2}\exp(-\frac{|\tau|}{b})\text{. Por lo tanto,}$$

$$R_y(\tau) = \frac{2a}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{2}\exp(-\frac{|\tau|}{a}) - \frac{b}{2}\exp(-\frac{|\tau|}{b})\right] = \frac{a}{a^2-b^2}\left[a\exp(-\frac{|\tau|}{a}) - b\exp(-\frac{|\tau|}{b})\right]$$

La correspondiente potencia de y(t) será $<y^2(t)>= R_y(0) = \dfrac{a}{a+b}$

CAPITULO II

2.1. Demuestre que el sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$y(t) = t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + t \frac{d}{dt} x(t)$, es un sistema lineal variante en el tiempo.

Solución:

Por inspección, ésta es una ecuación diferencial cuyos coeficientes no son constantes y son funciones de t; por lo tanto, el sistema es variante en el tiempo y no puede ser representado mediante una función de transferencia. El lector puede ver fácilmente que $y(t) \neq y(t-\tau)$. Veamos ahora la linealidad.

Sea $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Entonces $y(t) = t^2 \frac{d^2}{dt^2}[ax_1(t) + bx_2(t)] + t\frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)]$

$$y(t) = a[t^2 \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) + t\frac{d}{dt} x_1(t)] + b[t^2 \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) + t\frac{d}{dt} x_2(t)]$$

$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. El sistema es lineal pero variante en el tiempo.

2.2. La relación entrada-salida de un SLIT se puede representar mediante la ecuación diferencial $x(t) = \frac{d}{dt} y(t) + y(t)$. Para este sistema demuestre que:

(a) $h(t) = \exp(-t)u(t) \Leftrightarrow H(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi f}$

Solución: $X(f) = j2\pi f Y(f) + Y(f) = (1 + j2\pi f)Y(f) \therefore Y(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi f} X(f)$

De donde $H(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi f}$. Y del Ejemplo 1.16 del Texto,

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = \exp(-t)u(t)$$

(b) Si x(t) es una señal periódica como la mostrada en la Fig. 2.59 del Texto, $|Y_n|$ y ϕ_{yn} tendrán los valores $|Y_n| = \dfrac{2}{n\pi\sqrt{1 + n^2\pi^2}}$ y $\phi_{yn} = -[\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}(n\pi)]$.

Solución:

$Y_n = H(nf_o)X_n = \dfrac{X_n}{1 + j2\pi n f_o}$. También, de la Fig. 2.59 del Texto,

$x(t) = \Pi(t - \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{3}{2})$ en T; $T = 2$; $f_o = 1/2$. Por integración,

$$X_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \exp(-j2\pi nt)dt - \int_1^2 \exp(-j2\pi nt)dt\right] = \frac{-\exp(-jn\pi)}{jn\pi} + \frac{1 + \exp(-j2n\pi)}{j2n\pi}$$

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{2}{jn\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}; \quad Y_n = \frac{2}{jn\pi(1+j2\pi n)} \quad \text{para } n \text{ impar}; \; \phi_{yn} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n\pi)$$

$$|Y_n| = \frac{2}{n\pi\sqrt{1+4\pi^2 n^2}} \quad \text{para n impar}; \quad \phi_{yn} = -[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(n\pi)]$$

Nótese que en este caso y(t) es una señal periódica de la forma

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Y_n| \exp(j\phi_{yn}) \exp(j2\pi n f_o)$$

(c) Si $x(t) = A\delta(t - t_o)$, entonces $y(t) = A\exp[-(t - t_o)]u(t - t_o)$

Solución:

$$x(t) = A\delta(t - t_o) \Leftrightarrow X(f) = A\exp(-j2\pi t_o f); \quad H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{A\exp(-j2\pi t_o f)}{1+j2\pi f}$$

$$y(t) = A\ TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}|_{t\to t-t_o} = A\exp(-t)u(t)\,|_{t\to t-t_o} = A\exp[-(t-t_o)]u(t-t_o)$$

(d) Si $x(t) = Au(t)$, entonces $y(t) = 2A\operatorname{senh}(\frac{t}{2})\exp(-\frac{t}{2})u(t) + \frac{A}{2}$

Solución:

$$x(t) = Au(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{j2\pi f}; \quad H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y(f) = \left[\frac{1}{1+j2\pi f}\right]\left[\frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{j2\pi f}\right] = \frac{A\delta(f)}{2(1+j2\pi f)} + \frac{A}{j2\pi f(1+j2\pi f)}$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{j2\pi f}[\frac{1}{1+j2\pi f}]$$

$$y(t) = \frac{A}{2} + A\int_0^t [TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}|_{t=t'}]dt'$$

Pero $TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}|_{t=t'} = \exp(-t')u(t')$

$$y(t) = \frac{A}{2} + A\int_0^t \exp(-t')u(t')dt' = \frac{A}{2} + A[1-\exp(-t)]\,u(t)$$

$$y(t) = \frac{A}{2} + A\exp(-\frac{t}{2})[\exp(\frac{t}{2}) - \exp(-\frac{t}{2})]\,u(t)$$

$$y(t) = \frac{A}{2} + 2A\exp(-\frac{t}{2})\operatorname{senh}(\frac{t}{2})$$

(e) Si $x(t) = A\cos(2\pi t)$, entonces $y(t) = \frac{A}{1+4\pi^2}[\cos(2\pi t) + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi t)]$

Solución:

$$x(t) = A\cos(2\pi t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f+1) + \delta(f-1)\right]; \quad H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[\frac{1}{1+j2\pi f}\right]\left[\delta(f+1) + \delta(f-1)\right] = \frac{A}{2}\left[\frac{\delta(f+1)}{1+j2\pi f} + \frac{\delta(f-1)}{1+j2\pi f}\right]$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[\frac{\delta(f+1)}{1-j2\pi} + \frac{\delta(f-1)}{1+j2\pi}\right]$$. Desarrollando llegamos a la forma

$$Y(f) = \frac{1}{(1+4\pi^2)}\left\{\frac{A}{2}\left[\delta(f+1) + \delta(f-1)\right] + 2\pi j\frac{A}{2}\left[\delta(f+1) - \delta(f-1)\right]\right\}$$, de donde

$$y(t) = \frac{A}{1+4\pi^2}\left[\cos(2\pi t) + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi t)\right]$$

(f) Si $x(t) = A\exp(-t)u(t)$, entonces $y(t) = At\exp(-t)u(t)$

Solución:

$$x(t) = A\exp(-t)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{1+j2\pi f}; \quad H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{A}{(1+j2\pi f)^2}$$. Y del Problema 1.23(d),

$$y(t) = At\exp(-t)u(t)$$

(g) Si $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\Lambda(\frac{t-nT}{T/2})$, entonces,

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A\exp[j(2\pi n f_o t) - \operatorname{arctg}(2\pi n f_o t)]}{n^2\pi^2\sqrt{1+(2\pi n f_o)^2}} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$$

Solución:

$x(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t-nT}{T/2})$ es una señal periódica triangular de período T.

La señal generatriz $x_g(t)$ de x(t) es un triángulo de la forma

$$x_g(t) = A\Lambda(\frac{t}{T/2}) \Leftrightarrow X_g(f) = \frac{AT}{2}\operatorname{sinc}^2(\frac{T}{2}f)$$

$$X_n = \frac{1}{T}X_g(\frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\frac{AT}{2}\operatorname{sinc}^2(\frac{T}{2}\frac{n}{T}) = \frac{A}{2}\operatorname{sinc}^2(\frac{n}{2}) = \begin{cases} \frac{2A}{n^2\pi^2} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$$

$$H_n = \frac{1}{1+j2\pi n f_o}; \quad Y_n = H_n X_n = \frac{2A}{n^2\pi^2(1+j2\pi n f_o)}; \quad \phi_n = -\operatorname{arctg}(2\pi n f_o)$$

$$|Y_n| = \frac{2A}{n^2\pi^2\sqrt{1+(2\pi n f_o)^2}}$$. y(t) es una señal periódica de la forma

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Y_n| \exp(j\phi_n)\exp(j2\pi n f_o t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A\exp[j(2\pi n f_o t) - \operatorname{arctg}(2\pi n f_o)]}{n^2\pi^2\sqrt{1+(2\pi n f_o)^2}} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$$

2.3. La entrada x(t) y la salida y(t) de un SLIT están relacionadas mediante la ecuación integrodiferencial $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau + \frac{d}{dt}u(t)$.

(a) Si x(t) = exp(-2t)u(t), demuestre que y(t) = exp(-t)u(t)+δ(t). Demuestre también que la respuesta impulsional del SLIT es

$h(t) = \exp(-t)u(t) + 3\delta(t) + \delta'(t)$, donde $\delta'(t)$ es un doblete

Solución:

$$Y(f) = TF\left\{\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\} + j2\pi f \;\; TF\{u(t)\}$$

$$Y(f) = Y(f)X(f) + j2\pi f\left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}\right] = Y(f)X(f) + 1$$

Si $x(t) = \exp(-2t)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$, entonces $Y(f) = \frac{Y(f)}{2+j2\pi f} + 1$

$$Y(f)[1 - \frac{1}{2+j2\pi f}] = 1 \therefore Y(f) = \frac{2+j2\pi f}{1+j2\pi f} = \frac{2}{1+j2\pi f} + j2\pi f[\frac{1}{1+j2\pi f}]$$

$$y(t) = 2TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} + \frac{d}{dt}TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}$$

$$y(t) = 2\exp(-t)u(t) + \frac{d}{dt}[\exp(-t)u(t)];$$

pero $\frac{d}{dt}[\exp(-t)u(t)] = \delta(t) - \exp(-t)u(t)$

$$y(t) = 2\exp(-t)u(t) + \delta(t) - \exp(-t)u(t) = \exp(-t)u(t) + \delta(t)$$

$$y(t) = \exp(t)u(t) + \delta(t) \Leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + 1 = \frac{2+j2\pi f}{1+j2\pi f}$$

$x(t) = \exp(-2t)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$; pero como Y(f) = H(f) X(f), entonces,

$\frac{2+j2\pi f}{1+j2\pi f} = H(f)\frac{1}{2+j2\pi f}$; de donde $H(f) = 4 + \frac{(j2\pi f)^2}{1+j2\pi f}$

Tomando la antitransformada de H(f),

$$h(t) = 4\delta(t) + \frac{d^2}{dt^2}[\exp(-t)u(t)] = 4\delta(t) + \frac{d}{dt}[\delta(t) - \exp(-t)u(t)]$$

$$h(t) = 4\delta(t) + \frac{d}{dt}\delta(t) - \delta(t) + \exp(-t)u(t) = \exp(-t)u(t) + 3\delta(t) + \delta'(t)$$

donde $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$ es un doblete

2.4. La entrada x(t) y la salida y(t) de un SLIT vienen dadas por

$$x(t) = \exp[-(t-\pi)]u(t-\pi); \quad y(t) \Leftrightarrow Y(f) = \frac{\exp(\text{-}j4\pi^2 f)}{1-(2\pi f)^2 + j4\pi f}$$

Demuestre que la respuesta impulsional del SLIT es h(t) = x(t)

Solución:

$$t_o = \pi; \ [1 - (2\pi f)^2 + j4\pi f] = (1 + j2\pi f)^2$$

$$X(f) = TF\{\exp(-t)u(t)\}\exp(-j2\pi^2 f) = \frac{\exp(-j2\pi^2 f)}{1+j2\pi f}; \text{ pero } \ Y(f) = H(f)X(f)$$

$$\frac{\exp(-j4\pi^2 f)}{(1+j2\pi f)^2} = H(f)\frac{\exp(-2\pi^2 f)}{1+j2\pi f} \therefore H(f) = \frac{\exp(-j4\pi^2 f + j2\pi^2 f)}{1+j2\pi f} = \frac{\exp(-j2\pi^2 f)}{1+j2\pi f} = X(f)$$

Por consiguiente, h(t) = x(t)

2.5. Sea el sistema mostrado en la Fig. 2.60 del Texto. El cursor oscila a una velocidad constante entre los puntos A y B, siendo T_o el tiempo de ir de A a B, y viceversa.

Demuestre:

(a) Que éste es un sistema lineal variante en el tiempo.

Solución:

De la Fig. 2.60 del Texto, la salida y(t) está ponderada por el cursor, el cual equivale a un operador triangular, es decir, la respuesta y(t) es, en un intervalo $2T_o$ dado, igual a $y(t) = \Lambda(\frac{t}{T_o})x(t)$. El período de y(t) es $2T_o$.

Para un desplazamiento dado τ, $\quad y(t-\tau) = \Lambda(\frac{t-\tau}{T_o})x(t-\tau)$

Pero $\Lambda(\frac{t-\tau}{T_o}) \neq \Lambda(\frac{t}{T_o})$, de donde $y(t) \neq y(t - \tau)$

El sistema es variante en el tiempo. Veamos ahora la linealidad.

Sea $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t); \quad y(t) = \Lambda(\frac{t}{T_o})[ax_1(t) + bx_2(t)]$

$y(t) = a\Lambda(\frac{t}{T_o})x_1(t) + b\Lambda(\frac{t}{T_o})x_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. El sistema es lineal.

El sistema es lineal variante en el tiempo

(b) Demostrar que $y(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(\frac{t-2nT_o}{T_o})$ y $h(t,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\Lambda(\frac{t-2nT_o}{T_o})$

Solución

En general, $y(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(\frac{t-2nT_o}{T_o})$

Cuando $x(t) = \delta(t-\tau) \rightarrow y(t) = h(t,\tau)$, entonces

$h(t,\tau) = \delta(t-\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(\frac{t-2nT_o}{T_o}) = \delta(t-\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(\frac{\tau-2nT_o}{T_o})$, pero como los triángulos son iguales y están centrados en $2nT_o$, el valor de τ deberá estar entre $(2n-1)T_o < \tau \leq (2n+1)T_o$. Nótese que para cualquier valor de τ, el valor de la sumatoria es una constante. Sea entonces $\tau = 2nT_o \pm \tau_o$, donde $\tau_o < T_o$.

Entonces $\Lambda(\frac{\tau-2nT_o}{T_o}) = \Lambda(\frac{\pm\tau_o}{T_o}) = \Lambda(\frac{\tau_o}{T_o}) =$ una constante. De donde,

$h(t,\tau) = \Lambda(\frac{\tau_o}{T_o})\delta(t-\tau)$ para $\tau = 2nT_o \pm \tau_o$, con $\tau_o < T_o$.

2.6. La respuesta impulsional de un SLIT es $h(t) = [3\exp(-2t) - 1]u(t)$. Demuestre que

(a) Su función de transferencia es $H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f(1 + j\pi f)}$

Solución:

$$h(t) = [3\exp(-2t) - 1]u(t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{3}{2 + j2\pi f} - \frac{\delta(f)}{2} - \frac{1}{j2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{j12\pi f - \delta(f)j2\pi f(2 + j2\pi f) - 2(2 + j2\pi f)}{j4\pi f(2 + j2\pi f)} = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f(1 + j\pi f)}$$

$$h(t) = [3\exp(-2t) - 1]u(t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f(1 + j\pi f)}$$

(b) Si $x(t) = \exp(t)u(-t)$, entonces $y(t) = [\exp(-2t) - 1]u(t)$

Solución:

El lector puede verificar que es más fácil trabajar en el dominio del tiempo.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t-\tau)u[-(t-\tau)][3\exp(-2\tau)-1]u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = 3\int_{-\infty}^{\infty} \exp(t-\tau)\exp(-2\tau)u(\tau-t)u(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t-\tau)u(\tau-t)u(\tau)d\tau$$

pero $u(\tau-t)u(\tau)=1$ para $0 \le t \le \tau$. Los límites van desde t a ∞.

$y(t) = 3\int_{t}^{\infty} \exp(t-\tau)\exp(-2\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} \exp(t-\tau)d\tau$. Integrando, obtenemos

$y(t) = \exp(-2t) - 1$ para $0 \le t$

$y(t) = [\exp(-2t)-1]u(t)$

2.7. La respuesta impulsional de un SLIT es $h(t) = \delta(t) + 2\exp(-3t)u(t)$. Demuestre que

(a) Su función de transferencia es $H(f) = \dfrac{5+j2\pi f}{3+j2\pi f}$

Solución:

$$H(f) = 1 + \frac{2}{3+j2\pi f} = \frac{3+j2\pi f+2}{3+j2\pi f} = \frac{5+j2\pi f}{3+j2\pi f}$$

(b) Si $x(t) = 3\cos(t)$, entonces $y(t) = 3\sqrt{\dfrac{29}{13}}\cos(2t - 11{,}88^{o})$

Solución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 3\cos[2(t-\tau)][\delta(\tau) + 2\exp(-3\tau)u(\tau)]d\tau$$

$$y(t) = 3\int_{-\infty}^{\infty} \cos[2(t-\tau)]\delta(\tau)d\tau + 6\int_{-\infty}^{\infty} \cos[2(t-\tau)]\exp(-3\tau)u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = 3\cos(2t) + 6\int_{0}^{\infty} \cos[2(t-\tau)]\exp(-3\tau)d\tau$$

$$y(t) = 3\cos(2t) + \frac{18}{13}\cos(2t) + \frac{12}{13}\mathrm{sen}(2t) = \frac{57}{13}\cos(2t) + \frac{12}{13}\mathrm{sen}(2t)$$

Esta expresión se puede representar en la forma

$$A\cos\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos[\alpha - \mathrm{arctg}(\frac{B}{A})]$$

$\sqrt{(\dfrac{57}{13})^2 + (\dfrac{12}{13})^2} = 3\sqrt{\dfrac{29}{13}} = 4{,}481$; $\mathrm{arctg}(\dfrac{B}{A}) = 11{,}889^{o}$. Por lo tanto,

$$y(t) = 3\sqrt{\frac{29}{13}}\cos[2t - 11{,}889^{o}]$$

(c) Si $x(t) = 4\cos^2(2t)$, entonces $y(t) = \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{41}{25}}\cos(4t - 14{,}47^o)$

Solución:

$$x(t) = 4\cos^2(2t) = 2[1 + \cos(4t)];$$

$$y(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty}[1 + \cos[4(t-\tau)]][\delta(\tau) + 2\exp(-3\tau)u(\tau)]d\tau$$

$$y(t) = 2\left\{\begin{matrix}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau + 2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-3\tau)u(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\cos[4(t-\tau)]\delta(\tau)d\tau + \\ + 2\int_{-\infty}^{\infty}\cos[4(t-\tau)]\exp(-3\tau)u(\tau)d\tau\end{matrix}\right\}$$

$$y(t) = 2\left\{1 + 2\int_0^{\infty}\exp(-3\tau)d\tau + \cos(4t) + 2\int_0^{\infty}\cos[4(t-\tau)]\exp(-3\tau)d\tau\right\}$$

$$y(t) = \frac{10}{3} + \frac{62}{25}\cos(4t) + \frac{16}{25}\text{sen}(4t). \text{ Sea } A = \frac{62}{25};\ B = \frac{16}{25}; \sqrt{A^2 + B^2} = 2{,}561 = 2\sqrt{\frac{41}{25}}$$

$$\phi = \text{arctg}(\frac{B}{A}) = 14{,}47^o; \qquad y(t) = \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{41}{25}}\cos(4t - 14{,}47^o)$$

(d) $x(t) = \Pi(\frac{t}{2})$; $h(t) = \delta(t) + 2\exp(-3t)u(t)$; $y(t) = x(t) * h(t)$

Aplicamos el procedimiento del Ejemplo 2.10(a), donde B = 1 y $x_o = 1$.

z(x) ➔ y(t); y(x) ➔ h(t). Entonces, de la expresión (2.47),

$$y(t) = \int_{-1}^{\infty} h(t-\tau)d\tau - \int_{1}^{\infty} h(t-\tau)d\tau. \text{ Y para } h(t) = \delta(t) + 2\exp(-3t)u(t),$$

$$y(t) = \int_{-1}^{\infty}\left[\delta(t-\tau) + 2\exp[-3(t-\tau)]u(t-\tau)\right]d\tau - \int_{1}^{\infty}\left[\delta(t-\tau) + 2\exp[-3(t-\tau)]u(t-\tau)\right]d\tau$$

$$y(t) = \int_{-1}^{\infty}\delta(t-\tau)u(t-\tau)d\tau + 2\exp(-3t)\int_{-1}^{\infty}\exp(3\tau)u(t-\tau)d\tau -$$

$$-\int_{1}^{\infty}\delta(t-\tau)u(t-\tau)d\tau - 2\exp(-3t)\int_{1}^{\infty}\exp(3\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Las integrales con impulsos son iguales a 1 y se eliminan. En las otras integrales el límite superior es t; la primera integral es válida en el intervalo $-1 \le t < 1$, mientras que la segunda lo es para $1 \le t$. Entonces,

$$y(t) = 2\exp(-3t)\left[\int_{-1}^{t}\exp(3\tau)d\tau\right]\Pi(\frac{t}{2}) - 2\exp(-3t)\left[\int_{1}^{t}\exp(3\tau)d\tau\right]u(t-1)$$

Integrando,

$$y(t)=\frac{2}{3}\exp(-3t)\left[\exp(3t)-\exp(-3)\right]\Pi(\frac{t}{2})-\frac{2}{3}\exp(-3t)\left[\exp(3t)-\exp(3)\right]u(t-1)$$

Finalmente, $y(t)=\frac{2}{3}\left[1-\exp[-3(t+1)]\right]\Pi(\frac{t}{2})-\frac{2}{3}\left[1-\exp[-3(t-1)]\right]u(t-1)$

En la Fig. P2.7 se muestra la forma de y(t).

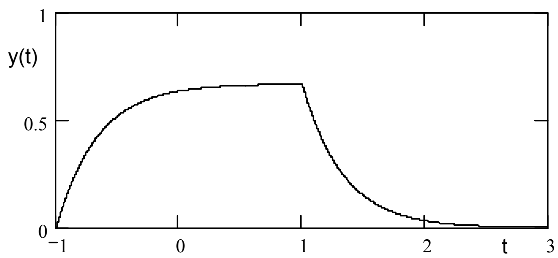


Fig. P2.7

2.8. La función de transferencia de un SLIT es

$$H(f)=10\left[1-\frac{1}{1+j2\pi f}\right]\exp(-j4\pi f).$$

Determine la respuesta del SLIT cuando se le aplica la excitación x(t) = 5u(t-2).

Solución:

$h(t)=10\ TF^{-1}\left\{1-\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}|_{t\to t-2}$; pero $1-\frac{1}{1+j2\pi f}=\frac{j2\pi f}{1+j2\pi f}$; de modo que

$$h(t)=10\ TF^{-1}\left\{\frac{j2\pi f}{1+j2\pi f}\right\}|_{t\to t-2}=10\frac{d}{dt}TF^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\}|_{t\to t-2}=10\frac{d}{dt}[\exp(-t)u(t)]|_{t\to t-2}$$

$$h(t)=10[\delta(t-2)-\exp[-(t-2)]u(t-2)] \qquad x(t)=5u(t-2)$$

$$y(t)=50\int_{-\infty}^{\infty}u(t-2-\tau)[\delta(\tau-2)-\exp[-(\tau-2)]u(\tau-2)]d\tau$$

$$y(t)=50\int_{-\infty}^{\infty}u(t-2-\tau)\delta(\tau-2)d\tau-50\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(\tau-2)]u(t-2-\tau)u(\tau-2)d\tau$$

pero $u(t-2-\tau)u(\tau-2)=1$ para $2\le t-2$ ó $4\le t$. Los límites van de 2 a $(t-2)$

$$y(t)=50u(t-4)-\{50\int_{2}^{t-2}\exp(-\tau+2)d\tau\}u(t-4)$$

$$y(t)=50u(t-4)-50[1-\exp[-(t-4)]]u(t-4)$$

$$y(t)=50\exp[-(t-4)]u(t-4)$$

PROBLEMARIO DE "PRINCIPIOS DE LAS COMUNICACIONES"
CAPITULO II

2.9. En el circuito RL de la Fig. 2.61 del Texto calcule la corriente cuando $v(t) = \exp(-t)u(t)$. Suponga que la corriente $i(0^-) = 0$.

Solución:

$$v(t) = \exp(-t)u(t) \Leftrightarrow V(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}; \quad Z(f) = R + j2\pi fL; \quad V(f) = Z(f)I(f)$$

$$I(f) = \frac{V(f)}{Z(f)} = \frac{1}{(1+j2\pi f)(R+j2\pi fL)} = \left[\frac{1}{1+j2\pi f}\right]\left[\frac{1}{R+j2\pi fL}\right] = X_1(f)X_2(f)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \Leftrightarrow x_1(t) = \exp(-t)u(t)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{L\left[\frac{R}{L}+j2\pi f\right]} \Leftrightarrow x_2(t) = \frac{1}{L}\exp(-\frac{R}{L}t)u(t).$$ Y mediante el teorema de la convolución,

$$i(t) = x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau)u(\tau)\exp[-\frac{R}{L}(t-\tau)]u(t-\tau)d\tau$$

pero $u(\tau)u(t-\tau) = 1$ para $0 \le t$. Los límites van de 0 a t.

$$i(t) = \{\frac{1}{L}\int_0^t \exp(-\tau)\exp[-\frac{R}{L}(t-\tau)]d\tau\}u(t) = \frac{\exp(-\frac{R}{L}t) - \exp(-t)}{L-R}u(t)$$

Nota: Debe verificarse que $|L - R| \neq 0$.

2.10. Determine, mediante convolución puramente analítica, la salida y(t) en los siguientes casos:

(a) $x(t) = 5\Pi(\frac{t-5}{10})$; $h(t) = -2\delta(t+30) + 4\delta(t-50)$; $y(t) = h(t) * x(t)$

$$y(t) = x(t) * [-2\delta(t+30) + 4\delta(t-50)] = -2x(t+30) + 4x(t-50)$$

$$y(t) = -10\Pi(\frac{t-5+30}{10}) + 20\Pi(\frac{t-5-50}{10}) = -10\Pi(\frac{t+25}{10}) + 20\Pi(\frac{t-55}{10})$$

(b) $x(t) = 10\Lambda(t)$; $h(t) = 5\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4n)$; $T = 4$

$$y(t) = 50\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(t-\tau)\delta(\tau-4n)d\tau = 50\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-\tau)\delta(\tau-4n)d\tau$$

$$y(t) = 50\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-4n)$$

(c) $x(t) = 10u(t);\quad h(t) = 10\Pi(\frac{t-10}{20});\quad y(t) = 100\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\Pi(\frac{\tau-10}{20})d\tau$

$$y(t) = 100\int_{0}^{20} u(t-\tau)d\tau$$

Esta integral es una función de t en el intervalo $0 \le t \le 20$, y tiene un valor constante para $t > 20$. y(t) se puede escribir en la forma siguiente:

$$y(t) = 100\begin{cases} \int_0^t d\tau & \text{para} \quad 0 \le t \le 20 \\ \left[\int_0^t d\tau\right]\Big|_{t=20} & \text{para} \quad 20 < t \end{cases}$$

que equivale a la forma

$y(t) = \left[100\int_0^t d\tau\right]\Pi(\frac{t-10}{20}) + \left\{100\left[\int_0^t d\tau\right]\Big|_{t=20}\right\}u(t-20)$. Resolviendo la integral,

$$y(t) = 100\cdot t\cdot\Pi(\frac{t-10}{20}) + 2000u(t-20)$$

(d) $x(t) = 10u(t);\quad h(t) = 10(10-t)\Pi\frac{t-5}{10}) = 100\Pi(\frac{t-5}{10}) - 10t\Pi(\frac{t-5}{10})$

$$y(t) = 1000\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\Pi(\frac{\tau-5}{10})d\tau - 100\int_{-\infty}^{\infty} \tau u(t-\tau)\Pi(\frac{\tau-5}{10})d\tau .$$

$$y(t) = 1000\int_0^{10} u(t-\tau)d\tau - 100\int_0^{10} \tau\cdot u(t-\tau)d\tau$$

Sea $y_1(t)$ la primera integral e $y_2(t)$ la segunda. Entonces, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Igual que en el problema anterior,

$$y_1(t) = 1000\begin{cases} \int_0^t d\tau & \text{para} \quad 0 \le t \le 10 \\ \left[\int_0^t d\tau\right]\Big|_{t=10} & \text{para} \quad 10 < t \end{cases}$$

$$y_2(t) = -100\begin{cases} \int_0^t \tau d\tau & \text{para} \quad 0 \le t \le 10 \\ \left[\int_0^t \tau d\tau\right]\Big|_{t=10} & \text{para} \quad 0 < t \end{cases}$$

$$y(t) = 1000t\Pi(\frac{t-5}{10}) + 10000u(t-10) - 100\frac{1}{2}t^2\Pi(\frac{t-5}{10}) - 5000u(t-10)$$

$$y(t) = (1000t - 50t^2)\Pi(\frac{t-5}{10}) + (10000 - 5000)u(t-10)$$

$$y(t) = 50(20t - t^2)\Pi(\frac{t-5}{10}) + 5000u(t-10)$$

La salida y(t) tiene la forma dada en la Fig. P2.10.

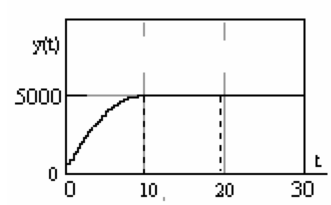


Fig.P2.10

(e) $x(t) = 10\Pi(\frac{t-1}{4})$; $h(t) = 10\Pi(\frac{t-3}{4})$.

Aplicar el procedimiento mostrado en el Ejemplo 2.40 (c).

2.11. Dibuje el espectro de las siguientes señales

(a) $x_s(t) = 10\text{sinc}^2(\frac{t}{2T}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

Solución:

Sea $x_s(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow X_s(f) = X_1(f) * X_2(f)$

donde $x_1(t) = 10\text{sinc}^2(\frac{t}{2T}) \Leftrightarrow X_1(f) = 20T\Lambda(2Tf)$

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow X_2(f) = f_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_o); \qquad f_o = \frac{1}{T}$$

$$X_s(f) = 20T\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda[2T(f - v)] f_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nf_o) dv$$

$$X_s(f) = 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda[2T(f - v)]\delta(v - nf_o) dv = 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda[2T(f - nf_o)]$$

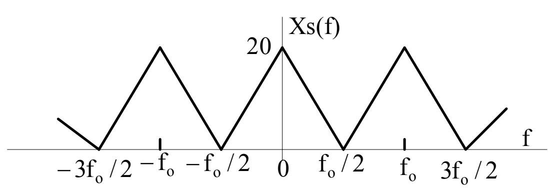


Fig. P2.11(a).

$X_s(f) = 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left[\frac{f - nf_o}{f_o/2}\right]$. Este espectro se muestra en la Fig. P2.11(a)

(b) $x_s(t) = \left[2\text{sinc}(2t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{3})\right] * 4\Pi(4t)$

Solución:

Sea $x_1(t) = 2\mathrm{sinc}(2t) \Leftrightarrow X_1(f) = \Pi(\frac{f}{2})$; T = 1/3; $f_o = 3$

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{3}) \Leftrightarrow X_2(f) = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - 3n)\,; \quad x(t) = x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow X(f) = X_1(f) * X_2(f)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{f-v}{2})3\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-3n)dv = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{f-v}{2})\delta(v-3n)dv = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{f-3n}{2})$$

$x_3(t) = 4\Pi(4t) \Leftrightarrow X_3(f) = \mathrm{sinc}(\frac{f}{4})$. También $x_s(t) = x(t) * x_3(t) \Leftrightarrow X_s(f) = X(f)\cdot X_3(f)$

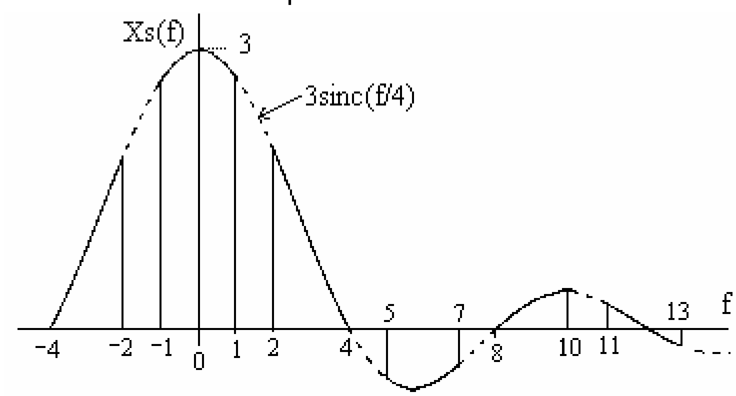


Fig. P2.11(b)

$X_s(f) = 3\mathrm{sinc}(\frac{f}{4})\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{f-3n}{2})$. En la Fig. P2.11(b) se grafica este espectro.

2.12. Demuestre que en una red de transmisión sin distorsión el retardo de fase y el retardo de envolvente son iguales cuando $\beta(0) = 0$.¿Qué sucede cuando $\beta(0) \neq 0$?

Respuesta:

En una red de transmisión sin distorsión se verifica, ecuación (2.59) del Texto, cuando n = 0, que $\beta(f) = -2\pi t_o f$. Por definición, ecuaciones 2.65 y 2.66 del Texto, para f = 0, $\beta(0) = 0$ y los retardos serán iguales a cero. Para $f \neq 0$, las pendientes son iguales y $t_p(f) = t_g(f)$. La situación es diferente cuando $n \neq 0$; en este caso, para f = 0, $\beta(0) = \pm n\pi$. Esto significa que si la característica aunque sea lineal no pasa por el origen, habrá un término de distorsión inicial constante. En efecto, de la expresión (2.57) del Texto,

$$H(f) = h_o \exp[j\beta(f)] = h_o \exp[j(-2\pi t_o f \pm n\pi)] = (-1)^n h_o \exp(-j2\pi t_o f)$$

El término $(-1)^n$ para n entero representa un término de distorsión de fase constante inicial que no es grave en el caso general; sin embargo, la situación es más grave si la característica de fase es lineal en algún intervalo de frecuencias, pero si su prolongación, para f = 0, no pasa por un múltiplo entero de π, entonces se producirá un término de distorsión de fase. Esto es de particular importancia en la transmisión de datos.

2.13. En la Fig. 2.62 del Texto se muestra las características de amplitud y fase de una red dada.

(a) Demuestre que esta red produce un término de distorsión de fase.

Solución:

Nótese que la característica de fase, aunque lineal, no corta el eje $\beta(f)$ en un múltiplo entero de π.

De la Fig. 2.62(b) del Texto,

$$\beta(f) = \begin{cases} \dfrac{-\pi}{30}(f-10) & \text{para } 0 \le f \\ \dfrac{-\pi}{30}(f+10) & \text{para } f < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, para $f \ge 0$: $\beta(f) = -\dfrac{\pi}{30}f + \dfrac{\pi}{3} = -2\pi\dfrac{1}{60}f + \dfrac{\pi}{3} = -2\pi t_o f + \dfrac{\pi}{3}$; $t_o = 1/60$

La red produce un término constante de fase $\exp(-j\dfrac{\pi}{3})$.

(b) Demuestre que el retardo de fase y el retardo de grupo son, respectivamente,

$$t_p(f) = \frac{1}{60} + \frac{1}{6f}; \quad t_g(f) = \frac{1}{60}$$

Solución:

Por definición,

$$t_p(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\beta(f)}{f} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{-\pi}{30}f + \frac{\pi}{3}}{f} = \frac{1}{60} - \frac{1}{6f}$$

$$t_g(f) = \frac{-1}{2\pi}\frac{d}{df}\beta(f) = \frac{-1}{2\pi}\frac{-\pi}{30} = \frac{1}{60}$$

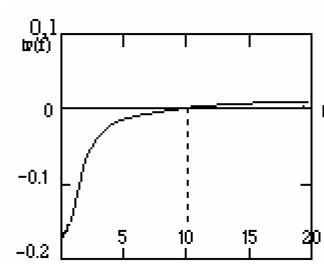


Fig. P2.13

(c) $t_p(f) = \dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{6f}$, cuya gráfica se muestra en la Fig. P2.13.

Para $f < 10$, el retardo es negativo, lo cual no corresponde a redes físicas en las cuales el retardo es siempre positivo.

Para $f = 0$, el retardo es cero y aumenta con f hasta un valor máximo $t_{omax} = 1/60$ cuando $f \to \infty$.

2.14. La señal $x(t) = 10\text{sinc}(10t) + 10\text{sinc}^2(5t)\cos(30\pi t)$ se aplica a un filtro cuyas características de amplitud y fase se muestran en la Fig. 2.63 del Texto. Demuestre que la salida del filtro es

$$y(t) = 40\text{sinc}[10(t - \frac{1}{40})] + 20\text{sinc}^2(5t)\text{sen}(30\pi t)$$

¿Qué tipos de distorsión hay presentes en la salida?

Solución:

$$X(f) = \Pi(\frac{f}{10}) + \Lambda(\frac{f+15}{5}) + \Lambda(\frac{f-15}{5})$$

que se muestra en la Fig.P2.13

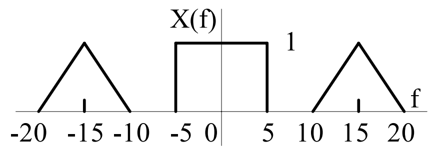


Fig. P2.14

De la Fig. 2.131 del Texto, las características del filtro son:

Para $|f| \le 10$: ganancia 4 y $\beta(f) = \frac{-\pi}{20} f$

$$\beta(f) = -2\pi \frac{1}{40} f;\ t_o = \frac{1}{40}$$

Para $-20 < f \le -10$: ganancia 2 y $\beta(f) = \frac{\pi}{2}$

Para $10 < f \le 20$: ganancia 2 y $\beta(f) = -\frac{\pi}{2}$

Por lo tanto,

$$Y(f) = 4\Pi(\frac{f}{10})\exp(-j2\pi\frac{1}{40}f) + 2\Lambda(\frac{f+15}{5})\exp(j\frac{\pi}{2}) + 2\Lambda(\frac{f-15}{5})\exp(-j\frac{\pi}{2})$$

$$Y(f) = 4\Pi(\frac{f}{10})\exp(-j2\pi\frac{1}{40}) + 2j[\Lambda(\frac{f+15}{5}) + \Lambda(\frac{f-15}{5})]$$

$$y(t) = 4\ TF^{-1}\left\{\Pi(\frac{f}{10})\right\}\Big|_{t\to t-\frac{1}{40}} + 10j\text{sinc}^2(5t)\exp(-j2\pi 15t) + 10j\text{sinc}^2(5t)\exp(j2\pi 15t)$$

$$y(t) = 40\text{sinc}[10(t - \frac{1}{40})] + 10j\text{sinc}^2(5t)[\exp(-j2\pi 15t) - \exp(j2\pi 15t)]$$

$$y(t) = 40\text{sinc}[10(t - \frac{1}{40})] + 20\text{sinc}^2(5t)\text{sen}(30\pi t)$$

Hay distorsión de amplitud y de fase.

2.15. En la Fig. 2.64 del Texto se muestra las características de amplitud y fase de un filtro dado. Determine la salida del filtro para cada una de las señales siguientes, y especifique el tipo de distorsión producido.

Solución:

De la Fig. 2.64 del Texto, las características del filtro son:

Para $|f| < 10\,\text{MHz}$: ganancia cero y $\beta(f) = -\frac{\pi}{20} f = -2\pi \frac{1}{40} f; \quad t_o = \frac{1}{40}$

Para $f \le -10\,\text{MHz}$: ganancia 2 y $\beta(f) = \frac{\pi}{2}$

Para $f \ge 10\,\text{MHz}$: ganancia 2 y $\beta(f) = -\frac{\pi}{2}$

(a) $x(t) = 4\text{sinc}(2x10^5 t)\cos(2\pi 10^6 t); f_c = 10^6; \quad \text{sinc}(2x10^5 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2x10^5}\Pi(\frac{f}{2x10^5})$

$$X(f) = \frac{2}{2x10^5}\left[\Pi(\frac{f+10^6}{2x10^5}) + \Pi(\frac{f-10^6}{2x10^5})\right]$$

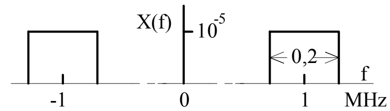


Fig. P2.15(a)

que tiene la forma de la figura P2.15(a).
Por lo tanto, el filtro dejará pasar solamente componentes para $|f| \ge 1\,\text{MHz}$, pero la fase será lineal. La salida y(t) será:

$$Y(f) = 2x10^{-5}[\Pi(\frac{f+1{,}05x10^6}{10^5}) + \Pi(\frac{f-1{,}05x10^6}{10^5})]\exp(-j2\pi t_o)$$

$$y(t) = 2\left[\text{sinc}[10^5(t-t_o)]\exp[-j2\pi 1{,}05x10^6(t-t_o)] + \text{sinc}(10^5 t)\exp[j2\pi 1{,}05x10^6(t-t_o)]\right]$$

$$y(t) = 4\text{sinc}[10^5(t-t_o)]\cos[2\pi 1{,}05x10^6(t-t_o)], \text{ donde } t_o = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2x10^7} = \frac{10^{-6}}{40}$$

Hubo distorsión de amplitud solamente.

(b) $x(t) = 4\text{sinc}(2x10^6 t)\cos(2\pi 10^7 t);\ f_c = 10\,\text{MHz};\ \text{sinc}(2x10^6 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2x10^6}\Pi(\frac{f}{2x10^6})$

$$X(f) = 10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+10^7}{2x10^6}) + \Pi(\frac{f-10^7}{2x10^6})\right]$$

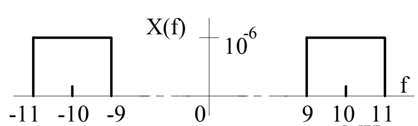


Fig. P2.15(b)

que tiene la forma de la figura P2.15(b).

Vemos que no hay distorsión de amplitud, pero sí de fase:

para $|f| \le 10$ MHz, la fase es lineal, pero para $|f| > 10$MHz, la fase es $\left|\frac{\pi}{2}\right|$. Entonces,vemos que la salida Y(f) está formada por dos partes, es decir,

$$Y(f) = 2x10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+10{,}5x10^6}{10^6})\exp(j\frac{\pi}{2}) + \Pi(\frac{f-10{,}5x10^6}{10^6})\exp(-j\frac{\pi}{2})\right] +$$

$$+2x10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+9{,}5x10^6}{10^6}) + \Pi(\frac{f-9{,}5x10^6}{10^6})\right]\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$Y(f) = 2x10^{-6}\,j\left[\Pi(\frac{f+10{,}5x10^6}{10^6}) - \Pi(\frac{f-10{,}5x10^6}{10^6})\right] +$$

$$+2x10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+9{,}5x10^6}{10^6}) + \Pi(\frac{f-9{,}5x10^6}{10^6})\right]\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$y(t) = 2j\left[\text{sinc}(10^6 t)\exp(-j2\pi 10{,}5x10^6 t) - \text{sinc}(10^6 t)\exp(j2\pi 10{,}5x10^6 t)\right] +$$

$$+2\left[\text{sinc}[10^6(t-t_o)]\exp[-j2\pi 9{,}5x10^6(t-t_o)] + \text{sinc}[10^6(t-t_o)]\exp[j2\pi 9{,}5x10^6(t-t_o)]\right]$$

$$y(t) = 4\text{sinc}(10^6 t)\cos(2\pi 10{,}5x10^6 t) + 4\text{sinc}[10^6(t-t_o)]\cos[2\pi 9{,}5x10^6(t-t_o)]\,; \quad t_o = \frac{10^{-6}}{40}$$

Hubo distorsión de fase solamente.

(c) $x(t) = 16\text{sinc}(8x10^5 t)\cos(28\pi 10^6 t) + 2\text{sinc}(10^6 t)\cos(10^7 \pi t)$

$$f_{c1} = 14x10^6; \quad f_{c2} = 5x10^6$$

$$X(f) = 10^{-5}\left[\Pi(\frac{f+14x10^6}{0{,}8x10^6}) + \Pi(\frac{f-14x10^6}{0{,}8x10^6})\right] + 10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+5x10^6}{10^6}) + \Pi(\frac{f-5x10^6}{10^6})\right]$$

X(f) tiene entonces la forma de la Fig. P2.15(c)

Comparando con las características del filtro podemos ver que la salida es

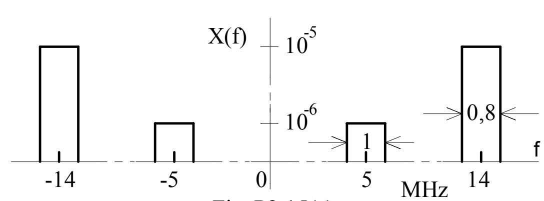


Fig. P2.15(c)

$$Y(f) = 2x10^{-5}[\Pi(\frac{f+14x10^6}{0{,}8x10^6})\exp(j\frac{\pi}{2}) + \Pi(\frac{f-14x10^6}{0{,}8x10^6})\exp(-j\frac{\pi}{2})] +$$

$$+2x10^{-6}[\Pi(\frac{f+5x10^6}{10^6}) + \Pi(\frac{f-5x10^6}{10^6})]\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$Y(f) = 2x10^{-5} j\left[\Pi(\frac{f+14x10^6}{0,8x10^6}) - \Pi(\frac{f-14x10^6}{0,8x10^6})\right] +$$

$$+2x10^{-6}\left[\Pi(\frac{f+5x10^6}{10^6}) + \Pi(\frac{f-5x10^6}{10^6})\right]\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$y(t) = 2x10^{-5} j[0,8x10^6 \text{sinc}(0,8x10^6 t)\exp(-j2\pi 14x10^6 t) +$$
$$-0,8x10^6 \text{sinc}(0,8x10^6 t)\exp(j2\pi 14x10x10^6 t)] +$$
$$+2x10^{-6}\left[10^6 \text{sinc}(10^6 t)\exp(-j2\pi 5x10^6 t) + 10^6 \text{sinc}(10^6 t)\exp(j2\pi 5x10^6 t)\right]\Big|_{t\to t-t_o}$$

$$y(t) = 16 j \text{sinc}(0,8x10^6 t)\left[\exp(-j2\pi 14x10^6 t) - \exp(j2\pi 14x10^6 t)\right] +$$
$$+2\text{sinc}(10^6 t)\left[\exp(j2\pi 5x10^6 t) + \exp(-j2\pi 5x10^6 t)\right]\Big|_{t\to t-t_o}$$

$$y(t) = 32\text{sinc}(8x10^5 t)\text{sen}(28\pi 10^6 t) + 4\text{sinc}[10^6(t - \frac{10^{-6}}{40})]\cos[\pi 10^7 (t - \frac{10^{-6}}{40})]$$

Hubo distorsión de fase solamente.

2.16. Un sistema lineal está representado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + a_o y(t) = b_1 \frac{d}{dt}x(t) + b_o x(t)$$

(a) Determinar $|H(f)|$, $\beta(f)$ y $h(t)$.

Tomando la TF : $j2\pi f Y(f) + a_o Y(f) = b_1 j2\pi f X(f) + b_o X(f)$

$Y(f)[a_o + j2\pi f] = X(f)[b_o + b_1 j2\pi f] \therefore Y(f) = \dfrac{b_o + b_1 j2\pi f}{a_o + j2\pi f} X(f)$, de donde

$$H(f) = \frac{b_o + b_1 j2\pi f}{a_o + j2\pi f}; \quad |H(f)| = \sqrt{\frac{b_o^2 + (b_1 2\pi f)^2}{a_o^2 + (2\pi f)^2}}; \quad \beta(f) = \text{arctg}(\frac{b_1 2\pi f}{b_o}) - \text{arctg}(\frac{2\pi f}{a_o})$$

$$H(f) = \frac{b_o}{a_o + j2\pi f} + b_1 \frac{j2\pi f}{a_o + j2\pi f}$$

$$h(t) = b_o \ TF^{-1}\left\{\frac{1}{a_o + j2\pi f}\right\} + b_1 \frac{d}{dt} TF^{-1}\left\{\frac{1}{a_o + j2\pi f}\right\}$$

$$h(t) = b_o \exp(-a_o t)u(t) + b_1 \frac{d}{dt}[\exp(-a_o t)u(t)]$$

$$h(t) = b_o \exp(-a_o t)u(t) + b_1 \exp(-a_o t)\delta(t) - b_1 a_o \exp(-a_o t)u(t)$$

$$h(t) = (b_o - a_o b_1)\exp(-a_o t)u(t) + b_1 \delta(t)$$

(b) Para $b_o = 0$, $|H(f)| = \dfrac{2\pi b_1 |f|}{\sqrt{a_o^2 + (2\pi f)^2}}$; $\beta(f) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}(\dfrac{2\pi f}{a_o})$

Para graficar, hagamos, por ejemplo, $a_o = 10$ y $b_1 = 100$. Las características del filtro tendrán la forma, Fig. P2.16,

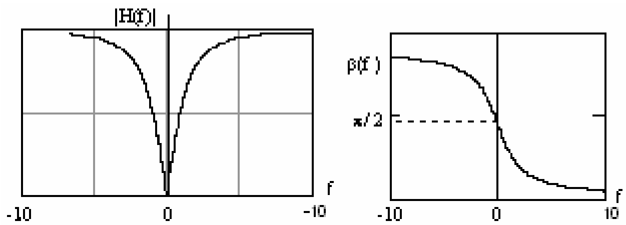


Fig. P2.16(a)

Este es un filtro pasaalto.

(b) Para $b_o = 0$, $|H(f)| = \dfrac{2\pi b_1 f}{\sqrt{a_o^2 + (2\pi f)^2}}$; $\beta(f) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}(\dfrac{2\pi f}{a_o})$

Para graficar hagamos $a_o = 10$; $b_1 = 10$; $|H(f)| = \dfrac{20\pi f}{\sqrt{100 + (2\pi f)^2}}$; $\beta(f) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}(\dfrac{\pi f}{5})$

En la Fig. P2.16(b) se muestra las características de este filtro.
Este es un filtro pasaalto.

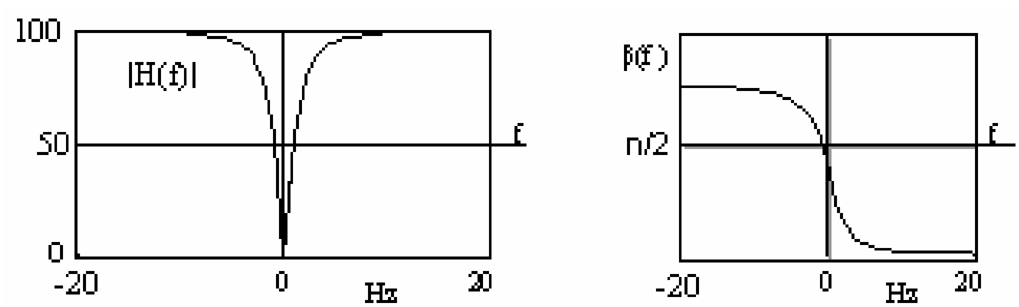


Fig. P2.16(b)

(c) Para $b_1 = 0$ y $a_o = 1$

$\beta(f) = -\text{arctg}(2\pi f)$

Por definición, $t_g(f) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{df}\beta(f)$

$$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}[-\text{arctg}(2\pi f)] = \frac{1}{1 + (2\pi f)^2}$$

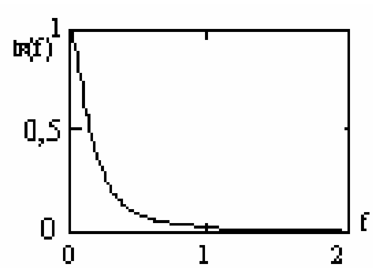


Fig P2.16(c)

En la figura P2.16(c) se grafica $t_g(f)$.

2.17. La red mostrada en la Fig. 2.65 del Texto es un sistema muy utilizado en instrumentos de medición.

(a) Demuestre que cuando $R_1C_1 = R_2C_2$, la red se comporta como una red sin distorsión con retardo cero.

Solución:

Sea, en la Fig. 2.65 del Texto: $Z_1(f) = \dfrac{R_1}{1+j2\pi fR_1C_1}$ y $Z_2(f) = \dfrac{R_2}{1+j2\pi fR_2C_2}$

$$Y(f) = \frac{Z_2(f)}{Z_1(f)+Z_2(f)}X(f) \therefore H(f) = \frac{Z_2(f)}{Z_1(f)+Z_2(f)} = \frac{R_2}{R_1\dfrac{1+j2\pi fR_2C_2}{1+j2\pi fR_1C_1}+R_2}$$

$$H(f) = \frac{R_2(1+j2\pi fR_1C_1)}{R_1(1+j2\pi R_2C_2)+R_2(1+j2\pi R_1C_1)} = \frac{R_2+j2\pi fR_1R_2C_1}{(R_1+R_2)+j2\pi fR_1R_2(C_1+C_2)}$$

Si $R_1C_1 = R_2C_2$, entonces, $H(f) = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

Por consiguiente, $|H(f)| = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} = h_o$ y $\beta(f) = 0$, lo que implica que $t_o = 0$. El retardo es cero.

La red se comporta como una red sin distorsión pero con retardo cero.

(b) Sea $R_1 = 2R_2 = 1000\,\Omega$; $R_2 = 500\,\Omega$; $C_1 = C_2 = 10\,\mu F$; $R_1C_1 = 10^{-2}$; $R_2C_2 = 5x10^{-3}$

$R_1R_2(C_1+C_2) = 10$

$$H(f) = 50\frac{1+j2\pi fx10^{-2}}{150+j2\pi f} \qquad |H(f)| = 50\sqrt{\frac{1+4\pi^2f^2x10^{-4}}{(150)^2+4\pi^2f^2}}; \qquad \beta(f) = \text{arctg}\frac{2\pi f}{100} - \text{arctg}\frac{2\pi f}{150}$$

Estas características tienen la forma dada en la Fig. P2.17

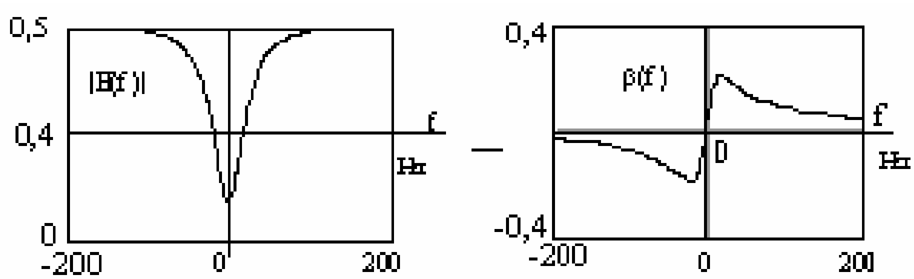


Fig.P2.17

Nótese que para frecuencias superiores a 1 kHz, el sistema se comporta como una red sin distorsión con un desfase muy bajo que tiende rápidamente a cero.

2.18. Un sistema no lineal tiene la característica de transferencia

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

La salida deseada es la correspondiente a x(t).

(a) Sea $x(t) = \cos(10\pi t) + \cos(100\pi t);\ \ a_1 = 11;\ \ a_2 = 6;\ \ a_3 = 4$

Determine los términos de distorsión armónica y los de intermodulación. Calcule la potencia promedio de la salida deseada.

Solución:

Sea $10\pi = \omega_1;\quad f_1 = 5;\quad 100\pi = \omega_2;\quad f_2 = 50$

$$y(t) = a_1\cos(\omega_1 t) + a_1\cos(\omega_2 t) + a_2[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]^2 + a_3[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]^3$$

Desarrollando el cuadrado y el cubo, y agrupando téminos llegamos a

$$y(t) = a_2 + [a_1 + \frac{a_3}{2} + \frac{3a_3}{2} + \frac{a_3}{4}][\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2 t)] + \frac{a_2}{2}[\cos(2\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t)] +$$

$$+\frac{a_3}{4}[\cos(3\omega_1 t) + \cos(3\omega_2 t)] + a_2\{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]\}$$

$$+\frac{3a_3}{4}\{\cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t]\} + \frac{3a_3}{4}\{\cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t]\}$$

$$y(t) = 6 + 20[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] + 3[\cos(2\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t)] + [\cos(3\omega_1 t) + \cos(3\omega_2 t)] +$$

$$+6\{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]\} + 3\{\cos[(2\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t]\} +$$

$$+3\{\cos[(2\omega_2 + \omega_1)t] + \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t]\}$$

La salida deseada es $\quad x_d(t) = 20\cos(10\pi t) + 20\cos(100\pi t)$

Cuya potencia es $\quad < x_d^2(t) >= 200 + 200 = 400\ \ \text{W}$

Los términos de salida son:

1 término de componente continua: 6

4 términos de Distorsión Armónica a las frecuencias $2f_1$, $2f_2$, $3f_1$ y $3f_2$

6 términos de Distorsión de Intermodulación a las frecuencias

$(f_1 + f_2)$, $(f_1 - f_2)$, $(2f_1 + f_2)$, $(2f_1 - f_2)$, $(2f_2 + f_1)$ y $(2f_2 - f_1)$

(b) $x(t) = 10\cos(100\pi t) = 100\cos(\omega t);\ \ \omega = 100\pi;\ \ a_1 = 2;\ \ a_2 = 10^{-2};\ \ a_3 = 10^{-3}$

$$y(t) = 20\cos(\omega t) + 10^{-2}10^2\cos^2(\omega t) + 10^{-3}10^3\cos^3(\omega t)$$

$$y(t) = 0{,}5 + 20{,}75\cos(100\pi t) + 0{,}5\cos(200\pi t) + 0{,}25\cos(600\pi t)$$

El porcentaje de "Distorsión de Tercera Armónica" es, del Ejemplo 2.45 del Texto,

$$D_3\% = \frac{\text{Amplitud de la Componente de Tercera Armónica}}{\text{Amplitud de la Componente Fundamental}}100$$

$$D_3\% = \frac{0{,}25}{20{,}75}100 = 1{,}205\%$$

(c) $x(t) = 2x10^3 \operatorname{sinc}(2x10^3 t);$
$a_1 = 10; \quad a_2 = -10^{-2}; \quad a_3 = 0$

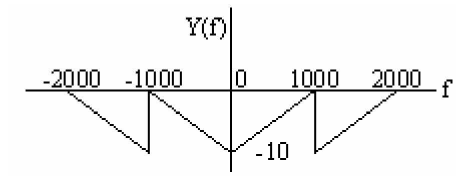


Fig. P 2.18

$$y(t) = 20x10^3 \operatorname{sinc}(2x10^3 t) - 10^{-2} x4x10^6 \operatorname{sinc}^2(2x10^3 t)$$

$$Y(f) = \frac{20x10^3}{2x10^3}\Pi(\frac{f}{2x10^3}) - \frac{4x10^4}{2x10^3}\Lambda(\frac{f}{2x10^3})$$

$$Y(f) = 10\Pi(\frac{f}{2x10^3}) - 20\Lambda(\frac{f}{2x10^3})$$

cuyo espectro se muestra en la Fig. P2.18.

2.19. Sea una señal x(t) de banda limitada f_m. ¿Es $x^2(t)$ también de banda limitada? Si lo es, determine su frecuencia máxima. En general, ¿Qué puede decirse del espectro de $x^n(t)$? (Utilice el teorema de la convolución). Determine y dibuje, en cada caso, el espectro del cuadrado de las siguientes señales y observe sus correspondientes anchos de banda.

Solución:

x(t) es de banda limitada f_m.

$$y(t) = x^2(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(v)X(f-v)dv$$

Si x(t) es de banda limitada, el producto de convolución ocupará un ancho de banda $2f_m$ (frecuencias positivas); por lo tanto, $x^2(t)$ será también de banda limitada.

$x^3(t) \Leftrightarrow [X(f) * X(f)] * X(f) \rightarrow$ será de banda limitada $3f_m$

y en general, $x^n(t) = [X(f) * X(f) * X(f) \cdots] * X(f) \rightarrow$ será de banda limitada nf_m
(en el corchete hay (n – 1) términos).

Si x(t) es pasabanda, de ancho de banda 2B centrado en f_c, el ancho de banda de $y(t) = x^n(t)$ será 2nB con la condición $f_c > nB$.

(a) $x(t) = 4Af_m \operatorname{sinc}(2f_m t)$

$y(t) = x^2(t) = 16A^2 f_m^2 \operatorname{sinc}^2(2f_m t)$

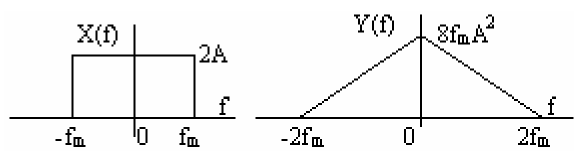


Fig. P2.19(a)

$$X(f) = 2A\Pi(\frac{f}{2f_m}) \qquad\qquad Y(f) = 8f_m A^2 \Lambda(\frac{f}{2f_m})$$

Estos espectros tienen la forma mostrada en la Fig. P2.19(a)

Nótese que el espectro de $x^2(t)$ tiene un ancho de banda el doble del de x(t).

(b) $$x(t) = 4Af_m \text{sinc}(2f_m t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow A\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2f_m}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2f_m})\right]$$

$$y(t) = x^2(t) = 4A^2 f_m^2 \text{sinc}^2(2f_m t)\cos^2(2\pi f_c t)$$

$$y(t) = 2A^2 f_m^2 \text{sinc}^2(2f_m t) + 2A^2 f_m^2 \text{sinc}^2(2f_m t)\cos(2\pi 2f_c t)$$

$$Y(f) = A^2 f_m \Lambda(\frac{f}{2f_m}) + \frac{A^2 f_m}{2}\left[\Lambda(\frac{f+f_c}{2f_m}) + \Lambda(\frac{f-f_c}{2f_m})\right]$$

cuyos espectros se muestran en la figura P2.19(b)

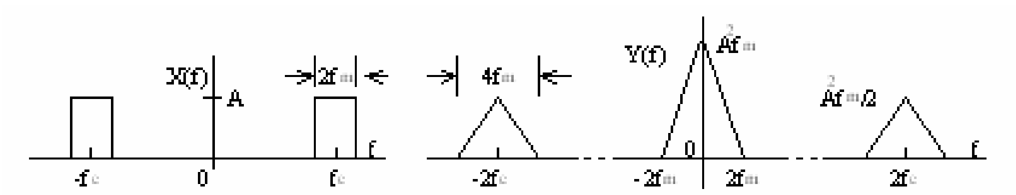


Fig. P2.19(b)

2.20. En la Fig. 2.66 del Texto se muestra las características ideales de un filtro conocido con el nombre de "filtro de ranura (notch filter)". Este filtro se utiliza para eliminar frecuencias indeseables.

Determinar su respuesta impulsional

Solución:

De la Fig. 2.66 del Texto,

$$|H(f)| = h_o\left[1 - \Lambda(\frac{f+f_c}{B}) - \Lambda(\frac{f-f_c}{B})\right]; \;\; \beta(f) = \frac{-\pi}{4f_c}f = -2\pi\frac{1}{8f_c}f; \;\; t_o = \frac{1}{8f_c}$$

$$H(f) = h_o\left[1 - \Lambda(\frac{f+f_c}{B}) - \Lambda(\frac{f-f_c}{B})\right]\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$h(t) = h_o\delta(t-t_o) - h_o B\left[\text{sinc}^2(Bt)\exp(-j2\pi f_c t) + \text{sinc}^2(Bt)\exp(j2\pi f_c t)\right]\Big|_{t\to t-t_o}$$

$$h(t) = h_o\delta(t-t_o) - 2h_o B\left[\text{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_c t)\right]\Big|_{t\to t-t_o}$$

$$h(t) = h_o\delta(t-t_o) - 2h_o B\text{sinc}^2[B(t-t_o)]\cos[2\pi f_c(t-t_o)] \quad \text{con} \quad t_o = \frac{1}{8f_c}$$

2.21. Sea un filtro cuya función de transferencia es $H(f) = h_o \mathrm{sinc}(\tau f)\exp(-j2\pi t_o f)$. Si se le aplica la señal $x(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau})$, determine su salida y(t).

Solución:

$$H(f) = h_o \mathrm{sinc}(\tau f)\exp(-j2\pi t_o f); \quad x(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow X(f) = A\tau \mathrm{sinc}(\tau f)$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = A\tau h_o \mathrm{sinc}^2(\tau f)\exp(-j2\pi t_o f)$$

$$y(t) = A\tau h_o \ TF^{-1}\{\mathrm{sinc}^2(\tau f)\}|_{t\to t-t_o} = A\tau h_o\left[\frac{1}{\tau}\Lambda(\frac{t}{\tau})\right]|_{t\to t-t_o} = Ah_o\Lambda(\frac{t-t_o}{\tau})$$

2.22. Sea los filtros reales mostrados en la Fig. 2.67 del Texto.

(a) Determine y grafique las correspondientes características de amplitud y de fase.

(b) Determine los anchos de banda de 3 dB.

(c) Determine las ecuaciones integrodiferenciales que los caracterizan.

(d) Para los filtros (a) y (b), determine el retardo de envolvente y el ancho de banda de acuerdo con la definición dada en la expresión (2.79) del Texto.

Solución:

1. Sea la Fig. 2.67(a) del Texto.

(a) De la forma del circuito, $Y(f) = \dfrac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}X(f)$. De donde

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}; \quad |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}; \quad \beta(f) = -\mathrm{arctg}(2\pi fRC)$$

Gráfica para R = 600 y $C = 10^{-7}$
Este es un filtro pasabajo, Fig. 2.22(a).

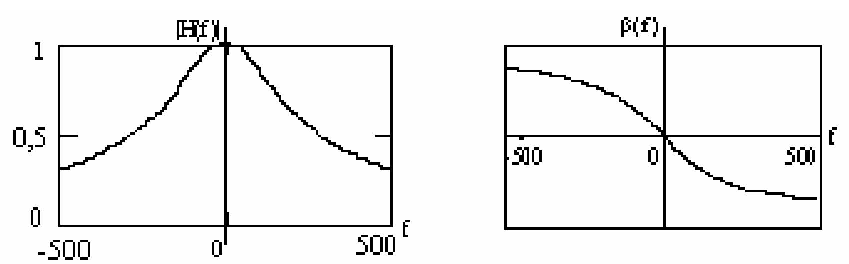


Fig. P2.22(a)

(b) Ancho de banda de 3 dB. Sea B este ancho de banda; por definición,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi BRC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\to(2\pi BRC)^2=1\therefore B=\frac{1}{2\pi RC}$$

Para R = 600 Ω y C = 10^{-7} F, B = 2653 Hz

(c) Ecuación diferencial.

$$Y(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC}X(f)=\frac{1}{RC}\frac{1}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}X(f)$$

$$y(t)=\frac{1}{RC}TF^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}\right\}*x(t)=\frac{1}{RC}[\exp(-\frac{t}{RC})u(t)]*x(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\exp(-\frac{\tau}{RC})u(\tau)d\tau=\frac{1}{RC}\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)\exp(-\frac{\tau}{RC})d\tau$$

(d) Retardo de envolvente $t_g(f)$.

$$\beta(f)=-\mathrm{arctg}(2\pi fRC);\ t_g(f)=\frac{-1}{2\pi}\frac{d}{df}[-\mathrm{arctg}(2\pi fRC)]=\frac{RC}{1+(2\pi fRC)^2}$$

Ancho de Banda según ecuación (2.79) del Texto.

Ecuación (2.79) del Texto: $B=\frac{1}{2}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|df}{|H(f)|_{max}}$

Pero la integral $\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|df\to\infty$. Esto quiere decir que no podemos utilizar la expresión (2.79) del Texto para evaluar el ancho de banda.

2. Sea el circuito de la Fig. 2.67(b) del Texto.

(a)

$$H(f)=\frac{R}{R+\frac{1}{j2\pi fC}}=\frac{j2\pi fRC}{1+j2\pi fRC};\ |H(f)|=\frac{2\pi|f|RC}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}};\beta(f)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(2\pi fRC)$$

En la Fig. P2.22(b) se grafica H(f) para R = 1200 Ω y C = 10^{-6} F.

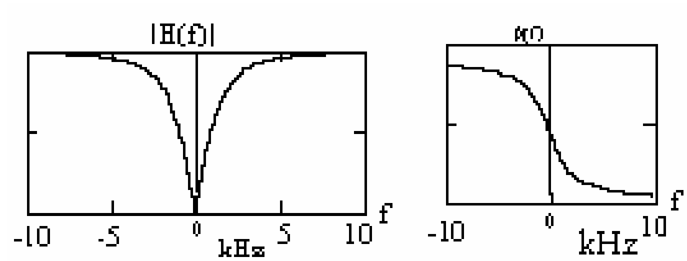


Fig. P2.22(b)

Este es un filtro utilizado para la eliminación de la componente continua y componentes de baja frecuencia. Ajustando los valores de R y de C se puede lograr valores muy bajos para el ancho de banda de 3 dB, como veremos a continuación.

(b) Ancho de banda de 3 dB. Sea B este ancho de banda. De la definición,

$$\frac{2\pi BRC}{\sqrt{1+(2\pi BRC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\to(2\pi BRC)^2=1\therefore B=\frac{1}{2\pi RC}$$

para R = 1200 Ω y C = 10^{-6} F, B = 132,6 Hz.

(c) Ecuación Diferencial. $Y(f)=H(f)X(f)=\dfrac{j2\pi f}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}X(f)$

$$y(t)=TF^{-1}\left\{\frac{j2\pi f}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}\right\}*x(t);$$

$$\text{pero } TF^{-1}\left\{\frac{j2\pi f}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}\right\}=\frac{d}{dt}[\exp(-\frac{t}{RC})u(t)]=\delta(t)-\frac{1}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})u(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)[\delta(\tau)-\frac{1}{RC}\exp(-\frac{\tau}{RC})u(\tau)]d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau-\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\exp(-\frac{\tau}{RC})u(\tau)d\tau$$

$$y(t)=x(t)-\frac{1}{RC}\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)\exp(-\frac{\tau}{RC})d\tau$$

(d) Retardo de Envolvente $t_g(f)$.

$$\beta(f)=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(2\pi fRC);\ \ t_g(f)=\frac{-1}{2\pi}\frac{d}{df}[\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(2\pi fRC)]$$

$$t_g(f) = \frac{RC}{1+(2\pi fRC)^2}$$

Ancho de Banda según la ecuación (1.79) del Texto.

En este caso se verifica también que $\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|df \to \infty$, de modo que no se puede utilizar la ecuación (2.79) para definir un ancho de banda para este filtro.

3. Sea el circuito de la Fig. 2.67(c) del Texto.

(a) Definamos: $\frac{1}{Z_1(f)} = \frac{1}{j2\pi fL} + j2\pi fC = \frac{1-(2\pi f)^2 LC}{j2\pi fL} \therefore Z_1(f) = \frac{j2\pi fL}{1-(2\pi f)^2 LC}$

$$H(f) = \frac{R}{R+Z_1(f)} = \frac{R}{R + \frac{j2\pi fL}{1-(2\pi f)^2 LC}} = \frac{R-(2\pi f)^2 RLC}{[R-(2\pi f)^2 RLC] + j2\pi fL}$$

$$|H(f)| = \frac{R-(2\pi f)^2 RLC}{\sqrt{[R-(2\pi f)^2 RLC]^2 + (2\pi fL)^2}}; \quad \beta(f) = \text{-arctg}\left[\frac{2\pi fL}{R - (2\pi f)^2 RLC}\right]$$

Para graficar H(f), Fig. P2.22(c), hagamos L=1 H, C = 10^{-7} F y R = 10 KΩ.

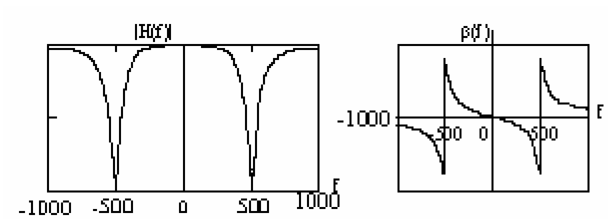


Fig. P2.22(c)

Este filtro es una realización práctica del "filtro de ranura" visto en el Problema 2.20. Los ceros de |H(f)| están a una frecuencia para la cual $(2\pi f_o)^2 LC = 1$, es decir, para $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. En el presente caso, f_c = 503,3 Hz.

(b) Ancho de Banda de 3 dB. Sea B este ancho de banda; de la definición,

$$\frac{[R-(2\pi B)^2 RLC]}{\sqrt{[R-(2\pi B)^2 RLC]^2 + (2\pi BL)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ de donde,}$$

$$R^2[1-(2\pi B)^2 LC]^2 - (2\pi BL)^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, las frecuencias de 3 dB de |H(f)| son:

$B = \dfrac{\pm L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{4\pi RLC}$. Para $R = 10^4$, $L = 1$ y $C = 10^{-7}$, las frecuencias de 3 dB son: B_1 = 429,967 Hz; B_2 = 589,122 Hz, siendo la frecuencia de corte o de la ranura igual a f_c = 503,3 Hz.

(d) Ecuación diferencial. $Y(f) = \dfrac{R - (2\pi f)^2 RLC}{[R - (2\pi f)^2 RLC] + j2\pi fL} X(f)$; donde H(f) se puede desarrollar en la forma

$$H(f) = \frac{R}{R - (2\pi f)^2 RLC + j2\pi fL} + LC(j2\pi f)^2 \frac{R}{R - (2\pi f)^2 RLC + j2\pi fL}$$

$$H(f) = H_1(f) + LC(j2\pi f)^2 H_1(f) \Leftrightarrow h(t) = TF^{-1}\{H_1(f)\} + LC\frac{d^2}{dt^2}TF^{-1}\{H_1(f)\}$$

$h_1(t) = TF^{-1}\left\{\dfrac{R}{R - (2\pi f)^2 LC + j2\pi fL}\right\}$. Para esta expresión MATCAD nos da

$$h_1(t) = \frac{2R}{\sqrt{4R^2CL - L^2}} \exp(-\frac{t}{2RC}) \mathrm{sen}\left[\frac{\sqrt{4R^2CL - L^2}}{2RCL} t\right] u(t)$$

$h(t) = h_1(t) + LC\dfrac{d^2}{dt^2} h_1 t$. También $y(t) = h(t) * x(t)$, de donde

$$y(t) = \left[h_1(t) + LC\frac{d^2}{dt^2} h_1(t)\right] * x(t)$$

El lector puede simplificar aún más esta expresión.

4. Sea el circuito de la Fig. 2.67(d) del Texto.

(a) $H(f) = \dfrac{R}{R + j2\pi fL + \dfrac{1}{j2\pi fC}} = \dfrac{j2\pi fRC}{1 - (2\pi f)^2 LC + j2\pi fRC}$

$$|H(f)| = \frac{2\pi |f| RC}{\sqrt{[1 - (2\pi f)^2 LC]^2 + (2\pi fRC)^2}}; \quad \beta(f) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}[\frac{2\pi fRC}{1 - (2\pi f)^2 LC}]$$

En la Fig. P2.22(d) se grafican estas características para R = 600 Ω, L = 0,01 H y $C = 10^{-6}$

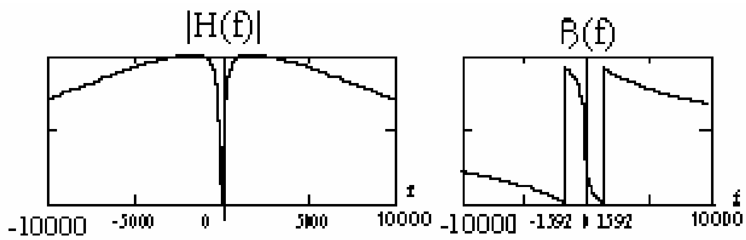


Fig. P2.22(d)

Este filtro elimina la componente continua. Nótese un valor máximo a la frecuencia para la cual $f_o = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; en este caso f_o = 1592 Hz. Allí se produce un cambio de fase. Veremos a continuación que éste es en realidad un filtro pasabanda.

(b) Ancho de banda de 3 dB. Sea B este ancho de banda; por definición,

$\dfrac{2\pi BRC}{\sqrt{[1-(2\pi B)^2 LC]^2 + (2\pi BRC)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Desarrollando se obtiene la ecuación

$[1-(2\pi B)^2 LC]^2 - (2\pi BRC)^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación,

$B = \dfrac{\pm RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{4\pi LC}$. Las frecuencias de 3 dB son, para los valores dados de R, C y L, B_1 = 258,3 Hz y B_2 = 9808 Hz

Estas frecuencias definen una banda de paso que en el presente caso es de

$B_2 - B_1$ = 9549 Hz

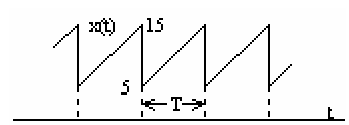
2.23. Se tiene una señal x(t) diente de sierra creciente cuyo período es de 1 ms, con un valor máximo de 15V y mínimo de 5V. Se dispone también de tres filtros ideales: $H_1(f)$ pasabajo de ancho de banda de 500 Hz; $H_2(f)$ pasabajo de ancho de banda de 1500 Hz; y $H_3(f)$ pasaalto de frecuencia de corte de 500 Hz. Todos los filtros tienen ganancia unitaria. Si la entrada es x(t), dibuje la señal de salida en los siguientes casos:

Solución:

La entrada x(t) tiene la forma de la Fig. P2.23(a)

$$x(t) = \frac{10}{10^{-3}}t + 5 \quad \text{en T;} \quad T = 10^{-3}; \; f_o = 1000\,\text{Hz}$$

$$X_n = 10^3\int_0^{10^{-3}} [10^4 t + 5]\exp(-j2000\pi nt)dt$$



P2.23(a)

$X_n = j\dfrac{5}{n\pi}$; para todo n y $n \neq 0$; $|X_n| = \dfrac{5}{n\pi}$; $\phi_n = \dfrac{\pi}{2}$; X_o = 10; términos en seno.

Habrá componentes para todo n a las frecuencias f_n = n1000.

(a) Salida de H_1 (f) solamente.

Filtro pasabajo, ancho de banda de 500 Hz.

Solamente pasa la componente continua

$y(t) = 10$

con la forma de la Fig. P2.23(b)

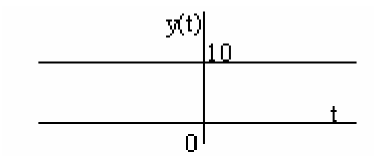


Fig. P2.23(b)

(b) Salida de H_2(f) solamente.

Filtro pasabajo, ancho de banda de 1500 Hz. Pasa solamente la componente continua y la componente fundamental.

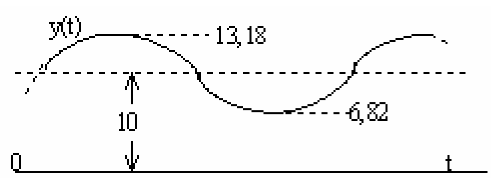


Fig. P2.23(c)

$y(t) = 10 + \frac{10}{\pi}\text{sen}(2\pi 1000t)$ que se muestra en la P2.23(c).

(c) Salida de H_3(f) solamente.

Filtro pasaalto, frecuencia de corte de 500 Hz.

Pasan todas las componentes de frecuencia menos la componente continua.

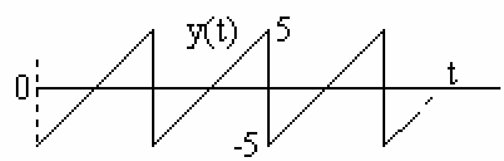


Fig. P2.23(d)

$y(t) = x(t) - 10$ que se muestra en la Fig. P2.23(d)

(c) H_1(f) y H_2(f) en cascada.

La salida depende solamente de H_1(f). Pasa solamente la componente continua; la salida tiene la misma forma de la parte (a).

(d) H_1(f) y H_3(f) en cascada.

Pasan todas las componentes; la salida es igual a la entrada x(t).

(e) H_2(f) y H_3(f) en cascada.

La salida depende solamente de H_2(f). Salida igual que en el caso (b).

(f) H_1(f), H_2(f) y H_3(f) en cascada.

La salida depende solamente de H_1(f). Igual que en el caso (a)

(g) H_1(f) y H_2(f) en paralelo.

La salida depende solamente de H_2(f). Igual que en el caso (b).

2.24. Sea el circuito mostrado en la Fig. 2.68 del Texto.

(a) Determine sus características de amplitud y de fase.

Solución:

De la Fig. 2.68 del Texto, $Y(f)=\dfrac{\dfrac{1}{j2\pi fC}}{R+\dfrac{1}{j2\pi fC}}\dfrac{\dfrac{1}{j2\pi fC}}{R+\dfrac{1}{j2\pi fC}}X(f)=H(f)X(f)$

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC}\frac{1}{1+j2\pi fRC}=\frac{1}{[1+j2\pi fRC]^2}=\frac{1}{(RC)^2}\frac{1}{[\frac{1}{RC}+j2\pi f]^2}$$

Del Problema 1.23(d), $h(t)=\dfrac{1}{(RC)^2}t\cdot\exp(-\dfrac{t}{RC})u(t)$

$$H(f)=\frac{1}{1-(2\pi fRC)^2+j4\pi fRC}$$

$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{[1-(2\pi fRC)^2]^2+(4\pi fRC)^2}};\ \beta(f)=\text{-arctg}[\frac{4\pi fRC}{1-(2\pi fRC)^2}]$$

En la Fig. P2.24(a) se grafica H(f) para R = 1 MΩ y $C = 10^{-12}$ F.

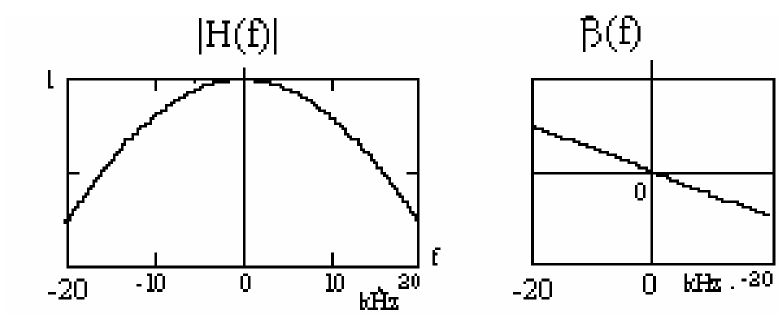


Fig. P2.24(a)

(b) Ancho de Banda de 3 dB. Sea B este ancho de banda. Por definición,

$$\frac{1}{\sqrt{[1-(2\pi BRC)^2]^2+(4\pi BRC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$B=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2\pi RC}$. Para $R = 10^6$ y $C = 10^{-12}$, B = 102,431 kHz.

(c) $H(f)=\dfrac{1}{(RC)^2}\dfrac{1}{[\frac{1}{RC}+j2\pi f]^2}$

y del Problema 2.17(d), $h(t) = \frac{1}{(RC)^2} t \cdot \exp(-\frac{t}{RC}) u(t)$

(d) $x(t) = \Pi(\frac{t - T/2}{T})$; $h(t) = \frac{1}{(RC)^2} t \cdot \exp(-\frac{t}{RC}) u(t)$; $y(t) = h(t) * x(t)$

En este caso vamos a aplicar el procedimiento del Ejemplo 2.10(a).

Donde $y(x) \Rightarrow h(t)$ y $x(t) = \Pi(\frac{t - T/2}{T}) = u(t) - u(t - T)$.

De la Expresión (2.47),

$$z(x) \Rightarrow y(t) = \int_0^\infty h(t-\tau)d\tau - \int_T^\infty h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_0^\infty \frac{t-\tau}{(RC)^2} \exp(-\frac{t-\tau}{RC}) u(t-\tau)d\tau - \int_T^\infty \frac{t-\tau}{(RC)^2} \exp(-\frac{t-\tau}{RC}) u(t-\tau)d\tau$$

La primera integral es válida en el intervalo $0 < t \le T$, mientras que la segunda es válida para $T < t$; $u(t-\tau)$ implica que el límite superior es t. Entonces,

$$y(t) = \left[\int_0^t \frac{t-\tau}{(RC)^2} \exp(-\frac{t-\tau}{RC})d\tau\right] \Pi(\frac{t-T/2}{T}) - \left[\int_T^t \frac{t-\tau}{(RC)^2} \exp(-\frac{t-\tau}{RC})d\tau\right] u(t-T)$$

Resolviendo las integrales,

$$y(t) = \left[1 - (\frac{t+RC}{RC}) \exp(-\frac{t}{RC})\right] \Pi(\frac{t-T/2}{T}) - \left[1 + (\frac{-t+T-RC}{RC}) \exp(\frac{-t+T}{RC})\right] u(t-T)$$

En la Fig. P2.24(b) se muestra la salida y(t) para T = 0,8 seg y RC = 0,1

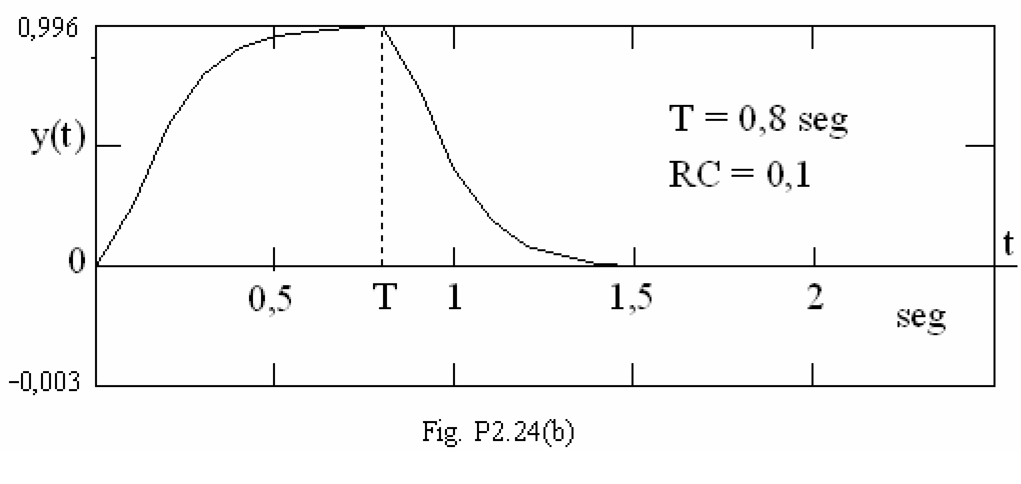


Fig. P2.24(b)

2.25.Transformadas de Hilbert. Demuestre que

(a) Si $x(t) = 2Af_m \mathrm{sinc}(2f_m t)$, entonces $\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi t}[1 - \cos(2\pi f_m t)]$

Solución:

$$x(t) = 2Af_m \sin c(2f_m t) \Leftrightarrow X(f) = 2Af_m \frac{1}{2f_m}\Pi(\frac{f}{2f_m}) = A\Pi(\frac{f}{2f_m})$$

$$\hat{X}(f) = -j\mathrm{sgn}(f)X(f) = jA\Pi(\frac{f + f_m/2}{f_m}) - jA\Pi(\frac{f - f_m/2}{f_m})$$

$$\hat{x}(t) = jAf_m \sin c(f_m t)\exp(-j2\pi\frac{f_m}{2}t) - jA\sin c(f_m t)\exp(j2\pi\frac{f_m}{2}t)$$

$$\hat{x}(t) = 2Af_m \sin c(f_m t)\mathrm{sen}(\pi f_m t) = 2Af_m \frac{\mathrm{sen}(\pi f_m t)}{\pi f_m t}\mathrm{sen}(\pi f_m t)$$

$$\hat{x}(t) = \frac{2A}{\pi t}\mathrm{sen}^2(\pi f_m t) = \frac{A}{\pi t}[1 - \cos(2\pi f_m t)]$$

(b) Si $x(t) = 2Af_m \mathrm{sinc}^2(f_m t)\cdot \mathrm{sen}(2\pi f_c t)$, entonces, para $f_c \geq f_m$

$\hat{x}(t) = -2Af_m \mathrm{sinc}^2(f_m t)\cdot\cos(2\pi f_c t)$

Solución:

$$X(f) = jA\left[\Lambda(\frac{f+f_c}{f_m}) - \Lambda(\frac{f-f_c}{f_m})\right];\ \hat{X}(f)=-j\mathrm{sgn}(f)X(f)=-A\Lambda(\frac{f+f_c}{f_m}) - A\Lambda(\frac{f-f_c}{f_m})$$

$$\hat{x}(t) = -Af_m \sin c^2(f_m t)\exp(j2\pi f_c t) - Af_m \sin c^2(f_m t)\exp(-j2\pi f_c t)$$

$$\hat{x}(t) = -2Af_m \sin c^2(f_m t)\cos(2\pi f_c t)$$

(c) $x(t) = \frac{At}{T}\Pi(\frac{t - T/2}{T});\quad \hat{x}(t)=\frac{A}{\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{t-\tau}\Pi(\frac{\tau - T/2}{T})d\tau$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi T}[-T + t\ln|t| - t\ln|T-t|] = \frac{A}{\pi T}\left[t\ln|\frac{t}{T-t}| - T\right] = \frac{A}{\pi T}t\cdot\ln\left|\frac{t}{T-t}\right| - \frac{A}{\pi}$$

(d) $x(t) = 2Af_m \sin c^2(f_m t)\mathrm{sen}(2\pi f_m t);\quad \hat{x}(t)= -2Af_m \sin c^2(f_m t)\cos(2\pi f_c t)$

Envolvente de x(t) ➔ $\tilde{z}(t) = z_x(t)\exp(-j2\pi f_c t) = x_c(t) + jx_s(t)$

Pero $z_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t);\quad \tilde{z}_x(t)=[x(t)+j\hat{x}(t)]\exp(-j2\pi f_c t)$

$$\tilde{z}_x(t) = 2Af_m \sin c^2(f_m t)[\mathrm{sen}(2\pi f_c t) - j\cos(2\pi f_c t)]\exp(-j2\pi f_c t)$$

$\tilde{z}_x(t) = -j2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)$ envolvente compleja de x(t)

$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)$

$x_c(t) = 2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) - 2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\cos(2\pi f_c t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)$

$x_c(t) = 0$

$x_s(t) = -2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) - 2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)$

$x_s(t) = -2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)[\cos^2(2\pi f_c t) + \operatorname{sen}^2(2\pi f_c t)]$

$x_s(t) = -2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)$

Se verifica que $\tilde{z}_x(t) = x_c(t) + jx_s(t) = 0 - j2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t) = -j2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)x_s(t)dt = 0$ es directo pues $x_c(t) = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)\right]\left[-2Af_m \operatorname{sinc}^2(f_m t)\cos(2\pi f_c t)\right]dt$$

$$= -(2Af_m)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(f_m t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)dt$$

El integrando es una función impar de t, y como se integra de $-\infty$ a $+\infty$, el resultado es cero, de donde, $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0$

2.26. Sea

$$m_1(t) = AB\,\mathrm{sinc}^2(Bt) \Leftrightarrow M_1(f) = A\Lambda(\frac{f}{B})$$

$$m_2(t) = 2AB\,\mathrm{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow M_2(f) = A\Pi(\frac{f}{2B})$$

$$f_c = \frac{5B}{2}$$

(a) $x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}_1(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$

Por inspección, $x(t)$ es una señal modulada en banda lateral única (SSB). Su espectro se muestra en la Fig. P2.26(a).

(b) $x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}_2(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$

$$m_1(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{A}{2}\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + \frac{A}{2}\Lambda(\frac{f-f_c}{B})$$

cuyo espectro se muestra en (b).

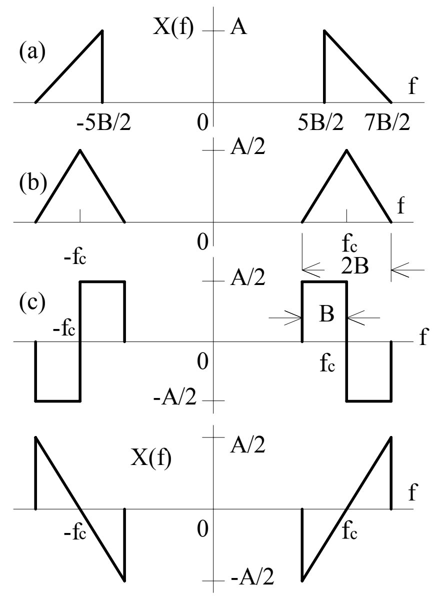


Fig. P2.26

$$\hat{M}_2(f) = -j\mathrm{sgn}(f)M_2(f) = jA\Pi(\frac{f+B/2}{B}) - jA\Pi(\frac{f-B/2}{B})$$

$$\hat{m}_2(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{j}{2}\left[\hat{M}_2(f+f_c) - \hat{M}_2(f-f_c)\right]$$

$$= \frac{j}{2}\left[jA\Pi(\frac{f+B/2+f_c}{B}) - jA\Pi(\frac{f-B/2+f_c}{B}) - \right.$$

$$\left. -jA\Pi(\frac{f+B/2-f_c}{B}) + jA\Pi(\frac{f-B/2-f_c}{B})\right]$$

$$\hat{m}_2(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{A}{2}\left[-\Pi(\frac{f+B/2+f_c}{B}) + \Pi(\frac{f-B/2+f_c}{B}) + \right.$$

$$\left. +\Pi(\frac{f+B/2-f_c}{B}) - \Pi(\frac{f-B/2-f_c}{B})\right]$$

Este espectro se muestra en la Fig. P2.26(c).

El espectro de $x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}_2(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$ es la suma de los espectros mostrados en (b) y (c). Este espectro resultante se muestra en (d).

2.27. Si $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle$; $R_{\hat{x}}(\tau) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)$; $R_{x\hat{x}}(\tau) = \langle x(t)\hat{x}(t+\tau)$;

$R_{\hat{x}x}(\tau) = \langle \hat{x}(t)x(t+\tau)\rangle$ y $z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$, demuestre que

$R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$; $R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$

$R_z(\tau) = 2[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)]$; $\hat{R}_x(0) = 0$

donde $\hat{R}_x(\tau)$ es la Transformada de Hilbert de $R_x(\tau)$.

Solución:

Sabemos que $R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f)$ y $|X_T(f)|^2 = |\hat{X}_T(f)|^2$, donde $x_T(t)$ es la señal truncada de x(t). Asimismo,

$S_x(f) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{|X_T(f)|^2}{T} = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{|\hat{X}_T(f)|^2}{T}$; por lo tanto, $R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f) = S_{\hat{x}}(f)$, lo cual implica que $R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$.

$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$; $R_z(\tau) = \langle z^*(t)z(t+\tau)\rangle = \langle [x(t) - j\hat{x}(t)][x(t+\tau) + j\hat{x}(t+\tau)]\rangle$

Desarrollando $R_z(\tau)$, llegamos a

$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_{\hat{x}}(\tau) + jR_{x\hat{x}}(\tau) - jR_{\hat{x}x}(\tau) = 2R_x(\tau) + jR_{x\hat{x}}(\tau) - jR_{\hat{x}x}(\tau)$.

Hay que determinar $R_{x\hat{x}}(\tau)$ y $R_{\hat{x}x}(\tau)$.

$R_{x\hat{x}}(\tau) = \langle x(t)\hat{x}(t+\tau)\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\hat{x}(t+\tau)$; pero $\hat{x}(t) = h(t) * x(t)$

$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$ y $\hat{x}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t+\tau-\lambda)d\lambda$. Reemplazando en $R_{x\hat{x}}(\tau)$,

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t+\tau-\lambda)d\lambda\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau-\lambda)dt\right]d\lambda$$

La integral dentro de los corchetes es igual a $R_x(\tau-\lambda)$. Por lo tanto,

$R_{x\hat{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)R_x(\tau-\lambda)d\lambda = h(\tau) * R_x(\tau) = \hat{R}(\tau)$, donde $R_x(\tau)$ es la transformada de Hilbert de $R_x(\tau)$. Vemos entonces que $R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$.

Haciendo el mismo procedimiento, podemos demostrar que

$R_{\hat{x}x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)R_x(-\tau-\lambda)d\lambda = h(-\tau) * R_x(-\tau)$; pero $h(\tau) = \dfrac{1}{\pi\tau}$ y $h(-\tau) = \dfrac{-1}{\pi\tau} = -h(\tau)$.

Tambien $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$; por lo tanto, $R_{\hat{x}x}(\tau) = -h(\tau) * R_x(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$. De donde, $R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$, y por consiguiente, $R_z(\tau) = 2\left[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)\right]$.

Por definición, $R_{x\hat{x}}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\hat{x}(t+\tau)dt$,

Para $\tau = 0$, $R_{x\hat{x}}(0) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\hat{x}(t)dt$, pero como $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son ortogonales, es decir, que $\int x(t)\hat{x}(t)dt = 0$ para todo t, entonces

$R_{x\hat{x}}(0) = R_{\hat{x}x}(0) = 0$ y también $\hat{R}_x(0) = 0$.

2.28. Sea el "detector sincrónico o coherente" mostrado en el Problema de Aplicación 1.40, Fig. 1.77 del texto. Nótese que este detector tiene la misma forma que la rama superior de la Fig. 2. 34(a). Sea entonces m(t) una señal mensaje pasabajo portadora de información. El filtro es ideal y de ganancia unitaria.

(a) Demuestre que si x(t) es una señal modulada en doble banda lateral de la forma

$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$, entonces, $y(t) = m(t)$

(b) Demuestre también que si x(t) es una señal modulada en banda lateral única de la forma

$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$

entonces $y(t) = m(t)$

Solución: (a)

De la Fig. 1.77, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = x(t)2\cos(2\pi f_c t) = m(t)2\cos^2(2\pi f_c t) = m(t) + m(t)2\cos(2\pi 2f_c t)$$

El filtro pasabajo elimina las componentes de alta frecuencia (alrededor de $2f_c$) y solamente deja pasar m(t), de donde

Y(t) = m(t)

(b) A la salida del multiplicador,

$$x_i(t) = x(t)2\cos(2\pi f_c t) = m(t)2\cos^2(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)2\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)$$

$$x_i(t) = m(t) + m(t)\cos(2\pi 2f_c t) - \hat{m}(t)\mathrm{sen}(2\pi 2f_c t)$$

El filtro elimina las componentes de alta frecuencia, quedando y(t) = m(t).

El detector sincrónico permite entonces extraer o detectar una señal mensaje m(t) pasabajo contenida en una señal modulada en doble banda lateral o en banda lateral única. La única restricción existente es que si la frecuencia máxima de la señal mensaje es f_m y el ancho de banda del filtro pasabajo es B, entonces debe verificarse siempre que $f_c \ge B \ge f_m$, para no perder la información contenida en la señal mensaje m(t). En la práctica, generalmente $f_c >> f_m$, $f_c >> B$ y $B \ge f_m$.

2.29. Considere la combinación RC mostrada en la Fig. P2.29.

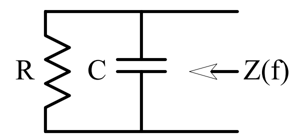


Fig. P2.29

Demuestre que el voltaje eficaz de ruido térmico en sus terminales es, para $B \to \infty$

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

Obsérvese que el voltaje eficaz de ruido resulta ser independiente de la resistencia R. La razón es que, mientras que el voltaje eficaz por unidad de ancho de banda es proporcional a R, el ancho de banda equivalente sobre el cual aparece el ruido en los terminales es inversamente proporcional a R y los dos efectos se cancelan.

Solución:

Aplicaremos la "Fórmula de Nyquist", expresión (2.140) del Texto.

De la Fig. P2.29, $\dfrac{1}{Z(f)} = j2\pi fC + \dfrac{1}{R} = \dfrac{1 + j2\pi RCf}{R}$

$$Z(f) = \frac{R}{1 + j2\pi RCf} = \frac{R(1 - j2\pi RCf)}{(1 + j2\pi RCf)(1 - j2\pi RCf)} = \frac{R}{1 + (2\pi RCf)^2} - j\frac{2\pi R^2 Cf}{1 + (2\pi RCf)^2}$$

siendo $R(f) = \dfrac{R}{1 + (2\pi RCf)^2}$ la parte real de Z(f). De la Fórmula de Nyquist,

$$v_{ef}^2 = 2kT\int_{-B}^{B} R(f)df = 2kTR\int_{-B}^{B} \frac{df}{1 + (2\pi RCf)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{kT}{C}\text{arctg}(2\pi BRC)$$

Si se desea el valor de v_{ef} para todo B, es decir, en todo el dominio de la frecuencia,

$B \to \infty$, en cuyo caso, $\text{arctg}(2\pi BRC) = \dfrac{\pi}{2}$, $v_{ef}^2 = \dfrac{kT}{C}$, de donde

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

2.30. Sea la red sin ruido de la Fig. P2.30 a cuya entrada se conecta una resistencia ruidosa R.

Determine el valor eficaz del voltaje de ruido en los terminales de salida cuando H(f) representa:

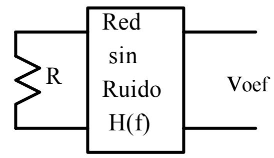


Fig. P2.30

(a) Un filtro pasabajo ideal de ganancia h_o y ancho de banda B.
[Respuesta: $v_{oef} = h_o\sqrt{4kTRB}$]

(b) Un filtro pasabanda ideal de ganancia h_o, ancho de banda 2B y centrado en la frecuencia f_c, donde $f_c > B$. [Respuesta: $v_{oef} = h_o\sqrt{8kTRB}$]

(a) Un filtro exponencial de la forma $H(f) = h_o \exp(-\frac{|f|}{B})$

[Respuesta: $v_{oef} = h_o\sqrt{\frac{kTB}{2}}$]

(d) Un filtro gaussiano de la forma $H(f) = h_o \exp(-\frac{f^2}{B^2})$

[Respuesta: $v_{oef} = h_o\sqrt{\frac{kTB}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$]

Solución:

(a) De la expresión (2.136) del Texto, el valor eficaz al cuadrado v_{ef}^2 de una resistencia es $v_{ef}^2 = 4kTRB$ y la densidad espectral $S_i(f)$ correspondiente es $S_i(f) = \frac{v_{ef}^2}{2B}$, expresión (2.138) del Texto. Si H(f) es la función de transferencia de la red, entonces, a la salida de la red $S_o(f) = |H(f)|^2 S_i(f) = 2kTR|H(f)|^2$.

Entonces, para un filtro ideal de ganancia h_o y ancho de banda B,

$H(f) = h_o\Pi(\frac{f}{2B})$ y $|H(f)|^2 = h_o^2\Pi(\frac{f}{2B})$; $S_o(f) = 2kTRh_o^2\Pi(\frac{f}{2B})$, cuya potencia promedio es $v_{ef}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f)df = 2kTRh_o^2\int_{-B}^{B} df = 4kTRBh_o^2$, de donde, $v_{oef} = h_o\sqrt{4kTRB}$.

(b) Para un filtro pasabanda ideal, de ancho de banda 2B y centrado en f_c,

$$H(f) = h_o\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + h_o\Pi(\frac{f-f_c}{2B}); \quad |H(f)|^2 = h_o^2\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + h_o^2\Pi(\frac{f-f_c}{2B})$$

$S_o(f) = 2kTRh_o^2\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]$, cuya potencia promedio es

$$v_{oef}^2 = 2kTRh_o^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]df$$

pero $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Pi(\frac{f+f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f-f_c}{2B})\right]df == 2x2B = 4B$; de donde, $v_{oef}^2 = 8kTRBh_o^2$

$$v_{oef} = h_o^2\sqrt{8kTRB}$$

(c) $H(f) = h_o\exp(-\frac{|f|}{B})$; $|H(f)|^2 = h_o^2\exp(-2\frac{|f|}{B})$. Si $S_x(f)$ es la densidad espectral de potencia disponible, entonces, de (2.143), $S_x(f) = \frac{kT}{2}$.

A la salida del filtro, $S_o(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \frac{h_o^2 kT}{2}\exp(-2\frac{|f|}{B})$.

La potencia de ruido a la salida será $N_o = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f)df = \frac{h_o^2 kTB}{2}$

pero $v_{oef} = \sqrt{N_o} = h_o\sqrt{\frac{kTB}{2}}$

(d) $H(f) = h_o\exp(-\frac{f^2}{B^2})$; $|H(f)|^2 = h_o^2\exp(-2\frac{f^2}{B^2})$; $S_x(f) = \frac{kT}{2}$

$S_o(f) = \frac{h_o^2 k}{2}\exp(-\frac{2f^2}{B^2})$; $N_o = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f)df = \frac{h_o^2 kTB}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Por lo tanto,

$$v_{oef} = \sqrt{N_o} = h_o\sqrt{\frac{kTB}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

2.31. Demuestre que el valor eficaz de la corriente de ruido en un circuido RL serie es $i_{ef} = \sqrt{kT/L}$

Solución:

Por analogía con la expresión (2.140) del Texto, el cuadrado del valor eficaz de la corriente de ruido en un circuito de ancho de banda arbitrario es

$i_{ef}^2 = 2kT\int_{-B}^{B} Y_R(f)df$, donde $Y_R(f)$ es la parte real de la admitancia compleja vista en los terminales del dipolo. Entonces, para un circuito RL serie, la admitancia compleja es

$$Y(f) = \frac{1}{R + j2\pi Lf} = \frac{R - j2\pi Lf}{(R + j2\pi Lf)(R - j2\pi Lf)} = \frac{R}{R^2 + (2\pi Lf)^2} - j\frac{2\pi Lf}{R^2 + (2\pi Lf)^2}$$

$$Y_R(f) = \frac{R}{R^2 + (2\pi Lf)^2}; \quad i_{ef}^2 = 2kT\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{R^2 + (2\pi Lf)^2} df = \frac{kT}{L}; \quad \text{de donde,}$$

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{kT}{L}}$$

2.32. Demuestre que la densidad espectral de potencia de la tensión de ruido en un circuito RL paralelo es $S_n(f) = 2kTR$.

Solución:

La impedancia del circuito RL paralelo es $Z(f) = \dfrac{j2\pi RLf}{R + j2\pi Lf} = \dfrac{j2\pi RLf(R - j2\pi Lf)}{R^2 + (2\pi Lf)^2}$

$$R(f) = \frac{Rf^2}{(\frac{R}{2\pi L})^2 + f^2}$$

$$S_n(f) = \frac{v_{ef}^2}{2B} = \frac{2kT}{2B}\int_{-\infty}^{\infty} R(f)df = \frac{kT}{B}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Rf^2}{(\frac{R}{2\pi L})^2 + f^2} df = 2kTR$$

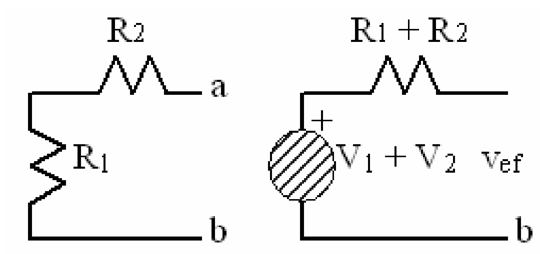
2.33. Dos resistencias, de 1000 Ohm cada una, están a una temperatura de 300 y 400 kelvins, respectivamente. Determinar el voltaje eficaz de ruido cuando (a) las resistencias están en serie y (b) cuando están en paralelo. El ancho de banda en ambos casos es de 100 kHz.

(a) Resistencias en Serie, Fig. P2.33(a).

$$V_1 = \sqrt{4kT_1R_1B} = v_{1ef}; \quad V_2 = \sqrt{4kT_2R_2B} = v_{2ef}$$

$$v_{ef}^2 = v_{1ef}^2 + v_{2ef}^2 = 4kB(T_1R_1 + T_2R_2)$$

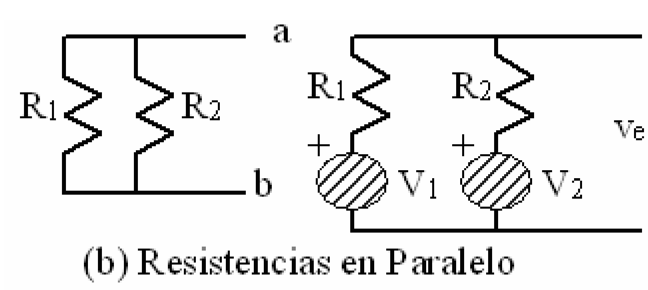
$$v_{ef} = \sqrt{4kB(T_1R_1 + T_2R_2} = 1{,}996\text{x}10^{-6} \text{ V}$$



(a) Resistencias en Serie
Fig. P2.33(a)

(b) Resistencias en Paralelo, Fig. P2.33(b)
De la Fig. P2.33(b),

$$v_{1ef} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}V_1; \quad v_{2ef} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_2$$



(b) Resistencias en Paralelo
Fig. P2.33(b)

$$v_{ef}^2 = \left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right]^2 V_1^2 + \left[\frac{R_1}{R_1+R_2}\right]^2 V_2^2$$

$$v_{ef} = \sqrt{\left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right]^2 4kT_1R_1B + \left[\frac{R_1}{R_1+R_2}\right]^2 4kT_2R_2} = 9{,}829\text{x}10^{-7}\ \text{V}$$

2.34. Determine el ancho de banda equivalente B_N del ruido de las redes cuyas funciones de transferencia son:

(a) $H(f) = h_o \exp(-\frac{|f|}{B})$; [Respuesta: $B_N = \frac{B}{2}$]

(b) $H(f)=h_o \exp(-\frac{f^2}{B^2})$; [Respuesta: $B_N = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{B}{2}$]

(c) $H(f)=h_o \operatorname{sinc}(\frac{f}{B})$; [Respuesta: $B_N = \frac{B}{2}$]

(d) $H(f) = h_o\left[\operatorname{sinc}(\frac{f+f_c}{B}) + \operatorname{sinc}(\frac{f-f_c}{B})\right]$ $\quad f_c >> B$ [Respuesta: $B_N = B$]

(e) $H(f) = h_o\left[\exp(-\frac{|f+f_c|}{B}) + \exp(-\frac{|f-f_c|}{B})\right]$ $\quad f_c >> B$ [Respuesta: $B_N = B$]

Solución:

(a) $H(f) = h_o \exp(-\frac{|f|}{B})$. El ancho de banda equivalente del ruido es

$$B_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2}{2|H(f)|^2_{max}};\quad |H(f)|^2 = H(f)H(-f) = h_o^2\exp(-2\frac{|f|}{B});\quad |H(f)|^2_{max} = h_o^2$$

$\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df = h_o^2\int_0^{\infty}\exp(-2\frac{f}{B})df = h_o^2 B$. De donde

$$B_N = \frac{h_o^2 B}{2h_o^2} = \frac{B}{2}$$

(b) $H(f) = h_o\exp(-\frac{f^2}{B^2})$; $\quad |H(f)|^2 = h_o^2\exp(-2\frac{f^2}{B^2})$; $\quad |H(f)|^2_{max} = h_o^2$

$$B_N = \frac{1}{2}2\int_0^{\infty}\exp(-2\frac{f^2}{B^2})df = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}B = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{B}{2}$$

(c) $H(f) = h_o \operatorname{sinc}(\frac{f}{B})$; $|H(f)|^2 = H(f)H(-f) = h_o^2 \operatorname{sinc}(\frac{f}{B}) \operatorname{sinc}(-\frac{f}{B}) = h_o^2 \operatorname{sinc}^2(\frac{f}{B})$

$|H(f)|^2_{max} = h_o^2$; $\quad B_N = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(\frac{f}{B})df = \frac{B}{2}$

(d) Cuando el filtro es pasabanda y centrado en una frecuencia f_c, la función de transferencia H(f) se puede escribir en la forma $H(f) = G(f+f_c) + G(f-f_c)$.

Si el filtro es de banda angosta y $f_c >> B_N$, $|H(f)|^2$ se puede escribir en la forma

$|H(f)|^2 = |G(f+f_c)|^2 + |G(f-f_c)|^2$, y el ancho de banda B_N vendrá dado por

$$B_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f-f_c)|^2 df}{|G(f-f_c)|^2_{max}}$$

Esta expresión la podemos simplificar si observamos que

$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f-f_c)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$, pues un desplazamiento en el eje de la frecuencia no afecta al valor de la integral. En este caso, el ancho de banda B_N vendrá dado por

$$B_N = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}{|G(f)|^2_{max}}$$

Nótese que el ancho de banda B_N está centrado en las frecuencias $\pm f_c$. Nótese también que este ancho de banda es el doble que el ancho de banda B_N en el caso pasabajo.

Para el caso presente, $H(f) = h_o\left[\operatorname{sinc}(\frac{f+f_c}{B}) + \operatorname{sinc}(\frac{f-f_c}{B})\right]$ con $f_c >> B$

$G(f-f_c) = h_o \operatorname{sinc}(\frac{f-f_c}{B})$; $G(f) = h_o \operatorname{sinc}(\frac{f}{B})$; $|G(f)|^2 = h_o^2 \operatorname{sinc}^2(\frac{f}{B})$; $|G(f)|^2_{max} = h_o^2$

$$B_N = \frac{h_o^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(\frac{f}{B})df}{h_o^2} = B$$

(e) $H(f) = h_o\left[\exp(-\frac{f+f_c}{B}) + \exp(-\frac{f-f_c}{B})\right]$ con $f_c >> B$

$$G(f-f_c)=h_o\exp(-\frac{|f-f_c|}{B});\;\; G(f)=h_o\exp(-\frac{|f|}{B});\;\; |G(f)|^2=h_o^2\exp(-2\frac{|f|}{B});\;\; |G(f)|^2_{max}=h_o^2$$

$$B_N=2\int_0^\infty \exp(-2\frac{f}{B})df=B$$

2.35. Un amplificador de alta ganancia tiene una cifra de ruido de 9,031 dB, una ganancia de potencia de 50 dB y un ancho de banda equivalente del ruido de 10 kHz.

(a) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido es $T_e=2030$ kelvins

(b) Determine la potencia disponible de salida si la resistencia de la fuente a la entrada del amplificador tiene una temperatura de ruido $T_s=T_o=290$ kelvins. Repetir cuando $T_s=\frac{T_o}{4}$, $T_s=10T_o$ y $T_s=100T_o$.

Solución:

(a) La temperatura efectiva del ruido del amplificador es

$$T_e=(F-1)T_o=(8-1)290=2030\ \text{kelvins}$$

(b) $T_s=T_o=290$ kelvins; $T_e=2030$ kelvins

Potencia disponible de entrada: $N_i=kT_sB$

Potencia disponible de salida:

$$N_o=G_pN_i+G_pkT_eB=G_pkT_sB+G_pkT_eB=G_pk(T_s+T_e)B$$

La temperatura equivalente del sistema (fuente + amplificador) es

$T_a=T_s+T_e$ cuya cifra de ruido es $F_a=1+\frac{T_a}{T_o}$. Entonces, para

$T_s=T_o=290$ kelvins; $N_o=3{,}202\text{x}10^{-11}\,W=-44{,}946$ dBμ; $T_a=2320$ kelvins; $F_a=9$

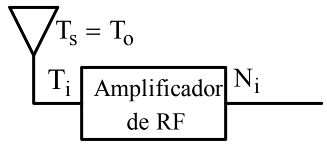
$T_s=T_o/4$; $N_o=2{,}901\text{x}10^{-11}\,W=-45{,}374$ dBμ; $T_a=2103$ kelvins; $F_a=8{,}25$

$T_s=10T_o$; $N_o=6{,}803\text{x}10^{-11}\,W=-41{,}673$ dBμ; $T_a=4930$ kelvins; $F_a=18$

$T_s=100T_o$; $N_o=4{,}283\text{x}10^{-10}\,W=-33{,}683$ dBμ; $T_a=31030$ kelvins; $F_a=108$

Nótese cómo se degradan la temperatura equivalente y la cifra de ruido del sistema (fuente + amplificador). Esto quiere decir que cuanto menor sea la temperatura de la fuente, mejor será el desempeño del sistema. Por ello en la práctica, sobre todo en la recepción de señales de muy bajo nivel (comunicación por satélites y radioastronomía), la temperatura de la antena debe ser lo más baja posible.

2.36. En la Fig. P2.36 se muestra la etapa de entrada (amplificador de RF) de un receptor. La cifra de ruido del amplificador es de 10 dB y ganancia de potencia de 80 dB. El ancho de banda equivalente del ruido es de 6 MHz y se supone que la temperatura de ruido de la antena es



ETAPA DE ENTRADA
Fig. P2.36

$$T_s = T_o = 290 \quad \text{kelvins}$$

Demuestre que la temperatura neta T_i de entrada al amplificador es de 2900 kelvins, y que la potencia disponible de ruido a su salida es $N_i = -16{,}196\ \text{dBm}$.

Solución:

La temperatura equivalente del amplificador es $T_e = (F-1)T_o = 2610$ kelvins

A la entrada del amplificador la potencia es $N_i = 2{,}401\text{x}10^{-4}$W, y a la salida,

$N_i = G_p k T_s B + G_p k T_e B = G_p k (T_s + T_e) B$. Entonces,

$T_i = T_s + T_e$; $N_i = G_p k T_i B$; $F_i = 1 + \dfrac{T_i}{T_o}$. Dando valores numéricos, obtenemos:

$T_i = 2900$ kelvins; $N_i = 2{,}401\text{x}10^{-5}$ W = - 16,196 dBm; $F_i = 11$

2.37. Sea el sistema de la Fig. P2.37, donde

$x_r(t) = \sqrt{2}\text{x}10^{-6}\cos(2\pi\text{x}10^4 t)\cos(2\pi\text{x}10^6 t)$

$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-19}\exp[-10^{-6}\text{Ln}2\cdot|f|]$

El sistema es pasabanda, de ancho de banda de 20 kHz y centrado en $f_c = 1$ MHz. Demuestre:

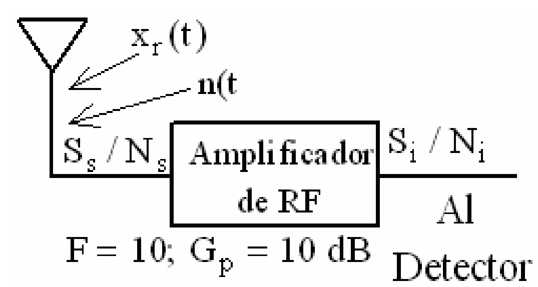


Fig.P2.37

(a) Que la relación S_s / N_s a la entrada del amplificador es de 23,585 dB.

(b) Que la contribución del ruido a la salida debida al ruido propio del amplificador es de $7{,}204\text{x}10^{-15}$ W.

(c) Que la relación de predetección S_i / N_i es de 22,35 dB.

Solución:

(a) $x_r(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}10^{-6}\left\{\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_c)t\right\}$. La potencia de señal es

$$S_s = \langle x_r^2(t) \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}10^{-6}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}10^{-6}\right]^2 = 5x10^{-13}\ \text{W} = -123{,}01\ \text{dB}$$

Dentro de un ancho de banda de 20 kHz centrado en 1 MHz, la potencia de ruido es

$$N_s = 2\int_{990x10^3}^{1010x10^3} 10^{-19}\exp[-10^{-6}\text{Ln}(2)f] = 2{,}19x10^{-5}\ \text{W} = -123{,}01\ \text{dB}\text{, de donde}$$

$$\frac{S_s}{N_s} = \frac{5x10^{13}}{2{,}19x10^{-5}} = 228{,}311 = 23{,}585\ \text{dB}$$

(b) Para el amplificador: $F_a = 10$; $G_p = 10$; $T_e = (F\text{-}1)T_o = 2610$ kelvins

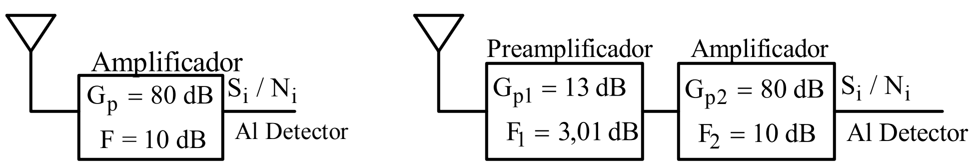
Sea N_{ao} el ruido propio del amplificador a la salida, Entonces,

$$N_{ao} = G_p k T_e B = 7{,}204x10^{-15}\ \text{W} = -111{,}425\ \text{dBm}$$

(c) La potencia útil de entrada es $S_i = G_p S_s$ y la potencia de ruido $N_i = G_p N_s + N_{ao}$

La relación S_i/N_i de predetección será: $\dfrac{S_i}{N_i} = \dfrac{G_p S_s}{G_p N_s + N_{ao}} = 171{,}8 = 22{,}35\ \text{dB}$

2.38. Sean los dos sistemas representados en la Fig. P2.38. En antena, la potencia de señal es de 10^{-12} W y la potencia de ruido de $2{,}4x10^{-14}$ W. El ancho de banda es de 6 MHz.



(a) Conexión sin Preamplificador (b) Conexión con Preamplificador

Fig. P2.38

(a) Demuestre que para la configuración (a), $\dfrac{S_i}{N_i} = 6{,}2$ dB.

(b) Demuestre que para la configuración (b), $\dfrac{S_i}{N_i} = 12{,}305$ dB, y que la cifra de ruido total de los dos amplificadores se ha reducido a $F_{12} = 2{,}45$. Demuestre también que la temperatura total efectiva de ruido es ahora 420,5 kelvins.

Repita la parte (b) si $F_1 = 13{,}01$ dB. Compare estos resultados con los ya obtenidos. ¿Qué se puede decir al respecto?

Solución:

(a) $S_{xa} = 10^{-12}\,W;\;\; N_a = 2,4x10^{-14}\,W;\;\; B = 6x10^6\,Hz;\;\; G_p = 80dB = 10^8;\;\; F = 10dB = 10$

$T_e = (f-1)T_o = 2610$ kelvins .

Potencia útil a la salida: $S_i = G_p S_{xa} = 10^{-4}\,W$

Potencia de ruido a la salida: $N_i = G_p N_a + G_p k T_e B = 2,40x10^{-15}$, de donde

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{G_p S_{xa}}{G_p N_a + G_p k T_e B} = 4,165 = 6,196 \text{ dB}$$

(b) Conexión con preamplificador.

$F_1 = 2;\;\; G_{p1} = 13dB = 19,953;\;\; F_2 = 10;\;\; G_{p2} = 10^8$

$T_{e1} = (F_1 - 1)T_o = 290$ kelvins; $T_{e2} = (F_2 - 1)T_o = 2610$ kelvins

Potencia útil

A la salida del preamplificador, $S_1 = G_{p1} S_{xa} = 1,995x10^{-11}\,W$

A la salida del amplificador, $S_i = G_{p2} S_1 = G_{p1} G_{p2} S_{xa} = 2x10^{-3}\,W$

Potencia de ruido

A la salida del preamplificador, $N_1 = G_{p1} N_a + G_{p1} k T_{e1} B = 9,579x10^{-3}\,W$

A la salida del amplificador, $N_i = G_{p2} N_1 + G_{p2} k T_{e2} B$

$$N_i = G_{p1} G_{p2} N_a + G_{p1} G_{p2} k T_{e1} B + G_{p2} k T_{e2} B = 1,174x10^{-4}\,W$$

$$\frac{S_i}{N_i} = 16,995 = 12,305 \text{ dB}$$

Para los dos amplificadores en cascada, se tiene:

$$T_{e12} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} = 420,77 \text{ kelvins} \;\; y \;\; F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p1}} = 2,451$$

Vamos a repetir los cálculos para $F_1 = 13,01\text{ dB} = 20$. En este caso,

$S_1 = 1,995x10^{-11}\,W;\;\; S_i = 2x10^{-3}\,W;\;\; N_1 = 9,581x10^{-12}\,W;\;\; N_i = 9,797x10^{4}\,W$

$$\frac{S_i}{N_i} = 2,037 = 3,089 \text{ dB};\;\; T_{e12} = 5640 \text{ kelvins};\;\; F_{12} = 20,45$$

Vemos que al aumentar la cifra de ruido del preamplificador, la relación S_i/N_i se ha degradado en 8,34 veces; la temperatura efectiva y la cifra de ruido del conjunto preamplificador-amplificador también han aumentado. La moraleja es que el primer amplificador de una cascada debe tener la mayor ganancia de potencia y la menor cifra de ruido o temperatura equivalente.

2.39. Sea el sistema de recepción de la Fig. P2.39. La temperatura efectiva de la antena es de 100 kelvins. La línea de transmisión tiene un factor de atenuación L = 2 dB y una temperatura física de 310 kelvins. Demuestre:

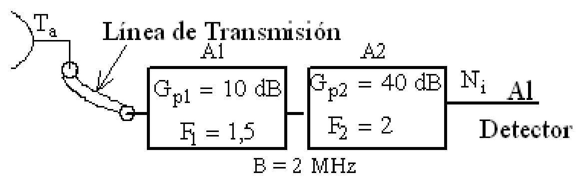


Fig. P2.39.

(a) Que la potencia de ruido Ni a la entrada del detector es de -60,315 dBm.

(b) Repetir la parte (a) pero intercalando entre la antena y la línea de transmisión un amplificador con una ganancia de potencia de 15 dB y una temperatura efectiva de 40 kelvins.
[Respuesta: $Ni = 8{,}506\text{x}10^{-9}$ W]

Solución:

(a) $T_o = 290$ kelvins; $T_a = 100$ kelvins; $L = 2\text{ dB} = 1{,}259$; $T_{pL} = 310$ kelvins

$$G_{p1} = 10; F_1 = 1{,}5; G_{p2} = 10^4$$

$$F_2 = 2;\ \ B = 2\text{x}10\ \ \text{Hz};\ T_{e1} = (F_1 - 1)T_o = 145 \text{ kelvins}$$

$$T_{e2} = (F_2 - 1)T_o = 290 \text{ kelvins};\ G_{pL} = \frac{1}{L};\ \ T_{eL} = (L-1)T_{pL} = 80{,}267 \text{ kelvins}$$

La antena produce una potencia de ruido $N_a = kT_aB$

A la salida de la línea de transmisión de atenuación L y temperatura efectiva T_{eL}, la potencia de ruido es $N_L = G_{pL}N_a + G_{pL}kT_{eL}B$

A la salida del amplificador A1 la potencia de ruido es $N_1 = G_{p1}N_L + G_{p1}kT_{e1}B$

Y a la salida del amplificador A2 o entrada del al detector,

$$N_i = G_{p2}N_1 + G_{p2}kT_{e2}B = 9{,}301\text{x}10^{-10}\,\text{W} = -60{,}315 \text{ dBm}$$

(b) Intercalando un preamplificador entre la antena y la línea de transmisión con

$T_{am} = 40$ kelvins; $G_{po} = 15 \text{ dB} = 31{,}623$

A la salida de la antena la potencia de ruido es $N_a = kT_sB$

A la salida del preamplificador, $N_{am} = G_{po}N_a + G_{po}kT_{am}B$

A la salida de la línea de transmisión, $N_L = G_{pL}N_{am} + G_{pL}kT_{eL}B$

A la salida del amplificador A1, $N_1 = G_{p1}N_L + G_{p1}kT_{eL}B$

A la salida del amplificador A2 o entrada al detector,

$N_i = G_{p2}N_1 + G_{p2}kT_{e2}B = 8,506x10^{-9}\,W = -50,703\ dBm$

Nótese que la inclusión de este amplificador entre la antena y la línea de transmisión mejoró el desempeño del sistema, pues el mejoramiento entre las dos configuraciones (con o sin preamplificador) se traduce en un aumento de 9,612 dB. Se puede aumentar esta diferencia aumentando la ganancia de potencia del preamplificador. Vamos a repetir la parte (b) pero el preamplificador tendrá una ganancia de potencia de 40 dB. El lector puede verificar que en este caso la potencia del ruido de salida es de $2,439x10^{-6}$ W y la diferencia entre las dos configuraciones será de 34,186 dB.

2.40. Sea una cadena de tres amplificadores cuyas características se muestran en la Fig. P2.40.

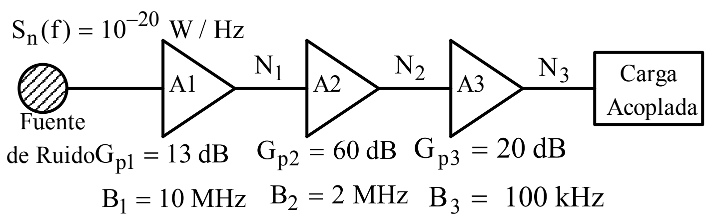


Fig. P2.40.

(a) Suponiendo que el ruido individual de los amplificadores es despreciable frente al ruido de entrada, demuestre que

$N_1 = -83,99$ dBm; $N_2 = -30,979$ dBm y $N_3 = -23,99$ dBm.

(b) Si las temperaturas efectivas de los amplificadores son $T_{e1} = 300$ kelvins, $T_{e2} = 400$ kelvins y $T_{e3} = 500$ kelvins, demuestre que

$N_1 = -83,172$ dBm, $N_2 = -30,113$ dBm y $N_3 = -23,123$ dBm.

¿Por qué no puede determinarse la temperatura efectiva de ruido, referida al amplificador compuesto?

Solución:

(a) $S_n(f) = 10^{-20}\,W/Hz$; $G_{p1} = 13\ dB = 19,953$; $B_1 = 10^7$ Hz; $G_{p2} = 60dB = 10^6$

$B_2 = 2x10^6\,Hz$; $G_{p3} = 20\ dB = 100$; $B_3 = 100\ kHz = 10^5$ Hz

Potencia de ruido a la entrada del amplificador A1, $N_s = 2B_1S_n(f) = 2x10^{-13}\,W$

A la salida del amplificador A1 la potencia será

$N_1 = G_{p1}N_s = G_{p1}2B_1S_n(f) = 3,991x10^{-12}\,W = -83,99\ dBm$

N_1 es la potencia contenida dentro de un ancho de banda $2B_1$; esto quiere decir que la densidad espectral de potencia a la entrada del amplificador A2 es

$$S_{n1}(f) = \frac{N_1}{2B_1} = G_{p1}S_n(f) = 19,953x10^{-20}\,W/Hz$$

La potencia a la entrada del amplificador A2 será

$$N_{e2} = 2B_2S_{n1}(f) = 7,981x10^{-13}\,W$$

y la potencia de salida del amplificador A2 es

$$N_2 = G_{p2}N_{e2} - 7,98x10^{-7}\,W = -30,979\text{ dBm}$$

La densidad espectral de potencia a la entrada del amplificador A2 es

$$S_{n2}(f) = \frac{N_2}{2B_2} = G_{p1}G_{p2}S_n(f) = 1,995x10^{-13}\,W/Hz$$

La potencia de entrada del amplificador A3 es

$N_{e3} = 2B_3S_{n2}(f)$, y su correspondiente potencia de salida será

$$N_3 = G_{p3}N_{e3} = 3,99x10^{-6}\,W = -23,99\text{ dBm}$$

(b) Tomando en cuenta ahora las temperaturas efectivas de los amplificadores

$$T_{e1} = 300\text{ kelvins};\quad T_{e2} = 400\text{ kelvins};\quad T_{e3} = 500\text{ kelvins}$$

Potencia de ruido a la entrada del amplificador A1

$$N_s = 2B_1S_n(f) = 2x10^{-13}\,W$$

Potencia de ruido a la salida del amplificador A1

$$N_1 = G_{p1}N_s + G_{p1}kT_{e1}B_1 = 4,817x10^{-12}\,W = -83,173\text{ dBm}$$

La correspondiente densidad espectral a la entrada del amplificador A2 es

$$S_{n1}(f) = \frac{N_1}{2B_1} = 2,408x10^{-19}\,W/Hz$$

La potencia a la entrada del amplificador A2 es $N_{e2} = 2B_2S_{n1}(f)$; su correspondiente potencia de salida será

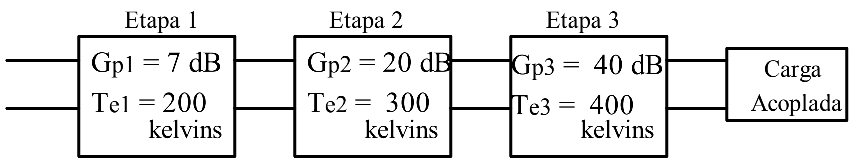
$$N_2 = G_{p2}N_{e2} + G_{p2}kT_{e2}B_2 = 9,744x10^{-7}\,W = -30,113\text{ dBm}$$

La densidad espectral a la entrada del amplificador A3 es $N_{e3} = 2B_3S_{n2}(f)$; su correspondiente potencia de salida será

$$N_3 = G_{p3}N_{e3} + G_{p3}kT_{e3}B_3 = 4,872x10^{-6}\,W = -23,123\text{ dBm}$$

Nótese en este caso particular que las potencias de ruido de salida de los amplificadores no han sido muy afectadas por la inclusión de sus potencias de ruido individuales. Pero la importancia de este problema es la de hacer énfasis en la importancia del ancho de banda; en efecto, el ancho de banda es diferente para cada etapa, situación que no es común en la práctica en donde el ancho de banda es el mismo para todas las etapas en cascada de un amplificador. Por otro lado, el tener anchos de banda diferentes para cada etapa impide la definición de la temperatura de ruido del amplificador compuesto.

2.41. Sea el sistema de tres etapas mostrado en la Fig. P2.41.



El ancho de banda es el mismo en las tres etapas
Fig. P2.41

(a) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido, referida a la entrada del sistema de tres etapas, es $T_e = 260{,}66$ kelvins

(b) Usando el resultado de la parte (a), demuestre que la cifra de ruido total del sistema es
$F = 1{,}899$.

(c) Verifique la cifra de ruido total calculada en (b) determinando las cifras de ruido individuales y combinando sus efectos.

Se le sugiere al lector repetir este problema intercambiando las diferentes etapas a fin de conseguir una configuración óptima, es decir, aquella con la mínima cifra de ruido total.

Solución:

Nótese que cuando se habla de la temperatura (o de la cifra de ruido) de un sistema referida a un punto en particular, se trata de la temperatura de todo el sistemas aguas abajo del punto de referencia sin tomar en cuenta qué es lo que hay aguas arriba de dicho punto.

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} + \frac{T_{e3}}{G_{p1}G_{p2}} = 260{,}66 \text{ kelvins}$$

(b) Determinar la cifra de ruido total: $F = 1 + \frac{T_e}{T_o} = 1{,}899$

(c) Hay que determinar las cifras de ruido individuales

$$F_1 = 1 + \frac{T_{e1}}{T_o} = 1,69; \quad F_2 = 1 + \frac{T_{e2}}{T_o} = 2,034; \quad F_3 = 1 + \frac{T_{e3}}{T_o} = 2,379$$

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{p1}G_{p2}} = 1,899. \text{ Resultado igual al de la parte (b)}$$

(d) Vamos a repetir el problema colocando los amplificadores en orden descendente de acuerdo con la ganancia de potencia. En este caso:

$$T_{e1} = 400 \text{ kelvins}; \quad G_{p1} = 10^4; \quad T_{e2} = 300 \text{ kelvins}; \quad G_{p2} = 100$$

$$T_{e3} = 200 \text{ kelvins}; \quad G_{p3} = 7 \text{ dB} = 5,012$$

$$F_1 = 1 + \frac{T_{e1}}{T_o} = 2,379; \quad F_2 = 1 + \frac{T_{e2}}{T_o} = 2,034; \quad F_3 = 1 + \frac{T_{e3}}{T_o} = 1,69$$

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} + \frac{T_{e3}}{G_{p1}G_{p2}} = 400,03 \text{ kelvins}; \qquad F = 1 + \frac{T_e}{T_o} = 2,379$$

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{p1}G_{p2}} = 2,379$$

Esta configuración es más desfavorable que la primera porque la temperatura de ruido de la primera etapa es la más alta. La única forma de mejorar el comportamiento del sistema es la de aumentar la ganancia del potencia de la primera etapa con el mínimo de temperatura efectiva T_e o cifra de ruido F. Nótese que la ganancia de la última etapa no influye ni en la temperatura ni en la cifra de ruido del amplificador compuesto.

2.42. Un cierto receptor tiene una temperatura efectiva de ruido T_{e1}. Suponga que una línea de transmisión de pérdidas L y temperatura física T_{pL} se agrega a la entrada del receptor.

Demuestre que la nueva temperatura de ruido, referida a la entrada del sistema línea-receptor es

$$T_e' = T_{e1} + (L-1)(T_{pL} + T_{e1}) = LT_{e1} + (L-1)T_{pL}$$

Nótese que en la Teoría de las Líneas de Transmisión se demuestra que si v_{ief} y v_{oef} son los valores eficaces del voltaje al principio y al final de una línea acoplada, entonces se verifica que $v_{oef} = v_{ief}\exp(-\alpha x)$, donde α es la constante de atenuación y x la longitud de la línea. En términos de potencia (normalizadas respecto a R = 1 Ohm), se puede escribir entonces $v_{oef}^2 = v_{ief}^2 \exp(-2\alpha x)$. Definiendo $v_{ief}^2 = P_{di}$ y $v_{oef}^2 = P_{do}$, y de acuerdo con la definición del factor de atenuación L, expresión (2.183), se tiene que $L = \exp(2\alpha x)$; vemos que el valor de L aumenta al aumentar la longitud de la línea. En este caso, la nueva temperatura de ruido a la entrada del sistema línea-receptor es

$$T_e' = T_{e1}\exp(2\alpha x) + [\exp(2\alpha x) - 1]T_{pL}$$

Solución:

Para la línea de transmisión $G_{pL} = \frac{1}{L}; \quad T_{eL} = (L-1)T_{pL}$

A la salida de la línea de transmisión o entrada del receptor la potencia de ruido es

$N_L = G_{p1}k(L-1)T_{pL}B$. G_1 es la ganancia del receptor. A la salida del receptor,

$$N_o = G_{p1}N_L + G_{p1}kT_{e1}B = G_{p1}G_{pL}k(L-1)T_{pL}B + G_{p1}kT_{e1}B$$

$N_o = G_{pL}G_{p1}k\left[(L-1)T_{pL} + \frac{T_{e1}}{G_{pL}}\right]B = G_p kT_e' B$, donde $G_p = G_{pL}G_{p1}$, y para $G_{pL} = 1/L$,

$T_e' = (L-1)T_{pL} + LT_{e1}$. Esta expresión la podemos escribir en la forma

$$T_e' = T_{e1} + (L-1)(T_{pL} + T_{e1})$$

2.43. Sea T_{e1} la temperatura efectiva de ruido de un receptor, y T_{PL} la temperatura física de la línea de transmisión que interconecta la antena con el receptor.

(a) Demuestre que el incremento ΔT_e en la temperatura efectiva T_e, referida a la entrada de la línea de transmisión, y el incremento ΔL de la atenuación L de la línea de transmisión, están relacionados mediante la ecuación

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta L} = T_{e1} + T_{PL}$$

(b) Si $T_{e1} = 150$ kelvins y $T_{PL} = 290$ kelvins, demuestre que por cada incremento de 0,1 dB en la atenuación L de la línea de transmisión, la temperatura efectiva de ruido del sistema aumenta aproximadamente en 10 kelvins. Verifique este resultado para valores arbitrarios de la atenuación L.

Solución:

Del Problema anterior, $T_e = (L-1)T_{pL} + LT_{e1}$. Para un incremento en L, es decir, para $L \to L + \Delta L$, la temperatura experimentará un incremento ΔT tal que $T_e \to T_e + \Delta T_e$.

Entonces,

$$T_e + \Delta T_e = (L + \Delta L - 1)T_{pL} + (L + \Delta L)T_{e1} = (L-1)T_{pL} + LT_{e1} + \Delta L(T_{pL} + T_{e1})$$

pero como $T_e = (L-1)T_{pL} + LT_{e1}$, entonces

$T_e + \Delta T_e = T_e + \Delta L(T_{pL} + T_{e1})$, de donde,

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta L} = T_{pL} + T_{e1}$$

(b) Sea N el aumento en dB cuanto la atenuación pasa de L a $L + \Delta L$, donde ΔL es el incremento absoluto de L. Debe verificarse que

$10\log(L + \Delta L) - 10\log(L) = N$. Despejando ΔL en esta expresión, obtenemos

$$\Delta L = (10^{\frac{N}{10}} - 1)L$$

Normalizando esta ecuación para cualquier valor de L, podemos hacer L = 1, de donde

$\Delta L = 10^{\frac{N}{10}} - 1$, y de la parte (a), $\Delta T_e = (10^{\frac{N}{10}} - 1)(T_{pL} + T_{e1})$

ΔL representa el incremento de cualquiera cantidad cuando el incremento mismo se expresa en dB y tiene un valor N. La ecuación de ΔL es una ecuación general.

Ejemplo: Sea T_{pL} = 290 kelvins; T_{e1} = 150 kelvins y N = 0,1 dB. Entonces, de las ecuaciones arriba obtenidas,

$\Delta L = (10^{0,01} - 1) = 0,023$ y $\Delta T_e = 10,249$ kelvins

El lector puede hacer la misma operación para diferentes valores de la atenuación L.

2.44. Sea el sistema de la Fig. P2.44.

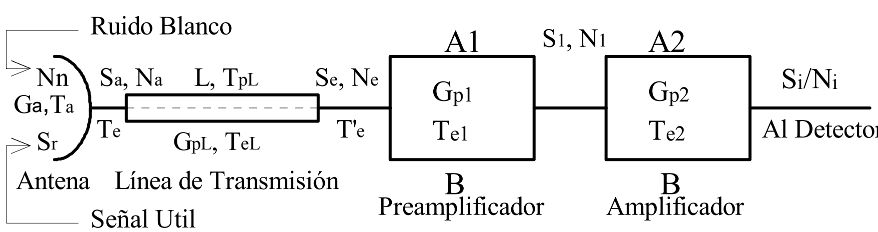


Fig. P2.44.

Datos: L = 2 dB = 1,585; T_o = 290 kelvins; $T_{pL} = T_o$; T_a = 100 kelvins

G_a = 50 dB = 10^5; G_{p1} = 40 dB = 10^4 ; T_{e1} = 150 kelvins;

G_{p2} = 20 dB = 100; T_{e2} = 300 kelvins; B = 10^5; $S_r = 10^{-8}$ W

$G_{pL} = \frac{1}{L}$; $T_{eL} = (L - 1)T_{pL}$

(a) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido T_e referida a la entrada de la línea de transmisión es T_e = 407,448 kelvins

(b) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido T_e' a la entrada del primer amplificador es T_e' = 150,03 kelvins

(c) Suponga que la temperatura de ruido de entrada a la antena es $T_n = 100$ kelvins. Demuestre que

La temperatura equivalente total del sistema es $T_e = 200{,}004$ kelvins

La cifra de ruido total es $F = 1{,}69$

La relación S_i/Ni es $\frac{S_i}{N_i} = 3{,}623x10^7 = 75{,}591\ dB$

Solución:

Vamos a analizar el sistema en forma global y de allí deduciremos los parámetros pedidos en las preguntas (a), (b) y (c). Para hacer más completo el análisis, vamos a suponer que la antena tiene una ganancia G_a y recibe una potencia útil S_r. La densidad espectral del ruido atmosférico es $\eta/2$ (ruido blanco). El ruido propio de la antena está caracterizado por la temperatura T_a. El ancho de banda del sistema es B.

Vamos a calcular primero la potencia útil, después la potencia de ruido y finalmente calcularemos la relación S_i/N_i de predetección. Sea entonces la Fig. P2.44.

Cálculo de la potencia útil

S_r es la potencia útil a la entrada de la antena

A la salida de la antena, $S_a = G_a S_r$

A la salida de la línea de transmisión, $S_e = G_{pL}S_a = G_a G_{pL} S_r$, donde $G_{pL} = \frac{1}{L}$

A la salida del amplificador A1, $S_1 = G_{p1}S_e = G_a G_{pL} G_{p1} S_r$

A la salida del amplificador A2, $S_i = G_a G_{pL} G_{p1} G_{p2} S_r = \frac{G_a G_{p1} G_{p2}}{L} S_r$ [A]

Cálculo de las potencias de ruido

A la entrada de la antena el ruido blanco produce una potencia $N_n = kT_nB$, donde T_n viene dada mediante la expresión (2.147) del Texto.

A la salida de la antena, $N_a = G_a kT_a B + G_a kT_n B = G_a k(T_a + T_n) = G_a kT_{an} B$

T_{an} es la temperatura total de la antena

A la salida de la línea de transmisión, $N_e = G_{pL}N_a + G_{pL}kT_{eL}B$, donde $T_{eL} = (L-1)T_{pL}$

$$N_e = G_a G_{pL} kT_{an} B + G_{pL} k(L-1)T_{pL} B = G_a G_{pL} k[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a}]B$$

A la salida del amplificador A1, $N_1 = G_{p1}N_e + G_{p1}kT_{e1}B$

$$N_1 = G_a G_{pL} G_{p1} k[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a}]B + G_{p1}kT_{e1}B = G_a G_{pL} G_{p1} k[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}}]B$$

A la salida del amplificador A2,

$$N_i = G_{p2}N_1 + G_{p2}kT_{e2}B = G_a G_{pL} G_{p1} G_{p2} k[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}}]B + G_{p2}kT_{e2}B$$

$$N_i = G_a G_{pL} G_{p1} G_{p2} k[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}} + \frac{T_{e2}}{G_a G_{pL} G_{p1}}]B \;\text{ y como }\; G_{pL} = \frac{1}{L},$$

$$N_i = \frac{G_a G_{pL} G_{p1}}{L} k\left[T_{an} + \frac{(L-1)T_{pL}}{G_a} + \frac{LT_{e1}}{G_a} + \frac{LT_{e2}}{G_a G_{p1}}\right]B.\text{ Finalmente,}$$

$$N_i = \frac{G_a G_{p1} G_{p2}}{L} k\left\{T_{an} + \frac{1}{G_a}\left[L(T_{pL} + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}}) - T_{pL}\right]\right\}B \qquad [B]$$

La relación S/N de predetección es, por supuesto, $\dfrac{S_i}{N_i}$.

La temperatura equivalente de todo el sistema, referida a la antena, será entonces

$$T_e = T_{an} + \frac{1}{G_a}\left[L(T_{pL} + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}}) - T_{pL}\right] \qquad [C]$$

También, la cifra de ruido total del sistema será $\quad F = 1 + \dfrac{T_e}{T_o} \qquad$ [D]

Nótese la gran influencia de la antena sobre la temperatura global del sistema. Cuanto más baja es la temperatura de la antena y más alta es su ganancia, la potencia de ruido será menor y más alta la relación de predetección S_i/N_i. Esto es de especial importancia en la recepción de señales débiles, como es el caso de las comunicaciones por satélite y la radioastronomía.

Nótese también la influencia de la línea de transmisión. El factor de atenuación L debe ser lo más bajo posible; con un buen diseño se puede optimizar este factor.

Ahora podemos responder a las preguntas (a), (b) y (c).

Datos: L = 2 dB = 1,585; T_o = 290 kelvins; $T_{pL} = T_o$; G_{p1} = 7 dB = 5,012;

T_{e1} = 150 kelvins; G_{p2} = 40 dB = 10^4; T_{e2} = 300 kelvins; B = 10^5; $S_r = 10^{-8}$W

$$G_{pL} = \frac{1}{L}; \quad T_{eL} = (L-1)T_{pL}$$

(a) Determinar la temperatura de ruido referida a la entrada de la línea de transmisión.

Solución:

La temperatura referida a la entrada a la línea de transmisión es la temperatura vista aguas abajo de la antena; es como si la antena no existiera. En este caso, en la expresión [C] antes deducida hacemos $T_a = 0$ y $G_a = 1$. La temperatura referida a la salida de la antena será, de [C]:

$$T_e = \left[L(T_{pL} + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}}) - T_{pL} \right] = 407{,}448 \text{ kelvins}$$

(b) Determinar la temperatura efectiva de ruido $T_e^{'}$ referida a la entrada del primer amplificador.

En este caso, $T_e^{'} = T_{e1} + \dfrac{T_{e2}}{G_{p1}} = 150{,}03$ kelvins

(c) Para $T_n = 100$ kelvins, obtenemos:

de [C]; $T_e = 200{,}04$ kelvins

de [D]: $F = 1{,}69$

de [A] y [B] : $\dfrac{S_i}{N_i} = 3{,}623 \text{x} 10^7 = 75{,}591$ dB

CAPITULO III

3.1. Sea una secuencia binaria de 1428 UNOS y 2668 CEROS. Demuestre que la probabilidad de recibir un UNO en un intervalo cualquiera es de 0,3486.

Solución:

Número de UNOS = N_1 = 1428;   Número de CEROS = N_0 = 2668

Número total de dígitos = $N = N_1 + N_0 = 4096$ dígitos

$$P\{\text{recibir un UNO}\} = \frac{N_1}{N} = \frac{1428}{4096} = 0{,}3486$$

Asimismo, $$P\{\text{recibir un CERO}\} = \frac{N_0}{N} = \frac{2668}{4096} = 0{,}6514$$

3.2. El experimento es el lanzamiento de dos dados.

(a) Demuestre que la probabilidad de obtener 8 puntos es de 5/36

(b) Demuestre que la probabilidad de obtener 7 puntos es de 1/6

(c) Demuestre que la probabilidad de obtener 5 puntos ó 7 puntos u 8 puntos es de 15/36.

Solución:

(a) El espacio S de resultados en el lanzamiento de dos dados es

$S = \{1-1, 1\text{-}2, 1\text{-}3, \ ....,6\text{-}4, 6\text{-}5, 6\text{-}6\}$. Son 36 resultados posibles; entonces,

$$P\{\text{obtener 8 puntos}\} = P\{2\text{-}6, 3\text{-}5, 4\text{-}4, 5\text{-}3, 6\text{-}2\} = \frac{5}{36}$$

(b) $$P\{\text{obtener 7 puntos}\} = P\{1\text{-}6, 2\text{-}5, 3\text{-}4, 4\text{-}3, 5\text{-}2, 6\text{-}1\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c) $$P\{\text{obtener 5 puntos ó 7 puntos u 8 puntos}\} = P(\text{obtener 5 puntos}\} +$$
$$+ P\{\text{obtener 7 puntos}\} + P\{\text{obtener 8 puntos}\}$$

pero $$P\{\text{obtener 5 puntos}\} = P\{1\text{-}4, 2\text{-}3, 3\text{-}1, 4\text{-}1\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P\{\text{obtener 5 puntos ó 7 puntos u 8 puntos}\} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

3.3. Demuestre que $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

Solución:

Sea la expresión (3.4) del Texto, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Reducimos entonces la suma de tres sucesos a la suma de dos sucesos en la forma

$\{A+B+C\} = \{(A+B)+C\}$. Por consiguiente,

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) - P[(A+B)C]$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC+BC)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - \{P(AC) + P(BC) - P[(AC)(BC)]$$

pero $(AC)(BC) = ABC$, de donde,

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

3.4. Una compañía construye receptores de radio de 6, 8 y 10 transistores. Estos receptores vienen en gabinetes de color marfil, negro y verde. En el depósito de la compañía hay 10000 receptores distribuidos en la forma siguiente

No. de Transistores	Color Marfil	Color Negro	Color Verde	TOTALES
6	1000	3000	2000	6000
8	600	1000	1000	2600
10	400	1000	0	1400
TOTALES	2000	5000	3000	10000

Una persona entra en el depósito y toma un receptor. Demuestre las siguientes probabilidades.

P{tomar un receptor verde} = 0,3

P{tomar un radio de 10 transistores} = 0,14

P{tomar un radio verde de 10 transistores} = 0

P{tomar un radio negro de seis transistores} = 0,3

Solución:

Vamos a utilizar la Tabla de más arriba. Entonces, directamente de la Tabla:

$$P\{\text{tomar un radio verde}\} = \frac{\text{Número de radios verdes}}{\text{Número Total de radios}} = \frac{3000}{10000} = 0{,}3$$

$$P\{\text{tomar un radio de 10 transistores}\} = \frac{\text{Número de radios de 10 transistores}}{\text{Número Total de radios}} = \frac{1400}{10000} = 0{,}14$$

P{tomar un radio verde de 10 transistores} = 0; no hay radios verdes de 10 transistores

P{tomar un radio negro de seis transistores}=P{Tomar un radio negro}P{radio de 6 transistores}

$$= \frac{5000}{10000} \cdot \frac{6000}{10000} = 0{,}3$$

3.5. El experimento es el lanzamiento de cinco monedas. Demuestre las siguientes probabilidades:

P{aparecen tres caras} = 5/16

P{aparece una sola cara} = 5/32

P{aparecen cinco caras} = 1/32

Solución:

Primera forma:

Lanzamiento de cinco monedas; el espacio S de resultados es (Cara →C; Sello→S):

$$S = \{C_1C_2C_3C_4C_5, C_1C_2C_3C_4S_5, \cdots\cdots, S_1S_2S_3S_4C_5, S_1S_2S_3S_4S_5\}$$

Se tiene entonces $N_E = 2^5 = 32$ elementos en total e igualmente probables.

El suceso {aparecen tres caras} tiene $N\binom{5}{3}$ elementos favorables, donde

$N\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Entonces,

$$P\{\text{aparecen tres caras}\} = \frac{N\binom{5}{3}}{N_E} = \frac{\dfrac{5!}{3!(5-3)!}}{32} = \frac{5}{16}$$

$$P\{\text{aparece una sola cara}\} = \frac{N\binom{5}{1}}{N_E} = \frac{\dfrac{5!}{4!}}{32} = \frac{5}{32}; \qquad P\{\text{aparecen cinco caras}\} = \frac{1}{N_E} = \frac{1}{32}$$

Segunda forma:

Aplicaremos la expresión (3.25).

En este caso: N = 5; n = 3; P(cara) = P(sello) = ½ . Reemplazando en (3.25),

$$P(3C) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}3125 = \frac{5}{16}$$

Para las otras dos probabilidades , el procedimiento es el mismo.

3.6. Una caja contiene 10 bolas blancas, 4 negras y 3 rojas. De esta caja se sacan 4 bolas. Demuestre que la probabilidad de que estas bolas sean todas blancas es de 3/34.

Solución:

Este problema se puede resolver de dos maneras; vamos a hacerlo de las dos maneras.

Primera Forma

La caja contiene 17 bolas y hay que sacar 4; de modo que el número de combinaciones de 17 bolas tomadas de 4 en 4 es

$$N\binom{17}{4} = \frac{17!}{4!13!} = 2380 \text{ combinaciones}$$

De estas 2380 posibilidades, solamente aquellas combinaciones de exactamente 4 bolas blancas son favorables. Como hay 10 bolas blancas, el número de grupos favorables es

$$N\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ combinaciones favorables.}$$

De modo que la probabilidad de sacar 4 bolas blancas es

$$P\{\text{sacar 4 bolas blancas}\} = \frac{N\binom{10}{4}}{N\binom{17}{4}} = \frac{210}{2380} = \frac{3}{34}$$

Segunda Forma

Podemos considerar el problema como si se sacaran las bolas una a una sin reemplazarla. En este caso podemos utilizar la probabilidad condicional y multiplicar las diferentes probabilidades ya que los sucesos son independientes. Así,

$$\begin{aligned} P\{\text{sacar 4 bolas blancas}\} &= P\{\text{sacar una blanca por primera vez}\}\cdot \\ &\cdot P\{\text{sacar una blanca de segundo} \mid \text{habiendo sacado una blanca de primero}\}\cdot \\ &\cdot P\{\text{sacar una blanca de tercero} \mid \text{habiendo sacado ya dos blancas}\}\cdot \\ &\cdot P\{\text{sacar una blanca de cuarto} \mid \text{habiendo sacado ya tres blancas}\} \end{aligned}$$

$$P\{\text{sacar 4 bolas blancas}\} = \frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} = \frac{3}{34}$$

Vemos que el resultado es el mismo en las dos formas.

3.7. Una caja contiene 2 bolas blancas, 1 negra y 4 rojas. De esta caja se sacan 3 bolas. Demuestre que la probabilidad de sacar 1 bola blanca y 2 rojas es de 12/35.

Solución:

Igual que en el Problema anterior, lo haremos en dos formas.

Primera Forma

La caja contiene 7 bolas y se van a sacar 3; el número de combinaciones de 7 bolas tomadas de 3 en 3 es

$$N\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35 \text{ combinaciones}$$

En relación con las blancas, hay 2 bolas blancas y se va a sacar una; el número de combinaciones favorables para las blancas será

$$N_B\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2 \text{ combinaciones favorables para las blancas}$$

Igualmente, para las rojas, hay 4 bolas rojas y se van a sacar 2; el número de combinaciones favorables para las rojas será

$N_R\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ combinaciones favorables para las rojas

Por lo tanto, el número de combinaciones favorables es

$N_B\binom{2}{1} \cdot N_R\binom{4}{2} = 2\text{x}6 = 12$ combinaciones favorables. En consecuencia,

$$P\{\text{sacar 1 bola blanca y 2 rojas}\} = \frac{N_B\binom{2}{1}N_R\binom{4}{2}}{N\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$$

Segunda Forma

Al sacar 3 bolas (1 blanca y 2 rojas) se tiene los siguientes sucesos:

$\{\text{blanca, roja, roja}\}$, $\{\text{roja, blanca, roja}\}$; $\{\text{roja, roja, blanca}\}$

Si consideramos que sacamos las bolas una a una sin reemplazo, igual que en el Problema anterior, se tiene:

$$P\{\text{blanca}, \text{roja}, \text{roja}\} = P(BRR) = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P\{\text{roja}, \text{blanca}, \text{roja}\} = P(RBR) = \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P\{\text{roja}, \text{roja}, \text{blanca}\} = P(RRB) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P\{\text{sacar 1 blanca y 2 rojas}\} = P(BRR) + P(RBR) + P(RRB) = 3\frac{4}{35} = \frac{12}{35}$$

Resultado igual al de la primera forma.

3.8. Una caja C1 contiene 2000 transistores, de los cuales el 5% está defectuoso. Una segunda caja C2 contiene 500 transistores, de los cuales el 40% está defectuoso. Se tiene también otras dos cajas C3 y C4 con 1000 transistores cada una y con un 10% defectuoso. Se selecciona al azar una de las cuatro cajas y se saca un transistor. Demuestre que la probabilidad de que este transistor esté defectuoso es de 0,1625.

Solución:

En total, en las 4 cajas hay 4000 transistores buenos (B) y 500 defectuosos (D), distribuidos en la forma siguiente:

$$\text{Caja 1}: \begin{cases} 1900B \\ 1000D \end{cases};\ \text{Caja 2}: \begin{cases} 300B \\ 200D \end{cases};\ \text{Caja 3}: \begin{cases} 900B \\ 100D \end{cases};\ \text{Caja 4}: \begin{cases} 900B \\ 100D \end{cases}$$

Por consiguiente, el espacio S consta de 4500 elementos. Sea $\{C_i\}$ el suceso que consiste de todos los elementos de la Caja i (i = 1, 2, 3, 4), y sea {D}={transistor defectuoso}. Queremos determinar la probabilidad P(D). Entonces,

$\{C_i\}$ = {elementos en la Caja i}; {D} = {transistor defectuoso}

Vemos que $P(C1) + P(C2) + P(C3) + P(C4) = S = 1$ y $P\{C_i\}P\{C_j\} = 0$ para $i \neq j$

La selección "al azar" de una caja quiere decir que $P(C1) = P(C2) = P(C3) = P(C4) = \frac{1}{4}$,

es decir, que todas las cajas tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Una vez que se selecciona una caja, la probabilidad de que el elemento extraído esté defectuoso es igual a la relación entre el número de transistores defectuosos y el número total de elementos de la Caja i; ésta es una probabilidad condicional. Con nuestra notación, esto se escribe en la forma

$$P(D|C1) = \frac{100}{2000} = 0{,}05; \quad P(D|C2) = \frac{200}{500} = 0{,}4$$

$$P(D|C3) = \frac{100}{1000} = 0{,}1; \quad P(D|C4) = \frac{100}{1000} = 0{,}1$$

De la expresión (3.22) del Texto, la probabilidad total es

$$P(D) = P(D|C1)P(C1) + P(D|C2)P(C2) + P(D|C3)P(C3) + P(D|C4)P(C4)$$

$$= 0{,}05\frac{1}{4} + 0{,}4\frac{1}{4} + 0{,}1\frac{1}{4} + 0{,}1\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(0{,}05 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}1625$$

Esta es la probabilidad buscada.

3.9. En el Problema anterior se examina el transistor y vemos que está defectuoso. Demuestre que la probabilidad de que fue sacado de la Caja C2 es de 0,615.

Solución:

Nosotros buscamos la probabilidad condicional P(C2|D) del suceso {C2} suponiendo {D} (transistor defectuoso). Por lo tanto, del Problema anterior,

$$P(D) = 0{,}1625; \quad P(D|C2) = 0{,}4; \quad P(C2) = \frac{1}{4}$$

Aplicando el Teorema de Bayes, expresión (3.24) del Texto,

$$P(C2|D) = \frac{P(D|C2)P(C2)}{P(D|C1)P(C1) + P(D|C2)P(C2) + P(D|C3)P(C3) + P(D|C4)P(C4)}$$

pero la suma del denominador es, del Problema anterior, igual a P(D), por lo tanto,

$$P(C2|D) = \frac{P(D|C2)P(C2)}{P(D)} = \frac{0{,}4\frac{1}{4}}{0{,}1625} = 0{,}615$$

Por consiguiente, la probabilidad condicional "a posteriori" de haber seleccionado la Caja C2, suponiendo que el transistor está defectuoso es igual a 0,615.

3.10. Verifique si las siguientes funciones satisfacen las condiciones para ser una densidad de probabilidad.

(a) $p_X(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{1+x^2})$; (b) $p_X(x) = |x2|\Pi(\frac{x}{2})$; (c) $p_X(x) = \frac{1}{6}(8-x)\Pi(\frac{x-8}{8})$

Solución:

Para que una función $p_X(x)$ sea una densidad de probabilidad, ella debe satisfacer las condiciones $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$ y $p_X(x) \geq 0$ para todo x .

(a) Sea $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$. Resolviendo la integral obtenemos $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 1$. Por lo tanto la función $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ es una densidad de probabilidad.

(b) $p_X(x) = |x|\Pi(\frac{x}{2})$ que tiene la forma mostrada en la Fig. P3.10(a).

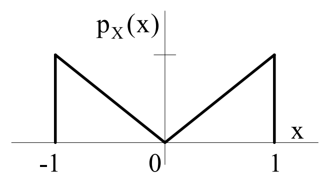


Fig. P3.10(a)

Mediante integración gráfica:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 2\frac{1}{2} = 1$$

Es una densidad de probabilidad.

(c) $p_X(x) = \frac{1}{6}(8-x)\Pi(\frac{x-8}{8})$

Esta función tiene la forma mostrada en la Fig.P3.10(b). Nótese que tiene una parte negativa, por lo tanto no cumple con la condición $p_X(x) \geq 0$ para todo x.

No es una densidad de probabilidad.

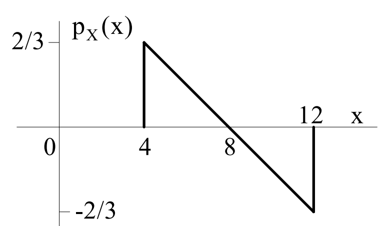


Fig. P3.10(b)

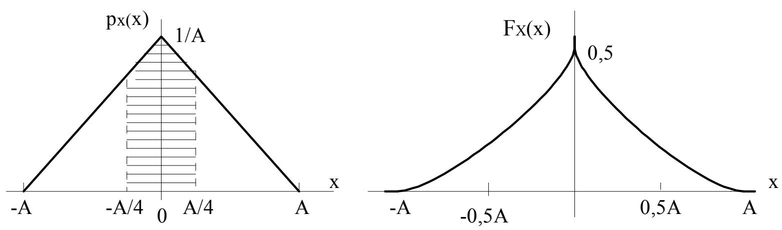
3.11. Sea la función de probabilidad $p_X(x) = \frac{1}{A}\Lambda(\frac{x}{A})$

(a) Demuestre que la probabilidad $P(-\frac{A}{4} < X \leq \frac{A}{4}) = 0,4375$.

(b) Determine y dibuje la correspondiente función de distribución $F_X(x)$

Solución:

En la Fig. P3.11(a) se muestra $p_X(x)$.



(a) Fig. P3.11 (b)

La probabilidad $P(-\frac{A}{4} < X \le \frac{A}{4})$ es simplemente el área sombreada de la Fig. P3.11(a).

$$\text{Entonces,}\quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{A^2}(x+A) & \text{para} \quad -A \le x < 0 \\ -\frac{1}{A^2}(x-A) = \frac{1}{A^2}(A-x) & \text{para} \quad 0 \le x \le A \end{cases}$$

$$P(-\frac{A}{4} < X \le \frac{A}{4}) = 2\frac{1}{A^2}\int_0^{A/4} (A-x)dx = \frac{7}{16} = 0,4375$$

(b) De la expresión (3.43) del Texto, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x')dx'$

$$F_X(x) = \frac{1}{A^2}\left[\int_{-A}^{x}(x'+A)dx'\right]\Pi(\frac{x+A/2}{A}) + \frac{1}{A^2}\left[\int_{x}^{A}(A-x')dx'\right]\Pi(\frac{x-A/2}{A})$$

$$F_X(x) = \frac{1}{A^2}\left[Ax + \frac{x^2}{2} + \frac{A^2}{2}\right]\Pi(\frac{x+A/2}{A}) + \frac{1}{A^2}\left[\frac{A^2}{2} + \frac{x^2}{2} - Ax\right]\Pi(\frac{x-A/2}{A})$$

Esta función de distribución se muestra en la Fig. P3.11(b).

3.12. Sea la función de densidad de probabilidad $p_X(x) = K\exp(-\alpha x)u(x)$, donde K y α son dos constantes positivas.

(a) Demuestre que $K = \alpha$

(b) Demuestre que la correspondiente función de distribución es

$F_X(x) = [1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$

Solución:

(a) Si $p_X(x)$ es una densidad de probabilidad, se verifica que $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$.

$K\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x)dx = \frac{K}{\alpha}; \quad \frac{K}{\alpha} = 1 \therefore K = \alpha$ para que $p_X(x)$ sea una densidad de probabilidad.

(c) $F_X(x) = \int_0^x K\exp(-\alpha x')dx' = K\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha x)\right]u(x) = \frac{K}{\alpha}\left[1 - \exp(-\alpha x)\right]u(x)$.

Pero como $K = \alpha$, entonces, $F_X(x) = [1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$

En la Fig. P3.12 se muestra $p_X(x)$ y $F_X(x)$. $\alpha = 10^{-2}$

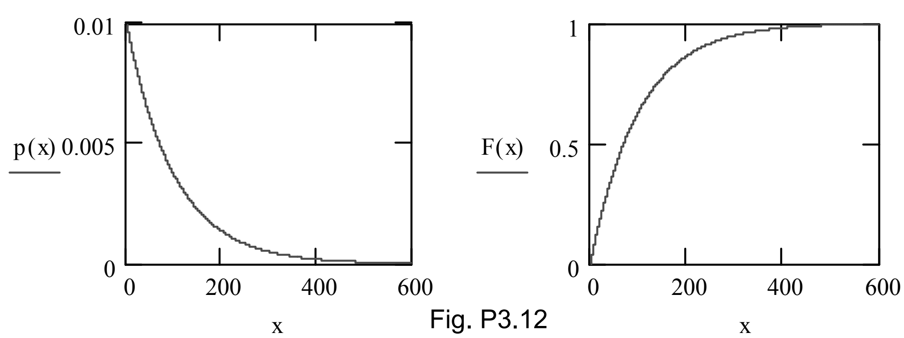


Fig. P3.12

3.13. Sea una VA X cuya distribución es gaussiana de valor promedio $E\{x\} = 5$ y $\sigma = 0{,}6$.

(a) Demuestre que $P(X \le 1) = 1{,}3084$

(b) Demuestre que $P(X \le 6) = 0{,}952$

(c) Si $E\{X\} = 1000$ y $\sigma = 50$, demuestre que la probabilidad de que X está entre 900 y 1050 es de 0,819.

Solución:

Distribución gaussiana : $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(x - x_o)^2}{2\sigma^2}]; \; E\{X\} = x_o; \; E\{X^2\} = \sigma^2$

(a) $\quad p_X(x) = \dfrac{1}{0{,}6\sqrt{2\pi}} \exp[-\dfrac{(x-5)^2}{2(0{,}6)^2}]$

$$P(X \le 1) = \frac{1}{0{,}6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} \exp[-\frac{(x-5)^2}{2(0{,}6)^2}]dx = 1{,}3084x10^{-11}$$

(b) $\quad P(X \le 6) = \dfrac{1}{0{,}6\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{6} \exp[-\dfrac{(x-5)^2}{2(0{,}6)^2}]dx = 0{,}9522$

(c) $\quad E\{X\} = 1000; \quad \sigma = 50$

$$P(900 < X \le 1050) = \frac{1}{50\sqrt{2\pi}} \int_{900}^{1050} \exp[-\frac{(x-1000)^2}{2(50)^2}]dx = \frac{1}{2}\text{erf}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2}\text{erf}(\sqrt{2}) = 0{,}819$$

3.14. En una caja se tiene un conjunto de resistencias cuyo valor R varía entre 900 y 1100 Ohm (valor nominal 1000 Ohm con ±10% de error máximo). R es entonces una VA con una distribución uniforme entre 900 y 1100 Ohm.

Se saca una resistencia de la caja. Demuestre que la probabilidad de que el valor de la resistencia está entre 950 y 1050 Ohm es de 0,5.

Solución:

Se dice que una VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (x_1, x_2) cuando su función de densidad de probabilidad es un impulso rectangular de la forma

$p_X(x) = \dfrac{1}{x_2 - x_1} \Pi(\dfrac{x - \frac{x_1 + x_2}{2}}{x_2 - x_1})$. En nuestro caso,

$$\left.\begin{matrix} x_1 = R_1 = 900 \\ x_2 = R_2 = 1100 \end{matrix}\right\} R_2 - R_1 = 200; \quad \frac{R_1 + R_2}{2} = 1000; \quad p_R(r) = \frac{1}{200} \Pi(\frac{r - 1000}{200})$$

$p_R(r)$ tiene la forma mostrada en la Fig. P3.14(a). Se tiene entonces que

$$P(950 < R \le 1050) = \frac{1}{200} \int_{950}^{1050} dr = 0{,}5$$

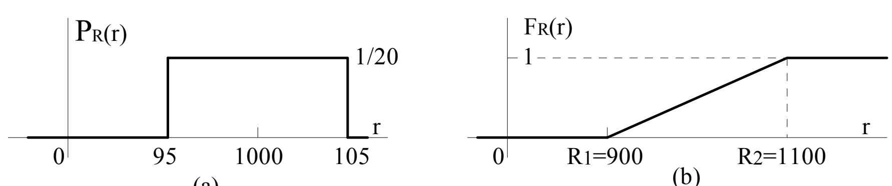


Fig. P3.14.

La función de distribución correspondiente es

$$F_R(r) = \begin{cases} \int_{R_1}^{r} \frac{1}{200} dr' & \text{para} \quad R_1 = 900 < r \le R_2 = 1100 \\ \left[\int_{R_1}^{r} \frac{1}{200} dr' \Big|_{r=R_2} \right] u(r - R_2) \end{cases}$$

$$F_R(r) = \begin{cases} \frac{(r-900)}{200} \Pi(\frac{r-1000}{200}) \\ \frac{(R_2 - R_1)}{200} u(r - R_2) = u(r - 1100) \end{cases}$$

$F_R(r)$ tiene la forma mostrada en la Fig. P3.14(b).

3.15. Sea $Y = X^2$. La VA X es gaussiana de valor promedio $E\{X\} = m$ y varianza σ^2.

Demuestre que la densidad de probabilidad de la VA Y es

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\sqrt{y}+m)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp\left[-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} u(y)$$

Solución:

$E\{X\} = m;$ $\quad E\{X^2\} = \sigma^2$; $\quad p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$; $\quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma})$

Vamos a aplicar el Teorema Fundamental de la Sección 3.4 del Texto.

$y = x^2$ tiene dos raíces reales para $0 < y$: $\quad x_1 = -\sqrt{y}$ y $x_2 = \sqrt{y}$

$g'(x) = \frac{d}{dx} y(x) = 2x = \frac{dy}{dx}$; $\quad \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{1}{2x}\right|$. De la expresión (5.60) del Texto,

$$p_Y(y) = p_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{para} \quad 0 < y$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[p_X(-\sqrt{y}) + p_X(\sqrt{y}) \right] \quad \text{para} \quad 0 < y$$

reemplazando $p_X(x)$,

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(-\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp\left[-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} u(y)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\sqrt{y}+m)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp\left[-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} u(y)$$

La correspondiente función de distribución se puede determinar en la forma siguiente:

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ para $0 < y$

$F_Y(y) = \left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right]u(y)$. Pero como $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma})$. Entonces,

$$F_Y(y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}(\frac{\sqrt{y}-m}{\sqrt{2}\sigma}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{erf}(\frac{-\sqrt{y}-m}{\sqrt{2}\sigma})\right]u(y)$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}\left[\text{erf}(\frac{\sqrt{y}-m}{\sqrt{2}\sigma}) - \text{erf}(\frac{-\sqrt{y}-m}{\sqrt{2}\sigma})\right]u(y)$$

Nótese que cuando la densidad de probabilidad es par, entonces,

$p_X(x) = p_X(-x)$ y $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$. Por lo tanto, para la VA $Y = X^2$ se tiene:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}p_X(\sqrt{y})u(y) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \left[2F_X(\sqrt{y}) - 1\right]u(y)$$

En la Fig. P3.15 se muestra $p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ para $m = 2$ y $\sigma = 0{,}3$.

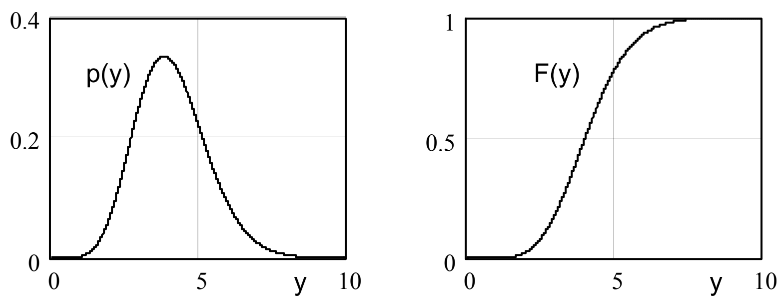


Fig. P3.15.

3.16. Sea una función de densidad conjunta de dos VA X e Y de la forma

$$p_{XY}(x,y) = K(x + xy)\Pi(x - 1/2)\Pi(\frac{y-2}{4})$$

(a) Demuestre que $K = 1/6$

(b) Demuestre que las VA X e Y son independientes

(c) Demuestre que $F_{XY}(1/2, 2) = 1/12$

Solución:

(a) Si $p_{XY}(x,y)$ es una densidad conjunta, debe verificarse que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)dxdy = 1$.

Entonces $K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(1+y)\Pi(x-1/2)\Pi(\frac{y-2}{4})dxdy = 1$

Pero $\Pi(x-\frac{1}{2}) = 1$ para $0 \le x \le 1$; $\Pi(\frac{y-2}{4}) = 1$ para $0 \le y \le 4$. Entonces,

$$K\int_0^1\int_0^4 (x+xy)dxdy = K\int_0^1\int_0^4 xdxdy + K\int_0^1\int_0^4 xydxdy = K\int_0^1 xdx\int_0^4 dy + K\int_0^1 xdx\int_0^4 ydy$$

$$= K\left[\frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}16\right] = 6K. \text{ Como } 6K = 1, \text{ entonces } K = \frac{1}{6}.$$

(b) Ahora vamos a calcular las densidades marginales. De (3.50) del Texto,

$$p_X(x) = \int_0^4 Kx(1+y)dy = Kx\int_0^4 (1+y)dy = Kx[4+\frac{16}{2}] = 12Kx = 2x \quad \text{para } 0 \le x \le 1$$

$$p_X(x) = 2x\Pi(x-\frac{1}{2})$$

$$p_Y(y) = \int_0^1 Kx(1+y)dx = K(1+y)\int_0^1 xdx = K(1+y)\frac{1}{2} = \frac{1+y}{12} \quad \text{para } 0 \le y \le 4$$

$$p_Y(y) = \frac{1+y}{12}\Pi(\frac{y-2}{4})$$

$$p_X(x)\cdot p_Y(y) = 2x\Pi(x-\frac{1}{2})\frac{(1+y)}{12}\Pi(\frac{y-2}{4}) = \frac{1}{6}x(1+y)\Pi(x-\frac{1}{2})\Pi(\frac{y-2}{4})$$

$$p_X(x)\cdot p_Y(y) = \frac{1}{2}(x+xy)\Pi(x-\frac{1}{2})\Pi(\frac{y-2}{4}) = p_{XY}(x,y)$$

Por lo tanto, X e Y son independientes.

(c) De la expresión (3.47) del Texto,

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x; Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{XY}(x',y')dx'dy'$$

Para $x = 1/2$; $y = 2$, $F_{XY}(1/2,2) = \frac{1}{6}\int_0^{1/2}\int_0^2 x'(1+y')dx'dy'$

$$F_{XY}(1/2,2) = \frac{1}{6}\int_0^{1/2} x'dx\int_0^2 (1+y')dy' = \frac{1}{6}\int_0^{1/2} x'dx'\int_0^2 dy' + \frac{1}{6}\int_0^{1/2} x'dx'\int_0^2 y'dy'$$

$$F_{XY}(1/2,2) = \frac{1}{6}[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}4] = \frac{1}{12}$$

3.17. En la expresión (3.60) del Texto, deduzca $F_X(x)$ a partir de $p_X(x)$.

Solución:

De la expresión (3.43) del Texto, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x'-x_o)^2}{2\sigma^2}\right]dx'$

Hagamos el cambio de variables $z' = \frac{x'-x_o}{\sqrt{2}\sigma}$; $dz' = \frac{dx'}{\sqrt{2}\sigma}$; $dx' = \sqrt{2}\sigma dz'$; $z = \frac{x-x_o}{\sqrt{2}\sigma}$.

Entonces, $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z} \exp(-z'^2)dz' = \frac{1}{2}[1+\text{erf}(z)]$; pero como $z = \frac{x-x_o}{\sqrt{2}\sigma}$, entonces

$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}(\frac{x-x_o}{\sqrt{2}\sigma})$, que viene dada en la expresión (3.60) del Texto.

3.18. Demuestre que para una distribución gaussiana centrada se verifica que

$E\{X\} = 0$ y $E\{X^2\} = \sigma^2$.

Solución:

$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$. Por definición, el valor promedio $E\{X\}$ es, de la expresión (3.86) del Texto,

$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx$. Efectuando la integración,

$E\{X\} = 0$

De la expresión (3.98) del Texto, el valor RMS o potencia promedio del proceso X es

$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$. Efectuando la integración,

$E\{X^2\} = \sigma^2$

3.19. Se tiene dos VA X e Y independientes cuyas densidades de probabilidad son

$p_X(x) = \exp(-x)u(x)$ y $p_Y(y) = 2\exp(-2y)u(y)$

Sea también una nueva VA $Z = X + Y$.

Demuestre que $p_Z(z) = 2[\exp(-z) - \exp(-2z)]u(z)$

Solución:

Se demuestra, [Papoulis, Capítulo 7, 1965], que si X e Y son VA independientes, entonces la densidad de probabilidad de la suma $Z = X + Y$ es igual a la convolución de sus respectivas densidades de probabilidad, es decir,

$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z-y)p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx$

Por lo tanto, utilizando la primera integral,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(z-y)]u(z-y)2\exp(-2y)u(y)dy$$

$$p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2y)\exp[-(z-y)]u(z-y)u(y)dy$$

pero $\quad u(z-y)u(y) = 1 \quad$ para $\quad 0 \le z$, de donde,

$$p_Z(z) = 2\int_0^z \exp(-2y)\exp[-(z-y)]dy = 2\exp(-z) - 2\exp(-2z) \qquad \text{para} \quad 0 \le z$$

$$p_Z(z) = 2[\exp(-z) - \exp(-2z)]u(z)$$

Utilizando la segunda integral,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x)u(x)2\exp[-2(z-x)]u(z-x)dx$$

$$p_Z(z) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x)\exp[-2(z-x)]u(z-x)u(x)dx$$

pero $\quad u(z-x)u(x) = 1 \quad$ para $\quad 0 \le z$

$$p_Z(z) = 2\int_0^z \exp(-x)\exp[-2(z-x)]dx = 2\exp(-z) - 2\exp(-2z) \qquad \text{para} \quad 0 \le z$$

$p_Z(z) = 2[\exp(-z) - \exp(-2z)]u(z)$. Vemos que los dos resultados son iguales.

3.20. La densidad de probabilidad de una VA X es $\quad p_X(x) = \frac{1}{2}\Lambda(\frac{x-1}{2})$.

Demuestre que $\quad E\{X\} = 1; \quad E\{X^2\} = 5/3; \quad \sigma_x^2 = 2/3$.

Solución:

$p_X(x)$ tiene la forma mostrada en la Fig. P3.20.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1) & \text{para} \quad -1 \le x < 1 \\ -\frac{1}{4}(x-3) & \text{para} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

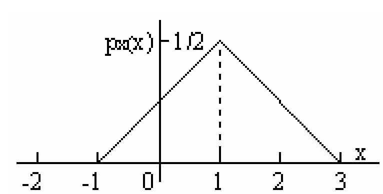


Fig. P3.20.

De la expresión (3.84) del Texto,

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x(x+1)dx = \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4}\int_{1}^{3} x(x-3)dx = \frac{5}{6} \end{cases} \qquad E\{X\} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

De la expresión (3.96) del Texto,

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2(x+1)dx = \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{1}^{3} x^2(x-3)dx = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad E\{X^2\} = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$$

De la expresión (3.102) del Texto,

$$\sigma_x^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

3.21. La señal de entrada X y la señal de salida Y de un sistema no lineal están relacionados mediante la expresión $Y = X^2 u(X)$. Si la densidad de probabilidad de X es gaussiana, de valor promedio cero y varianza σ^2, demuestre que la densidad de probabilidad a la salida del sistema es

$$p_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp(-\frac{y}{2\sigma^2})u(y)$$

Solución:

$y(x) = x^2 u(x)$, Fig. P3.21(a)

Para $y < 0$, $p_Y(y) = 0$

Para $y > 0$, se tiene una raíz $x_1 = \sqrt{y}$

$$|g'(x_1)| = 2x = 2\sqrt{y}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|}u(x) = \frac{p_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}u(y)$$

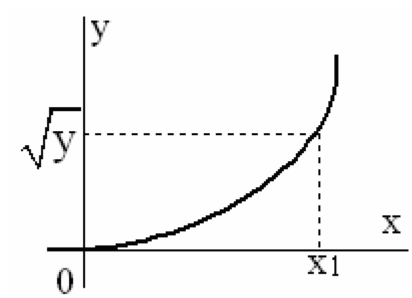


Fig. P3.21(a)

En general, (ver [Papoulis, 1966]), si X es de tipo continuo, pero g(x) es una constante (aunque sea cero) sobre ciertos intervalos pero no es de forma escalonada, entonces $Y = g(X)$ es de tipo mixto, es decir, que contiene impulsos de Dirac en las descontinuidades. Por lo tanto, si

$$g(X) = g(x) = \text{constante o cero} \qquad \text{para} \qquad x_1 \le X \le x_2$$

entonces $F_Y(y)$ es discontinua para $y = g(x_1)$, y sus discontinuidades en este punto serán iguales a $F_X(x_2) - F_X(x_1)$.

Volviendo a nuestro problema, si y > 0, entonces $g(x) \le y$ será válido para $x \le y$, de donde

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) \quad \text{para} \quad 0 < y$$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y})u(y)$$

En $y = 0$ hay una discontinuidad, es decir, $g(x) = y = 0$ para $-\infty < x \le 0$. Esta discontinuidad vale $[F_X(0) - F_X(-\infty)]$, pero como $F_X(-\infty) = 0$, el valor de la discontinuidad será $F_X(0)$. Esto equivale a $P\{Y = 0\} = P\{X \le 0\} = F_X(0)$.

Puesto que $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma})$, entonces, $F_X(0) = \frac{1}{2}$

La densidad de probabilidad de la VA Y será, para $0 < y$,

$$p_Y(y) = F_X(0)\delta(y) + \frac{p_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp(-\frac{y}{2\sigma^2})u(y)$$

Calculemos su función de distribución.

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\frac{1}{2}\delta(y')dy' + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\exp(-\frac{y'}{2\sigma^2})u(y')\right]dy'$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y}\delta(y')dy' + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^y \frac{\exp(-\frac{y'}{2\sigma^2})}{\sqrt{y'}}dy' = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}\sigma})]u(y$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}\sigma})\right]u(y)$$

En la Fig. P3.21(b) se muestra $p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ para $\sigma = 2$

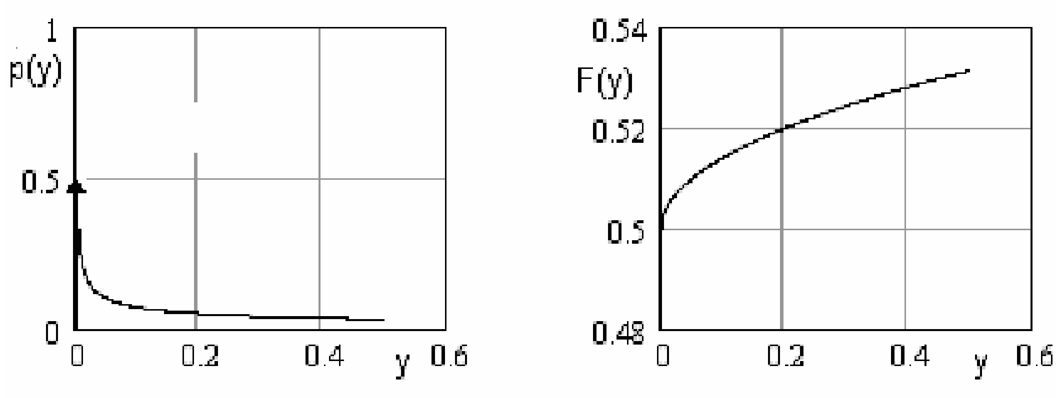


Fig. 3.21(b)

3.22. En el caso de un detector cuadrático la entrada X y la salida Y están relacionadas mediante la expresión $Y = aX^2$, con $a > 0$.

(a) Demuestre que $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}}p_X(\sqrt{\frac{y}{a}})u(y)$ y $F_Y(y) = \left[2F_X(\sqrt{\frac{y}{a}}) - 1\right]u(y)$

(b) Si la densidad de probabilidad de la VA X es gaussiana, de valor promedio cero y varianza σ^2, demuestre que a la salida del detector cuadrático

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a y}} \exp(-\frac{y}{2\sigma^2}) u(y) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \text{erf}(\frac{\sqrt{y/a}}{\sqrt{2}\sigma}) u(y)$$

(c) Si la VA X está uniformemente distribuida en el intervalo (c, d), donde c > d, demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(d-c)\sqrt{ay}} & \text{para} \quad ac^2 \le y \le ad^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y/a} - c}{d-c} & \text{para} \quad ac^2 \le y < ad^2 \\ 1 & \text{para} \quad ad^2 \le y \end{cases}$$

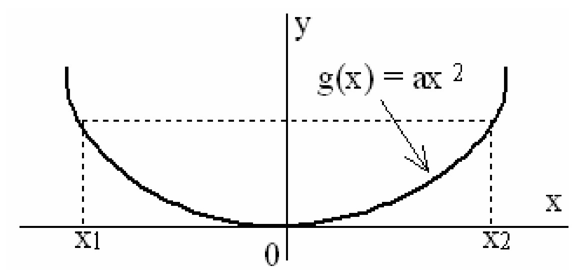


Fig. P3.22(a)

Solución:

(a)

$Y = aX^2; \quad y = ax^2$, que tiene la forma mostrada en la Fig. P3.22(a).

Para $y < 0$, la ecuación $y = ax^2$ no tiene raíces reales, de donde $p_Y(y) = 0$ para $y < 0$.

Para $0 < y$, la ecuación tiene dos raíces: $x_1 = -\sqrt{y/a}$ y $x_2 = \sqrt{y/a}$

También, $|g'(x_1)| = |\frac{dy}{dx_1}| = 2a\sqrt{y/a} = 2\sqrt{ay} = |g'(x_2)|$

$p_X(x_1) = p_X(-\sqrt{y/a}); \quad p_X(x_2) = p_X(\sqrt{y/a})$, de donde

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{p_X(-\sqrt{y/a}) + p_X(\sqrt{y/a})}{2\sqrt{ay}} \quad \text{para} \quad 0 < y$$

$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}}\left[p_X(\sqrt{y/a}) + p_X(-\sqrt{y/a})\right]u(y)$. Igual que en el Problema 3.15,

$F_Y(y) = \left[F_X(\sqrt{y/a}) - F_x(-\sqrt{y/a})\right]u(y)$

Cuando g(x) es una función par, se verifica que (ver Problema 3.15)

$p_X(x) = p_X(-x)$ y $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$. Entonces,

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}} p_X(\sqrt{y/a})u(y) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \left[2F_X(\sqrt{y/a}) - 1\right]u(y)$$

(b) $p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ y $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma})$

Para $x = \sqrt{y/a}$,

$p_X(\sqrt{y/a}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y}{2a\sigma^2})$ y $F_X(\sqrt{y/a}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y/a}}{\sqrt{2}\sigma})$. Por lo tanto,

$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a y}} \exp(-\frac{y}{2a\sigma^2})u(y)$. Asimismo,

$$F_Y(y) = \left[2F_X(\sqrt{y/a}) - 1\right]u(y) = \left\{2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y/a}}{\sqrt{2}\sigma})\right] - 1\right\}u(y)$$

$$F_Y(y) = \left[1 + \mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y/a}}{\sqrt{2}\sigma}) - 1\right]u(y) = \mathrm{erf}(\frac{\sqrt{y/a}}{\sqrt{2}\sigma})u(y)$$

En la Fig. 3.22(b) se muestra $p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ para $a = 2$ y $\sigma = 2$.

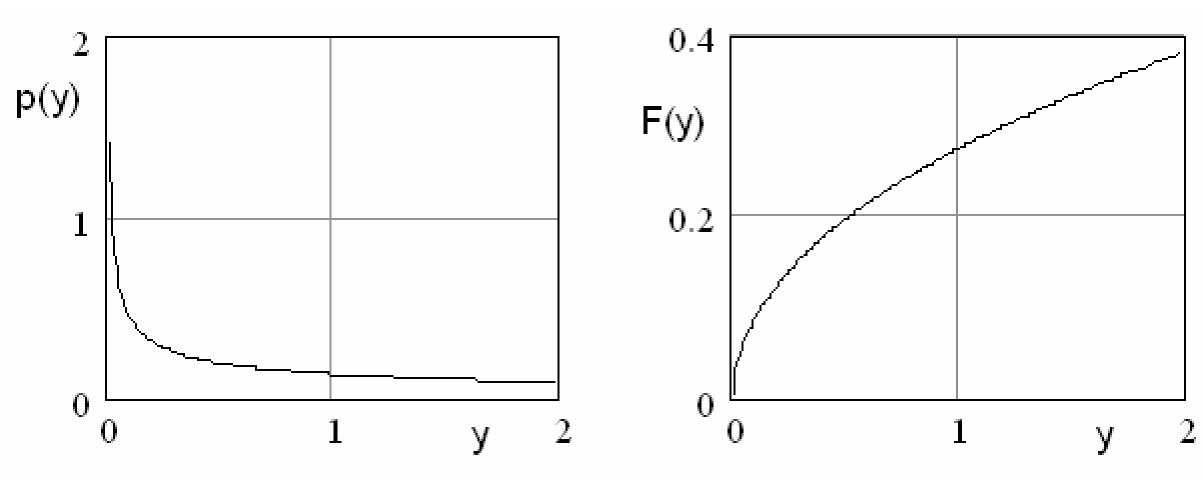


Fig. P3.22(b)

(c) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (c, d), donde c < d, se tiene

$$p_X(x) = \frac{1}{d-c}\Pi(\frac{x - x_o}{d-c}); \quad F_X(x) = \frac{x-c}{d-c}\Pi(\frac{x-x_o}{d-c}) + u(x-d), \quad \text{con } x_o = \frac{c+d}{2}$$

$p_X(x)$ y $F_X(x)$ se muestran en la Fig. P3.22(c).

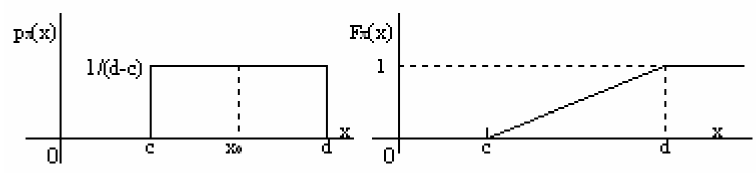


Fig. P3.22(c)

Entonces, puesto que $p_X(-x) = 0$, $\quad p_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{ay}} p_X(\sqrt{y/a})$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} \frac{1}{(d-c)} \Pi(\frac{\sqrt{y/a} - x_o}{d-c})$$

Nótese que $p_X(x)$ existe solamente para valores positivos de x, es decir, $p_X(-x) = 0$; por eso aparece el número 2 en la expresión anterior.

Como $p_Y(y)$ existe desde $\sqrt{y/a} = c$ ó $y = ac^2$ hasta $\sqrt{y/a}d$ ó $y = ad^2$,
$p_Y(y)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(d-c)\sqrt{ay}} & \text{para} \quad ac^2 \le y \le ad^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Asimismo, la función de distribución será

$$F_X(y) = F_X(\sqrt{y/a})u(y) = \frac{\sqrt{y/a} - c}{d-c} \Pi(\frac{\sqrt{y/a} - x_o}{d-c}) + u(\sqrt{y/a} - d)$$

que se puede escribir en la forma

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y/a} - c}{d-c} & \text{para} \quad ac^2 \le y \le ad^2 \\ 1 & \text{en el resto} \end{cases};$$

$p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ se muestran en la Fig. P3.22(d).

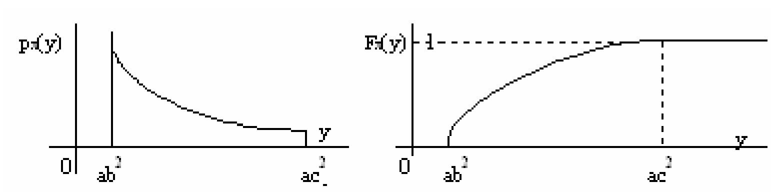


Fig. P3.22(d)

3.23. En el caso de un rectificador de onda completa la entrada X y la salida Y están relacionadas mediante la ecuación $Y = |X|$

(a) Demuestre que $p_Y(y) = [p_X(y) + p_X(-y)]u(y)$ y $F_Y(y) = [F_x(y) - F_X(-y)]u(y)$.

Si $p_X(x)$ es una función par, se puede demostrar también que

$$p_Y(y) = 2p_X(y)u(y) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = [2F_X(y) - 1]u(y)$$

(b) Si la VA X es gaussiana de valor promedio 10 y desviación 5, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{\exp[-\frac{(y-10)^2}{50}] + \exp[-\frac{(-y-10)^2}{50}]}{5\sqrt{2\pi}} u(y)$$

$$F_Y(y) = \left[\operatorname{erf}(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}) + \operatorname{erf}(\frac{y+10}{5\sqrt{2}})\right] u(y)$$

(c) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (10, 20), demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{1}{10}\Pi(\frac{y-15}{10}) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \frac{1}{10}\left[r(y-10) - r(y-20)\right]$$

donde $r(...)$ es la función rampa.

Solución:

Al pasar un voltaje aleatorio X por un rectificador de onda completa se efectúa el proceso

$Y = g(X) = |X|$. La característica de transferencia del rectificador se muestra en la Fig. P3.23.

Entonces, para el proceso $Y = |X|$ la ecuación $y = g(x) = |x|$ no tiene soluciones para $y < 0$; por lo tanto,

$p_Y(y) = 0 \quad \text{para} \quad y < 0$

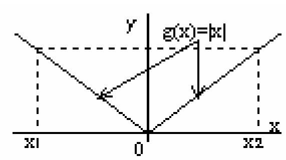


Fig. P3.23

Para $0 < y$, tiene dos soluciones: $x_1 = -y, \quad x_2 = y$

También, de la ecuación

$$y = |x|,\ g'(x_1) = -1 \quad \text{y} \quad g'(x_2) = 1; \text{de donde } |g'(x_1)| = |g'(x_2)| = 1$$

y $p_X(x_1) = p_X(-y); \quad p_X(x_2) = p_X(y)$. Entonces,

$$p_y(y) = \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{p_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = p_X(-y) + p_X(y) \qquad \text{para} \quad 0 < y$$

$$p_Y(y) = \left[p_X(-y) + p_X(y)\right]u(y)$$

La función de distribución $F_Y(y)$ se puede obtener en la forma siguiente:

Es evidente que $|x| < y$ para $x_1 < x < x_2$ ó $-y < x < y$

Entonces podemos establecer que

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} = P\{x_1 \le X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \quad \text{para} \quad y > 0$$

De donde, $F_Y(y) = [F_X(y) - F_X(-y)]u(y)$

Si $p_X(x)$ es una función par, entonces, como en el problema anterior,

$$p_Y(y) = 2p_X(y)u(y) \quad \text{y} \quad F_X(y) = [2F_X(y) - 1]u(y)$$

(b) Si la VA X es gaussiana de valor promedio 10 y desviación 5, entonces,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(x-10)^2}{50}] \quad \text{y} \quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{x-10}{5\sqrt{2}})\text{; } p_X(x) \text{ es par.}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\left\{\exp[-\frac{(-y-10)^2}{50}] + \exp[-\frac{(y-10)^2}{50}\right\}u(y)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\left\{\exp[-\frac{(y+10)^2}{50}] + \exp[-\frac{(y-10)^2}{50}]\right\}u(y)$$

y la función de distribución,

$$F_Y(y) = [F_X(y) - F_X(-y)]u(y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{-y-10}{5\sqrt{2}})\right]u(y)$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}) - \operatorname{erf}(-\frac{y+10}{5\sqrt{2}})\right]u(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}) + \operatorname{erf}(\frac{y+10}{5\sqrt{2}})\right]u(y)$$

(c) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (10, 20), $p_X(x)$ y $F_X(x)$ tendrán la forma mostrada en la Fig. P3.22(b) del Problema 3.22. Entonces,

para $b = 20$ y $c = 10$, $b - c = 10$; $\frac{b+c}{2} = 15$,

$$p_X(x) = \frac{1}{10}\Pi(\frac{x-15}{10}); \quad F_X(x) = \frac{1}{10}(x-10)\Pi(\frac{x-15}{10}) + u(x-20)$$

Nótese que $p_X(x)$ y $F_X(x)$ no tienen valores para x negativo, es decir, para $x < 0$; de donde

$p_X(x_1) = F_X(x_1) = 0$. Nos queda entonces, para $x_2 = y$,

$$p_Y(y) = p_X(y)u(y) = \frac{1}{10}\Pi(\frac{y-15}{10})$$

y $\quad F_Y(y) = F_X(y)u(y) = \frac{1}{10}(y-10)\Pi(\frac{y-15}{10}) + u(y-20)$, o también

$$F_Y(y) = \frac{1}{10}\left[r(y-10) - r(y-20)\right]$$ donde r(...) es la función rampa.

$p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ tienen la misma forma que $p_X(x)$ y $F_X(x)$.

3.24. Sea una VA X y sea el proceso lineal $Y = aX + b$, donde a y b son dos constantes.

(a) Si $p_X(x)$ y $F_X(x)$ son las funciones de probabilidad de X, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|}p_X(\frac{y-b}{a}) \quad \text{y} \quad F_Y(y) = \frac{1}{|a|}F_X(\frac{y-b}{a}) \quad \text{para todo } y$$

(b) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (x_1, x_2), demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|}\frac{1}{(x_2 - x_1)} & \text{para } ax_1 + b < y < ax_2 + b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La VA Y está distribuida uniformemente en el intervalo $(ax_1 + b, \; ax_2 + b)$.

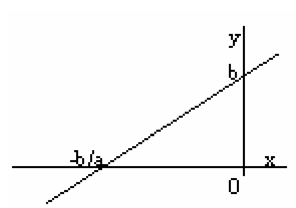
Solución:

(a) $y = ax + b$ que se muestra en la Fig. P3.24(a).

$y = ax + b$ tine una sola raíz:

$x = \frac{y-b}{a}$ para todo y

También, $g'(x) = a$; $|g'(x)| = |a|$;



P3.24(a)

$p_X(x) = p_X(\frac{y-b}{a})$. De donde, $p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{p_X(\frac{y-b}{a})}{|a|}$ para todo y.

La correspondiente función de distribución es

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(y')dy' = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{y} p_X(x)dx = \frac{F_X(x)}{|a|};$$ y como $x = \frac{y-b}{a}$, entonces,

$F_Y(y) = \frac{1}{|a|} F_X(\frac{y-b}{a})$ para todo y

(b) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (x_1, x_2), entonces

$p_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \Pi(\frac{x - x_o}{x_2 - x_1})$, donde $x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Y para $x = \frac{y-b}{a}$,

$p_X(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \Pi(\frac{\frac{y-b}{a} - x_o}{x_2 - x_1})$. Entonces,

$$p_Y(y) = \frac{p_X(\frac{y-b}{a})}{|a|} = \frac{1}{|a|} \frac{1}{(x_2 - x_1)} \Pi(\frac{\frac{y-b}{a} - x_o}{x_2 - x_1})$$

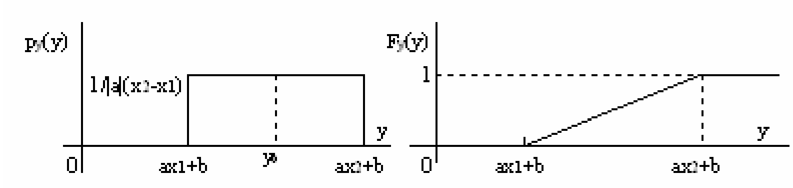
Como el rectángulo existe desde $\frac{y-b}{a} = x_1$ ó $y = ax_1 + b$ hasta $\frac{y-b}{a} = x_2$ ó $y = ax_2 + b$, entonces $p_Y(y)$ se puede escribir también en la forma

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} \frac{1}{(x_2 - x_1)} & \text{para} \quad ax_1 + b < y < ax_2 + b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El lector puede demostrar fácilmente, casi por inspección, que la correspondiente función de distribución viene dada por

$$F_Y(y) = \frac{[y - (ax_1 + b)]}{|a|(x_2 - x_1)} \Pi[\frac{y - y_o}{a(x_2 - x_1)}] + u[y - (ax_2 + b)] \quad \text{donde} \quad y_o = \frac{a(x_1 + x_2) + 2b}{2}$$

En la Fig. P3.24(b) se muestra $p_Y(y)$ y $F_Y(y)$.



P3.24(b)

3.25. Una VA X está distribuida según la distribución de Cauchy, donde $p_X(x) = \frac{K}{\alpha^2 + x^2}$.

(a) Demuestre que $K = \alpha/\pi$

(b) Demuestre que $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(\frac{x}{\alpha})$

(c) Demuestre que la probabilidad de que X esté dentro del intervalo $(-\alpha, \alpha)$

Solución:

(a) Debe verificarse que $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{\alpha^2 + x^2}dx = \frac{K\pi}{\alpha}; \quad \text{si} \quad \frac{K\pi}{\alpha} = 1, \quad \text{entonces} \quad K = \frac{\alpha}{\pi}$$

(b) $F_X(x) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\alpha^2 + z^2}dz$; integrando, $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(\frac{x}{\alpha})$

(c) De (3.44), $P(-\alpha < X \le \alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\alpha} \frac{1}{\alpha^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}$

3.26. Sea una VA X y un proceso hiperbólico de la forma $Y = \frac{a}{X}$, donde a es una constante.

(a) Demuestre que $p_Y(y) = \frac{|a|}{y^2}p_X(\frac{a}{y})$ y $F_Y(y) = |a|\int_{-\infty}^{y} \frac{p_X(\frac{a}{y'})}{y'^2}dy'$ para todo y

Donde $p_X(x)$ es la densidad de probabilidad de X.

(b) Si la VA X está distribuida según Cauchy, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{|a|}{\pi\alpha}\frac{1}{\left[\frac{a^2}{\alpha^2} + y^2\right]} \quad \text{para todo} \quad y$$

Vemos que la VA Y está distribuida también según Cauchy, pero con parámetro $\frac{|a|}{\alpha}$.

Solución:

(a) $y = g(x) = \frac{a}{x}$, que tiene la forma dada en la Fig. P3.26(a).

$g(x) = \frac{a}{y}$ tiene una sola raíz:

$x = \frac{a}{y}$ para todo y

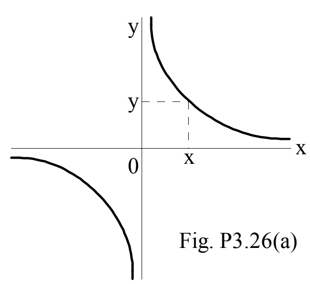


Fig. P3.26(a)

También, $g'(x) = -\dfrac{a}{x^2} = -\dfrac{a}{(\frac{a}{y})^2} = -\dfrac{y^2}{a} \therefore |g'(x)| = \dfrac{y^2}{|a|}$ y $p_X(x) = p_X(\frac{a}{y})$.

Por lo tanto,

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{|a|}{y^2} p_X(\frac{a}{y}) \quad \text{para todo y ;} \quad F_Y(y) = |a| \int_{-\infty}^{y} \frac{p_X(\frac{a}{y'})}{y'^2} dy' \quad \text{para todo y}$$

(b) Si la VA X está distribuida según Cauchy, entonces,

$$p_X(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \quad \text{para todo x, donde } \sigma \text{ es el parámetro de la función.}$$

Entonces,

$$p_Y(y) = \frac{|a|}{y^2} \frac{\alpha}{\pi[\alpha^2 + (\frac{a}{y})^2]} = \frac{|a|}{\pi\alpha} \frac{1}{[\frac{a^2}{\alpha^2} + y^2]} \quad \text{para todo y}$$

Vemos que $p_Y(y)$ está distribuida también según Cauchy, pero con parámetro $|a|/\alpha$.
La correspondiente función de distribución es

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(y')dy' = \frac{|a|}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\frac{a^2}{\alpha^2} + y'^2} dy' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\frac{\alpha y}{a})$$

En la Fig. P3.26(b) se muestra $p_Y(y)$ y $F_Y(y)$ para $(a/\alpha) = 10$.

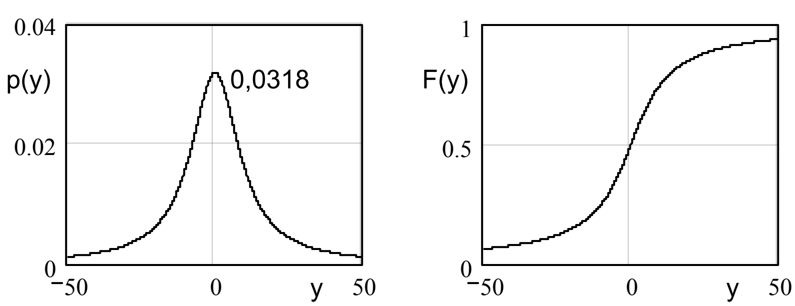


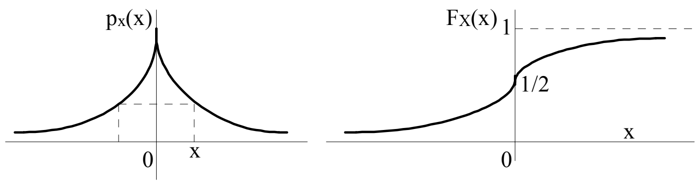
Fig. P3.26(b)

3.27. Una VA X está distribuida en forma laplaciana, es decir, su densidad de probabilidad tiene la forma $p_X(x) = K\exp(-\alpha|x|)$.

(a) Demuestre que : $K = \alpha/2$; $E\{X\} = 0$; $E\{X^2\} = 2/\alpha^2$; $\sigma = \sqrt{2}/\alpha$

(b) Demuestre que $F_X(x) = \dfrac{1}{2}\exp(\alpha x)u(-x) + \dfrac{1}{2}[1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$

Solución:



(a) Fig. P3.27. (b)

$p_X(x)$ se muestra en la Fig. P3.27(a). $p_X(x)$ debe cumplir la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1 = 2K\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x)dx = \frac{2K}{\alpha} = 1;$$

de donde, $K = \frac{\alpha}{2}$.

$E\{X\} = \eta = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-\alpha|x|)dx = 0$, es decir, $E\{X\} = 0$. Este resultado era de esperarse, pues $p_X(x)$ es simétrica respecto al eje de las ordenadas, siendo cero su valor promedio.

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\alpha|x|)dx = \alpha\int_0^{\infty} x^2\exp(-\alpha x)dx = \frac{2}{\alpha^2}$$

Por definición, la varianza es: $\sigma^2 = E\{X^2\} - E\{X\}$, pero como $E\{X\} = 0$, entonces,

$\sigma^2 = E\{X^2\} = \frac{2}{\alpha^2} \therefore \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ Este es el valor de la desviación estándar.

De la forma de $p_X(x)$, Fig. P3.27(a), la función de distribución $F_X(x)$ la podemos escribir en la forma

$$F_X(x) = \begin{cases} F_X(-x) = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} \exp(\alpha x')dx' & \text{para} \quad x < 0 \\ F_X(x) = \frac{\alpha}{2}\int_0^{x} \exp(-\alpha x')dx' & \text{para} \quad 0 \le x \end{cases}$$

entonces,

$$F_X(x) = \left[\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{x} \exp(\alpha x')dx\right]u(-x) + \left[\frac{\alpha}{2}\int_0^{x} \exp(-\alpha x')dx'\right]u(x)$$

Integrando, $F_X(x) = \frac{1}{2}\exp(\alpha x)u(-x) + \frac{1}{2}[1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$

Nótese que $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$

En la Fig. P3.27(b) se muestra la forma de $F_X(x)$.

3.28. Se tiene una distribución de la forma $f(x) = Kx\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(a) Demuestre que si f(x) es una distribución de Raleigh, de verificarse que $K = \frac{1}{\alpha^2}$. La distribución de Raleigh es entonces $p_X(x) = \frac{x}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(b) Demuestre que $E\{X\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$; $E\{X^2\} = 2\alpha^2$; $\sigma = \sqrt{2}\alpha$

(c) Demuestre que $F_X(x) = \left[1 - \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})\right]u(x)$

Solución:

(a) $K\int_0^\infty x\exp((-\frac{x^2}{2\alpha^2})dx = 1$. Integrando: $K\alpha^2 = 1 \therefore K = \frac{1}{\alpha^2}$

(b) $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty x^2\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})dx = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$E\{X^2\} = \int_0^\infty \frac{x^3}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})dx = 2\alpha^2$

$E\{X^2\} = \sigma^2$, de donde, $\alpha = \sqrt{2}\alpha$

(c) $F_X(x) = \int_0^x \frac{y}{\alpha^2}\exp(-\frac{y^2}{2\alpha^2})dy = \left[1 - \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})\right]u(x)$

3.29. Una VA X sigue la distribución de Maxwell, donde $p_X(x) = Kx^2\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(a) Demuestre que $K = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}$ y que el valor máximo de $p_X(x)$ ocurre para $x = \alpha\sqrt{2}$

(b) Calcule la función de distribución $F_X(x)$ y la probabilidad $P\{X \le \alpha\sqrt{2}\}$.

Solución:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1 = K\int_0^\infty x^2\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})dx = \frac{K}{2}\sqrt{2\pi}\alpha^3 = 1 \therefore K = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\alpha^3} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}$

$$p_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}x^2\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$$

(b) Tomando la derivada de $p_X(x)$ e igualando a cero,

$\frac{d}{dx}p_X(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\alpha^3}x\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\alpha^5}x^3\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) = 0$. Reduciendo esta expresión, llegamos a $x = \sqrt{2}\alpha$. El valor máximo de $p_X(x)$ ocurre para $x = \sqrt{2}\alpha$; por lo tanto, $p_X(\sqrt{2}\alpha) = 0{,}587\alpha^2$. Este es el valor máximo de $p_X(x)$.

(c) La función de distribución es

$$F_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}\int_0^x y^2 \exp(-\frac{y^2}{2\alpha^2})dy = [\operatorname{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}\alpha}) - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})]u(x)$$

En la Fig. P3.29 se muestra $p_X(x)$ y $F_X(x)$ para $\alpha = 4$

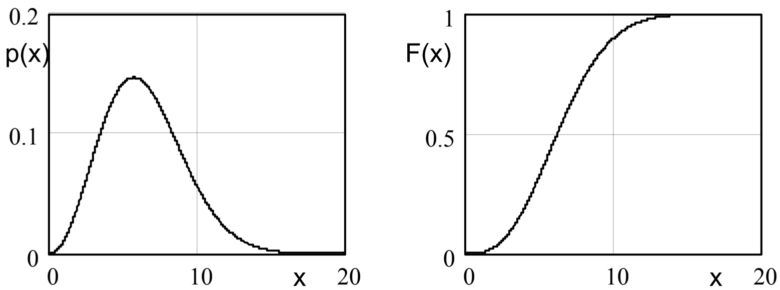


Fig. P3.29

(d) $P\{X \le \sqrt{2}\alpha\} = \int_0^{\sqrt{2}\alpha}\frac{2}{\sqrt{2\pi\alpha^3}}x^2\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(1) - 2\exp(-1)\right]$

$P\{X \le \sqrt{2}\alpha\} = 0{,}42759$

3.30. Siguiendo el procedimiento mostrado en la Sección 3.9.2, determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de las siguientes secuencias aleatorias.

(a) Una secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud A, Fig. 3.21(a)

(b) Una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.22(a)

(c) Una secuencia aleatoria AMI RZ de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.23(a)

(d) Una secuencia aleatoria MANCHESTER de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.24(a).

Solución:

(a) Secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud A.

Esta señal se muestra en la Fig. P3.30(a)

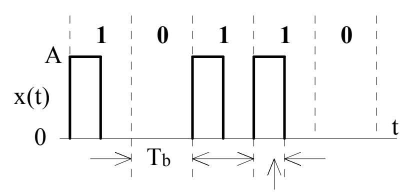


Fig. P3.30(a) $T_b/2$

Amplitudes posibles:

$A_1 = A \to P_1 = \frac{1}{2}; \quad A_2 = 0 \to P_2 = \frac{1}{2}$

Para $k = 0$

$$E\{A_n^2\} = A_1^2P_1 + A_2^2P_2 = \frac{A^2}{2} = \sigma_a^2 + \eta_a^2$$

Para $k \ne 0$, Productos posibles: $A_1A_1 \to P_1 = \frac{1}{4}; \quad A_1A_2 \to P_2 = \frac{1}{4}$

$$A_2A_1 \to P_3 = \frac{1}{4}; \quad A_2A_2 \to P_4 = \frac{1}{4}$$

$$E\{A_nA_{n+k}\} = (A_1A_1)P_1 + (A_1A_2)P_2 + (A_2A_1)P_3 + (A_2A_2)P_4 = \frac{A_1^2}{4} = \frac{A^2}{4} = \eta_a^2$$

$$\sigma_a^2 + \eta_a^2 = \frac{A^2}{2}; \quad \eta_a^2 = \frac{A^2}{4}; \quad \sigma_a^2 + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}; \quad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4}$$

Reemplazando en la expresión (3.165) del Texto,

$$S_x(f) = \frac{1}{T_b}|P(f)|^2\left[\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_b})\right]$$

pero $p(t) = \Pi(\frac{t}{T_b/2}) \Leftrightarrow P(f) = \frac{T_b}{2}\text{sinc}(\frac{T_b}{2}f); \quad |P(f)|^2 = \frac{T_b^2}{4}\text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)$

$$S_x(f) = \frac{A^2T_b}{16}\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b})\left[1 + \frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_b})\right]$$

$$S_x(f) = \frac{A^2T_b}{16}\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b}) + \frac{A^2}{16}\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_b})$$

pero $\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b})$ tiene sus cero en $\frac{2}{T_b}, \frac{4}{T_b}, \cdots, \frac{n}{T_b}$ para n par;

y para n impar y $n = 0$,

$$\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_b}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}^2(\frac{n}{2})\delta(f - \frac{n}{T_b}) \quad \text{para n impar y } n = 0$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\text{sinc}^2(\frac{n}{2})\delta(f - \frac{n}{T_b}) + \delta(f) \quad \text{para n impar}$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ indica que la sumatoria no incluye el valor $n = 0$.

Como $\text{sinc}^2(\frac{n}{2}) = \frac{\text{sen}^2(\frac{n\pi}{2})}{(\frac{n\pi}{2})^2} = \frac{4}{n^2\pi^2}$, entonces,

$$\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{n}{T_b}) = \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{4}{n^2\pi^2}\delta(f - \frac{n}{T_b}).$$ Finalmente,

$$S_x(f) = \frac{A^2T_b}{16}\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b}) + \frac{A^2}{16}\left[\delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{4}{n^2\pi^2}\delta(f - \frac{n}{T_b})\right]$$

$$S_x(f) = \frac{A^2}{16}\left[T_b\text{sinc}^2(\frac{f}{2/T_b}) + \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{4}{n^2\pi^2}\delta(f - \frac{n}{T_b})\right] \quad \text{para n impar y } n \neq 0$$

Para determinar la función de autocorrelación correspondiente, escribamos $S_x(f)$ en la forma

$$S_x(f) = \frac{A^2T_b}{16}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2/T_b}\right) + \frac{A^2}{16}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2/T_b}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) = S_{x1}(f) + S_{x2}(f)$$

$$S_x(f) = S_{x1}(f) + S_{x2}(f) \Leftrightarrow R_x(\tau) = R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau)$$

$$R_{x1}(\tau) = \frac{A^2T_b}{16}\frac{2}{T_b}\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) = \frac{A^2}{8}\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right)$$

$$R_{x2}(\tau) = \frac{A^2}{16}\left[\frac{2}{T_b}\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) * T_b\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\tau - nT_b)\right]$$

$$R_{x2}(\tau) = \frac{A^2}{8}\left[\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{\tau - nT_b}{T_b/2}\right)\right].$$

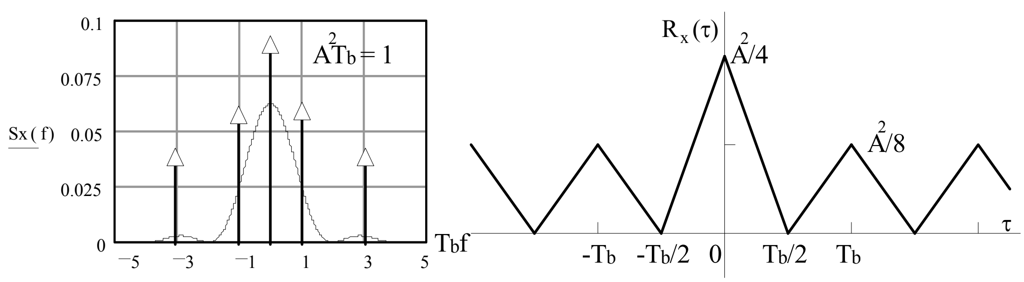
Puesto que para $n = 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{\tau - nT_b}{T_b/2}\right) = \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right)$, la función de autocorrelación será

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{8}\left[2\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\Lambda\left(\frac{\tau - nT_b}{T_b/2}\right)\right] \quad \text{para} \quad n \neq 0$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ indica que la sumatoria no incluye el valor n = 0.

Nótese que la potencia de la señal es $< x^2(t) >= R_x(0) = \frac{A^2}{4}$

En la Fig. P3.30(b) se muestra $S_x(f)$ y $R_x(\tau)$.



(a) Densidad Espectral (b) Función de Autocorrelación

Fig.. P3.30(b). Secuencia Aleatoria Unipolar RZ

(b) Secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$, Fig. P3.30(c).

Amplitudes posibles: $A_1 = A \rightarrow P_1 = \frac{1}{2}; \quad A_2 = -A \rightarrow P_2 = \frac{1}{2}$

Para $k = 0, \quad E\{A_n^2\} = A_1^2P_1 + A_2^2P_2 = (A)^2\frac{1}{2} + (-A)^2\frac{1}{2} = A^2 = \sigma_a^2 + \eta_a^2$

Para $k \neq 0$. Productos posibles:

$$A_1A_1 \to P_1 = \frac{1}{4}; \quad A_1A_2 \to P_2 = \frac{1}{4}$$

$$A_2A_1 \to P_3 = \frac{1}{4}; \quad A_2A_2 \to P_4 = \frac{1}{4}$$

$$E\{A_nA_{n+k}\} = (A_1A_1)P_1 + (A_1A_2)P_2 + + (A_2A_1)P_3 + (A_2A_2)P_4$$

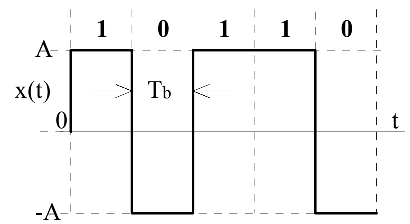


Fig. P3.30(c)

$$E\{A_nA_{n+k}\} = \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = 0 = \eta_a^2; \qquad \eta_a^2 = 0; \quad \sigma_a^2 = A^2$$

$$S_x(f) = \frac{1}{T_b}|P(f)|^2[A^2 + 0] = \frac{A^2}{T_b}|P(f)|^2$$

$$p(t) = \Pi(\frac{t}{T_b}) \Leftrightarrow P(f) = T_b\text{sinc}(T_bf); \quad |P(f)|^2 = T_b{}^2\text{sinc}^2(T_bf)$$

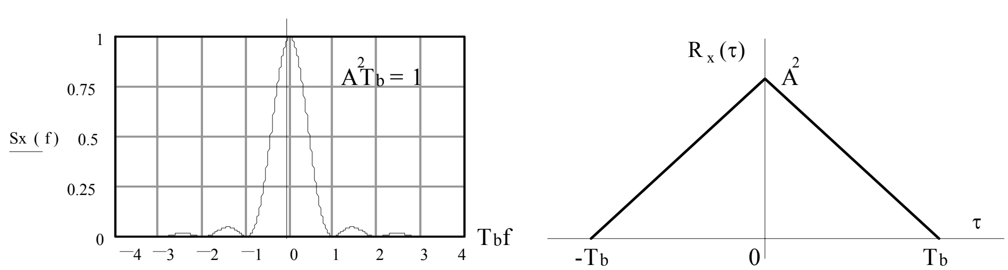
$$S_x(f) = A^2T_b\text{sinc}^2(T_bf) \quad \text{para todo f}$$

Veamos ahora la función de autocorrelación. Por Transformada de Fourier,

$$R_x(\tau) = A^2\Lambda(\frac{\tau}{T_b})$$

La potencia de la señal es $< x^2(t) >= R_x(0) = A^2$

En la Fig. P3.30(d) se muestra $S_x(f)$ y $R_x(\tau)$.



(a) Densidad f Espectral (b) Función de Autocorrelación

Fig.. P3.30(d). Secuencia Aleatoria Bipolar NRZ

(c) Secuencia aleatoria AMI RZ de amplitudes ±A, Fig. P3.23(e).

Amplitudes posibles:

$$A_1 = A \to P_1 = \frac{1}{4}; \quad A_2 = -A \to P_2 = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = 0 \to P_3 = \frac{1}{2}$$

$$k = 0; \quad E\{A_n^2\} = \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} + \frac{A_3^2}{2} = 2\frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

$$E\{A_n^2\} = \sigma_a^2 + \eta_a^2 = \frac{A^2}{2}$$

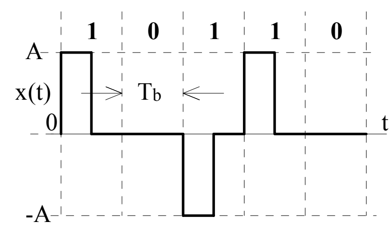


Fig. P3.30(e)

Nótese que no pueden aparecer dos UNOS del
mismo signo seguidos; por consiguiente, hay que considerar el valor $k \neq 0$ y $k = 1$.

Entonces, para $k \neq 0$ y $k = 1$, productos posibles:

$$A_1A_3 \to P_1 = \frac{1}{4}; \quad A_1A_2 \to P_2 = \frac{1}{4}; \quad A_3A_1 \to P_3 = \frac{1}{4}; \quad A_3A_2 \to P_4 = \frac{1}{4}$$

$$E\{A_nA_{n+1}\} = \frac{A_1A_2}{4} = -\frac{A^2}{4} = \eta_a^2$$

Para $k \neq 0$, $k \geq 2$, productos posibles:

$$A_1A_1 \to P_1 = \frac{1}{16}; \quad A_1A_2 \to P_2 = \frac{1}{16}; \quad A_1A_3 \to P_3 = \frac{1}{8}$$

$$A_2A_1 \to P_4 = \frac{1}{16}; \quad A_2A_2 \to P_5 = \frac{1}{16}; \quad A_2A_3 \to P_6 = \frac{1}{8}$$

$$A_3A_1 \to P_7 = \frac{1}{8}; \quad A_3A_2 \to P_8 = \frac{1}{8}; \quad A_3A_3 \to P_9 = \frac{1}{4}$$

$$E\{A_nA_{n+k}\} = (A_1A_1)P_1 + (A_1A_2)P_2 + (A_2A_1)P_4 + (A_2A_2)P_5$$

$$= \frac{A^2}{16} - \frac{A^2}{16} - \frac{A^2}{16} + \frac{A^2}{16} = 0; \qquad \eta_a^2 = 0; \quad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{2}$$

Para determinar $S_x(f)$, vamos a utilizar la expresión (3.166) del Texto.

$$S_x(f)=\frac{1}{T_b}|P(f)|^2[E\{A_n^2\}+2\sum_{k=1}^{\infty}E\{A_nA_{n+k}\}\cos(2\pi kT_bf)$$

pero la sumatoria es válida solamente para k = 1, para lo cual,

$$E\{A_nA_{n+1}\}=\eta_a^2=-\frac{A^2}{4};\quad \text{también,}\quad E\{A_n^2\}=\frac{A^2}{2},\ \text{de donde}$$

$$S_x(f)=\frac{1}{T_b}|P(f)|^2\left[\frac{A^2}{2}-2\frac{A^2}{4}\cos(2\pi T_bf)\right]=\frac{A^2}{T_b}|P(f)|^2\operatorname{sen}^2(\pi T_bf)$$

$$p(t)=\Pi(\frac{t}{T_b/2})\Leftrightarrow P(f)=\frac{T_b}{2}\operatorname{sinc}(\frac{T_b}{2}f);\quad |P(f)|^2=\frac{T_b^2}{4}\operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)$$

$$S_x(f)=\frac{A^2T_b}{4}\operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)\operatorname{sen}^2(\pi T_bf)$$

Para determinar la correspondiente función de autocorrelación hagamos

$$S_x(f)=\frac{A^2T_b}{8}\operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)[1-\cos(2\pi T_bf)]=\frac{A^2T_b}{8}\left[\operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)-\operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2})\cos(2\pi T_bf)\right]$$

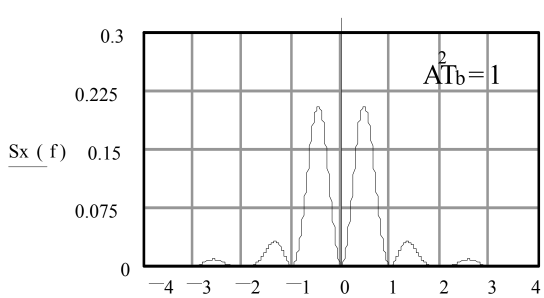
pero $\quad \operatorname{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)\Leftrightarrow\frac{2}{T_b}\Lambda(\frac{\tau}{T_b/2})$

$$R_x(\tau)=\frac{A^2T_b}{8}\frac{2}{T_b}\Lambda(\frac{\tau}{T_b/2})-\frac{A^2T_b}{8}\left[\frac{1}{T_b}\Lambda(\frac{\tau+T_b}{T_b/2})+\frac{1}{T_b}\Lambda(\frac{\tau-T_b}{T_b/2})\right]$$

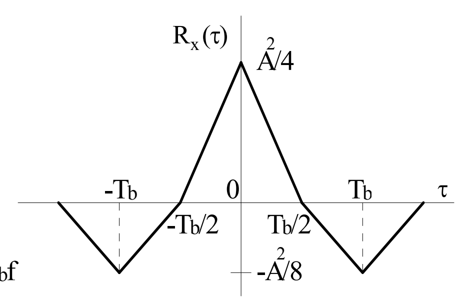
$$R_x(\tau)=\frac{A^2}{4}\left\{\Lambda(\frac{\tau}{T_b/2})-\frac{1}{2}\left[\Lambda(\frac{\tau+T_b}{T_b/2})+\Lambda(\frac{\tau-T_b}{T_b/2})\right]\right\}$$

La potencia de la señal es $\quad <x^2(t)>=R_x(0)=\frac{A^2}{4}$

En la Fig. P3.30(f) se muestra $S_x(f)$ y $R_x(\tau)$ de una secuencia aleatoria AMI RZ.



(a) Densidad Espectral



(b) Función de Autocorrelación

Fig.. P3.30(f). Secuencia Aleatoria AMI RZ

El procedimiento anterior se puede aplicar a una secuencia aleatoria AMI NRZ como la mostrada en la Fig. P3.30(g). En este caso,

$$p(t) = \Pi(\frac{t}{T_b}) \Leftrightarrow P(f) = T_b \mathrm{sinc}(T_b f)$$

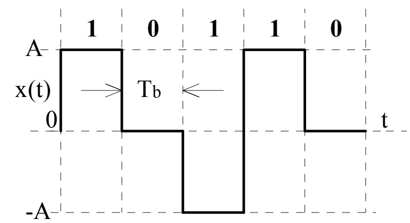


Fig. P3.30(g)

$$|P(f)|^2 = T_b^2 \mathrm{sinc}^2(T_b f)$$

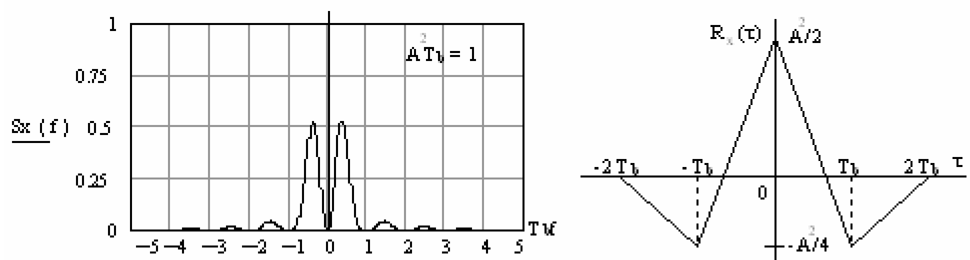
$$S_x(f) = A^2 T_b \mathrm{sinc}^2(T_b f) \mathrm{sen}^2(\pi T_b f).$$

El lector puede demostrar fácilmente que la función de autocorrelación es

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\Lambda(\frac{\tau}{T_b}) - \frac{A^2}{4}\left[\Lambda(\frac{\tau + T_b}{T_b}) + \Lambda(\frac{\tau - T_b}{T_b})\right].$$

También, $\quad < x^2(t) = R_x(0) = \frac{A^2}{2}$

En la Fig. P3.30(h) se muestra $S_x(f)$ y $R_x(\tau)$



(a) Densidad Espectral (b) Función de Autocorrelación

Fig.. P3.30(h). Secuencia Aleatoria AMI NRZ

(d) Secuencia aleatoria MANCHESTER bipolar de amplitudes ±A, Fig. 3.24 del Texto.

La secuencia MANCHESTER está formada por dos símbolos que aparecen dependiendo del estado transmitido (UNO o CERO). Estos símbolos, que representaremos como $s_1(t)$ y $s_0(t)$, se muestran en la Fig. P3.30(i). Estos símbolos son independientes y sus probabilidades son

$$P\{s_1(t)\} = \frac{1}{2}; \quad P\{s_0(t)\} = \frac{1}{2}$$

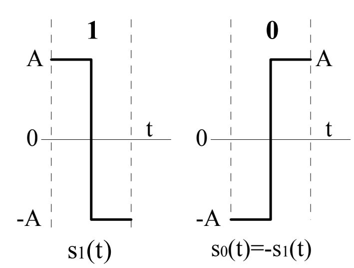


Fig. P3.30(i)

Por inspección, vemos que el valor promedio de cada impulso es cero, es decir,

$$E\{s(t)\} = 0 = \eta_a; \qquad \eta_a^2 = 0$$

Puesto que $\eta_a = 0$, entonces, para $k \neq 0$,

$$E\{s_1(t)s_0(t)\} = E\{s_1(t)\}E\{s_0(t)\} = 0$$

y para $k = 0$, $E\{s^2(t)\} = A^2 = \sigma_a^2 + \eta_a^2; \quad \sigma_a^2 = A^2$ y $\eta_a^2 = 0$

Reemplazando en la expresión (3.165) del Texto,

$$S_x(f) = \frac{1}{T_b}|P(f)|^2 A^2 = \frac{A^2}{T_b}|P(f)|^2$$

p(t) lo podemos definir en la forma $p(t) = \Pi(\frac{t + T_b/4}{T_b/2}) - \Pi(\frac{t - T_b/4}{T_b/2})$

$$P(f) = \frac{T_b}{2}\text{sinc}(\frac{T_b}{2}f)\exp(j2\pi\frac{T_b}{4}f) - \frac{T_b}{2}\text{sinc}(\frac{T_b}{2})\exp(-j2\pi\frac{T_b}{4}f)$$

$P(f) = jT_b\text{sinc}(\frac{T_b}{2}f)\text{sen}(\pi\frac{T_b}{2}f)$; $|P(f)|^2 = T_b^2\text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)\text{sen}^2(\pi\frac{T_b}{2}f)$, de donde,

$$S_x(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)\text{sen}^2(\pi\frac{T_b}{2}f)$$

Veamos ahora la función de autocorrelación.

$$S_x(f) = \frac{A^2 T_b}{2}\text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f) - \frac{A^2 T_b}{2}\text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f)\cos(2\pi\frac{T_b}{2}f)$$

pero $\text{sinc}^2(\frac{T_b}{2}f) \Leftrightarrow \frac{2}{T_b}\Lambda(\frac{\tau}{T_b/2})$ y tomando la Transformada de Fourier de $S_x(f)$,

$$R_x(\tau) = A^2\Lambda(\frac{\tau}{T_b/2}) - \frac{A^2}{2}\left[\Lambda(\frac{\tau + T_b/2}{T_b/2}) + \Lambda(\frac{\tau - T_b/2}{T_b/2})\right]$$

La potencia de la señal es $< x^2(t) >= R_x(0) = A^2$

En la Fig. P3.30(j) se muestra $S_x(f)$ y $R_x(\tau)$.

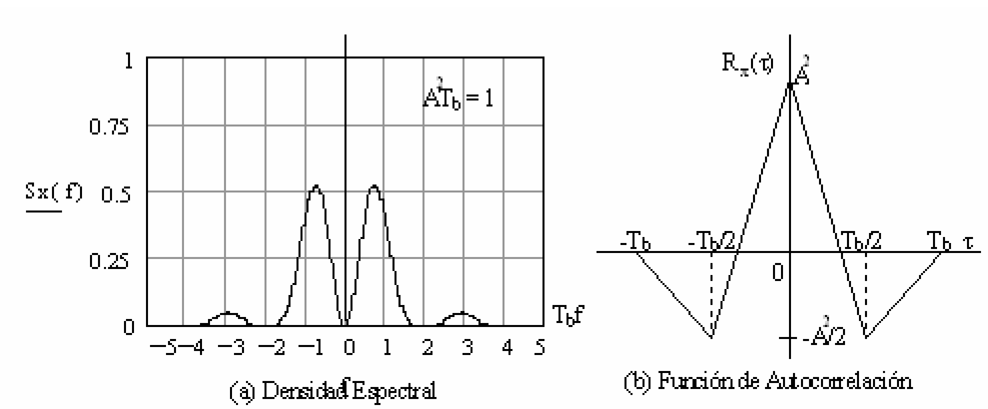


Fig. P3.30(j). Secuencia Aleatoria MANCHESTER Bipolar

En la Fig. P3.30(k) se muestran las densidades espectrales anteriores para su comparación. Obsérvese que las amplitudes para $T_b f > 2$ ó $f > 2/T_b$ son despreciables.

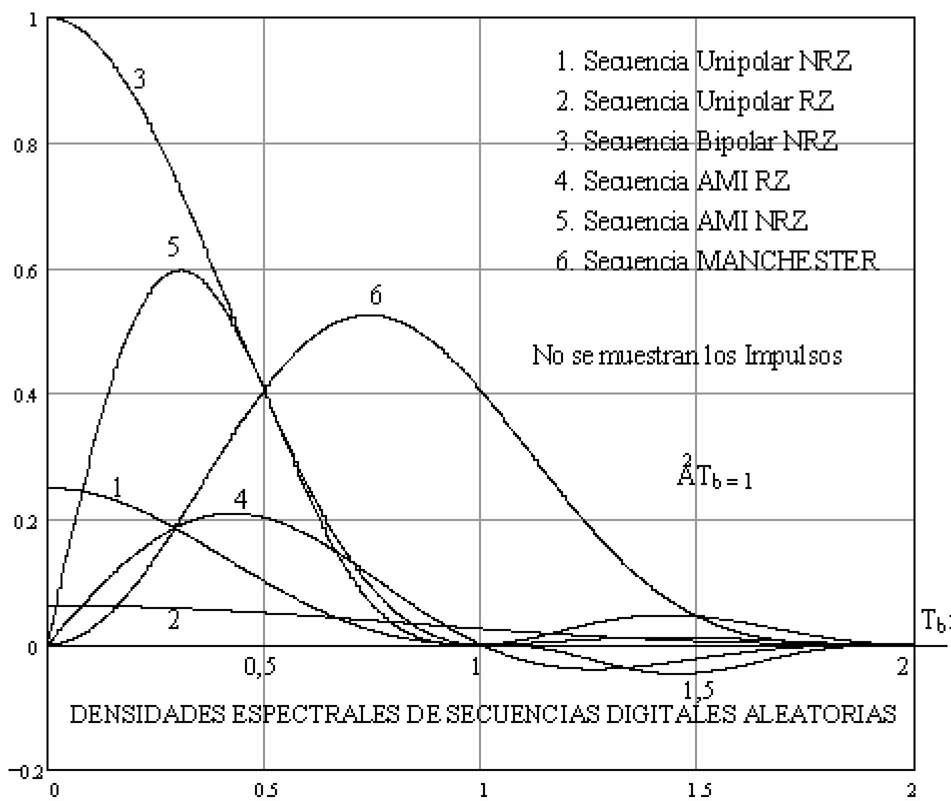

1. Secuencia Unipolar NRZ
2. Secuencia Unipolar RZ
3. Secuencia Bipolar NRZ
4. Secuencia AMI RZ
5. Secuencia AMI NRZ
6. Secuencia MANCHESTER
No se muestran los Impulsos
$A^2T_b = 1$
$T_b f$
DENSIDADES ESPECTRALES DE SECUENCIAS DIGITALES ALEATORIAS

Fig. P3.30(k)

CAPITULO IV

4.1. Sea un alfabeto en el cual la probabilidad de ocurrencia de las diferentes letras se da en la Tabla siguiente:

A 0,081	E 0,124	I 0,072	M 0,072	Q 0,002	V 0,009
B 0,016	F 0,023	J 0,001	N 0,072	R 0,060	W 0,020
C 0,032	G 0,016	K 0,005	O 0,079	S 0,066	X 0,002
D 0,037	H 0,051	L 0,040	P 0,023	T 0,096	Y 0,019
				U 0,031	Z 0,001

(a) ¿Cuál letra proporciona la máxima cantidad de información?

(b) ¿Cuál letra proporciona la mínima cantidad de información?

(c) Suponga que las letras se eligen independientemente para formar palabras (lo cual no se ajusta a la realidad). Demuestre que la entropía de este alfabeto es de 4,316 bits/letra.

(d) Sea el juego siguiente: se trata de adivinar una palabra y se da como pista la primera letra de la palabra. ¿En español, cuál letra es más útil en el juego, la letra E o la letra Z?

Solución:

(a) La letra que proporciona la máxima información es aquella cuya probabilidad de ocurrencia es la menor. En la Tabla anterior corresponde a las letras J y Z cuyas probabilidades son 0,001. En este caso:

$$\text{Cantidad de Información} = \text{I} = \log_2 \frac{1}{0{,}001} = 9{,}966\ \text{bits}$$

(b) Para una mínima cantidad de información se tiene la letra E cuya probabilidad de ocurrencia es de 0,124; entonces,

$$\text{Cantidad de Información} = \text{I} = \log_2 \frac{1}{0{,}124} = 3{,}012\ \text{bits}$$

(c) La entropía H viene dada por la expresión (con las probabilidades dadas en la Tabla)

$$H = \sum_{j=1}^{N} P_j \log_2 \frac{1}{P_j} = 0{,}081 \log_2 \frac{1}{0{,}081} + 0{,}016 \log_2 \frac{1}{0{,}016} + 0{,}032 \log_2 \frac{1}{0{,}032} + \cdots$$

$$\cdots + 0{,}019 \log_2 \frac{1}{0{,}019} + 0{,}001 \log_2 \frac{1}{0{,}001} = 4{,}316\ \text{bits/letra}$$

(d) La letra más útil en el juego es la letra Z, por cuanto el número de palabras que empiezan con Z es mucho menor que el número de palabras que empiezan con E.

4.2. Una fuente de información produce 128 símbolos independientes, de los cuales 16 ocurren con probabilidad de 1/32, y los 112 restantes con una probabilidad de 1/224. La fuente produce 100 símbolos por segundo.

Demuestre que la velocidad de información promedio de la fuente es de 640,4 bps.

Solución:

Datos: N=128; $V_s = 100$ símb/seg; $P_1 = 1/32$; $P_2 = 1/224$.

$$H = 16\frac{1}{32}\log_2(32) + 112\frac{1}{224}\log_2(224) = 6{,}404 \text{ bits/símbolo}$$

$$V_i = V_s \cdot H = 100 \cdot 6{,}404 = 640{,}4 \text{ bps}$$

4.3. Un alfabeto consta de las siguientes letras: A, B, C, D, E, F, H y O, cuya aparición suponemos equiprobable. Estas letras se codifican en binario puro con un impulso de arranque y uno de pare; todos los impulsos tienen la misma duración. El canal de transmisión tiene un ancho de banda de 4 kHz.

(a) Demuestre que la palabra FACHADA se puede transmitir en 8,75 mseg y con una velocidad de información de 2400 bps.

(b) Asigne a cada letra una muestra codificada y muestre la forma de la palabra CAFE a la salida del codificador. Suponga que el impulso de arranque está siempre a CERO y el impulso de pare siempre a UNO.

(c) Si las probabilidades de las 8 letras son, respectivamente, 0,2; 0,15; 0,15; 0,1; 0,25; 0,05; 0,05 y 0,05, demuestre que la información promedio, por letra, es de 2,766 bits.

Solución:

Datos: N = 8 símbolos o letras; B = 4 kHz; código binario puro.

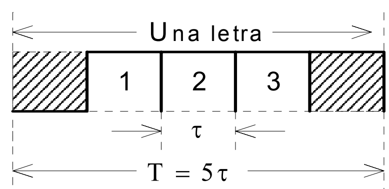


Fig. P4.3(a)

(a) $N = 2^n = 8$, de donde $n = 3$.

La codificación es, Fig. P4.3(a)

$$B = \frac{1}{\tau} = 4 \cdot 10^3; \quad \tau = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Duración de una letra $= T = 5\tau = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$

La palabra FACHADA contiene 7 letras; por lo tanto, se transmite en un tiempo total

$$T_t = 7 \cdot T = 0{,}00875 \text{ seg} = 8{,}75 \text{ mseg}$$

(b) Sea la siguiente asignación (arbitraria) en la cual el dígito de menor peso (LSB) se coloca a la izquierda, pues la práctica usual es la de transmitir el LSB de primero:

A → 000; B → 100; C → 010; D → 110; E → 001; F → 101; H → 011; O → 111

La forma codificada de la palabra CAFE será:

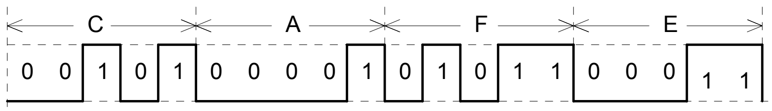


Fig. P4.3(b)

(c)

$$H = 0{,}2\log_2\left(\frac{1}{0{,}2}\right) + 2\cdot 0{,}15\log_2\left(\frac{1}{0{,}15}\right) + 0{,}1\log_2\left(\frac{1}{0{,}1}\right) + 0{,}25\log_2\left(\frac{1}{0{,}25}\right) + 3\cdot 0{,}05\log_2\left(\frac{1}{0{,}05}\right)$$

H = 2,766 bits/letra

4.4. El alfabeto de una máquina de escribir consta de 32 caracteres alfanuméricos que suponemos equiprobables, y se desea escribir una página de 280 caracteres. Una persona escribe a una velocidad de 2 bps.

Demuestre que la persona puede escribir una página en 11 minutos y 40 segundos.

Solución:

Datos: N = 32; N_c = 280 caracteres; V_i = 2 bps

Cantidad de información promedio = I = $\log_2 N = \log_2 32$ = 5 bits

Cantidad total de información en una página = $I_t = N_c \cdot I = 280 \cdot 5 = 1400$ bits

$$V_i = \frac{I_t}{T} \therefore T = \frac{I_t}{V_i} = \frac{1400}{2} = 700\text{ seg} = 11\text{ minutos y }40\text{ segundos}$$

4.5. Una fuente produce ocho símbolos distintos e independientes cuyas probabilidades de aparición son: un símbolo con una probabilidad de 0,512; tres símbolos con una probabilidad, cada uno, de 0,032, y un símbolo con una probabilidad de 0,008. Los símbolos se producen a una velocidad de 1000 símbolos por segundo, se codifican en binario para transmitirlos por un canal telefónico de 4 kHz.

Demuestre que los símbolos sí pueden transmitirse por el canal telefónico y que la velocidad de información y de modulación son, respectivamente, de 2166 bps y 3000 baudios.

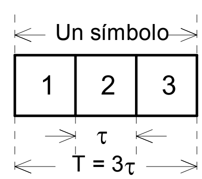


Fig. P4.5.

Solución:

Datos: N = 8; P_1 = 0,512; P_2 = 0,128; P_3 = 0,032; P_4 = 0,008

V_s = 1000 símb/seg; m = 2; B = 4 kHz = 4000 Hz. No hay redundancia.

$N = 2^n \therefore n = 3$. La codificación tiene la forma, Fig. P4.5.

$$V_s = \frac{1}{T} = 1000 \therefore T = 10^{-3}\text{ seg}; \quad \tau = \frac{T}{3} \therefore \frac{1}{\tau} = 3000\text{ baudios}$$

$V_b = 3000$ baudios

Vemos que $V_b < B$; los símbolos a $V_b = 3000$ baudios se pueden transmitir perfectamente por un canal de 4 kHz de ancho de banda. La información promedio por símbolo viene dada por

$$I = 0{,}512\log_2(\frac{1}{0{,}512}) + 3\cdot 0{,}128\log_2(\frac{1}{0{,}128}) + 3\cdot 0{,}032\log_2(\frac{1}{0{,}032}) + 0{,}008\log_2(\frac{1}{0{,}008})$$

I = 2,166 bits/símb.

La velocidad de información es $V_i = V_s \cdot I = 1000 \cdot 2{,}166 = 2166$ bps

4.6. Se tiene 64 monedas de las cuales sabemos que una es falsa. Disponemos también de una balanza de precisión con la cual podemos pesar las monedas.

(a) Si sabemos que la moneda falsa pesa menos que las buenas, determine el número mínimo de pesadas necesarias para descubrir cuál es la moneda falsa.

(b) Repetir la parte (a) pero en este caso no sabemos si la moneda falsa pesa más o menos que las monedas buenas.

Nota: En las partes (a) y (b) hay que calcular no solamente el número de pesadas, sino mostrar también el procedimiento para efectuarlas.

Solución:

(a) Como la selección es entre falsa y buena, el número de pesadas es igual a la entropía H; por lo tanto, $H = \log_2 64 = 6$. Se necesita hacer 6 pesadas como mínimo para determinar cuál es la moneda falsa.

Procedimiento:

(1) Se separan las monedas en dos grupos de 32 monedas y se pesan: Pesada 1.

(2) Como la moneda falsa pesa menos que las buenas, ella estará en el grupo que pesó menos. Este grupo se separa en dos grupos de 16 monedas, los cuales se pesan: Pesada 2.

(3) Se toma el grupo que pesó menos, se separa en dos grupos de 8 monedas, los cuales se pesan: Pesada 3

(4) Se toma el grupo que pesó menos, se separa en dos grupos de 4 monedas, los cuales se pesan: Pesada 4.

(5) Se toma el grupo que pesó menos, se separa en dos grupos de 2 monedas, los cuales se pesan: Pesada 5.

(6) Se toman las dos monedas del grupo que pesó menos y se pesan: Pesada 6.

La moneda que pesa menos es la falsa; fueron 6 pesadas.

(b) En este caso se incluye una pregunta adicional la cual es “si la moneda falsa pesa más o menos que las monedas buenas” que equivale a un bit o a una pesada adicional. El número de pesadas será entonces $N = H + 1$, donde H, de la parte (a), es igual a 6. El número de pesadas para determinar la moneda falsa será de 7.

Procedimiento:

(1) Se separan las 64 monedas en dos grupos A y B de 32 monedas, los cuales se pesan: Pesada 1.

(2) Sea, por ejemplo, el grupo A el más pesado. Este grupo A se separa en dos grupos A11 y A12, de 16 monedas cada uno, los cuales se pesan: Pesada 2.

Si los grupos A11 y A12 pesan igual, la moneda es menos pesada y estará en el grupo B.

Si los grupos A11 y A12 pesan diferente, la moneda es más pesada y estará en el grupo A11 o A12 que pese más.

Con esto determinamos si la moneda falsa es más o menos pesada que las buenas. Vamos a suponer que la moneda es menos pesada y está en el grupo B.

(3) El grupo B se separa en dos grupos B11 y B12, de 16 monedas cada uno, los cuales se pesan: Pesada 3. La moneda falsa estará en el grupo que pesa menos; sea B12 este grupo.

(4) El grupo B12 se separa en dos grupos B21 y B22, de 8 monedas cada uno, los cuales se pesan: Pesada 4. La moneda falsa estará en el grupo que pesa menos; sea B21 este grupo.

(5) El grupo B21 se separa en dos grupos B31 y B32, de cuatro monedas cada uno, los cuales se pesan: Pesada 5. La moneda falsa estará en el grupo que pesa menos; sea B32 este grupo.

(6) El grupo B32 se separa en dos grupos B41 y B42, de dos monedas cada uno, los cuales se pesan: Pesada 6. La moneda falsa estará en el grupo que pese menos; sea B41 este grupo.

(7) Las dos monedas del grupo B41 se pesan: Pesada 7. La moneda que pesa menos es la moneda falsa.

Se necesitaron 7 pesadas.

4.7. Se escucha un partido de fútbol y el narrador habla a una velocidad de 300 palabras por minuto. Con los datos del Ejemplo 4.3 del Texto, determine la velocidad de información a la cual transmite el locutor.

Solución:

Datos: Del Ejemplo 4.3, Información promedio por palabra = I_p = 9,3 bits/palabra

V_s = 300 palabras/minuto = 5 palabras/seg

$$V_i = V_s \cdot I_p = 5 \cdot 9{,}3 = 46{,}5 \text{ bps}$$

4.8. Vamos a determinar la información contenida en una fotografía en blanco y negro. La imagen está compuesta por puntos con 8 niveles de gris, todos igualmente probables; la resolución de la imagen es de 5 puntos/mm.

Determine la información contenida en una fotografía de 10 cm x 10 cm.

Solución:

Datos: Para el elemento de imagen, Fig. P4.8, $\rightarrow$

$N = 8$; $I = \log_2 8 = 3$ bits/punto

Resolución = R = 5 puntos/mm = 25 puntos/mm^2

Número de puntos por imagen = N_p = 100x100x25

$N_p = 2{,}5 \times 10^5$ puntos/imagen

Información total en la fotografía = $I_t = N_p\, I$

$I_t = 2{,}5 \times 10^5 \times 3 = 7{,}5 \times 10^5$ bits

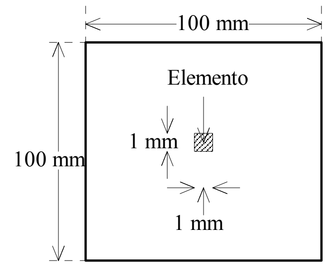


Fig. P4.8

4.9. El refrán dice que “una imagen vale mil palabras”. Utilizando las suposiciones de los dos problemas anteriores, ¿Qué tamaño debe tener la imagen (cuadrada) para que la información contenida en ella sea de 1000 palabras?

Solución:

Datos: Información promedio por palabra = I_p = 9,3 bits/palabra

Número de palabras = N_p = 1000 palabras

Información en la imagen de mil palabras = $I_t = N_p\, I_p = 1000 \times 9{,}3 = 9300$ bits

Información en cada elemento de 1 mm^2 = $I_{el} = R \times I = 25 \times 3 = 75$ bits/mm^2

Número de elementos de 1 mm^2 en la imagen de 1000 palabras = $N_{el} = I_t/I_{el}$

N_{el} es también el área, en mm^2, de la imagen de 1000 palabras; entonces,

$$N_{el} = \frac{I_t}{I_{el}} = \frac{9300 \text{ bits}}{75 \text{ bits/mm}^2} = 124 \ \text{mm}^2$$

La imagen de 1000 palabras tiene un área de 124 mm^2. Si la imagen es cuadrada, cada lado tendrá una longitud $L = \sqrt{124} = 11{,}4$ mm.

La imagen, cuya información equivale a mil palabras, medirá entonces 11,4 mm x 11,4 mm.

4.10. Contenido de información de textos escritos.

(a) ¿Cuál contiene más información: una página de un texto o la correspondiente página de apuntes (de igual número de palabras) del mismo tópico? Razone su respuesta.

(b) Vamos a estimar la información promedio contenida en la página de un periódico. Una página tiene una superficie útil de 50 cm x 60 cm, los tipos tienen dimensiones de 3 mm x 3mm, el espaciado entre palabras es de 3 mm y la separación entre líneas es de 6 mm. Con los datos del Ejemplo 1.3, demuestre que la información promedio contenida en una página es de 16820 bits.

Solución:

(a) Para una misma información útil, un texto contiene muchísimas más palabras (aclaratorias, de explicación, etc.) que una página de apuntes de clase del mismo tópico. Los apuntes son más concisos, con un mínimo de palabras adicionales. En consecuencia, en un mismo número de palabras los apuntes de clase contienen más información útil que el texto correspondiente.

Nota: Esta es una explicación de tipo teórico y nó una exhortación para el uso del denominado “apuntismo”. Los apuntes de clase son solamente una guía de estudio y jamás reemplazarán al texto correspondiente.

(b) Datos: 5 letras por palabra; $I_p = 9{,}3$ bits/palabra; dimensiones: 50 cm x 60 cm.

Cada línea contiene M palabras de 5 letras, y entre palabra y palabra habrá un espacio de 3 mm. La línea comienza con palabra y termina con palabra; habrá entonces $(M - 1)$ espacios. Entonces, para cada línea:

$5M \times 3 \text{ mm} + (M - 1) \times 3 \text{ mm} = 500 \text{ mm}$

Resolviendo para M (número entero): $M = 27$ palabras

Verticalmente cada línea ocupa 3 mm más 6 mm de espaciado, para un total de 9 mm por línea; la página tendrá N líneas. La página escrita comienza con una línea y termina con una línea, y el número de espacios entre línea y línea será $(N - 1)$. Entonces, verticalmente,

$N \times 3 \text{ mm} + (N - 1) \times 6 \text{ mm} = 600 \text{ mm}$

Resolviendo para N (número entero): $N = 67$ líneas

El número total de palabras será: $N_p = M\,N = 27 \times 67 = 1809$ palabras

La cantidad total de información será: $I_t = N_p\,I_p = 1809 \times 9{,}3 = 16820$ bits.

4.11. El intercambio de información entre una computadora y su unidad de disco se efectúa a una velocidad de 36400 bps. La información o texto se considera formada por “páginas” de 30 líneas de 80 columnas con 7 bits por caracter.

(a) Demuestre que la computadora puede transferir 650 páginas de texto en 5 minutos.

(b) Las páginas almacenadas en la unidad de disco se van a transmitir ahora a razón de 30 páginas por segundo por un canal de 42 kHz de ancho de banda y en el cual la potencia de ruido es de 1 mW.

Demuestre que para que no haya pérdida de información, la potencia promedio mínima de la señal debe ser de 4,095 W ó 36,123 dBm.

Solución:

Datos: $V_i = 36400$ bps; páginas de 30 líneas de 80 columnas; 7 bits/caracter

(a) Información por página = $I_p = 30 \times 80 \times 7 = 16800$ bits/página

Tiempo de transmisión de una página = $T_p = \dfrac{I_p}{V_i} = \dfrac{16800}{36400} = 0{,}462$ seg/pág.

Tiempo de transmisión de 650 páginas = $T_t = 650\ T_p = 300$ seg = 5 minutos

(b) $V_T = 30$ pag/seg; $B = 42$ kHz; $N = 10^{-3}$ W

Velocidad de información = $V_i = V_T\, I_p = 30 \times 16800 = 5{,}04 \times 10^5$ bps

De la ecuación de Hartley-Shannon, $V_i = B \log_2(1+S/N)$

$5{,}04 \times 10^5 = 42 \times 10^3 \log_2(1+10^3 S)$. Resolviendo para S,

$$S = \frac{10^{3,612} - 1}{1000} = 4{,}095\ \text{W} = 36{,}123\ \text{dBm}$$

4.12. Una fuente de información produce 16 símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1000 símbolos por segundo. Los símbolos se codifican en binario más un impulso de sincronización, todos de igual duración, los cuales se transmiten por un canal con un ancho de banda de 1 kHz. Demuestre que

(a) La velocidad de modulación en el canal es de 5000 baudios.

(b) Para que no haya pérdida de información, la relación S/N en el canal deberá ser, como mínimo, de 11,7609 dB.

Solución:

Datos: $N = 16$; $V_s = 1000$ símb/seg; $m = 2$; un impulso de sincronización

$B = 1$ kHz = 1000 Hz; $I = \log_2 N = 4$ bits

(a) $N = 2^n = 16 \therefore n = 4$;

(b) La codificación es Fig. P4.12

$$V_s = \frac{1}{T} = 1000 \therefore T = 10^{-3}\ \text{seg}$$

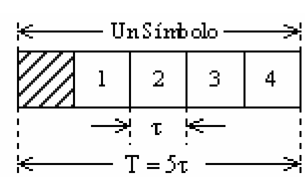


Fig. P4.12.

$$\tau = \frac{T}{5} = \frac{1}{5000} \therefore V_B = \frac{1}{\tau} = 5000\ \text{baudios}$$

(b) $V_i = \dfrac{I}{T} = \dfrac{4}{10^{-3}} = 4000$ bps. De la ecuación de Hartley-Shannon,

$4000 = 1000 \log_2(1+ S/N)$; $\log_2(1+ S/N) = 4$, de donde

$$\frac{S}{N} = 10^{\frac{4}{3.322}} - 1 = 15 = 11{,}7609 \text{ dB}$$

4.13. Una fuente produce impulsos los cuales se codifican en secuencias de 7 impulsos cuaternarios más un impulso de sincronización, todos de igual duración. Los cuatro niveles de cada impulso tienen probabilidades 0,4; 0,3; 0,2 y 0,1, respectivamente. La velocidad de modulación a la salida del codificador es de 80 kbaudios y se transmite un total de 1000 secuencias.

(a) Si no hay ruido en el canal, demuestre que la cantidad de información que llegó a destino es de 12925 bits.

(b) En el canal hay ruido. El ancho de banda del canal es de 10 kHz y la relación S/N correspondiente es de 30 dB. Demuestre que para que no haya pérdida de información hay que aumentar la relación S/N en, por lo menos, 8,909 dB.

Solución:

Datos: secuencias de 7 impulsos (n = 7); m = 4; un impulso de sincronización;

$P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}3$; $P_3 = 0{,}2$; $P_4 = 0{,}1$;

$V_b = 80$ kbaudios; $N_s = 1000$ secuencias

n = 7; la codificación es, Fig. P4.13

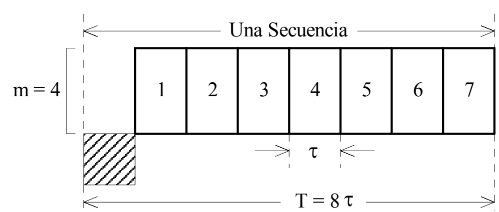


Fig. P4.13.

Información asociada a cada impulso = I_i

$$I_i = 0{,}4\log_2(\frac{1}{0{,}4}) + 0{,}3\log_2(\frac{1}{0{,}3}) +$$

$$+ 0{,}2\log_2(\frac{1}{0{,}2}) + 0{,}1\log_2(\frac{1}{0{,}1})$$

$I_i = 1{,}846$ bits/impulso; Información por secuencia = $I_s = n\, I_i = 7 \times 1{,}846 = 12{,}925$ bits/sec

Información total transmitida = $I_t = N_s\, I_s = 1000 \times 12{,}925 = 12925$ bits

(b) $B = 10 \text{ kHz} = 10^4$ Hz; S/N = 30 dB = 1000; $V_b = \frac{1}{\tau} = 80 \cdot 10^3 \therefore \tau = \frac{1}{80 \cdot 10^3}$

$$\tau = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ seg}; \quad T = 8\tau = 10^{-4} \text{ seg}; \quad V_i = \frac{I_s}{T} = \frac{12{,}925}{10^{-4}} = 12{,}925 \cdot 10^4 \text{ bps}$$

La capacidad del canal es $C = 10^4 \log_2(1 + 1000) = 9{,}967 \times 10^4$ bps

Vemos que $C < V_i$ cuando S/N = 30 dB; por lo tanto, habrá pérdida de información; hay que aumentar entonces la relación S/N haciendo $C = V_i$.

$12{,}925 \times 10^4 = 10^4 \log_2(1+S/N)$; Resolviendo para S/N,

$$\frac{S}{N} = 10^{3{,}891} - 1 = 7{,}779 \cdot 10^3 = 38{,}909 \text{ dB}$$

Por lo tanto, para que no haya pérdida de información, hay que aumentar la relación S/N de 30 dB a 38,909 dB, es decir, en una cantidad de 8,909 dB.

4.14. Una computadora trabaja en dos modalidades: Modo Texto y Modo Gráficos. En Modo Texto tiene un alfabeto de 256 caracteres alfanuméricos en una pantalla de 25 filas por 40 columnas cada una (Cada punto de la pantalla se denomina "pixel"). En Modo Gráficos la pantalla tiene una resolución de 200 filas y 300 columnas, donde cada punto puede tener 16 colores y 4 niveles de intensidad. Demuestre que la cantidad de memoria necesaria para almacenar el contenido de la pantalla es:

(a) En Modo Texto: 1 kbyte; (b) En Modo Gráficos: 45 kbytes

Solución:

Datos: Modo Texto: 256 caracteres; 25 filas x 40 columnas

Modo Gáficos: 200 filas x 300 columnas; 16 colores + 4 niveles de intensidad

(a) Modo Texto

N = 256 caracteres; Información por caracter = $I_c = \log_2(256) = 8$ bits/caracter

Número de caracteres en la pantalla = $N_c = 25 \times 40 = 1000$ caracteres

Información contenida en una pantalla = $I_t = N_c\, I_c = 8000$ bits

Como 1 byte = 8 bits, la cantidad de memoria necesaria para almacenar una pantalla en Modo Texto es de 1000 bytes = 1 kbyte

(b) Modo Gráficos

Cada punto tiene 16 x 4 formas posibles, es decir, $N = 16 \times 4 = 64$

Información por punto = $I_p = \log_2(64) = 6$ bits

Número de puntos en la pantalla = $N_p = 200 \times 300 = 6 \times 10^4$ puntos

Información contenida en una pantalla = $I_t = N_p\, I_p = 36 \times 10^4$ bits $= 45 \times 10^3$ bytes

En Modo Gráficos se necesita 45 kbytes para almacenar el contenido de una pantalla.

4.15. La imagen de un televisor a color está formada por 525 líneas que contienen, cada una, 1000 puntos luminosos. Cada punto luminoso tiene 8 niveles de brillantez y 16 matices de color. La velocidad de las imágenes es de 30 por segundo.

(a) Demuestre que la velocidad de información producida por la imagen de televisión es de 110,3 Mbps.

(b) Transmisión Analógica. Si la relación S/N en el canal es de 60 dB y la potencia de ruido es de 1 μW, demuestre que la potencia de señal es de 1 W y que se puede transmitir por un canal de ancho de banda de 5,534 MHz.

(c) Transmisión Digital. Si cada punto luminoso se codifica en ASCII sin bit de paridad (Fig. 1.13(b) del Texto) para su transmisión por un canal digital, demuestre que el ancho de banda mínimo necesario del canal es de 157,6 MHz.

(d) Si la potencia de ruido en el canal calculado en la parte (c) es de 1 μW, demuestre que la potencia mínima de la señal, para que no haya pérdida de información, debe ser de 0,6245 μW.

Solución:

Datos: 525 líneas; 1000 puntos luminosos; 8 niveles de brillantez + 16 matices de color; V_{im} = 30 imágenes/seg.

(a) Número de puntos en la pantalla = $N_p = 525 \times 10^3$ puntos

Número de variaciones de cada punto = N = 8 x 16 = 128 símbolos

Información asociada a cada punto = $I_p = \log_2 (128) = 7$ bits

Cantidad de información contenida en una imagen = $I_{im} = N_p\, I_p = 3{,}675 \times 10^6$ bits/imag

Velocidad de información producida por la imagen = $V_i = V_{im}\, I_{im} = 1{,}103 \times 10^8$ bps

V_i = 110,3 Mbps

(b) Transmisión Analógica

Datos: S/N = 60 dB = 10^6; N = 10^{-6} W; V_i = 110,3 Mbps

De la ecuación de Hartley-Shannon, $110{,}3 \times 10^6 = B \log_2(1 + 10^6)$

Resolviendo, el ancho de banda es $B = \dfrac{110{,}3 \cdot 10^6}{3{,}322 \cdot \log_{10}(1+10^6)} = 5{,}534$ MHz

El sistema NTSC de TV, utilizado en Venezuela, utiliza un ancho de banda de 6 MHz.

(c) Transmisión Digital

Datos: Código ASCII; $V_i = 110{,}3 \times 10^6$ bps; m = 2; n = 7 ; I = 7 bits

La codificación es, Fig. P4.15,

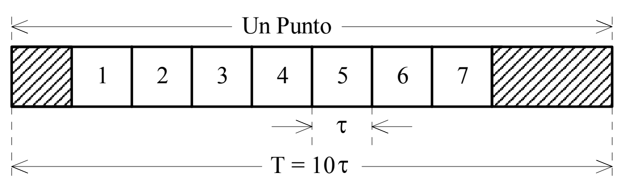


Fig. P4.15.

$$V_i = \frac{I}{T} \therefore T = \frac{I}{V_i} = \frac{7}{110{,}3 \cdot 10^6}$$

$T = 6{,}346 \times 10^{-8}$ seg = 10τ

$\tau = 6{,}346 \times 10^{-9}$ seg

$$B = \frac{1}{\tau} = 157{,}6 \cdot 10^6 = 157{,}6 \text{ MHz}$$

(d) Datos: B = 157,6 MHz; V_i = 110,3 Mbps; N = 10^{-6} W

De la ecuación de Hartley-Shannon, $110{,}3 \times 10^6 = 157{,}6 \times 10^6 \log_2(1+10^6 S)$

Resolviendo, $S = \dfrac{10^{\frac{V_i}{3.322B}} - 1}{10^6} = 6{,}245 \cdot 10^{-7} = 0{,}6245\ \mu$W

4.16. En un sistema de transmisión de facsímil de alta resolución se necesita, por página, 2,25 x 10^6 elementos de imagen (esto equivale a 1500 líneas en cada dimensión), y para una buena reproducción se requiere 16 niveles de brillantez. La información se codifica en binario para ser transmitida por un canal de 4 kHz de ancho de banda.

(a) Demuestre que la información contenida en una imagen es de 9 x 10^6 bits.

(b) Demuestre que una imagen se puede transmitir en 37,5 minutos.

(c) Demuestre que si la información se codifica en impulsos cuaternarios, el tiempo de transmisión se reduce a la mitad.

(d) Si la información se codifica en ASCII sin bit de paridad, Fig. 1.13(b), demuestre que una imagen se transmite en 93,75 minutos.

Solución:

Datos: $N_p = 2{,}25 \times 10^6$; N = 16 niveles; m = 2; B = 4 kHz

(a) Número de puntos en una imagen = $N_p = 2{,}25 \times 10^6$

$N = 16 = 2^n \;\therefore\; n = 4$. La codificación es, Fig. P4.16(a)

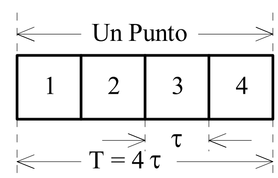


Fig. P4.16(a).

$I_p = 4$ bits/punto

Información contenida en una imagen = I_i

$I_i = N_p\, I_p = 4 \times 2.25 \times 10^6 = 9 \times 10^6$ bits

(b) $B = 4 \cdot 10^3 = \dfrac{1}{\tau} \;\therefore\; \tau = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ seg

$T = 4\tau = 10^{-3}$ seg

Tiempo de transmisión de una imagen = $N_p\, T$ = 2250 seg = 37,5 minutos

$$V_i = \frac{4}{10^{-3}} = 4000 \text{ bps}; \quad V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = 4000 \text{ baudios}$$

(c) Datos: N = 16; m = 4; $16 = 4^n \;\therefore\; n = 2$. La codificación es, Fig.P4.16(b)

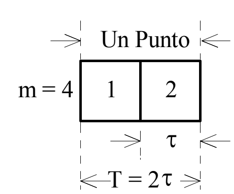


Fig. P4.16(b)

De la parte (b): $\tau = 2{,}5 \times 10^{-4}$ seg;

$T = 2\tau = 5 \times 10^{-4}$

$T_t = N_p\, T$ = 1125 seg =18,75 minutos

que es la mitad del tiempo de la parte anterior.

$$V_i = \frac{2 \cdot \log_2(4)}{5 \cdot 10^{-4}} = 8000 \text{ bps}; \quad V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = 4000 \text{ baudios}$$

Nótese que con este esquema de codificación la velocidad de información aumenta al doble, mientras que la velocidad de modulación no cambia.

(d) En este caso, cada punto, sin considerar los niveles de brillantez, se codifica en ASCII, es decir, con 7 bits por punto.

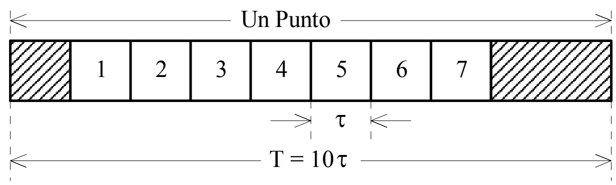


Fig. P4.16(c).

La codificación correspondiente es, Fig. P4.16(c) ,

De la parte (b): $\tau = 2{,}5 \times 10^{-4}$ seg

$T = 10\tau = 2{,}5 \times 10^{-3}$ seg

$T_t = N_p\,T = 5625$ seg

$T_t = 93{,}75$ minutos

$$V_i = \frac{7}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 2800 \text{ bps}; \quad V_b = \frac{1}{\tau} = 4000 \text{ baudios}$$

Nótese el efecto de la codificación en la velocidad de información; sin embargo, la velocidad de modulación sigue siendo siempre la misma de 4000 baudios.

4.17. Una fuente de información produce 27 símbolos distintos y equiprobables, los cuales se codifican en impulsos ternarios. El codificador produce bloques que contienen 9 impulsos de información más un impulso de sincronización, todos de igual duración. En el sistema no hay pérdida de información. La velocidad de modulación a la salida del codificador es de 10 kbaudios. Demuestre que

(a) La fuente está produciendo los símbolos a una velocidad de 3000 símbolos por segundo.

(b) Se puede transmitir $5{,}136 \times 10^{7}$ bits en una hora.

Solución:

Datos: N = 27 símbolos; m = 3; bloques de 9 impulsos de información + 1 de sincronización:

$V_b = 10^4$ baudios

(a) $N = 27 = 3^n \therefore n = 3$; son tres impulsos por símbolo. A la salida del codificador el bloque tendrá la forma mostrada en la Fig. P4.17

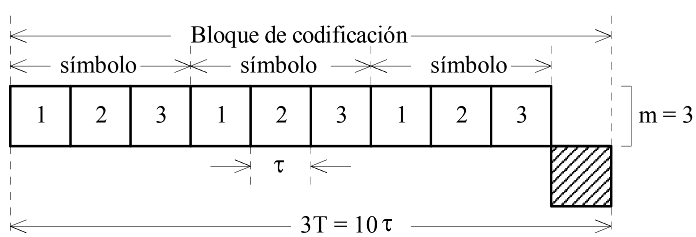


Fig. P4.17.

$$3T = 10\tau \therefore T = \frac{10\tau}{3}, \quad \text{pero} \quad \tau = \frac{1}{V_b} = \frac{1}{10^4}10^{-4}$$

$$T = 3{,}333 \cdot 10^{-4}; \quad V_s = \frac{1}{T} = 3000 \ \text{símb/seg}$$

(b) Información por símbolo = I = $\log_2 27$ = 4,755 bits/símb

De la Fig. 4.13, $V_i = \dfrac{3 \cdot I}{10\tau} = 14264{,}97$ bps

Número de bits transmitidos en una hora = I_t = $3600V_i$ = 5,136 x 10^7 bits

4.18. Un terminal de datos produce 256 caracteres alfanuméricos que se codifican en n impulsos m-arios incluyendo un impulso de arranque y uno de pare, todos de la misma duración. La señal codificada se transmite por un canal de ancho de banda de 10 kHz y con una relación S/N de 11,7609 dB. Demuestre que

(a) Para que no haya pérdida de información, el terminal de datos debe generar los caracteres a una velocidad igual o menor de 5000 caracteres por segundo.

(b) Si la velocidad de modulación máxima es 3/4 de la velocidad de información máxima, entonces m = 4 y n = 4.

(c) Para los mismos datos, ¿Qué pasaría si la codificación fuese en binario?

Solución:

Datos:

N = 256 = m^n; impulsos de arranque y pare; B = 10 kHz; S/N = 11,7609 dB = 15

(a) Para $B = 10^4$ Hz.

Información asociada a un símbolo = I_s = $\log_2(256)$ = 8 bits

De la ecuación de Hartley-Shannon, la capacidad del canal es

C = $10^4 \log_2(16)$ = 4 x 10^4 bps = 40 kbps

Para que no haya pérdida de información, la velocidad de información máxima será V_i = C = 4 x 10^4 = 40000 bps; entonces,

Duración de un símbolo = $T = \dfrac{I_s}{V_i} = \dfrac{8}{4 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10^{-4}$ seg.

Velocidad de producción de los símbolos = $V_s = \dfrac{1}{T} = 5 \cdot 10^3$ caracteres/segundo

(b) La codificación tiene la forma, Fig. P4.18(a)

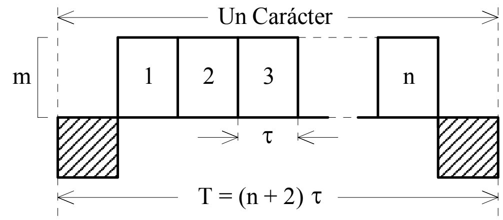


Fig. P4.18(a).

$$V_b = \frac{3}{4}V_i = \frac{1}{\tau};$$

y de la Fig. P4.18(a),

$$V_i = \frac{I_s}{T} = \frac{8}{(n+2)\tau}, \text{ pero}$$

$$V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{(n+2)\tau}$$

por consiguiente,

$$n+2 = 6 \therefore n = 4; \text{ pero como } m^4 = 256, \text{ entonces } m = 4.$$

La velocidad de información será ahora $V_i = \frac{8}{6\cdot\tau} = \frac{8}{6}\cdot 10^4 = 13333{,}33$ bps, mientras que la velocidad de modulación es $V_b = B = 10^4$ baudios. Puesto que $V_i < C$, no hay problemas en la transmisión; asimismo, la velocidad de producción de la fuente será

$$V_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{(n+2)\tau} = \frac{10^4}{6} = 1666{,}67 \text{ símbolos/segundo}$$

(c) Si la codificación es en binario, m = 2; $N = 2^n = 256 \therefore n = 8$. La codificación se muestra en la Fig. P4.18(b).

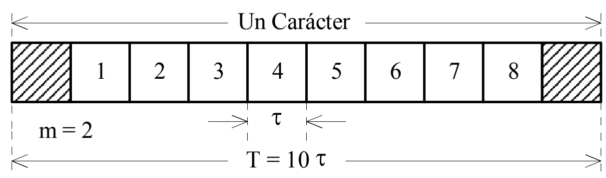


Fig. P4.18(b).

El problema ahora es decidir entre variar el ancho de banda manteniendo constante la velocidad de información, o variar la velocidad de información manteniendo constante el ancho de banda.

En la práctica generalmente no se puede cambiar el ancho de banda del canal, pero sí podemos variar la velocidad de información en alguna forma. En este caso mantendremos el ancho de banda de 10 kHz y ajustaremos la velocidad de información. El hecho de mantener constante el ancho de banda es equivalente a decir que la velocidad de modulación se mantiene constante.

De la Fig. P4.18(b), I = 8 bits y $T = 10\tau = \frac{10}{B} = \frac{10}{10\cdot 10^3} = 10^{-3}$ seg

También, $V_i = \frac{I}{T} = \frac{8}{10^{-3}} = 8000$ bps ; $V_b = 10^4$ baudios, y la velocidad de producción de la fuente será $V_s = \frac{1}{T} = 1000$ símbolos/segundo.

Nótese que $V_i < C$, y no habrá problemas de transmisión en el canal.

4.19. Una fuente de información produce 1024 símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1250 símbolos por segundo. Los símbolos se codifican en impulsos cuaternarios más un impulso de arranque y uno de pare. La duración de los impulsos de arranque y de pare es 1,5 veces la duración de un impulso de información. Demuestre que:

(a) Las velocidades de modulación y de información son de 10 kbaudios y 12,5 kbps, respectivamente.

(b) Si el ancho de banda del canal de transmisión es de 5 kHz y se transmite 10^5 muestras codificadas, se pierde 5 x 10^5 bits de información.

Solución:

Datos: N = 1024 símbolos; $V_s = 1250$ símb/seg; m = 4; impulsos de arranque y pare

(a) $N = 1024 = 4^n \therefore n = 5;\ m = 4$

la codificación es, Fig. P4.19

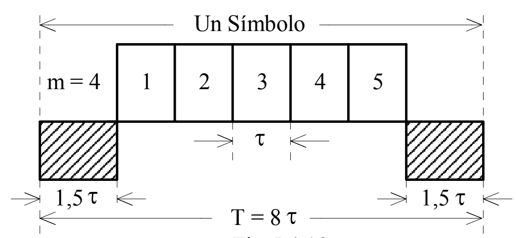


Fig. P4.19.

$I_s = \log_2(1024) = 10$ bits/símbolo

$$T = 8\tau = \frac{1}{1250} \therefore \tau = \frac{1}{8 \cdot 1250} = 10^{-4}$$

$$V_b = \frac{1}{\tau} = 10 \text{ kbaudios}$$

$V_i = V_s I_s = 1250$ x $10 = 12500$ bps = 12,5 kbps

(b) Datos: B = 5 kHz; m = 4; n = 5. $I_s = 10$ bits/símb; $\tau = 10^{-4}$; Puesto que $V_b > B$, habrá pérdida de información

De la Fig. P4.19, $V_i = \frac{I_s}{8\tau} = \frac{10 \cdot 10^4}{8} = 1,25 \cdot 10^4 = 12500$ bps

Asimismo, el canal de ancho de banda B puede soportar una velocidad

$$V_i' = \frac{B \cdot I_s}{8} = \frac{5 \cdot 10^4}{8} = 6,25 \cdot 10^3 = 6250 \text{ bps}$$

Número de símbolos transmitidos = $N_s = 10^5$

Como cada símbolo contiene 10 bits, cuando se transmite 10^5 símbolos se habrá transmitido una cantidad de información $I_t = N_s\ I_s = 10^6$ bits. Estos 10^6 bits se transmiten en un tiempo $T = \frac{I_t}{V_i} = \frac{10^6}{1{,}25 \cdot 10^4} = 80$ segundos.

Como el ancho de banda es ahora B = 5 kHz, y siendo $V_i' = 6250$ bps, entonces se transmitiría solamente una cantidad de información $I_t' = V_i' \cdot T = 5 \cdot 10^5$ bits.

La pérdida en bits cuando se transmite 10^5 símbolos será entonces

$I_p = I_t - I_t' = 10^6 - 5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^5$ bits.

Atención, nótese que este problema solamente tiene interés teórico, pues en la práctica la información debe llegar siempre completa para ser de utilidad, lo que no es el caso de la energía, en la cual lo que llega al destino siempre es aprovechable.

4.20. Un codificador produce impulsos binarios cuya velocidad de modulación es de 8 kbaudios. Estos impulsos se van a transmitir por un canal de 1 kHz de ancho de banda y en el cual la relación S/N es de 11,7609 dB. En estas condiciones hay pérdida de información. Demuestre que para que no haya pérdida de información hay que aumentar la relación S/N, como mínimo, en 12,304 dB.

Solución:

Datos: V_b = 8000 baudios; B = 1000 Hz; S/N = 11,7609 dB = 15; codificación binaria

La capacidad del canal es $C = 10^3 \log_2(1+15) = 10^3 \log_2(16) = 4000$ bps.

Vemos que $V_b < B$ ó $C < V_b$, lo que significa que hay pérdida de información. Como el sistema es binario (m = 2), la velocidad de modulación es numéricamente igual a la velocidad de información, es decir, $V_i = V_b = 8000$ bps.

Para alcanzar esta velocidad manteniendo el mismo ancho de banda, hay que aumentar la relación S/N a fin de que se verifique que

$8000 = 1000 \log_2(1+ S/N)$, de donde $S/N = 2^8 - 1 = 255 = 24{,}065$ dB

Por lo tanto, hay que aumentar la relación S/N de 11,7609 dB a 24,065 dB, es decir, en 12,3045 dB.

4.21. Se tiene un convertidor automático, con una capacidad de 15 x 10^3 bps, que convierte información de un sistema de codificación a otro sistema. La entrada al convertidor es una secuencia de impulsos de amplitud variable cuya frecuencia es de 2,25 x 10^5 impulsos por minuto. La salida del convertidor es otro tren de impulsos cuyo número de amplitudes es 1/4 del número de amplitudes de los impulsos de entrada al convertidor.

Demuestre que la velocidad de modulación a la salida del convertidor es de 7,5 kbaudios y que los impulsos son cuaternarios.

Solución:

Datos: $C_c = 15 \times 10^3$ bps; $V_{bi} = 2{,}25 \cdot 10^5$ imp/min $= \dfrac{2{,}25 \cdot 10^5}{60} = 3{,}75 \cdot 10^3$ baudios

Número de amplitudes a la entrada del convertidor = m_i

Número de amplitudes a la salida del convertidor = $m_o = m_i/4$

La velocidad de información a la entrada y a la salida del convertidor es igual a la capacidad del convertidor, es decir, $V_i = C_c = 15 \times 10^3$ bps.

A la entrada del convertidor, $V_i = V_{bi} \log_2(m_i)$; $15 \cdot 10^3 = 3{,}75 \cdot 10^3 \log_2(m_i)$

$$\log_2(m_i) = \frac{15 \cdot 10^3}{3{,}75 \cdot 10^3} = 4 \therefore m_i = 2^4 = 16 \text{ niveles de amplitud}$$

La impulsos a la entrada del convertidor tienen 16 niveles de amplitud; asimismo, los impulsos a la salida del convertidor tendrán $m_o = \dfrac{m_i}{4} = 4$ niveles de amplitud. Los impulsos a la salida del convertidor son cuaternarios.

A la salida del convertidor, $V_i = V_{bo} \log_2(m_o) \therefore V_{bo} = \dfrac{V_i}{\log_2(m_o)} = \dfrac{15 \cdot 10^3}{2}$

$V_{bo} = 7{,}5 \times 10^3$ baudios.

4.22. Televisión de Barrido Lento (SSTV). En un sistema SSTV básico una celda fotoeléctrica barre la imagen y mide en cada punto de imagen uno de 16 niveles de gris desde el blanco puro hasta el negro puro. La velocidad de barrido es de 2×10^3 puntos por segundo y el sistema requiere, por imagen, 128 líneas con 128 puntos por línea.

(a) Demuestre que la información contenida en una imagen es de 8 Kbytes.

(b) Si la señal de salida de la celda fotoeléctrica se transmite directamente por un canal, demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es de 2 kHz.

(c) La señal de salida de la celda fotoeléctrica se codifica en binario y se almacena 100 imágenes en la memoria de una computadora. Demuestre que la capacidad mínima de la memoria debe ser de 800 Kbytes y que el almacenamiento de la información se efectúa a una velocidad de 8 kbps.

(d) Las imágenes almacenadas en la computadora se van a transmitir por un canal dado, pero a cada muestra se le agrega un impulso de arranque y uno de pare, ambos de duración el doble de la de los impulsos de información. Demuestre que si se quiere transmitir las 100 imágenes en 400 segundos, el ancho de banda del canal debe ser de 32,768 kHz.

(e) Demuestre que si los impulsos de información tiene una duración de 40 μseg y la transmisión se hace por un canal telefónico de 4 kHz de ancho de banda, la relación S/N mínima en el canal para que no haya pérdida de información es de 8,878 dB.

Datos: V_p = 2000 puntos/seg; 128 líneas x 128 puntos/línea; N = 16; Fig. P4.22(a)

(a) Información por punto = $I_p = \log_2 16$ = 4 bits/punto

Número de puntos por imagen = N_p = 128 x 128

$N_p = 1{,}638 \times 10^4$ puntos

Información por imagen = $I_{im} = N_p I_p = 6{,}554 \times 10^4$ bits

Puesto que 1 Kbyte = 1024 bytes = 8192 bits

Entonces I_{im} = 8 Kbytes

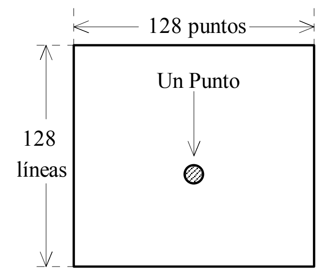


Fig. P4.22(a).

(b) Velocidad de barrido = V_p = 2000 puntos/seg = 1/T

Cada impulso o valor tendrá una duración $T = \dfrac{1}{V_p} = 5 \cdot 10^{-4}$ seg, y el ancho de banda mínimo necesario será $B = \dfrac{1}{T} = V_p = 2000 \text{ Hz} = 2 \text{ kHz}$

(c) m = 2; $N = 2^n = 16 \therefore n = 4$. La codificación se muestra en la Fig. P4.22(b).

N_{im} = 100 imágenes; $T = 5 \times 10^{-4}$ seg

Información total de 100 imágenes = $I_t = N_{im} N_p I_p = 6{,}554 \times 10^6$ bits = 800 Kbytes

V_a = Velocidad de almacenamiento

$$V_a = \frac{I_p}{T} = \frac{4}{5 \cdot 10^{-4}} = 8000 = 8 \text{ kbps}$$

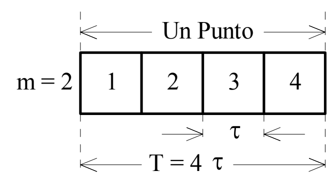


Fig. P4.22(b)

(d)

T_t = 400 seg; N_{im} = 100 imágenes; I = 4 bits

m = 2; n = 4. La codificación es, Fig. P422(c)

$I_t = 6{,}554 \times 10^6$ bits

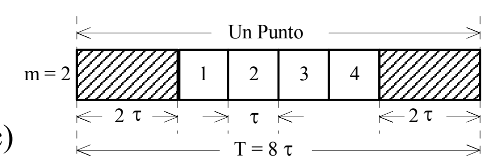


Fig. P4.22(c).

Velocidad de transmisión = V_i

$$V_i = \frac{I_t}{T_t} = \frac{6{,}554 \cdot 10^6}{400} = 1{,}638 \cdot 10^4 \text{ bps}$$

pero también, de la Fig. P4.22(c),

$$V_i = \frac{I}{T} = \frac{I}{8\tau} = \frac{4}{8\tau} \therefore \tau = \frac{1}{2V_i}; \quad B = \frac{1}{\tau} = 2V_i = 32{,}768 \text{ kHz}$$

(e) $\tau = 40 \cdot 10^{-6}$ seg; $B = 4000$ Hz; $T = 8\tau = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ seg

De la Fig. P4.22(c), $V_i = \dfrac{4}{T} = \dfrac{4}{3{,}2 \cdot 10^{-4}} = 1{,}25 \cdot 10^4$ bps

De la ecuación de Hartley-Shannon, $V_i = B \log_2(1 + \dfrac{S}{N})$

$$1{,}25 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^3 \log_2(1 + \frac{S}{N}), \text{ de donde } \frac{S}{N} = 2^{\frac{1{,}25 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3}} - 1 = 7{,}724 = 8{,}878 \text{ dB}$$

4.23. Sea un sistema de telefotografía. Una celda fotoeléctrica barre la fotografía (de blanco y negro) y en cada punto produce una señal cuya amplitud varía de 0 V a 127 mV correspondientes a 128 niveles de gris (desde el blanco puro al negro puro) de la fotografía. La celda se mueve a una velocidad de 4 cm por segundo, y su resolución es de 5 puntos por milímetro. La fotografía mide 10 cm x 15 cm.

(a) Demuestre que la velocidad a la cual la celda produce información es de 1400 bps y que tarda 1875 segundos en transmitir una fotografía.

(b) Las señales producidas por la celda se codifican en binario y se guardan en la memoria de una computadora, en la cual se almacena 10 fotografías. Demuestre que el sector de la memoria donde se guardó la información debe tener una capacidad de 26,25 Mbits, y que la velocidad de modulación a la salida del codificador es de 1400 baudios.

(c) La información contenida en la memoria se va a transmitir en ASCII sin bit de paridad. La transmisión de las 10 fotografías que estaban en la memoria se efectúa en 2 segundos. Demuestre que la velocidad de información en el canal es de 13,13 Mbps y que el ancho mínimo del canal debe ser de 18,75 MHz.

(d) La salida de la celda fotoeléctrica se transmite directamente por un canal cuyo rendimiento es de 2 bps/Hz. Si la potencia de ruido en el canal es de 1 pW, demuestre que la potencia de la señal para que no haya pérdida de información es de 3 pW.

Solución:

Datos: $N = 128$ niveles; $V_c = 4$ cm/seg; Resolución $R = 5$ puntos/mm; 10 cm x 15 cm

(a) Sea la Fig. P4.23(a):

Información por Punto = $I_p = \log_2(128) = 7$ bits

Número de puntos en 1 mm^2 = N_e = 25 puntos/mm^2

Número de puntos en la fotografía = N_t

$N_t = 100 \times 150 \times 25 = 3{,}75 \times 10^5$ puntos

Información contenida en la fotografía = I_t

$I_t = N_t I_p = 2{,}625 \times 10^6$ bits

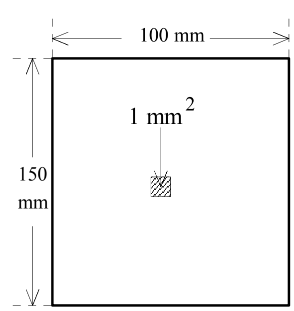


Fig. P4.23(a).

V_c = 4 cm/seg = 40 mm/seg; R = 5 puntos/mm

Velocidad de cada punto = $V_s = V_c$ R = 40 x 5 = 200 puntos/seg

$$V_s = \frac{1}{T} \therefore T = \frac{1}{V_s} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ seg = 5 milisegundos}$$

Cada punto se genera en 5 milisegundos.

Velocidad de información = $V_i = \frac{I_p}{T} = \frac{7}{5 \cdot 10^{-3}} = 1400$ bps

Tiempo total de transmisión de una fotografía = $T_t = N_t$ T = 1875 segundos

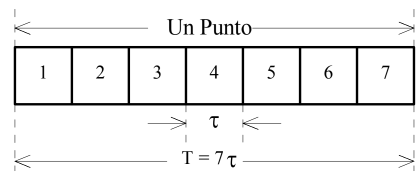


Fig P4.23(b).

(b) $m = 2;\ N = 128 = 2^n \therefore n = 7$.

La codificación es, Fig. P4.23(b)

N_f = 10 fotografías; T = 0,005

Capacidad de memoria = C_m

$C_m = N_f N_t I_p$ = 26,25 x 10^6 bits = 26,25 Mbits

Velocidad de modulación = V_b

$$V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{7}{T} = 1400 \text{ baudios}$$

(c) N_f = 10 fotografías; I_t = 2,625 x 10^6 bits. La codificación es, Fig. P4.23(c).

Información de 10 fotografías = I_f

$I_f = N_f I_t$ = 2,625 x 10^7 bits

$$V_i = \frac{I_f}{T_t} = 1{,}313 \cdot 10^7 = 13{,}13 \text{ Mbps}$$

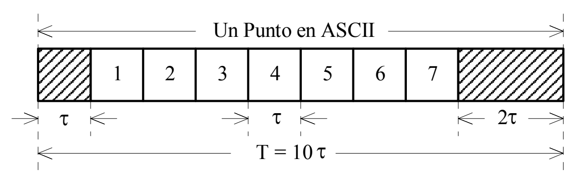


Fig. P4.23(c).

Pero también, de la Fig P4.23(c),

$$V_i = \frac{7}{T} = 1{,}313 \cdot 10^7 \therefore T = \frac{7}{V_i} = 5{,}333 \cdot 10^{-7};\ \tau = \frac{T}{10} \therefore B = \frac{10}{T} = 1{,}875 \cdot 10^7 = 18{,}75 \text{ MHz}$$

(d) $\eta_B = 2 \text{ bps/Hz} = \frac{V_i}{B}$; N = 1 pW; De la ecuación de Hartley-Shannon,

$V_i = B \log_2(1+S/N)$, de donde $\frac{S}{N} = 2^{\frac{V_i}{B}} - 1 = 2^2 - 1 = 3 = \frac{S}{10^{-12}} \therefore S = 3 \cdot 10^{-12} = 3 \text{ pW}$

4.24. Una señal tiene un ancho de banda de 4 kHz. Esta señal se pasa por un convertidor que la convierte en secuencias de 8 impulsos binarios, teniendo cada secuencia una duración de 100 μseg.

(a) ¿Cuál es el valor del ancho de banda mínimo del canal para transmitir las secuencias binarias en ausencia de ruido? [Respuesta: 80 kHz]

(b) El canal tiene un ancho de banda de 50 kHz. ¿Cuál es la relación S/N mínima, en dB, para transmitir las señales sin error? [Respuesta: $\left[\frac{S}{N}\right]_{dB} = 3{,}078 \ \text{dB}$]

Solución:

Datos: $B_s = 4$ kHz; n = 8; m = 2; T = 100 μseg. La codificación es, Fig. P4.24.

(a) $T = 100 \cdot 10^{-6} = 8\tau \therefore \tau = \frac{T}{8} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$

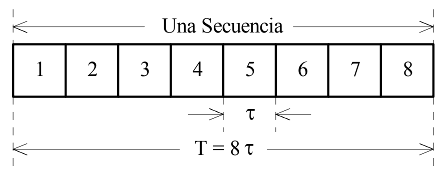


Fig. P4.24.

$$B_n = \frac{1}{\tau} = 8{,}0 \cdot 10^4 = 80 \ \text{kHz}$$

(b) B = 50 kHz; $V_i = \frac{8}{T} = \frac{8}{100 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^4$

De la ecuación de Hartley-Shannon, $8 \cdot 10^4 = 50 \cdot 10^3 \log_2(1 + \frac{S}{N})$, de donde

$$\frac{S}{N} = 2^{\frac{8 \cdot 10^4}{50 \cdot 10^3}} - 1 = 2{,}031 = 3{,}078 \ \text{dB}$$

4.25. Una señal s(t) es transmitida por un canal perturbado por un ruido n(t), siendo Si/Ni y So/No las relaciones señal/ruido, respectivamente, como se muestra en la Fig. P4.25.

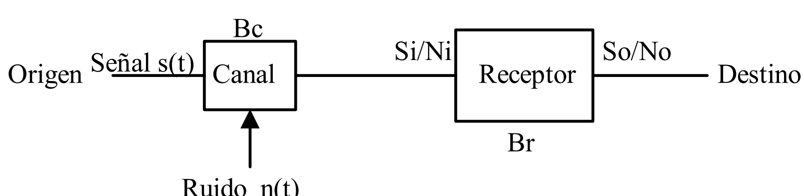


Fig. P4.25.

En el sistema no hay pérdida de información.
El ancho de banda B_c del canal es de 16 kHz, la relación Si/Ni es de 14,9136 dB y el ancho de banda B_r del receptor es de 8 kHz. Demuestre que la relación señal/ruido a la salida del receptor es de 30,098 dB.

Solución:

Datos: $B_c = 16$ kHz; $B_r = 8$ kHz; Si/Ni = 14,9136 dB = 31

Como en el sistema no hay pérdida de información, la velocidad de información es la misma tanto a la entrada como a la salida del receptor. Entonces, de la ecuación de Hartley-Shannon,

$$B_c \log_2(1+\frac{S_i}{N_i}) = B_r \log_2(1+\frac{S_o}{N_o})$$

$$\log_2(1+\frac{S_o}{N_o}) = \log_2(1+\frac{S_i}{N_i})^{\frac{B_c}{B_r}} \Rightarrow (1+\frac{S_o}{N_o}) = (1+\frac{S_i}{N_i})^{\frac{B_c}{B_r}}, \quad \text{de donde}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = (1+\frac{S_i}{N_i})^{\frac{B_c}{B_r}} - 1 = (1+31)^2 - 1 = 1023 = 30{,}099 \text{ dB}$$

4.26. Un terminal de datos se utiliza para enviar información hacia una computadora central a través de una línea telefónica de 3 kHz de ancho de banda; la relación S/N en el canal es de 10 dB. El terminal de datos produce caracteres alfanuméricos en ASCII sin bit de paridad y en su memoria hay almacenados 8 Kbytes de información.

(a) Determine la capacidad del canal. [Respuesta: C = 10380 bps]

(b) Determine la máxima velocidad de información en el canal sin ruido. [Respuesta: V_i=2100 bps]

(c) Determine el tiempo que tarda el terminal en vaciar la memoria. [Respuesta: T_t=31,208 seg]

(d) Si la información se transmite en código BAUDOT, con los datos de la Fig. 4.13, ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse la memoria? [Respuesta: 35,608 minutos]

Solución:

Datos: B = 3000 Hz; S/N = 10 dB = 10; C_m = 8 Kbytes;

(a) Capacidad del canal = C = 3000 $\log_2$(1+10) = 10380 bps

(b) $B = \frac{1}{\tau} = 3000 \therefore \tau = 3{,}333 \cdot 10^4$ s

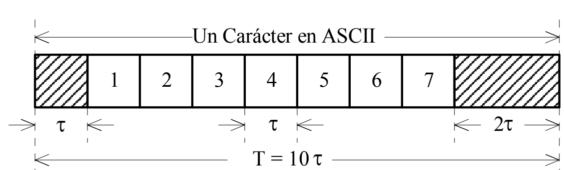


Fig. P4.26(a).

De la Fig. P4.26(a),

I = 7 bits; T =10τ = 3,333 x 10^{-3} seg

$$V_i = \frac{I}{T} = \frac{7}{3{,}333 \cdot 10^{-3}} = 2100 \text{ bps}$$

(c) C_m = 8 Kbytes = 8 x 1024 x 8 = 6,554 x 10^4 bits

Número de caracteres ASCII en memoria = $N_c = \frac{C_m}{7} = 9{,}362 \cdot 10^3$ caracteres

Tiempo total de transmisión = $T_t = N_c\, T$ = 31,208 seg

(d) De la Fig. P4.26(b),

T = 163 ms = 0,163 seg

Número de caracteres Baudot en memoria = N_c

$$N_c = \frac{C_m}{5} = 1{,}311 \cdot 10^4 \text{ caracteres}$$

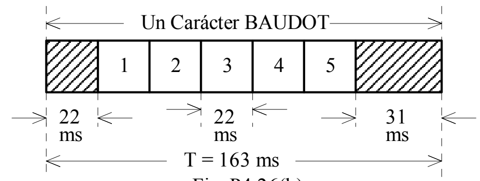


Fig. P4.26(b).

Tiempo total de transmisión $T_t = N_c\, T$ = 2136 x 10^3 seg = 35,608 minutos

4.27. Sea el sistema mostrado en la Fig. P4.27(a).

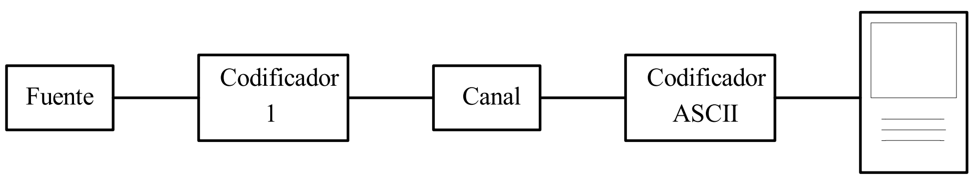


Fig. P4.27(a).

La fuente produce N símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1000 símbolos por segundo. El terminal de datos solamente acepta secuencias codificadas en ASCII sin bit de paridad. El Codificador 1 agrega a cada muestra un impulso de arranque y uno de pare, ambos de la misma duración que los de información. No hay pérdida de información en el sistema.

(a) Determine N, los valores apropiados para m y n, y el ancho de banda mínimo del canal.

(b) Determine las velocidades de modulación y de información a la entrada del terminal de datos. [Respuesta: V_b = 10 kbaudios; V_i = 7 kbps.

Solución:

Datos: V_s = 1000 símb/seg

(a) Como no hay pérdida de información en el sistema, la velocidad de información es la misma en todos los puntos del sistema. El Codificador ASCII produce 128 símbolos alfanuméricos; por lo tanto, el Codificador 1 producirá también 128 símbolos, es decir, $N = m^n$ = 128 símbolos.

$$V_s = \frac{1}{T} = 1000 \therefore T = 10^{-3} \text{ seg.}$$

También, $\log_2(m^n) = 128$ con m y n enteros; esta expresión se satisface solamente cuando m = 2 y n = 7. El Codificador 1 es un codificador binario cuya salida se muestra en la Fig. P4.27(b).

$$T = 9\tau = 10^{-3} \therefore \tau = \frac{10^{-3}}{9} \text{ seg}$$

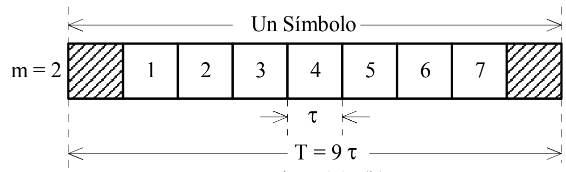


Fig. P4.27(b).

y el ancho de banda B del canal,

$$B = \frac{1}{\tau} = \frac{9}{10^{-3}} = 9000 \text{ Hz} = 9 \text{ kHz}$$

(b) A la entrada del terminal de datos la codificación es ASCII sin bit de paridad, como se muestra en la Fig. P4.27(c).

$$T = 10\tau = 10^{-3} \therefore \tau = 10^{-4} \text{ seg}$$

$$V_b = \frac{1}{\tau} = 10 \text{ kbaudios}$$

$$V_i = \frac{7}{T} = \frac{7}{10^{-3}} = 7000 \text{ bps} = 7 \text{ kbps}$$

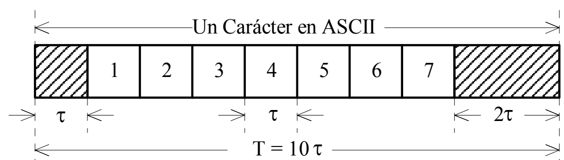


Fig. P4.27(c).

4.28. Una fuente de información digital produce dígitos a una velocidad de 128 kbps.

(a) En un codificador (denominado 4B/3T) se transforma grupos de 4 dígitos binarios en grupos de 3 dígitos ternarios; no hay pérdida de información en el canal. La secuencia, así codificada, se transmite por un canal.

Demuestre que la velocidad de modulación en el canal es de 96 kbaudios.

(b) Se puede utilizar también un Codificador 4B/5B (utilizado en la transmisión por fibras ópticas) que transforma grupos de 4 dígitos binarios en grupos de 5 dígitos, binarios también, sin pérdida de información.

Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es 1,25 veces más grande que el ancho de banda mínimo antes del codificador.

Solución:

Datos: V_i = 128 kbps.

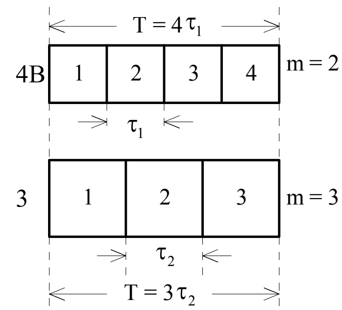
(a) Codificador 4B/3T, Fig. P4.28(a)

En Binario: $V_i = \dfrac{4}{T} = 128 \cdot 10^3$ bps

$T = \dfrac{4}{128 \cdot 10^3} = 3{,}125 \cdot 10^{-5}$; $T = 4\tau_1$

En Ternario:

$T = 3\tau_2 \therefore \tau_2 = \dfrac{T}{3} = 1{,}042 \text{ x } 10^{-5}$



Codificación 4B/3T
Fig. P4.28(a).

$V_{b2} = \dfrac{1}{\tau_2} = 9{,}6 \cdot 10^4 = 96$ kbaudios

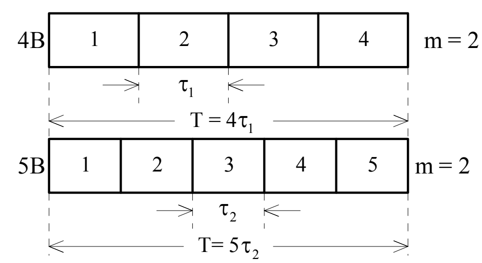
(b) Código 4B/5B, Fig. P5.28(b)

Para 4B: $T = 4\tau_1$. Para 5B: $T = 5\tau_2$

De donde, $4\tau_1 = 5\tau_2$ ó $\dfrac{1}{\tau_2} = \dfrac{5}{4}\tau_1$

$B_1 = V_{b1} = \dfrac{4}{5}B_2 = \dfrac{4}{5}V_{b2}$

$V_{b2} = 1{,}25\ V_{b1}$ ó $B_2 = 1{,}25\ B_1$

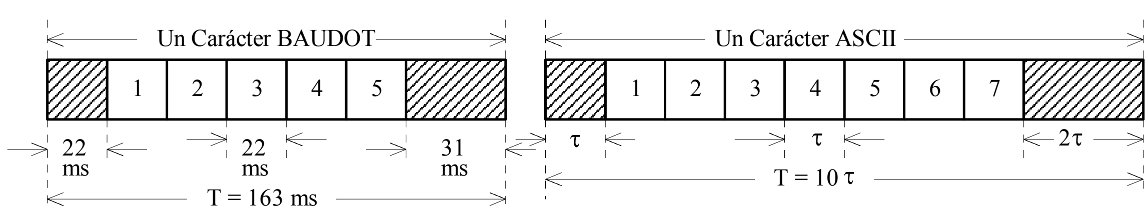


Codificación 4B/5B
Fig. P4.28(b).

El ancho de banda mínimo del canal es 1,25 veces más grande que el ancho de banda mínimo antes del codificador. También se puede decir que la codificación 4B/5B aumenta la velocidad de modulación en el canal en 1,25 veces la velocidad de modulación previa al codificador. Como la transmisión se efectúa por fibras ópticas, que tienen un ancho de banda muy grande, este aumento en la velocidad de modulación no tiene importancia; sin embargo, el aumento en el número de impulsos por símbolo es beneficiosa para la sincronización y señalización en el sistema; por eso se utiliza.

4.29. Códigos Binarios BAUDOT y ASCII (Alfabeto Internacional No. 5 de la UIT-T (Ex CCITT).

En la Fig. P4.29 se muestran los formatos de los códigos BAUDOT y ASCII (sin bit de paridad).



(a) Código BAUDOT (b) Código ASCII (sin bit de paridad)

Fig. P4.29.

PROBLEMARIO DE "PRINCIPIOS DE LAS COMUNICACIONES"
CAPITULO IV

En el Código ASCII los caracteres fluyen a una velocidad de 100 caracteres por segundo. Para el Código BAUDOT tomar las duraciones dadas en la figura.

(Nota: en ambos códigos el bit o dígito binario 1 es el de menor peso).

(a) Determine las velocidades de modulación para cada uno de estos códigos.

(b) ¿Qué significa la siguiente información codificada en ASCII?

011001011101111001110110010111

(c) ¿Cómo se codificaría la misma información de (b) pero en BAUDOT?

Solución:

(a) Código ASCII

I = 7 bits; V_s = 100 caracteres/seg $= \frac{1}{T} \therefore T = 10^{-2} = 10\tau \therefore \tau = 10^{-3}$ seg

$V_b = \frac{1}{\tau} = 10^3$ baudios = 1 kbaudio; $\quad V_i = \frac{I}{T} = \frac{7}{10^{-2}} = 700$ bps

Código BAUDOT

I = 5 bits; T = 163 mseg; τ = 22 mseg

$V_b = \frac{1}{\tau} = 45{,}45$ baudios; $V_i = \frac{I}{T} = \frac{5}{163 \cdot 10^{-3}} = 30{,}67$ bps

(b) En la secuencia dada se cuenta grupos de 10 dígitos y se elimina el dígito de arranque y los dos dígitos de pare. Queda entonces, del Apéndice B.5 del Texto (el dígito de menor peso va a la izquierda)

Primer Caracter: 1100101 → S

Segundo Caracter: 1111001 → O ⇒ El mensaje es S O S

Tercer Caracter: 1100101 → S

(c) En BAUDOT, del Apéndice B.6 (El dígito de menor peso a la izquierda)

S → 10100

O → 00011

S → 10100

La codificación correspondiente a SOS en BAUDOT tiene la forma

010100100001110101001

4.30. Límite de Shannon

Considere la ecuación de Hartley-Shannon. La potencia de ruido N se puede expresar en la forma $N = \eta_o B$, donde η_o tiene dimensiones de vatios por unidad de ancho de banda (W/Hz) y comúnmente de denomina "densidad espectral de potencia de ruido". Se puede considerar entonces a N como la potencia de ruido contenida en el ancho de banda B. Si el ancho de banda B aumenta sin límites ($B \to \infty$), demuestre que

$$\lim_{B\to\infty} C = \left[\frac{S}{\eta_o}\right]\log_2 e = 1{,}443\left[\frac{S}{\eta_o}\right] = V_{iMAX}$$

Este resultado se conoce con el nombre de "Límite de Shannon" y representa la máxima velocidad de información en un sistema de comunicación con una potencia promedio transmitida dada pero sin la limitación del ancho de banda, como es el caso de los sistemas de comunicación espacial o por satélites.

Solución:

De la ecuación de Hartley-Shannon, $C = B\log_2(1+\frac{S}{N})$. Si $N = \eta_o B$, entonces

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{\eta_o B}) = \log_2(1+\frac{S}{\eta_o})^B$$, y del límite $\underset{x\to\infty}{y} = \log_b(1+\frac{a}{x})^x = a\log_b(e)$,

se tiene $$\underset{B\to\infty}{C} = \log_2(1+\frac{S}{\eta_o B})^B = \left[\frac{S}{\eta_o}\right]\log_2(e) = 1{,}443\left[\frac{S}{\eta_o}\right] = V_{iMAX}$$

4.31. Considere el receptor ideal de la Fig. P4.31.

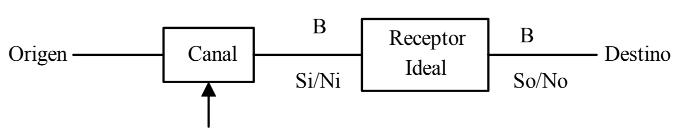


Fig. P4.31.

Demuestre que si el ancho de banda del canal tiende a infinito, entonces

$$\frac{S_o}{N_o} \approx \exp\left[\frac{S_i}{\eta_o B_m}\right] = \exp(\gamma) \quad \text{cuando} \quad \frac{S_o}{N_o} >> 1$$

Nótese que $\gamma = \dfrac{S_i}{\eta_o B_m}$ representa la relación entre la potencia de la señal (transmitida) en el canal respecto a la potencia de ruido dentro de la banda de la señal misma (B_m). Por consiguiente, teóricamente, en condiciones ideales cuando el ancho de banda de transmisión B_T tiende a infinito, la relación S_o/N_o a la salida aumenta exponencialmente con γ.

Solución:

Sea la Fig. P4.31. Como la velocidad de información es la misma en todos los puntos del sistema, se verifica que

$$B_T \log_2(1+\frac{S_i}{N_i}) = B_m \log_2(1+\frac{S_o}{N_o}), \quad \text{de donde} \quad \frac{S_o}{N_o} = \left[1+\frac{S_1}{N_i}\right]^{\frac{B_T}{B_m}} - 1$$

$$\text{Si} \quad N_i = \eta_o B_T \;\; \text{y} \;\; \frac{S_o}{N_o} >> 1, \;\; \text{entonces,} \quad \frac{S_o}{N_o} \approx \left[1+\frac{S_i}{\eta_o B_T}\right]^{\frac{B_T}{B_m}} = \left[1+\frac{S_i}{\eta_o B_m \frac{B_T}{B_m}}\right]^{\frac{B_T}{B_m}}$$

Hagamos $\frac{B_T}{B_m} = \beta_m$; si $B_T \to \infty$, entonces $\beta_m \to \infty$. De modo que,

$$\left.\frac{S_o}{N_o}\right|_{\beta_m\to\infty} \approx \left[1+\frac{S_i}{\eta_o B_m \beta_m}\right]^{\beta_m} = \exp\left[\frac{S_i}{\eta_o B_m}\right] = \exp(\gamma), \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{S_i}{\eta_o B_m}$$

4.32. Rendimiento del Canal en el Sistema Ideal de Transmisión

En la expresión 4.42 del Texto se definió el "rendimiento del canal respecto al ancho de banda" en la forma $\eta_B = \frac{V_i}{B}$. Si se define la "Energía por Dígito Binario, E_b" en la forma $E_b = S\tau$, donde τ es la duración de un dígito binario, demuestre que si el sistema es binario y $V_i = C$, entonces

$$\eta_B = \log_2(1+\eta_B \frac{E_b}{\eta_o}) \qquad \eta_B \text{ se expresa en bps/Hz}$$

Grafique también η_B vs E_B/η_o para $1 \le \frac{E_b}{\eta_o} \le 100$

Sugerencia: utilice escalas log-log.

Solución:

De la ecuación de Hartley-Shannon, $V_i = B \log_2(1+S/N)$

Hagamos: $\frac{V_i}{B} = \eta_B$; $N = \eta_o B$. Si el sistema es binario, $V_i = \frac{1}{\tau} \therefore V_i\tau = 1$

Entonces, $\frac{S}{N} = \frac{S}{\eta_o B} = \frac{V_i S}{\eta_o B V_i} = \eta_B \frac{S}{\eta_o V_i} = \eta_B \frac{E_b}{\eta_o \tau V_i} = \eta_B \frac{E_b}{\eta_o}$, de donde,

$\eta_B = \log_2(1 + \eta_B \frac{E_b}{\eta_o})$. En la Fig. P4.32 se grafica η_B vs E_b/η_o

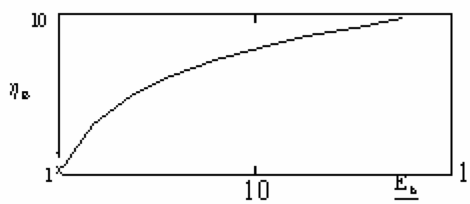


Fig. P4.32.

4.33. Rendimiento y Redundancia de Codificación.

El rendimiento de un código o de un codificador se puede definir en la forma siguiente:

$$\eta_{co} = \frac{V_i}{V_b} = \frac{n \log_2 m}{n + r} \quad \text{bps/baudio}$$

donde n es el número de impulsos de información, y r el número de impulsos redundantes (ver ecuación 4.28 del Texto).

En los sistemas binarios (m = 2) se puede definir también la “Redundancia de Codificación, R_{co}” en la forma

$$R_{co} = 1 - \eta_{co} = \frac{V_b - V_i}{V_b} = \frac{r}{n + r}$$

En este caso $V_b \geq V_i$, y tanto η_{co} como R_{co} se pueden expresar en forma porcentual ($\eta_{co}\%$ y $R_{co}\%$).

Nótese que la codificación binaria es la menos eficiente, pero es la más utilizada por su facilidad de instrumentación.

(a) Determine el rendimiento de los códigos BAUDOT, ASCII con bit de paridad, y del codificador del Ejemplo 4.9 del Texto.

(b) **Transmisión Sincrónica, Código ASCII**. Los bloques de datos se estructuran en la forma siguiente: se colocan tres caracteres SYN (de sincronización) al inicio de cada bloque, a continuación 256 caracteres de información y se termina con un caracter ETX. Ni los caracteres SYN y ETX ni los caracteres de información contienen los impulsos de arranque, paridad y pare, solamente los impulsos de información. Los caracteres SYN y ETX están definidos en la Tabla B.5 del Apéndice B.

Demuestre que en transmisión sincrónica $\eta_{co}\% = 98{,}5\%$ y $R_{co}\% = 1{,}5\%$

(c) **Transmisión Asincrónica, Código ASCII**. Se transmite bloques de 256 caracteres ASCII incluyendo todos los impulsos redundantes (Fig. 4.5 del Texto).

Demuestre que en transmisión asincrónica $\eta_{co}\% = 63{,}6\%$ y $R_{co}\% = 36{,}4\%$

(d) Si la velocidad de modulación es la misma en los dos tipos de transmisión anteriores, ¿Cuál es la relación entre sus respectivas velocidades de transmisión?

Solución:

(a) Código Baudot, Fig. 4.13(a) del Texto

En este caso se toma la duración de los impulsos. Entonces,

$$\eta_{co}\% = \frac{5 \cdot 22 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 22 \cdot 10^{-3} + 31 \cdot 22 \cdot 10^{-3}} 100 = 67{,}5\%\,; \quad R_{co}\% = 32{,}5\%$$

Código ASCII con bit de paridad

$$\eta_{co}\% = \frac{7 \cdot 100}{11} = 63{,}64\%; \quad R_{co}\% = 36{,}36\%$$

Codificador del Ejemplo 1.9, Fig. 1.8 del Texto,

$$\eta_{co}\% = \frac{5}{10} 100 = 50\%; \quad R_{co}\% = 50\%$$

(b) Transmisión Sincrónica, Código ASCII.

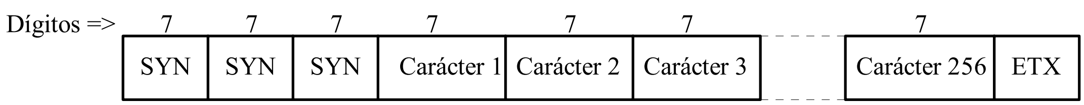


Fig. P4.33(a).

La estructura de los bloques de datos tiene la forma de la Fig. P4.33(a)

Número de dígitos de información = N_i = 256 x 7 = 1792
Número de dígitos redundantes = N_r = 4 x 7 = 28

Rendimiento $\eta_{co}\% = \frac{256 \cdot 7}{246 \cdot 7 + 28} 100 = 98{,}5\%$; Redundancia $R_{co}\% = 1{,}5\%$

(c) Transmisión Asincrónica, Código ASCII.

La estructura de los bloques tiene la forma de la Fig. P4.33(b).

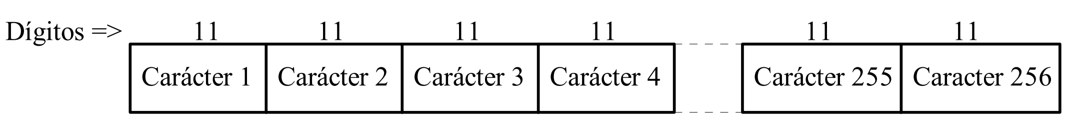


Fig. P4.33(b).

Número de dígitos de información = N_i = 256 x 7 = 1792
Número de dígitos redundantes = N_r = 256 x 4 = 1024

Rendimiento $\eta_{co}\% = \dfrac{256 \cdot 7}{256 \cdot 7 + 256 \cdot 4} 100 = 63{,}6\%$; Redundancia $R_{co}\% = 36{,}4$

(d) En transmisión sincrónica. Son 260 caracteres; $I_1 = 256 \text{ x } 7$ bits

Duración de un bloque = $T_1 = 260 \text{ x } 7 \text{ x } \tau$

$$V_{i1} = \frac{I_1}{T_1} = \frac{256 \cdot 7}{260 \cdot 7 \cdot \tau} = \frac{0{,}895}{\tau} \therefore \tau = \frac{0{,}895}{V_{i1}}$$

En transmisión Asincrónica. Son 256 caracteres; $I_2 = 256 \text{ x } 7$ bits

Duración de un bloque = $T_2 = 256 \text{ x } 7 \text{ x } \tau$

$$V_{i2} = \frac{I_2}{T_2} = \frac{256 \cdot 7}{256 \cdot 11 \cdot \tau} = \frac{0{,}636}{\tau} \therefore \tau = \frac{0{,}636}{V_{i2}}$$

Como la velocidad de modulación es la misma, entonces

$$\frac{0{,}895}{V_{i1}} = \frac{0{,}636}{V_{i2}} \quad \text{o también} \quad V_{i2} = 0{,}646 V_{i1}$$

En el presente caso, la velocidad de información en transmisión asincrónica es el 64,6 % de la velocidad de información en transmisión sincrónica. La velocidad de modulación es la misma.

4.34. Cierta fuente de información transmite cada milisegundo un número octal (de base 8). En el canal la potencia promedio de la señal es de 0,5 W y la de ruido 2 mW. Si a la salida del receptor el ancho de banda es de 100 Hz, demuestre que la relación S_o/N_o a la salida es de 90,309 dB y que el ancho de banda del canal es de 375 Hz.

Solución:

Datos: T = 1 ms; número octal $\rightarrow$ N = 8; S = 0,5 W; N = 0,002 W; $B_m = 100$ Hz

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{0{,}5}{0{,}002} = 250 = 23{,}979 \text{ dB}; \qquad I = \log_2(8) = 3 \text{ bits}$$

$$V_i = \frac{I}{T} = \frac{3}{0{,}001} = 3000 \text{ bps}$$

La velocidad de información es la misma en todo el sistema. Por lo tanto,

$$B_T \log_2(1 + \frac{S_i}{N_i}) = B_m \log_2(1 + \frac{S_o}{N_o}) = V_i$$

$$\log_2(1 + \frac{S_o}{N_o}) = \frac{V_i}{B_m} \therefore \frac{S_o}{N_o} = 2^{\frac{V_i}{B_m}} - 1 = 2^{\frac{3000}{100}} - 1 = 1{,}074 \text{ x } 10^9 = 90{,}309 \text{ dB}$$

$$B_T = \frac{V_i}{\log_2(1+\frac{S_i}{N_i})} = \frac{3000}{\log_2(1+250)} = 376{,}33\ \text{Hz}$$

4.35. Se desea introducir información a una computadora mediante tarjetas perforadas tipo IBM. Estas tarjetas tienen 80 columnas por F filas.

(a) Si la computadora reconoce 256 caracteres alfanuméricos y cada caracter se almacena en una columna de la tarjeta, demuestre que en este caso cada columna tendrá 8 filas.

(b) Si el lector de tarjetas lee 10 tarjetas por segundo, demuestre que el lector está entregando información a la computadora a una velocidad de 6400 bps.

(c) Si la capacidad de la memoria de la computadora es de 600 Kbytes, demuestre que puede almacenar el contenido de 7680 tarjetas.

Solución:

Datos: 80 columnas x F filas; sistema binario (m = 2)

(a) $N = 258 = 2^n \therefore n = 8$. Cada caracter necesita 8 dígitos binarios, uno en cada fila; por lo tanto, F = 8 filas por coumna.

(b) V_L = 10 tarjetas por segundo;

Número de perforaciones por tarjeta = N_p = 80 x 8 = 640

Información por perforación = I_p = 1 bit

Información total en la tarjeta = $I_t = N_p I_p$ = 640 bits/tarjeta

Velocidad de transferencia de información = $V_t = V_L I_t$ = 10 x 640 = 6400 bps

(c) C_m = 600 Kbytes = 600 x 1024 x 8 = 4,915 x 10^6 bits

$$\text{Número necesario de tarjetas} = N_T = \frac{C_m}{I_t} = \frac{4{,}915\cdot 10^6}{640} = 7680\ \text{tarjetas}$$

4.36. Un cierto sistema de comunicación posee un sintetizador de frecuencia que produce cuatro frecuencias diferentes: f_1, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$ y $f_4 = 4f_1$. Este sintetizador de frecuencia se utiliza como transmisor de información digital en el cual por cada dos bits de entrada al sintetizador se transmite una frecuencia según el esquema siguiente:

$$0\,0 \rightarrow f_1; \quad 0\,1 \rightarrow f_2; \quad 1\,0 \rightarrow f_3; \quad 1\,1 \rightarrow f_4$$

La velocidad de modulación a la entrada del sintetizador es de 1000 baudios, y se sabe que para la transmisión del grupo 0 0 se transmite un solo ciclo de la frecuencia f_1.

Demuestre que la velocidad de información en el sistema es de 1000 bps y que el valor de las frecuencias es f_1 = 500 Hz; f_2 = 1 kHz; f_3 = 1,5 kHz y f_4 = 2 kHz.

Solución:

Datos: V_b = 1000 baudios.

Sea T_1 el período de la frecuencia f_1. El grupo 0 0 se transmite en un ciclo de la frecuencia f_1; por lo tanto, la codificación del grupo 0 0 tiene la forma, Fig. P4.36.

$$V_b = 1000 = \frac{1}{\tau} \therefore \tau = 10^{-3};\ I = 2\ \text{bits}$$

$$T_1 = 2\tau = 2 \times 10^{-3}; \qquad V_i = \frac{2}{2\cdot 10^{-3}} = 1000\ \text{bps}$$

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 500\ \text{Hz}; \quad f_2 = 2f_1 = 1000\ \text{Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 1500\ \text{Hz}; \quad f_4 = 4f_1 = 2000\ \text{Hz}$$

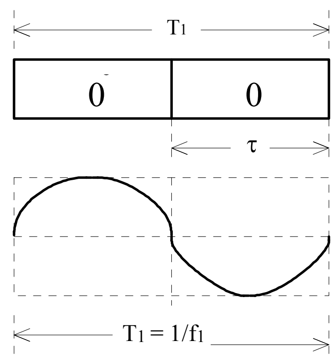
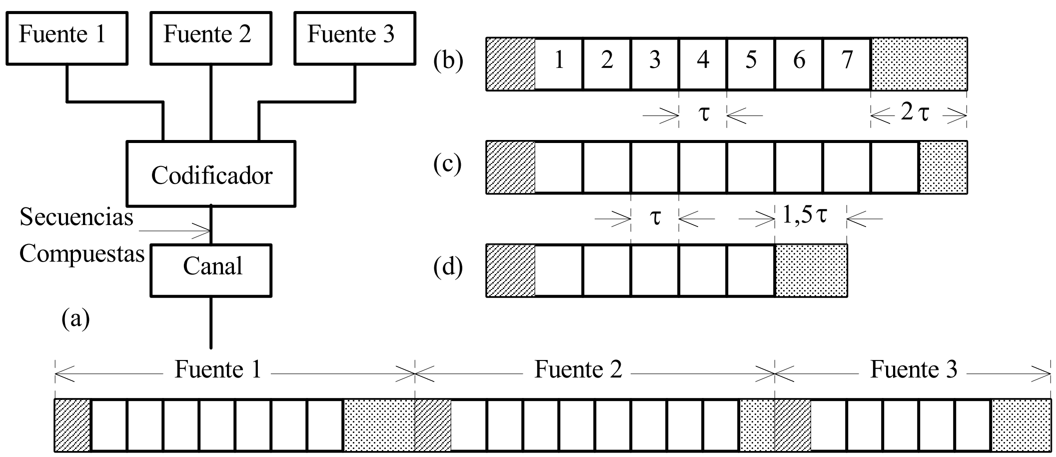


Fig. P4.36.

4.37. Sea el sistema de la Fig. P4.37(a)



(e) SECUENCIA COMPUESTA

Fig. P4.37.

Las fuentes producen, respectivamente:

N_1 = 128 símbolos

N_2 = 256 símbolos

N_3 = 32 símbolos

Todos estos símbolos son independientes y equiprobables. El codificador opera en la forma siguiente: primero toma un símbolo de la Fuente 1 y lo codifica en ASCII sin bit de paridad. Toma a continuación un símbolo de la Fuente 2 y lo codifica en binario agregándole un impulso de arranque y uno de pare, todos de igual duración. Por último, toma un símbolo de la Fuente 3 y lo codifica en binario agregándole un impulso de arranque y uno de pare, este último dura 1,5 veces más que los demás, incluidos los de las Fuentes 1 y 2. El codificador vuelve a la Fuente 1 y se repite el proceso. A la salida del codificador las secuencias codificadas individuales van saliendo una detrás de la otra formando un tren de impulsos cuya velocidad de modulación es de 2750 baudios y el cual es transmitido por el canal.

(a) Demuestre que la velocidad de información a la salida del codificador es de 2000 bps y que su rendimiento de codificación es del 72,7%.

(b) Si el rendimiento del canal respecto al ancho de banda es de 3 bps/Hz, demuestre que la relación S/N en el canal es de 8,451 dB.

(c) Si la relación S/N en el canal es de 15 dB, demuestre que el ancho de banda mínimo canal es de 397,8 Hz.

Solución:

Datos: $N_1 = 128$; $N_2 = 256$; $N_3 = 32$; $V_b = 2750$ baudios

(a)

Fuente 1: $N_1 = 128 = 2^n \therefore n = 7 \quad \rightarrow$ Codificacion en la Fig. P4.37(b)

Fuente 2: $N_2 = 256 = 2^n \therefore n = 8 \quad \rightarrow$ Codificación en la Fig. P4.37(c)

Fuente 3: $N_3 = 32 = 2^n \therefore n = 5 \quad \rightarrow$ Codificación en la Fig. P4.37(d)

La secuencia compuesta a la salida del codificador se muestra en la Fig. P4.37(e).

$$V_b = \frac{1}{\tau} = 2750 \therefore \tau = 3{,}636 \cdot 10^{-4}; \quad T = 27{,}5\tau = 0{,}01; \quad I = 20\,\text{bits}$$

$$V_i = \frac{I}{T} = \frac{20}{0{,}01} = 2000 \ \text{bps}; \quad \eta_{co}\% = \frac{V_i}{V_b}100 = \frac{2000}{2750}100 = 72{,}7\%$$

(c) $$\frac{V_i}{B} = 3\,\text{bps/Hz} = \log_2(1+\frac{S}{N}), \text{de donde} \quad \frac{S}{N} = 2^3 - 1 = 7 = 8{,}451\,\text{dB}$$

(d) $$\frac{S}{N} = 15\,\text{dB} = 31{,}623; \qquad V_i = 2000 \ \text{bps} = B_c \log_2(1+\frac{S}{N})$$

$$B_c = \frac{V_i}{\log_2(1+\frac{S}{N})} = \frac{2000}{3{,}322 \cdot \log_{10}(1+31{,}623)} = 397{,}8 \ \text{Hz}$$

4.38. La salida de cierta computadora está formada por 7 conductores, cada uno de los cuales transmite impulsos con dos valores posibles: 0V y 5V; la duración de cada impulso es de 25 ms. Mediante una "interfaz" (por ejemplo, una RS-232) se convierte las 7 salidas de la computadora en una secuencia serie ASCII sin bit de paridad para transmisión por un cable bifilar.

Demuestre que a la salida de la interfaz las velocidades de información y de modulación son, respectivamente, de 280 bps y 400 baudios.

Solución:

Los impulsos de salida de la computadora tienen una duración de 25 ms, y la interfaz debe producir en esos 25 ms una salida serie ASCII sin bit de paridad, como el mostrado en la Fig. 4.13(b) del Texto. El estado de los 7 dígitos de información a la salida de la interfaz debe corresponder al estado de los 7 impulsos de entrada. Por lo tanto,

$$T = 10\tau = 25 \cdot 10^{-3} \therefore \tau = 25 \cdot 10^{-4}; \qquad I = 7 \text{ bits}$$

$$V_i = \frac{I}{T} = \frac{7}{25 \cdot 10^{-3}} = 280 \text{ bps}; \qquad V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-4}} = 400 \text{ baudios}$$

CAPITULO V

5.1. La señal $x(t) = 10\cos(2\pi t) + 4\cos(5\pi t) + 2\cos(7\pi t)$ se muestrea en forma instantánea a una frecuencia de 4 Hz. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda de 4 Hz.

Determine la salida del filtro.

Solución:

De la señal x(t) vemos que f_m = 3,5 Hz, y su frecuencia de Nyquist será de f_s = 7 Hz; como el muestreo se va a efectuar a f_s = 4 Hz, la señal resultará submuestreada y aparecerán términos de distorsión de solapamiento (aliasing). En este caso, de la expresión (5.2) del Texto,

$$X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s); \quad f_s = 4 \text{ Hz}$$

como $X(f) = 5[\delta(f+1) + \delta(f-1)] + 2[\delta(f+2,5) + \delta(f-2,5)] + [\delta(f+3,5) + \delta(f-3,5)]$, entonces,

$$\begin{aligned} X_s(f) = {} & 20[\delta(f+1) + \delta(f-1)] + 8[\delta(f+2,5) + \delta(f-2,5)] + 4[\delta(f+3,5) + \delta(f-3,5)] + \\ & + 20[\delta(f+5) + \delta(f+3)] + 8[\delta(f+6,5) + \delta(f+1,5)] + 4[\delta(f+7,5) + \delta(f+0,5)] + \\ & + 20[\delta(f-3) + \delta(f-5)] + 8[\delta(f-1,5) + \delta(f-6,5)] + 4[\delta(f-0,5) + \delta(f-7,5)] + \cdots\cdots \end{aligned}$$

En la Fig. P5.1 se muestra el espectro de $X_s(f)$ para $n = 0$ y $n = \pm 1$

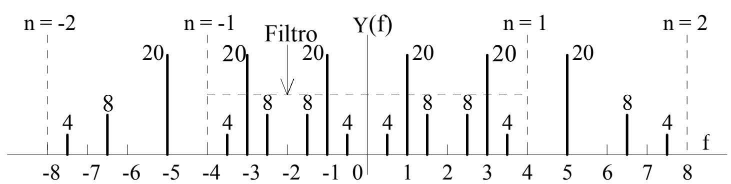


Fig. P5.1.

Puede observarse que el filtro deja pasar las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} Y(f) = {} & 4[\delta(f+\tfrac{1}{2}) + \delta(f-\tfrac{1}{2})] + 20[\delta(f+1) + \delta(f-1)] + 8[\delta(f+1,5) + \delta(f-1,5)] + \\ & + 8[\delta(f+2,5) + \delta(f-2,5)] + 20[\delta(f+3) + \delta(f-3)] + 4[\delta(f+3,5) + \delta(f-3,5)] \end{aligned}$$

$$y(t) = 8\cos(\pi t) + 40\cos(2\pi t) + 16\cos(3\pi t) + 16\cos(5\pi t) + 40\cos(6\pi t) + 8\cos(7\pi t)$$

$$y(t) = 4\left[2\cos(\pi t) + 10\cos(2\pi t) + 4\cos(3\pi t) + 4\cos(5\pi t) + 10\cos(6\pi t) + 2\cos(7\pi t)\right]$$

$$y(t) = 4[10\cos(2\pi t) + 4\cos(5\pi t) + 2\cos(7\pi t)] + 8[\cos(\pi t) + 2\cos(3\pi t) + 5\cos(6\pi t)]$$

$$y(t) = 4x(t) + 8[\cos(\pi t) + 2\cos(3\pi t) + 5\cos(6\pi t)]$$

El primer término de y(t) es la señal deseada que sale multiplicada por 4, y el segundo término son componentes de aliasing que constituyen una distorsión.

5.2. La señal $x(t) = 5\cos(2\pi 10^3 t)\cos(600\pi t)$ se muestrea a una frecuencia de 2100 muestras por segundo. El muestreo se efectúa mediante una señal periódica rectangular de amplitud unitaria y ciclo de trabajo igual a 0,5. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo, de ganancia igual a 2 y ancho de banda de 1600 Hz.

(a) Determine la salida del filtro.

Solución:

$$x(t) = 5\cos(2\pi 10^3 t)\cos(2\pi 300t) = 2{,}5\cos(2\pi 1300t) + 2{,}5\cos(2\pi 700t);$$

$$\frac{\tau_s}{T_s} = 0{,}5 \therefore \tau_s f_s = \frac{1}{2}$$

La frecuencia máxima de x(t) es de 1300 Hz y su frecuencia de Nyquist de 2300 Hz. Como la frecuencia de muestreo es f_s = 2100 Hz, la señal estará submuestreada y contendrá términos de aliasing.

$$X(f) = 1{,}25[\delta(f+1300) + \delta(f-1300) + \delta(f+700) + \delta(f-700)] \qquad f_s = 2100\,\text{Hz}$$

De la expresión (5.21) del Texto,

$X_s(f) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}(\frac{n}{2})X(f - nf_s)$; Como esta señal se pasa por un filtro pasabajo de 1600 Hz, bastará desarrollarla para $n = 0$ y $n = \pm 1$ para ver las componentes que pasan.

$$X_s(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}\text{sinc}(-\frac{1}{2})X(f+2100) + \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{1}{2})X(f-2100) + \cdots$$

pero como $\text{sinc}(-\frac{1}{2}) = \text{sinc}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\pi}$, entonces,

$$X_s(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{\pi}[X(f+2100) + X(f-2100)] + \cdots$$

$$\begin{aligned}X_s(f) = {} & \frac{1{,}25}{2}[\delta(f+1300) + \delta(f-1300) + \delta(f+700) + \delta(f-700)] + \\ & + \frac{1{,}25}{\pi}[\delta(f+1300+2100) + \delta(f-1300+2100) + \delta(f+700+2100) + \delta(f-700+2100) + \\ & + \delta(f+1300-2100) + \delta(f-1300-2100) + \delta(f+700-2100) + \delta(f-700-2100)] + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_s(f) = {} & \frac{1{,}25}{2}[\delta(f+1300) + \delta(f-1300) + \delta(f+700) + \delta(f-700) + \\ & + \frac{1{,}25}{\pi}[\delta(f+3400) + \delta(f+800) + \delta(f+2800) + \delta(f+1400) + \\ & + \delta(f-800) + \delta(f-3400) + \delta(f-1400) + \delta(f-2800)] + \cdots\end{aligned}$$

Como el filtro es pasabajo, de ganancia 2 y ancho de banda de 1600 Hz, la salida será:

$$Y(f) = 2\{\frac{1{,}25}{2}[\delta(f+1300)+\delta(f-1300)+\delta(f+700)+\delta(f-700)]+$$
$$+\frac{1{,}25}{\pi}[\delta(f+800)+\delta(f-800)+\delta(f+1400)+\delta(f-1400)]\}$$

El primer término es $X(f) \Leftrightarrow x(t)$ y el segundo término es

$$\frac{5}{\pi}\cos(2\pi 800t)+\frac{5}{\pi}\cos(2\pi 1400t)=\frac{10}{\pi}\cos(2\pi 1100t)\cos(2\pi 300t).$$

La salida y(t) del filtro será entonces,

$$y(t) = 5\cos(2\pi 1000t)\cos(2\pi 300t)+\frac{10}{\pi}\cos(2\pi 1100t)\cos(2\pi 300t)$$

$$y(t) = 5\cos(600\pi t)[\cos(2000\pi t)+\frac{2}{\pi}\cos(2200\pi t)]$$

(b) La frecuencia de muestreo es f_s = 1800 muestras por segundo.

De la parte (a): $X_s(f) = \frac{1}{2}X(f)+\frac{1}{\pi}[X(f+f_s)+X(f-f_s)]+\cdots$

$$X_s(f) = \frac{1{,}25}{2}[\delta(f+1300)+\delta(f-1300)+\delta(f+700)+\delta(f-700)]+$$
$$+\frac{1{,}25}{\pi}[\delta(f+1300)+\delta(f+500)+\delta(f+2500)+\delta(f+1100)+$$
$$+\delta(f-500)+\delta(f-3100)+\delta(f-1100)+\delta(f-2500)]+\cdots$$

Con el filtro pasabajo, de ganancia 2 y ancho de banda de 1600 Hz, la salida será:

$$Y(f) = 2\{\frac{1{,}25}{2}[\delta(f+1300)+\delta(f-1300)+\delta(f+700)+\delta(f-700)]+$$
$$+\frac{1{,}25}{\pi}[\delta(f+500)+\delta(f-500)+\delta(f+1100)+\delta(f-1100)]\}$$
$$Y(f) = 1{,}25[\delta(f+1300)+\delta(f-1300)+\delta(f+700)+\delta(f-700)]+$$
$$\frac{2{,}50}{\pi}[\delta(f+500)+\delta(f-500)+\delta(f+1100)+\delta(f-1100)]$$

El primer término es $X(f) \Leftrightarrow x(t)$ y el segundo término es igual a

$\frac{5}{\pi}\cos(2\pi 500t)+\frac{5}{\pi}\cos(2\pi 1100t)=\frac{10}{\pi}\cos(2\pi 300t)\cos(2\pi 800t)$. Entonces,

$$y(t) = 5\cos(2\pi 1000t)\cos(2\pi 300t)+\frac{10}{\pi}\cos(2\pi 800t)\cos(2\pi 300t)$$

$y(t) = 5\cos(600\pi t)[\cos(2000\pi t)+\frac{2}{\pi}\cos(1600\pi t)]$ [Nota: hay una errata en el texto: donde dice $\cos(200\pi t)$ debe decir $\cos(2000\pi t)$]

5.3. Sea el sistema de la Fig. 5.97 del Texto donde $x(t) = \mathrm{sinc}(t);\ \ h(t) = \mathrm{sinc}(4t)$ y

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi}\cos(2\pi nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})\cos(2\pi nt) \ \text{ para n impar}$$

(a) Determinar y(t) y dibujar su espectro Y(f).

Solución:

$X(f) = \Pi(f);\ \ H(f) = \frac{1}{4}\Pi(\frac{f}{4})$ El período de p(t) es $T_s = 1$, $f_s = 1$

$$P(f) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})[\delta(f+n) + \delta(f-n)] \ \text{ para n impar}$$

A la salida del multiplicador, $x_i(t) = x(t)\cdot p(t) \Leftrightarrow X_i(f) = X(f) * P(f)$

$$X_i(f) = \frac{1}{2}\Pi(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})[\delta(f+n) + \delta(f-n)] = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})[\Pi(f+n) + \Pi(f-n)]$$

$$X_i(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi}\left[\Pi(f+n) + \Pi(f-n)\right] \ \text{ para n impar}$$

En la Fig. P5.3 se muestra X(f) y el espectro $X_i(f)$ de entrada al filtro.

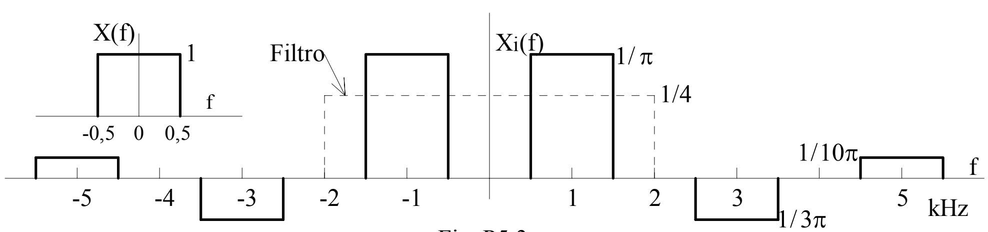


Fig. P5.3.

El filtro deja pasar solamente componentes menores de 2 kHz. Entonces, a la salida del filtro y a partir de la Fig. P5.3, este espectro será

$$Y(f) = \frac{1}{4\pi}\left[\Pi(f+1) + \Pi(f-1)\right] \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{4\pi}TF^{-1}\{\Pi(f)\}\left[\exp(-j2\pi t) + \exp(j2\pi t)\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}(t)\cos(2\pi t)$$

5.4. La señal $x(t) = 50\,\mathrm{sinc}^2(10t)$ se muestrea mediante una señal periódica rectangular, de período igual al intervalo de Nyquist y relación de trabajo igual a 0,2.

Graficar el espectro y determinar la amplitud del espectro centrado en 100 Hz.

Solución:

$x(t) = 50\mathrm{sinc}^2(10t) \Leftrightarrow X(f) = 5\Lambda(\frac{f}{10})$. Este espectro se muestra en la Fig.P5.4.

$f_m = 10;\ \ f_s = 2f_m = 20;\ \ T_s = 5\tau_s = \frac{1}{f_s} \therefore f_s\tau_s = \frac{1}{5}$. De la expresión (5.21) del Texto,

$$X_s(f) = \frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{n}{5})X(f-20n) = 5\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{5})}{n\pi}\Lambda(\frac{f-20n}{10})$$

En la Fig. P5.4 se grafica este espectro (frecuencias positivas). Se muestra también X(f).

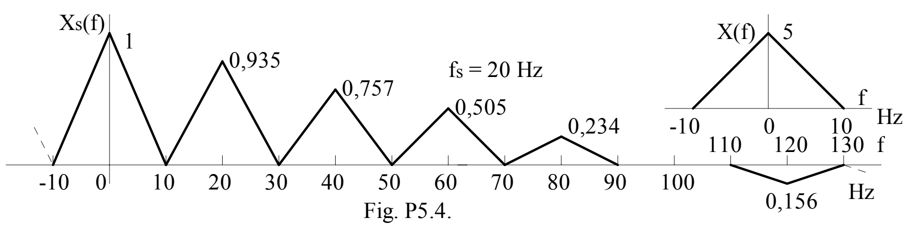


Fig. P5.4.

Nótese que no existe componente para f = 100 Hz, donde n = 5, pues $\mathrm{sinc}(\frac{5}{5}) = 0$.

5.5. En la Fig. 5.98 del Texto se muestra el espectro de una señal dada. Esta señal se muestrea en forma instantánea y se pasa por un filtro cuya función de transferencia es $H(f) = \Pi(\frac{f}{2B})$

Determinar la salida del filtro cuando: (a) $f_s = B$; (b) $f_s = 2B$

Solución:

(a) $f_s = B$. $H(f) = \Pi(\frac{f}{2B})$; $X_s(f) = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nf_s) = B\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nB)$

Este espectro se muestra en la Fig. P5.5(a).

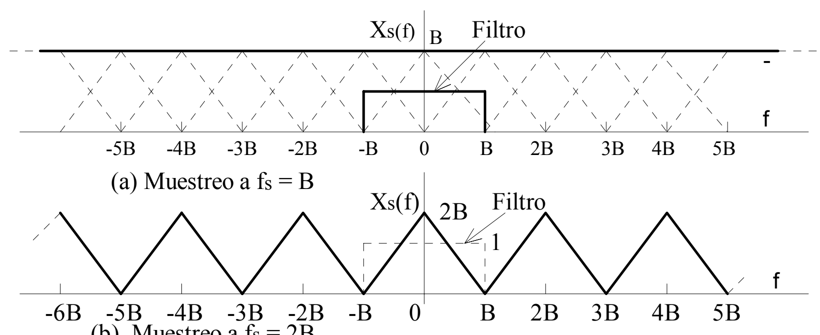


Fig. P5.5.

Nótese que al sumarse las señales (líneas a trazos) su resultado es una constante de amplitud B. El filtro dejará pasar entonces

$$Y(f) = B\Pi(\frac{f}{2B}) \Leftrightarrow y(t) = 2B^2\text{sinc}(2Bt)$$

(b) $f_s = 2B; \quad X_s(f) = 2B\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 2Bn)$

Este espectro se muestra en la Fig. P5.5(b). El filtro deja pasar entonces

$$Y(f) = 2B\Lambda(\frac{f}{B}) \Leftrightarrow y(t) = 2B^2\text{sinc}^2(Bt)$$

5.6. Demuestre que la frecuencia de muestreo mínima necesaria para muestrear la señal $x(t) = 20\cos(10^4\pi t)\cos(3{,}9x10^5\pi t)$ es de 20 kHz. Dibuje el espectro de la señal muestreada entre $n = -5$ y $n = 5$.

Solución:

$$x(t) = 20\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t); \quad f_m = 5x10^3 \text{ Hz}; \; f_c = 1{,}95x10^5 \text{ Hz}$$

$$x(t) = 10\cos(2\pi 2x10^5 t) + 10\cos(2\pi 1{,}9x10^5 t) \to f_2 = 2x10^5; \; f_1 = 1{,}9x10^5; \; B = f_2 - f_1 = 10^4 \text{ Hz}$$

$m = \text{entero}\left[\frac{f_2}{B}\right] = \text{entero}\left[\frac{2x10^5}{10^4}\right] = 20$. La frecuencia de muestreo mínima será, de la expresión (5.21),

$$f_s = \frac{2}{m}f_2 = 2x10^4 = 20 \text{ kHz.}$$

Veamos ahora el espectro:

$$X(f) = 5[\delta(f + 200x10^3) + \delta(f - 200x10^3) + \delta(f + 190x10^3) + \delta(f - 190x10^3)]$$

Para f_s = 20 kHz, $X_s(f) = 20x10^3\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 20x10^3 n)$

Para mostrar el procedimiento, vamos a determinar X_s(f) para $n = 0$ y $n = \pm 1$. El lector puede seguir hasta ± 5.

$$\begin{aligned} X_s(f) = 20x10^3 x5\{&\delta(f + 200x10^3) + \delta(f - 200x10^3) + \delta(f + 190x10^3) + \delta(f - 190x10^3) + \\ &+ \delta(f + 200x10^3 + 20x10^3) + \delta(f - 200x10^3 + 20x10^3) + \delta(f + 190x10^3 + 20x10^3) + \\ &+ \delta(f - 190x10^3 + 20x10^3) + \delta(f + 200x10^3 - 20x10^3) + \delta(f - 200x10^3 - 20x10^3) + \\ &+ \delta(f + 190x10^3 - 20x10^3) + \delta(f - 190x10^3 - 20x10^3) + \cdots\} \end{aligned}$$

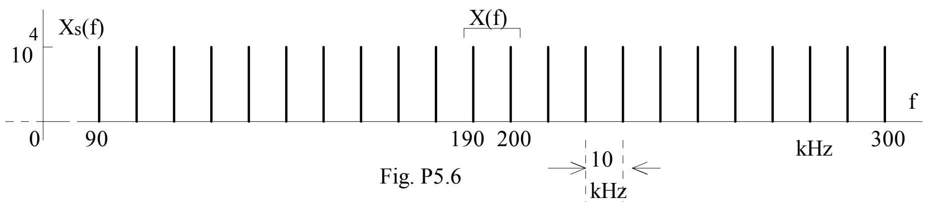


Fig. P5.6

En la Fig. 5.6 se muestra este espectro hasta n = 5 (frecuencias positivas solamente).
Nótese que X(f) se puede extraer de $X_s(f)$ mediante un filtro pasabanda que deje pasar las componentes a 190 y 200 kHz.

5.7. Se desea muestrear la señal $x(t) = 15\exp(-10^3|t|)$. Determine el límite inferior de la frecuencia de muestreo cuando

(a) El ancho de banda de la señal es el de 3 dB.

Solución:

$$x(t) = 15\exp(-10^3|t|) \Leftrightarrow X(f) = \frac{30x10^3}{10^6 + (2\pi f)^2}; \quad |X(f)|_{max} = X(0) = 30x10^{-3}$$

Sea B el ancho de banda de 3 dB. Por definición,

$$\frac{30x10^3}{10^6 + (2\pi B)^2} = \frac{30x10^3}{\sqrt{2}}.$$ Resolviendo esta ecuación en B,

$$B = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)10^6}{4\pi^2}} = \frac{10^3}{2\pi}\sqrt{\sqrt{2}-1} = 102{,}43\ \text{Hz}; \qquad f_s = 2B = 204{,}86\ \text{Hz}.$$

(b) El ancho de banda de la señal es el dado por la expresión (2.115): $B = \dfrac{x(0)}{2X(0)}$

Solución:

$$X(0) = 15; \qquad X(0) = 30x10^{-3}; \qquad B = \frac{15}{2x30x10^{-3}} = 250; \quad f_s = 2B = 500\ \text{Hz}$$

5.8. Sea la señal periódica de la Fig. 5.99 del Texto. Esta señal se va a emplear para muestrear la señal $x(t) = 2x10^{-3}\text{sinc}^2(500t)$.

Determine el espectro P(f) de p(t).

Solución:

$$x(t) = 2x10^{-3}\text{sinc}^2(500t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{2x10^{-3}}{500}\Lambda(\frac{f}{500}) = 4x10^{-6}\Lambda(\frac{f}{500})$$

La señal generatriz de p(t) es

$$g(t) = \delta(t) + \delta(t - \Delta t) \Leftrightarrow X_g(f) = 1 + \exp(-j2\pi\Delta tf) = \exp(-j\pi\Delta tf)[\exp(j\pi\Delta tf) + \exp(-j\pi\Delta tf)]$$

$$X_g(f) = 2\cos(\pi\Delta tf)\exp(-j\pi\Delta tf)\,; \qquad P_n = \frac{1}{T_s}X_g(\frac{n}{T_s}) = \frac{2}{T_s}\cos(\pi\Delta t\frac{n}{T_s})\exp(-j\pi\Delta t\frac{n}{T_s})$$

$P_n = 2f_s\cos(\pi\Delta tnf_s)\exp(-j\pi\Delta tnf_s)$. De acuerdo con la expresión (1.102) o (1.105),

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n\delta(f - nf_s) = 2f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(\pi\Delta tnf_s)\exp(-j\pi\Delta tnf_s)\delta(f - nf_s) \qquad f_s = \frac{1}{T_s}$$

5.9. Se tiene una señal pasabajo de banda limitada f_m. Esta señal se muestrea y se pasa por un filtro pasabajo RC de tal manera que haya una banda de guarda de ancho B_g entre el valor B del ancho de banda del filtro y la frecuencia inferior del espectro centrado en f_s. El valor B es el ancho de banda del filtro de acuerdo con la expresión (2.790). Suponga que $(1/RC) = 2\pi f_m$. Demuestre que la frecuencia de muestreo necesaria es $f_s = 3f_m + B_g$. Demuestre también que si el ancho de banda del filtro es el de 3 dB, entonces la frecuencia de muestreo será $f_s = 2f_m + Bg$.

Solución:

(a) Sea la Fig. P5.9(a)

Del Problema 2.22, Fig. 2.67(a)

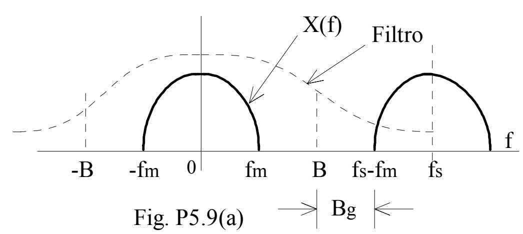


Fig. P5.9(a)

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

$$|H(f)|_{max} = |H(0)|$$

$$B = \frac{1}{2}2\int_0^\infty \frac{df}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} = \frac{1}{\pi RC}, \text{ pero como } \frac{1}{RC} = 2\pi f_m, \text{ entonces } B = \frac{1}{\pi RC} = 2f_m$$

De la Fig. P5.9(a),

$f_s - f_m = B + B_g = 2f_m + B_g$, de donde

$f_s = 3f_m + B_g$

(a) Ancho de banda de 3 dB.

Del Problema 2.22, el ancho de banda de 3 dB de un filtro pasabajo RC es

$$B = \frac{1}{2\pi RC}\,; \quad \text{si} \quad \frac{1}{RC} = 2\pi f_m,$$

entonces $B = f_m$.

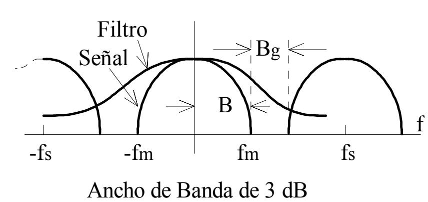


Fig. P5.9(b)

Sea entonces la Fig. P5.9(b), en la cual vemos que la frecuencia de muestreo es

$f_s = 2f_m + B_g$

5.10. Consideremos la distorsión de solapamiento mostrada en la Fig. 5.15 del Texto. Vamos a cuantificar la distorsión de solapamiento definiéndola como “la relación entre la energía de los espectros adyacentes reflejada sobre la gama de baja frecuencia vs la energía de la señal dentro de esa gama”.

Solución:

Consideremos entonces la Fig. 5.15 del Texto. La energía a la salida del filtro es

$$E_{yo} = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df + 2\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df$$

El primer término es la energía de X(f) que sale del filtro; mientras que el segundo término es la energía de las colas de los espectros adyacentes (centrados en $\pm f_s$) que se cuelan dentro de la banda pasante del filtro (Se supone que el efecto de los espectros centrados en $|f| > f_s$ es despreciable). Este término es un término de distorsión o aliasing. Podemos definir entonces un “Factor de Solapamiento, F_s” en la siguiente forma:

$$\text{Factor de Solapamiento, } F_s\% = \frac{\text{Energía de salida de los espectros adyacentes}}{\text{Energía de salida de la señal útil}} 100$$

$$F_s\% = \frac{2\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-f_s/2}^{f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df}{\int_{0}^{f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100$$

Si la ganancia del filtro es constante en la gama $|f| \le \frac{f_s}{2}$, es decir, si $|H(f)| = h_o$, entonces

$$F_s\% = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |X(f)|^2 df}{\int_{0}^{f_s/2} |X(f)|^2 df} 100$$

Aplicación: Sea $x(t) = 15\exp(-10^3|t|)$ donde, del Problema P5.7(b), $f_s = 500$ Hz.

$$X(f) = \frac{30\text{x}10^3}{10^6 + (2\pi f)^2}; |X(f)|^2 = \frac{9\text{x}10^8}{[10^6 + (2\pi f)^2]^2}; \ f_s = 500 \text{ Hz}$$

Suponemos que la ganancia del filtro es constante. Entonces,

$$F_s\% = \frac{\int_{250}^{750} \frac{9\text{x}10^8}{[10^6 + (2\pi f)^2]^2} df}{\int_{0}^{250} \frac{9\text{x}10^8}{[10^6 + (2\pi f)^2]^2} df} 100 = 7{,}4026\%$$

5.11. En general, las señales de información prácticas no son estrictamente limitadas en banda, de modo que teóricamente cuando ellas se filtran para limitarlas en banda se produce distorsión. Consideremos el espectro de la Fig. 5.100 del Texto, donde X(f) es el espectro de la señal de información x(t). El área rayada representa entonces la pérdida de señal producida por la limitación de banda debida al filtro.

(a) Defina un "Factor de Distorsión por Limitación de Banda, F_B".

Consideremos la Fig. 5.100 del Texto. La energía total de X(f) es la suma de la energía dentro del intervalo (-B, B) más la energía que cae fuera de este intervalo, es decir,

$$E_x = \int_{-B}^{B}|X(f)|^2 df + 2\int_{B}^{\infty}|X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df$$

La segunda integral representa la pérdida de energía debido a la limitación de banda. Podemos definir entonces un "Factor de Distorsión por Limitación de Banda, F_B", en la forma

$$F_B\% = \frac{\text{Energía perdida por la limitación de banda}}{\text{Energía total de la señal}}100$$

$$F_B\% = \frac{2\int_0^{\infty}|X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df}100 = \frac{\int_B^{\infty}|X(f)|^2 df}{\int_0^{\infty}|X(f)|^2 df}100$$

(b) Aplicación: B = 5 kHz

1. $x(t) = 8\text{sinc}^2(8x10^3 t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{8}{8x10^3}\Lambda(\frac{f}{8x10^3}) = 10^{-3}\Lambda(\frac{f}{8x10^3})$

$$X(f) = \frac{10^{-3}}{8x10^3}(f + 8x10^3)u(-f) - \frac{10^{-3}}{8x10^3}(f - 8x10^3)u(f)$$

$$X(f) = \frac{10^{-6}}{8}\left[(f + 8x10^3)u(-f) + (f - 8x10^3)u(f)\right]$$

Como los dos términos no se solapan, entonces

$|X(f)|^2 = (\frac{10^{-6}}{8})^2\left[(f + 8x10^3)^2 u(-f) - (f - 8x10^3)^2 u(f)\right]$. Por lo tanto,

$$F_B\% = \frac{(\frac{10^{-6}}{8})^2\int_{5x10^3}^{8x10^3}\left[(f - 8x10^3)^2\right]df}{(\frac{10^{-6}}{8})^2\int_0^{8x10^3}\left[(f - 8x10^3)^2\right]df}100$$

$$F_B\% = \frac{\int_{5x10^3}^{8x10^3} (f - 8x10^3)^2 df}{\int_0^{8x10^3} (f - 8x10^3)^2 df} 100 = 5{,}273\%$$

2. $x(t) = 10\exp(-10^4|t|) \Leftrightarrow X(f) = \dfrac{2x10^5}{10^8 + (2\pi f)^2}$; $|X(f)|^2 = \dfrac{4x10^{10}}{[10^8 + (2\pi f)^2]^2}$; $B = 5\,kHz$

$$F_B\% = \frac{\int_{5x10^3}^{\infty} \frac{4x10^{10}}{[10^8 + (2\pi f)^2]^2} df}{\int_0^{\infty} \frac{4x10^{10}}{[10^8 + (2\pi f)^2]^2} df} 100 = 1{,}219\%$$

5.12. Igualmente que en los problemas anteriores, se puede cuantificar de Distorsión de Interpolación. Si se considera solamente la energía de los espectros adyacentes, determinar, a partir de la Fig. 5.16 del Texto, un Factor de Distorsión de Interpolación, F_I.

Solución:

Consideremos la Fig. 5.16 del Texto.

La energía de salida del filtro es igual a la energía de la señal X(f) más la energía de los dos espectros adyacentes que se cuela por la banda pasante del filtro. La energía de salida del filtro será

$$E_y = \int_{-f_m}^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df + 2\int_{f_s - f_m}^{f_s + f_m} |H(f)|^2 |X(f - f_s)|^2 df$$

La primera integral es la energía de la señal X(f) a la salida, mientras que la segunda integral es la energía de los espectros adyacentes que pasa a la salida debido a la banda pasante del filtro. Este es un término de distorsión.

Se puede definir entonces un "Factor de Distorsión de Interpolación, F_I" en la forma

$$F_I\% = \frac{\text{Energía de los espectros adyacentes a la salida del filtro}}{\text{Energía de la señal X(f) a la salida del filtro}} 100$$

$$F_I\% = \frac{2\int_{f_s - f_m}^{f_s + f_m} |H(f)|^2 |X(f - f_s)|^2}{\int_{-f_m}^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 = \frac{\int_{f_s - f_m}^{f_s + f_m} |H(f)|^2 |X(f - f_s)|^2 df}{\int_0^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100$$

Aplicación:

$$x(t) = 2f_m \text{sinc}(2f_m t) \Leftrightarrow \Pi(\frac{f}{2f_m}); \quad f_m = \frac{1}{2\pi RC}; \quad f_s = 3f_m$$

Filtro pasabajo RC: $H(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi fRC}$; $|H(f)|^2 = \dfrac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} = \dfrac{1}{1 + (\frac{f}{f_m})^2}$

Sea la Fig. P5.12.

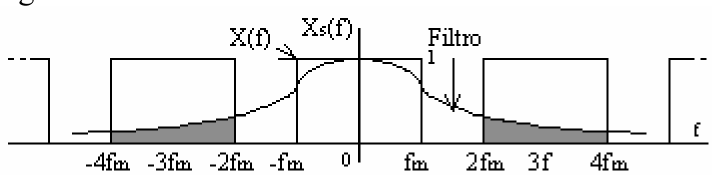


Fig. P5.12

$$F_I\% = \frac{\int_{2f_m}^{4f_m} |H(f)|^2 |X(f-3f_m)|^2 df}{\int_0^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 = \frac{\int_{2f_m}^{4f_m} |H(f)|^2 df}{\int_0^{f_m} |H(f)|^2 df} 100$$

$$F_I\% = \frac{\int_{2f_m}^{4f_m} \frac{1}{1+(\frac{f}{f_m})^2} df}{\int_0^{f_m} \frac{1}{1+(\frac{f}{f_m})^2} df} 100 = 27{,}842\%$$

5.13. Sea la señal $x(t) = 8\text{sinc}^2(\frac{t}{1{,}25x10^{-4}})\cos(1{,}94x10^5 \pi t)$.

(a) Determine la frecuencia mínima de muestreo y las características del filtro necesario para recobrar la señal.

Solución:

$$x(t) = 8\text{sinc}^2(\frac{t}{1{,}25x10^{-4}})\cos(2\pi 0{,}97x10^5 t);\ \text{sinc}^2(8x10^3 t) \Leftrightarrow \frac{1}{8x10^3}\Lambda(\frac{f}{8x10^3})$$

$$X(f) = \frac{4}{8x10^3}\left[\Lambda(\frac{f+97x10^3}{8x10^3}) + \Lambda(\frac{f-97x10^3}{8x10^3})\right]$$

Esta es una señal pasabanda donde $f_2 = 105x10^3;\ f_1 = 89x10^3;\ B = 16x10^3$

$$m = \text{entero}\left[\frac{f_2}{B}\right] = \text{entero}[6{,}56] = 6;\qquad f_s = (\frac{2}{m})f_2 = \frac{2}{6}105x10^3 = 35\,\text{kHz}$$

Para recobrar la señal se necesita un filtro pasabanda centrado en $f_c = \pm 97\,\text{kHz}$ y con una banda pasante de 16 kHz.

(b) Espectro de la señal muestreada. Suponemos muestreo instantáneo; f_s = 35 kHz.

De la expresión (5.2) del Texto, $X_s(f) = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$. Para no complicar el dibujo, vamos a desarrollar $X_s(f)$ para $n = 0, \pm 1$ y ± 2. Las frecuencias están en kHz.

$$X_s(f) = \frac{35x10^3}{2x10^3}[\Lambda(\frac{f+97}{8}) + \Lambda(\frac{f-97}{8}) + \Lambda(\frac{f+97+35}{8}) + \Lambda(\frac{f-97+35}{8}) +$$

$$+\Lambda(\frac{f+97-35}{8})+\Lambda(\frac{f-97-35}{8})+\Lambda(\frac{f+97+70}{8})+\Lambda(\frac{f-97+70}{8})+$$
$$+\Lambda(\frac{f+97-70}{8})+\Lambda(\frac{f-97-70}{8})+\cdots]$$
$$X_s(f)=17{,}5[\Lambda(\frac{f+97}{8})+\Lambda(\frac{f-97}{8})+\Lambda(\frac{f+132}{8})+\Lambda(\frac{f-62}{8})+\Lambda(\frac{f+62}{8})+$$
$$+\Lambda(\frac{f-132}{8})+\Lambda(\frac{f+167}{8})+\Lambda(\frac{f-27}{8})+\Lambda(\frac{f+27}{8})+\Lambda(\frac{f-167}{8})+\cdots]$$

En la Fig. P5.13 se muestra este espectro (frecuencias positivas solamente)

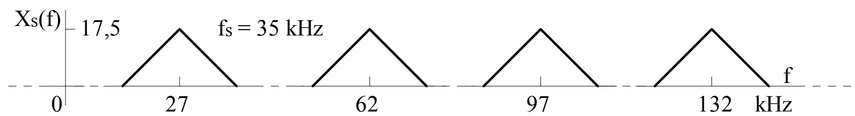


Fig.P5.13.

5.14. Sea el sistema de la Fig. 5.101 del Texto, donde x(t) es una señal pasabajo de banda limitada f_m.

(a) Determine su salida y(t)

(b) Dibuje su espectro Y(f) cuando $x(t)=2f_m\text{sinc}(2f_m t)$.

Solución:

(a) $x(t)=2f_m\text{sinc}(2f_m t)\Leftrightarrow X(f)=\Pi(\frac{f}{2f_m})$; $\delta_{Ts}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\Leftrightarrow f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$

x(t) es una señal pasabajo de banda limitada f_m.

A la salida del multiplicador, $x_s(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$

$X_s(t)$ es una secuencia de impulsos de amplitud $x(nT_s)$; de modo que se puede elevar directamente al cuadrado. Entonces a la salida del elevador al cuadrado,

$$y(t)=x_s^2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

(b) $X(f)=\Pi(\frac{f}{2f_m})$; $f_s=4f_m$; $x_s(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

$$y(t)=\left[x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right]^2=[x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)][x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)]$$

$$y(t)=x^2(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$Y(f) = TF\left\{x^2(t)\right\} * f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \text{ ; pero } \quad x^2(t) = 4f_m^2 \text{sinc}^2(2f_m t) \Leftrightarrow 2f_m \Lambda(\frac{f}{2f_m}) \text{ ; } f_s = 4f_m$$

$$Y(f) = 8f_m^2[\Lambda(\frac{f}{2f_m}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n4f_m)] = 8f_m^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{f - n4f_m}{2f_m})$$

Este espectro se muestra en la Fig. P5.14.

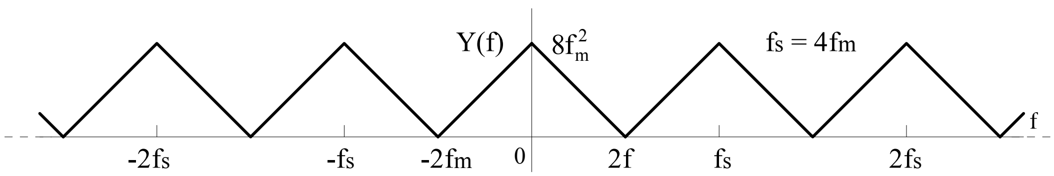


Fig. P5.14.

5.15. En el muestreo con retención se utiliza un filtro de orden cero dado por (5.25); sin embargo, h(t) puede tener cualquier perfil, por ejemplo,

(a) Si $h(t) = \cos(\frac{\pi t}{T_s})$ para $|t| \le \frac{T_s}{2}$, donde $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4f_m}$ y $X(f) = \Pi(\frac{f}{2f_m})$, calcule y dibuje $X_s(f)$ en la forma mostrada en la Fig. 5.11 del Texto.

Solución:

$$h(t) = \cos(2\pi \frac{1}{2T_s} t)\Pi(\frac{t}{T_s}); \; f_s = 4f_m = \frac{1}{T_s}; \; f_c = 2f_m; \; \Pi(\frac{t}{T_s}) \Leftrightarrow T_s \text{sinc}(T_s f) = \frac{1}{4f_m} \text{sinc}(\frac{f}{4f_m})$$

$$H(f) = \frac{1}{8f_m}\left[\text{sinc}(\frac{f + 2f_m}{4f_m}) + \text{sinc}(\frac{f - 2f_m}{4f_m})\right].$$

Nótese que $H(f) \approx 0$ para $6f_m \le |f|$. De la ecuación (5.24),

$$X_s(f) = \left[f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)\right] \cdot H(f) \text{ ;} \qquad X(f) = \Pi(\frac{f}{2f_m})$$

$$X_s(f) = \frac{1}{2}\left[\text{sinc}(\frac{f + 2f_m}{4f_m}) + \text{sinc}(\frac{f - 2f_m}{4f_m})\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{f - n4f_m}{2f_m})$$

En la Fig. P5.15 se muestra este espectro.

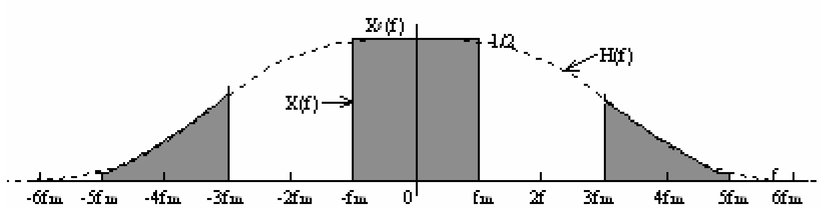


Fig. P5.15(a).

(b) $h(t) = \Lambda(2f_m t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{2f_m} \text{sinc}(\frac{f}{2f_m})$; $\quad T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{3f_m}$; $\quad f_s = 3f_m$

$$X_s(f) = \frac{3}{2}\operatorname{sinc}(\frac{f}{2f_m})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{f - n3f_m}{2f_m})$$

En la Fig. P5.15(b) se muestra este espectro para $f_m = 1000$ Hz

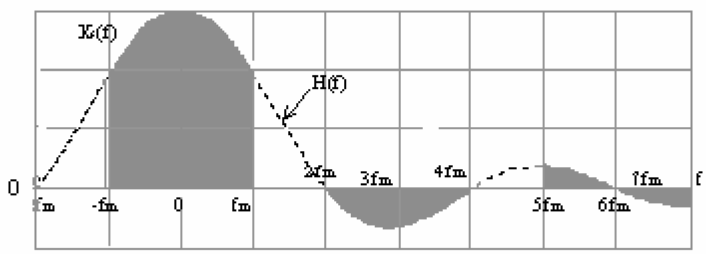


Fig. 5.15(b)

5.16. Sea el sistema mostrado en la Fig. 5.102 del Texto, donde x(t) es una señal pasabajo de banda limitada f_m. f_s es la frecuencia de Nyquist de x(t).

(a) Determine el espectro $X_i(f)$ de $x_i(t)$.

Sea la Fig. 5.102 del Texto.

Sea $x_1(t)$ la salida del multiplicador inferior:

$$x_1(t) = \delta_{Ts}(t)\cdot\cos(2\pi f_m t) = \cos(2\pi f_m t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)\,;\ f_s = \frac{1}{T_s} = 2f_m$$

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_m t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s) \Leftrightarrow X_1(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f + f_m) + \delta(f - f_m)\right] * 2f_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n2f_m)$$

$$X_1(f) = f_m\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n2f_m) * \delta(f + f_m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n2f_m) * \delta(f - f_m)\right]$$

$$X_1(f) = f_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\delta[f - (2n-1)f_m] + \delta[f - (2n+1)f_m]\right\};\qquad X_i(f) = X_1(f) * X(f)$$

$$X_i(f) = f_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\delta[f - (2n-1)f_m] * X(f) + \delta[f - (2n+1)f_m] * X(f)\right\}$$

$$X_i(f) = f_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{X[f - (2n-1)f_m] + X[f - (2n+1)f_m]\right\},\ \text{pero nótese que}$$

$$X[f - (2n-1)f_m] = X[f - (2n+1)f_m]\,|_{n\to n-1}$$

$$\text{y}\quad X[f - (2n+1)f_m] = X[f - (2n-1)f_m]\,|_{n\to n+1}$$

Como la sumatoria se extiende desde $n = -\infty$ a $n = \infty$, podemos decir entonces que

$$X[f - (2n-1)f_m] = X[f - (2n+1)f_m] = 2X[f - (2n+1)f_m]\text{, de donde}$$

$$X_i(f) = 2f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[f-(2n+1)f_m] \ , \quad \text{donde} \quad f_s = \frac{1}{T_s} = 2f_m$$

(b) $x(t) = \text{sinc}^2(f_m t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{f_m}\Lambda(\frac{f}{f_m})$; por lo tanto,

$$X_i(f) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Lambda(\frac{f-(2n+1)f_m}{f_m})\right]; \quad f_s = 2f_m$$

En la Fig. P5.16 se muestra este espectro para $|n| \le 5$.

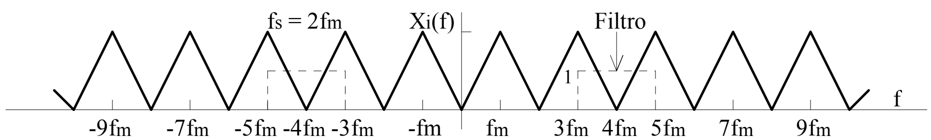


Fig. P5.16.

(c) Por la banda de paso del filtro mostrado en la Fig. P5.16, pasa la señal

$$Y(f) = 2\left[\Pi(\frac{f+4f_m}{2f_m}) + \Pi(\frac{f-4f_m}{2f_m}) - \Lambda(\frac{f+4f_m}{f_m}) - \Lambda(\frac{f-4f_m}{f_m})\right]$$

$$y(t) = 2TF^{-1}\left\{\Pi(\frac{f}{2f_m})\right\}\left[\exp(-j2\pi 4f_m t) + \exp(+j2\pi 4f_m t)\right] +$$

$$-2TF^{-1}\left\{\Lambda(\frac{f}{f_m})\right\}\left[\exp(-j2\pi 4f_m t) + \exp(+j2\pi 4f_m t)\right]$$

$$y(t) = 4\left\{2f_m \text{sinc}(2f_m t)\cos(8\pi f_m t) - f_m \text{sinc}^2(f_m t)\cos(8\pi f_m t)\right\}$$

$$y(t) = 4f_m\left[2\text{sinc}(2f_m t) - \text{sinc}^2(f_m t)\right]\cos(8\pi f_m t)$$

5.17. En un sistema PDM se observa que el ancho de los impulsos viene dado por la expresión $\tau(t) = 10^{-3}[1 + 0{,}5\cos(\frac{10^3\pi t}{3})]$.

Determine el ancho de banda de la señal PDM y su período.

Solución:

$$\tau(t) = 10^{-3}[1+0{,}5\cos(\frac{10^3\pi t}{3})]; \quad \tau_{max} = 10^{-3}[1+0{,}5] = 1{,}5x10^{-3}; \quad \tau_{min} = 10^{-3}[1-0{,}5] = 0{,}5x10^{-3}$$

Ancho de banda en PDM: $B_{PDM} = \frac{1}{\tau_{min}} = \frac{1}{0{,}5x10^{-3}} = 2\text{ kHz}$

$$m(t) = \cos(\frac{10^3\pi t}{3}) = \cos(2\pi\frac{10^3}{6}t); \quad f_m = \frac{10^3}{6}; \quad f_s = 2f_m = \frac{10^3}{3} \therefore T_s = 3x10^{-3} = 3\text{ ms}$$

5.18. La señal $m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$ se va a modular en PDM en la forma mostrada en la Fig. 5.23 del Texto. Suponga que $|\min m(t)| = A/2$. Note también que [min m(t)] ≈ -0,2172 para t = 1,425 seg.

(a) Determinar los valores apropiados de los parámetros T_s, A, V_p y V_u.

Solución:

$$m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t) \Leftrightarrow M(f) = 10^{-3}\Pi(\frac{f}{10^4});\ f_m = 5x10^3;\ f_s = 2f_m = 10^4;\ T_s = 10^{-4}$$

$$|\max m(t)| = 10;\ \ |\min m(t)| = |-0{,}2172x10| = \frac{A}{2} \therefore A = 4{,}344$$

De la Fig. 5.23 del Texto, $V_u > A + |\max m(t)| = 4{,}344 + 10 = 14{,}344$. Sea V_u = 15 V

Puesto que $1{,}5V_u < V_p < 2V_u$, hagamos $V_p = 1{,}75V_u$, de donde

$V_p = 1{,}75x15 = 26{,}25$. Sea V_p = 26 V

Los valores apropiados de los parámetros en el presente caso son:

$T_s = 10^{-4}$ seg; A = 4,344 V; V_p = 26 V y V_u = 15 V.

(b) Sea la Fig. P5.18 en el instante en que se muestrea el punto mínimo de m(t), que representamos con el triángulo ABC en la figura. Entonces, por triángulos semejantes podemos aproximar la relación

$$\frac{T_s}{V_p} \approx \frac{\tau}{V_x} \therefore \frac{1}{\tau} \approx \frac{V_p}{T_s V_x}$$

pero $B = \frac{1}{\tau}$ y $T_s = \frac{1}{2f_m}$, de donde

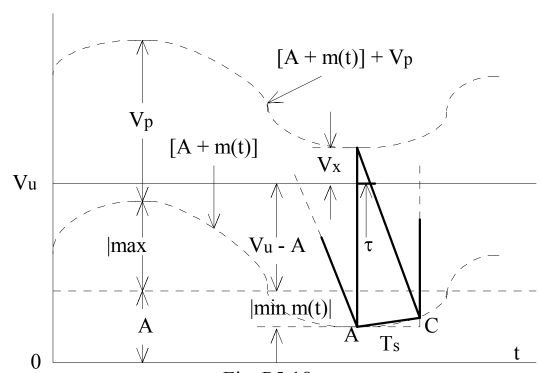


Fig. P5.18.

$B \approx \frac{2f_m V_p}{V_x}$; pero $V_x = V_p - (V_u - A) - |\min m(t)|$. El ancho de banda B será

$$B \approx \frac{2f_m V_p}{V_p + A - |\min\ m(t)| - V_u}$$

También $\beta_m = \frac{B}{f_m}$ y $B = \beta_m f_m \approx \frac{2f_m V_p}{V_p + A - |\min m(t)| - V_u}$

Hagamos ahora $K = A - |\min m(t)| - V_u$; entonces, tomando la igualdad, $\beta_m = \frac{2V_p}{V_p + K}$

Resolviendo para V_p , $\quad V_p = \frac{\beta_m}{\beta_m - 2}(-K) = \frac{\beta_m}{\beta_m - 2}[V_u + |\min m(t)| - A]$

puesto que $V_p > 0$, debe verificarse que $\beta_m > 2$; en realidad, en la práctica $\beta_m >> 2$.

El ancho de banda depende del valor V_p, pues V_u no puede ser muy diferente de $A + |\max m(t)|$. Asimismo, si $A - |\min m(t)| \approx 0$, el ancho de banda será máximo y dependerá de V_p, es decir,

$$V_p = \frac{\beta_m}{\beta_m - 2}V_u \quad \text{para} \quad \beta_m > 2$$

Por ejemplo, para $\beta_m = 6$, $V_p = 1{,}5V_u$, que puede ser el valor máximo de V_p. Para $\beta_m = 4$, $V_p = 2V_u$, y este valor puede tomarse entonces como el valor máximo de V_p. En resumen, para anchos de banda razonables, se puede hacer

$$1{,}5V_u < V_p < 2V_u$$

A partir de la Fig. P5.18 se puede establecer las siguientes relaciones entre los diferentes parámetros:

$$V_p + A - |\min m(t)| > V_u > A + |\max m(t)|; \quad [A - |\min m(t)|] > 0; \; V_p > V_u; \; T_s > \tau_{max}$$

Los valores numéricos en un caso particular se establecen a partir de las características de la señal m(t) y alguna relación adicional entre los parámetros A, V_p y V_u, como fue el caso de la parte (a), en donde se obtuvo:

$$V_p = 26V; \; V_u = 15V; \; A = 4{,}344V; \; f_m = 5x10^3 \text{ Hz}; \; |\min m(t)| = 2{,}172V$$

Con estos datos, $\quad B = 19{,}74 \text{ kHz} \quad$ y $\quad \beta_m = 3{,}948$

5.19. La señal $m(t) = 10\cos^2(5x10^3\pi t)$ se va a modular en PAM, PDM y PPM. La relación de trabajo del tren de impulsos sin modular es de 0,2. Determinar las relaciones de expansión del ancho de banda y las ganancias de conversión correspondientes.

Solución:

$$m(t) = 10\cos^2(5x10^3\pi t) = 5 + 5\cos(2\pi 5x10^3\pi t); \quad f_m = 5x10^3; \; f_s = 2f_m = 10^4; \; \frac{\tau_o}{T_s} = 0{,}2$$

$$T_s = 10^{-4}; \; \tau_o = \frac{T_s}{5} = 2x10^{-5}; \quad \tau_o \text{ es la duración de los impulsos sin modulación.}$$

En PAM. $\quad B = \frac{1}{\tau} = 50\text{kHz}; \; \beta_m = \frac{B}{f_m} = \frac{50x10^3}{5x10^3} = 10$

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{B}{f_m} = 10, \text{ o también } \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 2\frac{T_s}{\tau} = 2x5 = 10$$

En PDM. $\quad \tau_o = 2x10^{-5}; \quad \tau(t) = \tau_o + \tau_1 m(t) = \tau_o + 5\tau_1[1 + \cos(2\pi 5x10^3 t)]$

$$\tau_{max} = \tau_o + 10\tau_1; \qquad \tau_{min} = \tau_o$$

Puesto que $T_s > \tau_{max}$, hagamos $T_s = \tau_{max} + \tau_o = 10\tau_1 + 2\tau_o \therefore \tau_1 = \frac{T_s - 2\tau_o}{10} = 6\text{x}10^{-6}$

$$B = \frac{1}{\tau_o} = 5\text{x}10^4 = 50\,\text{kHz}; \qquad \beta_m = \frac{50\text{x}10^3}{5\text{x}10^3} = 10; \qquad \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{3}{2}\beta_m \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2}\beta_m + 2)} = 14{,}118$$

En PPM. $\tau = \tau_o = 2\text{x}10^{-5}$; $\quad B = \frac{5}{\tau_o} = 2{,}5\text{x}10^5 = 250\,\text{kHz}$

$$\beta_m = \frac{B}{f_m} = 50; \qquad \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{\beta_m}{4}(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2 = 7200$$

5.20. En la Sección 5.3.4 se calculó la ganancia de conversión en PPM suponiendo que los impulsos tenían forma trapezoidal, Fig. 5.29 y 5.30, y expresiones (5.69) y (5.70).

Utilizando el mismo procedimiento, demuestre que cuando los impulsos tiene la forma de coseno elevado $\left\{p(t) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos(\frac{2\pi t}{\tau})\right]\Pi(\frac{t}{\tau})\right\}$, la ganancia de conversión es

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{\pi^2}{3}(\frac{B}{2f_m} - 1)^3$$

Si $B >> f_m$, entonces $\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{\pi^2}{24}(\frac{B}{f_m})^3 = \frac{\pi^2}{24}\beta_m^3$

Comparando este resultado con (5.70), podemos ver que el comportamiento del sistema PPM que utiliza impulsos en coseno elevado es superior en 8,18 dB al que utiliza impulsos trapezoidales.

Solución:

Supongamos que los impulsos tienen la forma de coseno elevado, es decir,

$p(t) = \frac{A}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi t}{\tau})]$ en un intervalo T_s cualquiera, siendo τ la duración del impulso, como se muestra en la Fig. P5.20(a)

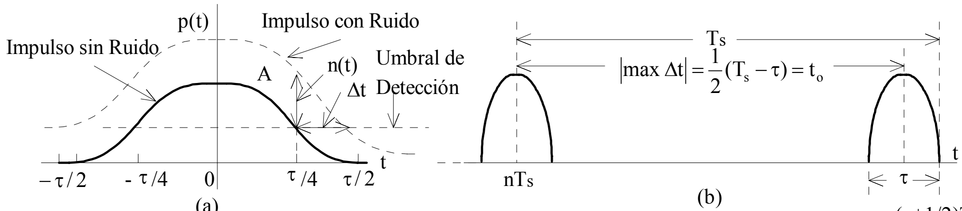


Fig. P5.20.

De la geometría de la Fig. P5.20(a),

$-\dfrac{n(t)}{\Delta\tau} = \dfrac{d}{dt}p(t)\big|_{t=\tau/4} =$ pendiente de p(t) en $t = \dfrac{\tau}{4}$. Por consiguiente,

$$-\frac{n(t)}{\Delta\tau} = -\frac{A}{2}\frac{2\pi}{\tau}\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\Big|_{t=\tau/4} = -\frac{A\pi}{\tau},\quad \text{de donde,}\quad \Delta\tau = \frac{\tau}{\pi A}n(t)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para la ecuación (5.64),

$$<\Delta\tau^2> = \left(\frac{\tau}{\pi A}\right)^2 < n^2(t) >;\quad N_\tau = \left(\frac{\tau}{\pi A}\right)^2 \eta B = \left(\frac{\tau}{\pi A}\right)^2 N_i$$

Aproximando, $B = \dfrac{1}{\tau}$, $\quad N_\tau = \left(\dfrac{1}{\pi AB}\right)^2 N_i \quad$ y $\quad N_o = k^2 N_\tau = \left(\dfrac{k}{\pi AB}\right)^2 N_i$

De la Fig. P5.20(b), la potencia de entrada S_i de p(t) es:

$$S_i = \frac{1}{2t_o}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} p^2(t)dt,\quad \text{donde}\quad t_o = \frac{1}{2}(T_s - \tau)$$

$$S_i = \frac{1}{2t_o}\frac{A^2}{4}2\int_o^{\tau/2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]^2 dt = \frac{3A^2}{16}\frac{\tau}{t_o},\ \text{de donde}\quad A^2 = \frac{16 t_o}{3\tau}S_i$$

También, $\quad S_o = k^2 < m^2(t) >$

$\dfrac{S_o}{N_o} = \dfrac{(\pi ABk)^2 < m^2(t) >}{k^2 N_i} = \dfrac{(\pi AB)^2}{N_i} < m^2(t) >$. Reemplazando el valor de A^2 obtenido,

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{(\pi B)^2}{N_i}\frac{16 t_o S_i}{3\tau} < m^2(t) > = \frac{(4\pi B)^2}{3\tau} < m^2(t) > \frac{S_i}{N_i}$$

$\dfrac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \dfrac{16\pi B^2}{3\tau} t_o < m^2(t) >$; pero, como ya lo hemos demostrado,

$$t_o < m^2(t) > = \frac{1}{2}(T_s - \tau)\frac{1}{8}(T_s - \tau)^2 = \frac{1}{16}(T_s - \tau)^3$$

Para $T_s = \dfrac{1}{2f_m}$ y $B = \dfrac{1}{\tau}$, se obtiene

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{\pi^2 B^3}{3}\left(\frac{1}{2f_m} - \frac{1}{B}\right)^3 = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{B}{2f_m} - 1\right)^3$$

y si $B >> 2f_m$, $\quad \dfrac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \dfrac{\pi^2}{24}\left(\dfrac{B}{f_m}\right)^3 = \dfrac{\pi^2}{24}\beta_m^3$

Comparando este valor con el dado en la ecuación (5.70), vemos que la utilización en PPM de impulsos en coseno elevado mejora la ganancia de conversión en 8,18 dB.

5.21. (a) Determinar la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora f_s en PPM.

Solución:

Sea la ecuación (5.60) del Texto:

$$x_{PPM}(t) = Af_s[1 - m_t m'(t)]\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n)\cos[2\pi(nf_s - kf_m)t]\right\}; \quad \beta_n = 2\pi n f_s m_t$$

La componente a la frecuencia de la portadora f_s es aquella para la cual $n = 1$ y $k = 0$.

$$x_{PPM}(t)|_{n=1;k=0} = Af_s[1 - m_t m'(t)]\left[1 + 2J_o(2\pi f_s m_t)\cos(2\pi f_s t)\right]$$

$$x_{PPM}(t)|_{n=1;k=0} = Af_s[1 - m_t m'(t)] + 2Af_s[1 - m_t m'(t)]J_o(2\pi f_s m_t)\cos(2\pi f_s t)$$

El segundo término es una señal sinusoidal de frecuencia f_s, cuya amplitud es

$$A_s = 2Af_s[1 - m_t m'(t)]J_o(2\pi f_s m_t)$$

Nótese las observaciones dadas en el Texto.

(b) Repetir para PDM.

Sea la ecuación (5.53) del Texto en PDM:

$$x_{PDM}(t) = \frac{A}{T_s}[\tau_o + \tau_1 \,\text{sen}(\omega_n t)] + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{J_k(\beta_n)}{n}\text{sen}[\alpha_n + k\omega_m t]\cos(\omega_s t)$$

$\alpha_n = n\pi\tau_o f_s;\quad \beta_n = n\pi\tau_1 f_s.\quad$ Para $n = 1$ y $k = 0$,

$$x_{PDM}(t)|_{n=1;k=0} = \frac{A\tau_o}{T_s} + \frac{A\tau_1}{T_s}\text{sen}(\omega_m t) + \frac{2A}{\pi}J_o(\pi\tau_1 f_s)\,\text{sen}(\pi\tau_o f_s)\cos(2\pi f_s t)$$

El tercer término es la componente a la frecuencia de la portadora f_s y cuya amplitud es

$$A_s = \frac{2A}{\pi}J_o(\pi\tau_1 f_s)\,\text{sen}(\pi\tau_o f_s)$$

Nótese las observaciones dadas en el Texto.

(c) Repetir para PAM.

Sea la ecuación (5.31) del Texto:

$$x_{PAM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[A + m(nT_s)]\Pi(\frac{t - nT_s}{\tau}) = [A + m(t)]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{t - nT_s}{\tau})$$

Pero $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Pi(\frac{t - nT_s}{\tau})$ es una señal periódica $x_T(t)$ rectangular de período T_s, amplitud unitaria y relación de trabajo $\frac{\tau}{T_s}$. Entonces, del Ejemplo (1.9),

$$X_n = \tau f_s \operatorname{sinc}(n\tau f_s) = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(\pi n\tau f_s)$$

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_s t) \Leftrightarrow X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_s)$$

$$x_{PAM}(t) = [A + m(t)]\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_s t) \Leftrightarrow X_{PAM}(f) = [A + M(f)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_s)$$

$$X_{PAM}(f) = A * \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_s) + M(f) * \sum_{n=-\aleph}^{\infty} X_n \delta(f - nf_s)$$

$$X_{PAM}(f) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_s) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n M(f - nf_s). \quad \text{Para } n = \pm 1,$$

$$X_{PAM}(f)|_{n=\pm 1} = AX_1[\delta(f + f_s) + \delta(f - f_s)] + X_1[M(f + f_s) + M(f - f_s)]$$

El primer término es la portadora, que denominaremos $X_c(f)$; entonces,

$$X_c(f) = AX_1[\delta(f + f_s) + \delta(f - f_s)] \Leftrightarrow x_c(t) = 2AX_1\cos(2\pi f_s t); \quad \text{pero } X_1 = \frac{\operatorname{sen}(\pi\tau f_s)}{\pi}$$

$$x_c(t) = \frac{2A}{\pi}\operatorname{sen}(\pi\tau f_s)\cos(2\pi f_s t)$$

La amplitud de la componente de portadora será entonces,

$$A_s = \frac{2A}{\pi}\operatorname{sen}(\pi\tau f_s)$$

Ver las observaciones de la parte (b) de este Problema en el Texto.

5.22. Una señal de audio tiene una frecuencia máxima de 3,2 kHz. Esta señal se muestrea a 8000 muestras por segundo y los impulsos resultantes se transmiten tanto en PAM como en PCM, ambos NRZ.

(a) Determine el ancho de banda mínimo del sistema PAM.

Solución:

$f_m = 3200;\;\; f_s = 8000 = \dfrac{1}{T_s}$. Pero en PAM/NRZ, $B_{PAM} = \dfrac{1}{T_s} = 8\,\text{kHz}$

(b) PCM. $N = 32 = 2^n$; $n = 5$.

Cada impulso PAM/NRZ se codifica en 5 impulsos PCM/NRZ. Por lo tanto,

El ancho de los impulsos PCM/NRZ es $\tau = \dfrac{T_s}{5}$, y su respectivo ancho de banda

será $B_{PCM} = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{5}{T_s} = 5\text{x}8000 = 40\,\text{kHz}$. Nótese que para la misma señal, $B_{PCM} = 5B_{PAM}$.

(c) PCM. $N = 256 = 2^n \;\therefore\; n = 8;\;\; V_{qmax} = \pm 8\text{V}$

De la expresión (5.94), $R_q = \dfrac{\Delta Q}{2} = \dfrac{V_{qmax}}{N-1} = \dfrac{8}{255} = 31{,}37\,\text{mV}$

De la expresión (5.108), $\dfrac{S_o}{N_o} = 6{,}02 \cdot n = 48{,}16\,\text{dB}$

5.23. Una señal analógica tiene una duración de 1 minuto. Su contenido espectral va desde CC hasta 500 Hz. La señal se va a muestrear, convertir en PCM binario y almacenar en la memoria de una computadora.

(a) Determinar el número mínimo de muestras que hay que tomar y almacenar para el caso de una eventual reconstrucción de la señal.

Solución:

$f_m = 500\,\text{Hz};\;\; T = 60\,\text{seg};\;\; f_s = 2f_m = 1000 = \dfrac{1}{T_s} \;\therefore\; T_s = 10^{-3}\,\text{se}$

Número de muestras a tomar $N_m = \dfrac{T}{T_s} = 60000$

(b) n = 8 impulsos binarios PCM; a cada impulso binario corresponde un bit

Capacidad de la memoria, $C_m = n \cdot N_m = 480000\,\text{bits} = 60000\,\text{bytes} = 60\,\text{kbytes}$

5.24.La señal $m(t) = 5 + 20\cos^2(10^4\pi t)$ se quiere modular en PAM (RZ) con una relación de trabajo de 0,2. El muestreo se efectúa al doble de la frecuencia de Nyquist.

(a) Determinar el factor de expansión del ancho de banda y la ganancia de conversión en el receptor.

Solución:

$$x(t) = 5 + 20\cos^2(10^4\pi t) = 15 + 15\cos(2\pi 10^4 t);\quad f_m = 10^4;\quad f_s = 2\cdot 2f_m = 4f_m = 4x10^4$$

$$T_s = 2{,}5x10^{-5} = 5\tau_s;\quad B_{PAM/RZ} = \frac{1}{\tau_s} = \frac{5}{T_s} = 5x40x10^3 = 2x10^5\ \text{Hz} = 200\ \text{kHz}$$

$$\beta_m = \frac{B}{f_m} = \frac{200x10^3}{10x10^3} = 20$$

De la expresión (5.43) en PAM, $\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \beta_m = 20$

(b) $T_s = 25\ \mu\text{seg};\ \tau_s = 5\ \mu\text{seg}.$

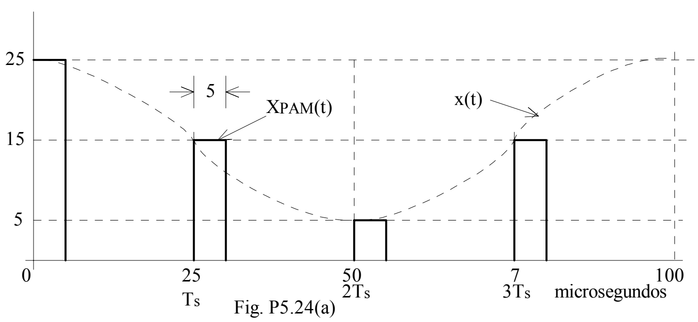


Fig. P5.24(a)

En la Fig. P5.24(a) se muestra x(t) y la señal PAM para $0 \le t \le 100\ \mu\text{seg}.$

Nótese que: para $t = T_s$, $x_{PAM}(t) = 15V$
para $t = 2T_s$, $x_{PAM}(t) = 5V$

(c) PCM unipolar, Ejemplo 5.9 del Texto.

$$N = 32 = 2^n \therefore n = 5;\quad R_q = \frac{\Delta Q}{2} = \frac{1}{2} \therefore \Delta Q = 1;\quad T_s = 25\ \mu\text{seg};\ \tau_s = 5\ \mu\text{seg}$$

$V_{qmax} = (N-1)\Delta Q = 31V$. La codificación PCM/NRZ será:

			LSB MSB
Para	$t = 0,\ x_{PAMq}(t) = 25 \rightarrow$	PCM	1 0 0 1 1
	$t = T_s = 25\mu\text{seg}\ \ x_{PAMq}(t) = 15V \rightarrow$	PCM	1 1 1 1 0
	$t = 2T_s = 50\mu\text{seg},\ \ x_{PAMq}(t) = 5V \rightarrow$	PCM	1 0 1 0 0
	$t = 3T_s = 75\mu\text{seg},\ \ x_{PAMq}(t) = 15V \rightarrow$	PCM	1 1 1 1 0

La salida PCM tendrá entonces la forma dada en la Fig. P5.24(b). Recuérdese que el dígito de menos peso (LSB) va la izquierda y se transmite de primero.

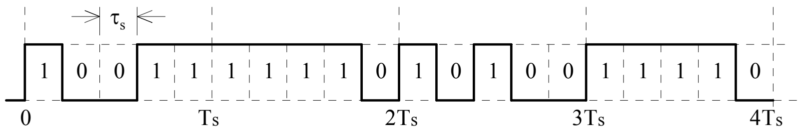


Fig. P5.24(b)

El ancho de banda en PCM será $B_{PCM} = \dfrac{1}{\tau_s} = \dfrac{1}{5X10^{-6}} = 200\,\text{kHz}$

5.25. La señal $m(t) = 0{,}05[1 - \cos(10\pi t)]$ se aplica a un modulador Delta cuya frecuencia de muestreo es de 100 Hz, con escalones de 10 mV de amplitud.

(a) Dibuje las señales $m(t)$, $\breve{m}(t)$ y $x_\Delta(t)$ para $0 \le t \le 100\,\text{ms}$.

Solución:

$m(t) = 50x10^{-3}[1 - \cos(2\pi 5t)]$; $f_m = 5$; $f_s = 100$; $\Delta = 10\,\text{mV}$; $T_s = 10\text{ms}$

En la Fig. P5.25 se muestra el proceso de modulación Delta.

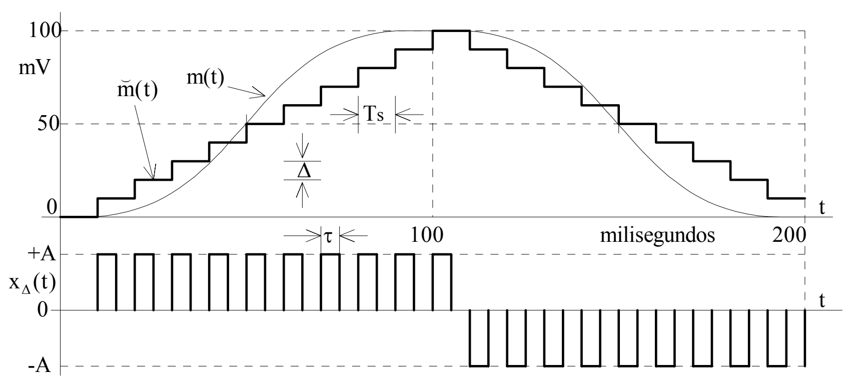


Fig. P5.25.

Otros parámetros de esta señal son:

$$F_s = \frac{f_s}{f_m} = 20;\ A_m = 100\,\text{mV};\ \Delta_r = \frac{\Delta}{A_m} = 0{,}1;\ \tau = \frac{T_s}{2} = 5\text{ms};\ B = \frac{1}{\tau} = 2f_s = 200\,\text{Hz}$$

Nótese que $\Delta_r \cdot F_s < 2\pi$. Entonces, de la expresión (5.129),

$\dfrac{S_o}{N_o} = 1{,}434 = 1{,}566\,\text{dB}$. Nótese que esta relacion S/N no es la máxima para el caso presente porque la frecuencia de muestreo es relativamente baja. En la parte (b) veremos que para aumentar la relación S/N es necesario aumentar la frecuencia de muestreo.

(b) Para la señal de la parte (a) hay que determinar la máxima relación S/N de postdetección y ver cuál es la frecuencia de muestreo necesaria. Se mantiene el valor del escalón en $\Delta = 10\text{ mV}$.

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{A_m} = \frac{10x10^{-3}}{100x10^{-3}} = 0,1$$

El valor máximo de la frecuencia de muestreo normalizada ocurre cuando

$$\Delta_r \cdot F_{smax} = 2\pi \therefore F_{smax} = \frac{2\pi}{\Delta_r} = 68,832; \text{ pero } F_{smax} = \frac{f_{smax}}{f_m} \therefore f_{smax} = 314,16\text{ Hz}$$

De la expresión (5.129), para $\Delta_r = 0,1$ y $F_{smax} = 68,832$, la relación de postdetección será $\frac{S_o}{N_o} = 150 = 21,761\text{ dB}$.

Nótese el aumento de más de 20 dB en la relación S/N de postdetección al aumentar la frecuencia de muestreo; por supuesto, el precio que hay que pagar es el aumento del ancho de banda necesario que ahora es B = 628,32 Hz.

5.26. A un modulador Delta se le aplica la señal $m(t) = \text{sen}(2\pi 10^3 t)$, siendo la frecuencia de muestreo de 64 kHz.

Determinar el valor óptimo del escalón relativo Δ_r y el valor máximo de la relación S/N de postdetección.

Solución:

$$m(t) = \text{sen}(2\pi 10^3 t); \quad f_m = 10^3; \quad A_m = 1; \; f_s = 64x10^3; \; F_s = \frac{f_s}{f_m} = 64$$

La condición óptima es $\Delta_{rop} \cdot F_s = 2\pi \therefore \Delta_{rop} = \frac{2\pi}{F_s} = 0,09817; \;\; \Delta = \Delta_{rop} A_m = \Delta_{rop}$.

Con estos parámetros, la relación S/N de postdetección, de (5.129), es

$$\frac{S_o}{N_o} = 155,63 = 21,92\text{ dB}.$$

El ancho de banda necesario será $B = 2f_s = 128$ kHz.

5.27. Se desea comparar los anchos de banda de transmisión requeridos en PCM y DM en el caso de modulación sinusoidal. Si la relación Señal/Ruido de Cuantificación es de 30,099 dB, demuestre que $B_{PCM} = 10f_m$ y $B_{DM} = 328,17 f_m$.

Solución:

$$\frac{S_o}{N_{oq}} = 30,099\text{ dB} = 1023$$

En PCM. $\dfrac{S_o}{N_{oq}} = N^2 - 1; \quad B_{PCM} = 2f_m \log_2 N = f_m \log_2 N^2$

$$N^2 - 1 = 1023 \therefore N^2 = 1024; \quad B_{PCM} = f_m \log_2(1024) = 10f_m$$

En DM. $\dfrac{S_o}{N_{oq}} = \dfrac{3}{2}[\dfrac{A_m}{\Delta}]^2; \quad B_{DM} = 2f_s$

$$\frac{3}{2}[\frac{A_m}{\Delta}]^2 = 1023; \quad [\frac{A_m}{\Delta}]^2 = 682; \quad \frac{A_m}{\Delta} = 36{,}12$$

De (5.122), $\dfrac{A_m}{\Delta} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{f_s}{f_m} \therefore f_s = 2\pi f_m \dfrac{A_m}{\Delta}$;

$$B_{DM} = 2f_s = 4\pi f_m \frac{A_m}{\Delta} = 26{,}12x4\pi f_m = 328{,}17f_m$$

5.28. Se quiere comparar los sistemas PCM y DM mediante el factor de expansión del ancho de banda $\beta_m = \dfrac{B}{f_m}$. Graficar $\left[\dfrac{S_o}{N_q}\right]_{PCM(dB)}$ y $\left[\dfrac{S_o}{N_q}\right]_{DM(dB)}$ vs β_m

Discutir los resultados.

Solución:

En DM. $\dfrac{S_o}{N_{oq}} = \dfrac{3}{2}(\dfrac{A_m}{\Delta})^2 = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{f_s}{f_m}\right]^2 = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{2f_s}{f_m}\right]^2 = \dfrac{3}{2(4\pi)^2}\left[\dfrac{2f_s}{f_m}\right]^2$

Pero como $B_{DM} = 2f_s$ y $\beta_m = \dfrac{B_{DM}}{f_m}$, entonces,

$$\frac{S_o}{N_{oq}} = \frac{3}{2(4\pi)^2}\beta_m^2; \quad \text{y en dB,}$$

$$\left[\frac{S_o}{N_{oq}}\right]_{DM(dB)} = -20,223 + 20\log(\beta_m)$$

En PCM. $\left[\dfrac{S_o}{N_{oq}}\right]_{PCM(dB)} = 3{,}01 \cdot \beta_m$

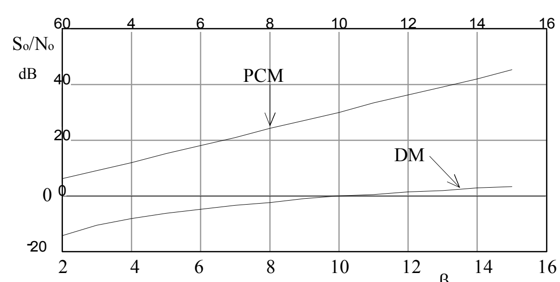


Fig. P5.28.

En la Fig. P5.28 se grafican estas relaciones.

5.29. M señales pasabajo, todas de banda limitada f_m, se muestrean instantáneamente y se multiplexan en TDM. La señal multiplexada se pasa por un filtro pasabajo ideal antes de la transmisión.

(a) ¿Cuál es el valor del ancho de banda mínimo del filtro a fin de que las señales individuales puedan recuperarse en el receptor?

Solución:

Las M señales hay que muestrearlas en un tiempo $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_m}$; por consiguiente, una muestra de señal se producirá cada intervalo $T_M = \frac{T_s}{M} = \frac{1}{Mf_s} = \frac{1}{2Mf_m}$. El ancho de banda TDM mínimo necesario del filtro será

$$B = \frac{1}{T_M} = 2Mf_m$$

(b) Repetir (a) si las señales se multiplexan en la forma mostrada en la Fig. 3.47(b) del Texto, siendo R_T el ciclo de trabajo de la señal PAM/TDM.

Solución:

La señal compuesta equivale a una secuencia de impulsos de amplitud variable, de anchura τ y con tiempo de guarda τ_g. Entonces, para una relación de trabajo R_T,

$R_T = \frac{\tau}{T_M} \therefore \tau = R_T T_M = R_T \frac{T_s}{M} = \frac{R_T}{Mf_s} = \frac{R_T}{2Mf_m}$. El ancho de banda de la señal será:

$$B = \frac{1}{\tau} = \frac{2Mf_m}{R_T}$$

(c) Esta parte se la dejamos a la ingeniosidad del lector.

(d) La señal PAM/TDM compuesta se codifica en ASCII sin bit de paridad. Demuestre que en este caso, la velocidad de modulación es de $V_b = 20f_m$ baudios.

Solución:

El período de la señal PAM/TDM es T_M. Para codificar en ASCII sin bit de paridad se necesita 10 dígitos binarios, es decir, n = 10. El codificador debe producir cada T_M segundos una secuencia de 10 dígitos binarios. Sea τ la duración de cada dígito binario ASCII, entonces,

$T_M = n\tau \therefore V_b = \frac{1}{\tau} = \frac{n}{T_m} = \frac{nM}{T_s} = 2nMf_m$ baudios.

Para n = 10, $V_b = 20Mf_m$ baudios

5.30. La señal $m(t) = 10[1+\cos(10^4\pi t)]$ se va a codificar en PCM/NRZ mediante un convertidor analógico-digital de salida paralela, la cual se transforma en serie mediante un registro de desplazamiento, Fig. 5.37(a) del Texto. El error máximo tolerable en la codificación es del 0,1975% del valor máximo de m(t). Suponga que el muestreo se ha efectuado al doble de la frecuencia de Nyquist.

(a) Determine las características del convertidor analógico-digital: $\Delta Q, V_{qmax}$, N y n. Sugerencia: utilice los resultados del Ejemplo 5.9.

Solución:

$m(t) = 10[1+\cos(10^4\pi t)] = 10[1+\cos(2\pi 5x10^3 t)]$; $f_m = 5x10^3$ Hz; codificación unipolar; $|\max m(t)| = 20 = V_{max}$; $|\min m(t)| = 0$; $\frac{\Delta Q}{2} = \frac{0,1975}{100}V_{max}$

$$V_{max} = V_{qmax} + \frac{\Delta Q}{2} = (2N-1)\frac{\Delta Q}{2}; \qquad \frac{\Delta Q}{2} = \frac{0,1975x20}{100} = 0,0395V$$

$$V_{qmax} = V_{max} - \frac{\Delta Q}{2} = 20 - 0,0395 = 19,96V \qquad \Delta Q = 0,079V$$

$$V_{max} = (2N-1)\frac{\Delta Q}{2}. \text{ Resolviendo: } \qquad N = \frac{2V_{max}+\Delta Q}{2\Delta Q} = 253,67$$

Pero N debe ser un número entero y potencia entera de 2, es decir, $N = 2^n$, donde n es también un entero. En el presente caso, se hace N = 256, de donde n = 8. El convertidor analógico-digital (CAD) será de 8 bits.

Veamos la influencia de este cambio, pero vamos a mantener el mismo error máximo, es decir, $\frac{\Delta Q}{2} = 0,0395V$. Entonces,

$$V_{max} = (2N-1)\frac{\Delta Q}{2} = 20,1845V; \qquad V_{qmax} = V_{max} - \frac{\Delta Q}{2} = 20,145V; \quad N = 256; \; n = 8$$

(b) En el registro de desplazamiento se agrega un impulso de arranque (siempre a "CERO") y uno de pare (siempre a "UNO"). El impulso de arranque tiene la misma duración que los impulsos PCM/NRZ, mientras que en el impulso de pare la duración es el doble. En este caso determine la frecuencia de reloj del registro de desplazamiento y el ancho de banda mínimo de la señal transmitida.

Solución:

La salida del registro tendrá la forma mostrada en la Fig. P5.30.

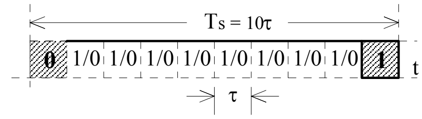


Fig. P5.30.

$$f_s = 20x10^3; \quad T_s = \frac{1}{f_s} = 5x10^{-5}; \quad \tau = \frac{T_s}{10} = 5x10^{-6}$$

τ es el período de la señal de salida del registro; por lo tanto, la frecuencia del registro es

$f_r = \dfrac{1}{\tau} = 200\,\text{kHz}$. Asimismo, el ancho de banda es $B = \dfrac{1}{\tau} = 200\,\text{kHz}$.

5.31. En la Fig. 5.103 del Texto se muestra un sistema TDM básico para cuatro señales. Este multiplexor se puede instrumentar en la práctica con circuitos integrados 4016. Las compuertas analógicas 4016 conducen cuando son activadas en secuencia mediante un contador cíclico, cuya salida ABCD se muestra en la Tabla inserta. Al multiplexor entran las siguientes señales:

$$m_1(t) = A\Lambda(\frac{t-\tau/2}{\tau/2});\; m_2(t) = A\Pi(\frac{t-\tau/2}{\tau});\, m_3(t) = A\left[\Lambda(\frac{t-\tau/4}{\tau/4}) + \Lambda(\frac{t-3\tau/4}{\tau/4})\right]$$

$$m_4(t) = \frac{A}{2}[1+\cos(\frac{2\pi t}{\tau})]\cdot\Pi(\frac{t-\tau/2}{\tau})$$

Suponga que $\tau = 0{,}8\,\text{seg}$ y que la frecuencia de muestreo f_s es de 10 Hz.

(a) Describa el funcionamiento del circuito completo.

Se deja como ejercicio para el lector

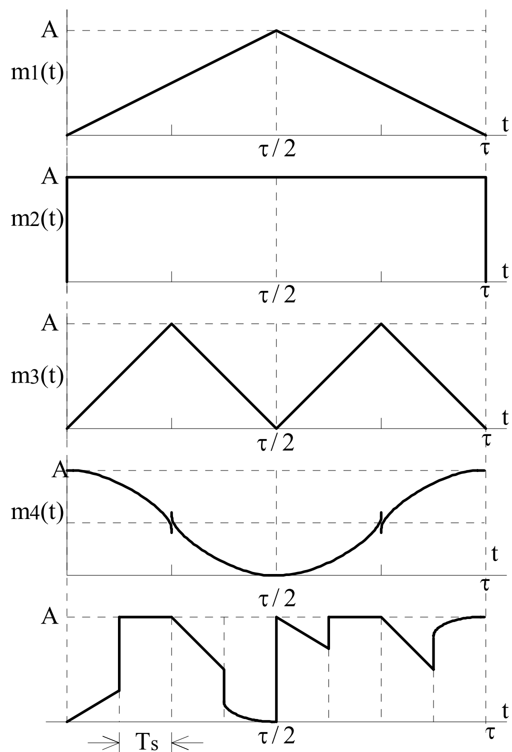
(b) En la Fig. P5.31(a) se muestra el mecanismo de multiplexamiento.

$\tau = 0{,}8 = 800\,\text{ms}; \quad f_s = 10;$

$T_s = 0{,}1 = 100\,\text{ms}; \quad \tau = 8T_s$

(c) De la Fig. P5.31(a) se puede ver que el período de la señal PAM/TDM/NRZ es T_s; el ancho de banda de la señal compuesta será

$$B = \frac{1}{T_s} = f_s = 10\,\text{Hz}$$



Señal Compuesta PAM/TDM/NRZ
Fig. P5.31(a).

(d) PCM Unipolar

$$A = 15V;\; \Delta Q = 1;\; N = 16 = 2^n; \quad n = 4;\; V_{max} = (2N-1)\frac{\Delta Q}{2} = 15{,}5$$

Para codificación PCM tomaremos los valores de la señal PAM/TDM/NRZ en el instante de muestreo y puesto que $\Delta Q = 1$, esos valores se redondearán al valor entero más cercano; entonces, de la Fig. P5.31(a), para

			MSB			LSB
$t = 0$; $m_{PAM}(0) = 0$;	$PAMq = 0$	$PCM \rightarrow$	0	0	0	0
$t = T_s$; $m_{PAM}(T_s) = 15$;	$PAMq = 15$	$PCM \rightarrow$	1	1	1	1
$t = 2T_s$; $m_{PAM}(2T_s) = 7{,}5$;	$PAMq = 8$	$PCM \rightarrow$	1	0	0	0
$t = 3T_s$; $m_{PAM}(3T_s) = 2{,}5$;	$PAMq = 3$	$PCM \rightarrow$	0	0	1	1

En la Fig. P5.31(b) se muestra las primeras cuatro muestras codificadas de la señal PCM. Nótese que el dígito de menos peso (LSB) se coloca a la izquierda y se transmite de primero.

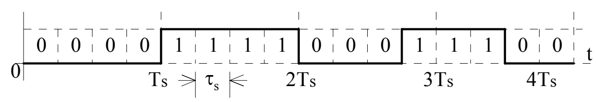


Fig. P5.31(b).

(e) De la Fig. P5.31(b),

$\tau_s = \frac{T_s}{4}$. El ancho de banda de la secuencia PCM/TDM/NRZ será

$$B_{PCM} = \frac{1}{\tau_s} = \frac{4}{T_s} = 4f_s = 40 \text{ Hz}$$

(f) La frecuencia f_{pcm} es la frecuencia de la secuencia PCM a la salida del codificador PCM; por lo tanto,

$$f_{pcm} = 4f_s = 40 \text{ Hz}$$

5.32. Las señales $m_1(t) = 5\cos(10^4 \pi t)$, $m_2(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$; $m_3(t) = 10\text{sinc}^2(10^4 t)$ y $m_4(t) = 20\cos(10^4 \pi t)\cos(2x10^3 \pi t)$, se multiplexan en TDM en la forma mostrada en la Fig. 5.103 del Texto y en el Problema anterior, y a continuación la señal se codifica en PCM, código ASCII sin bit de paridad.

Solución:

La forma de estas señales hace muy difícil dibujar la señal compuesta PAM/TDM/NRZ como se hizo en el problema anterior; para que el lector se de cuenta de lo difícil que sería, en la Fig. P5.32(a) mostramos la forma de estas señales entre $t = 0$ y $t = 5T_s$.

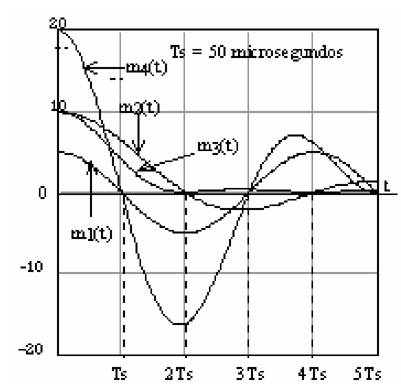


Fig. P5.32(a)

Para la codificación PCM, vamos a tomar el siguiente orden en la multiplexación de la señales: $m_1(0) \to m_2(Ts) \to m_3(2T_s) \to m_4(3T_s) \to m_1(4T_s) \to \cdots\cdots \to m_4(7T_s)$. Son ocho muestras que codificaremos en PCM.

Características de entrada:

Frecuencias:

$f_{m1} = 5x10^3$ Hz; $f_{m2} = 5x10^3$ Hz

$f_{m3} = 10^4$ Hz; $f_{m4} = 6x10^3$ Hz.

La frecuencia de muestreo depende de la frecuencia más alta, en este caso f_{m3}. Entonces, $f_{max} = f_{m3}$; $f_s = 2f_{max} = 20x10^3 = 20\,kHz$

El intervalo de muestreo T_s será entonces

$T_s = 5x10^{-5} = 50$ microsegundos

El lector podrá darse cuenta, observando la Fig. P5.32(a) que para estos intervalos algunas de las señales son casi cero. Como el objetivo del presente problema es de diseñar el método de codificación apropiado, vamos a disminuir T_s a $25\mu seg$, valor que nos dará amplitudes razonables. Entonces, sea $T_s = 25x10^{-6}$ seg.

Parámetros de codificación: Codificación bipolar

$$V_{max} = 20;\; N = 128;\; n = 7;\; \Delta Q = \frac{2V_{max}}{N} = 0{,}3125V;\; \frac{\Delta Q}{2} = 0{,}1563$$

Nótese, de la expresión (5.90), que el valor $x_{qk}(mT_s)$ corresponde a cada nivel k, y que k, en binario, es el valor de la muestra PCM. En nuestro caso vamos hacer $x_{qk}(mT_s) \approx m_i(mT_s)$, determinamos el valor k correspondiente y le asignaremos el correspondiente código. Pero queda el problema de cómo representar el signo; en este caso se toma el bit de mayor peso (MSB) con la siguiente notación:

$$\text{si} \quad \begin{matrix} m_i(mT_s) \ge 0 \to & MSB = "1" \\ m_i(mT_s) < 0 \to & MSB = "0" \end{matrix} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \text{ y } 4$$

y el valor de k se disminuye en uno. El precio que hay que pagar es una pequeña pérdida al codificar los valores máximos de señal, es decir, que para $|\max m(t)| = 20$, el valor de k será 63 y no 64.

Entonces de la expresión (3.90),

$k = \text{entero}\left\{\dfrac{2m_i(mT_s) + \Delta Q}{2\Delta Q}\right\} - 1$. Por ejemplo si k = 28, la codificación será 0011101, y si k = -40, la codificación será 0001010. Como siempre, el dígito de menor peso se coloca a la izquierda y se transmite de primero.

Con estos datos ya podemos establecer la siguiente Tabla de Codificación

TABLA DE CODIFICACION

$T_s = 25x10^{-6}$ seg.

$m_i(mT_s)$	k	Codificación PCM
$m_1(0) = 5$	15	1 1 1 1 0 0 1
$m_2(T_s) = 9{,}003$	28	0 0 1 1 1 0 1
$m_3(2T_s) = 4{,}053$	12	0 0 1 1 0 0 1
$m_4(3T_s) = -12{,}6$	-40	0 0 0 1 0 1 0
$m_1(4T_s) = -5$	-16	0 0 0 0 1 0 0
$m_2(5T_s) = -1{,}801$	-6	0 1 1 0 0 0 0
$m_3(6T_s) = 0{,}5$	0	0 0 0 0 0 0 1
$m_4(7T_s) = 6{,}42$	20	0 0 1 0 1 0 1

En la Fig. P5.32(b) se ilustra esta codificación PCM en ASCII para las cuatro primeras muestras. Los dígitos de arranque y pare se remarcan para diferenciarlos de los siete dígitos de información

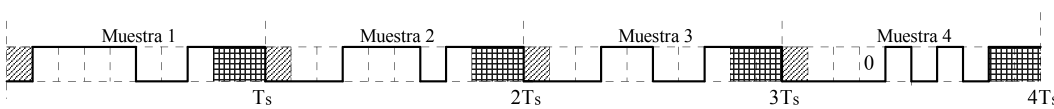


Fig. P5.32(b)

(a) De la secuencia PCM, el ancho de banda de dicha secuencia es

$$B = \frac{10}{T_s} = \frac{10}{25x10^{-6}} = 4x10^5 = 400\,\text{kHz}.$$

La frecuencia f_{pcm} del codificador es también de 400 kHz.

(b) En un minuto se puede transmitir un número N_c de caracteres ASCII dado por

$$N_c = \frac{60}{T_s} = \frac{60}{25x10^{-6}} = 2{,}4x10^6 \text{ caracteres.}$$

Como cada caracter contiene $I_c = 7$ bits de información, la información neta total transmitida en un minuto será $I_t = N_c I_c = 16{,}8x10^6$ bits.

Nótese que este valor es diferente al dado en el Texto; pero eso es debido a que se cambiaron los datos del problema.

(c) El diseño de un sistema de recepción para la recuperación de las cuatro señales lo dejamos a la ingeniosidad del lector.

5.33. En un sistema de telemetría PAM/TDM se multiplexan cuatro señales pasabajo $m_1(t),\ m_2(t),\ m_3(t)$ y $m_4(t)$. Las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ tienen un ancho de banda de 80 Hz, mientras que las señales $m_3(t)$ y $m_4(t)$ tienen un ancho de banda de 1 kHz. La frecuencia de muestreo para $m_3(t)$ y $m_4(t)$ es de 2400 Hz. Suponga que las otras frecuencias de muestreo se pueden obtener mediante división por potencias enteras de 2 a partir de 2400 Hz.

Diseñe un sistema PAM/TDM que efectúe un multiplexaje preliminar de $m_1(t)$ y $m_2(t)$ en una señal compuesta $m_{12}(t)$, y un multiplexaje final de $m_{12}(t),\ m_3(t)$ y $m_4(t)$.

Solución:
Una configuración de este sistema tiene la forma, Fig. P5.33,

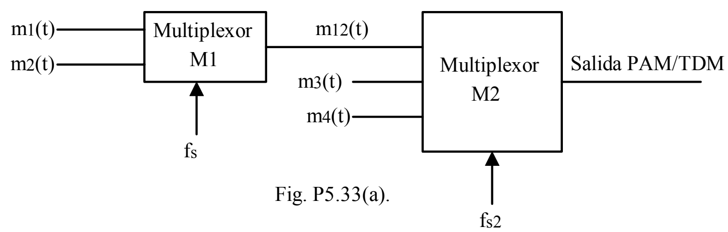


Fig. P5.33(a).

(a) Frecuencias:

$m_1(t)$ y $m_2(t) \to f_{m1} = 80\,\text{Hz}$; $f_{s1} = 2f_{m1} = 160\,\text{Hz}$. Pero como solamente disponemos de frecuencias derivadas de un reloj de 2400 Hz, la frecuencia disponible más cercana es de 300 Hz, porque si seleccionamos la frecuencia de 150 Hz, las señales estarían submuestreadas y poseerían componentes de distorsión, como ya lo hemos comprobado repetidas veces. Entonces, la frecuencia de muestreo del Multiplexor M1 será $f_{s1} = 300$ Hz, de donde $T_{s1} = 3{,}333\,\text{ms}$

$m_3(t)$ y $m_4(t) \to f_{m2} = 1000\,\text{Hz}$; pero su frecuencia de muestreo es $f_{s2} = 2400\,\text{Hz}$, de donde $T_{s2} = 0{,}4167\,\text{ms}$.

(b) La señal $m_{12}(t)$ cuya frecuencia de muestreo es de 300 Hz, en el Multiplexor 2 volverá a ser muestreada pero esta vez a 2400 Hz, es decir, cada T_{s2} seg. Esto quiere decir que en el tiempo T_{s1} se puede muestrear hasta $M = \dfrac{T_{s1}}{T_{s2}} = 8$ señales y el Multiplexor 1 puede muestrear hasta 8 señales de 80 Hz. Esta situación se muestra en la Fig. P5.33(b). En la parte (a) se muestra la salida del Multiplexor 1, y en la parte (b) la relación entre las salidas del Multiplexor 1 y el Multiplexor 2.

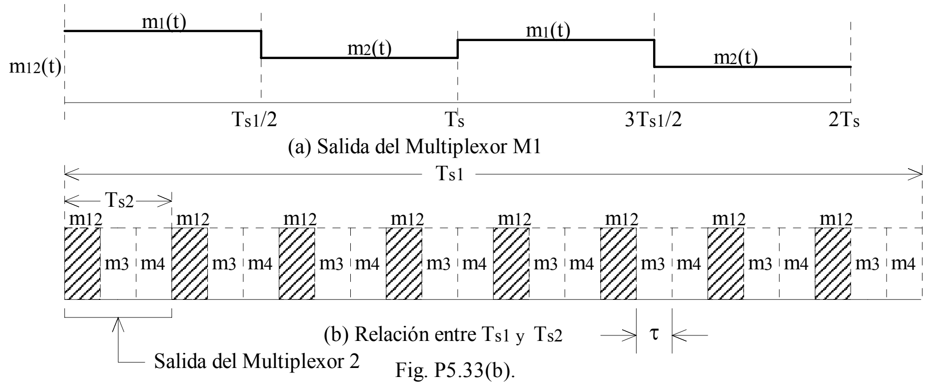


Fig. P5.33(b).

Nótese que en el tiempo T_{s1} caben 8 salidas del Multiplexor 2, lo que quiere decir que en el Multiplexor 1 se pueden agregar 6 señales más de 80 Hz sin necesidad de cambiar las frecuencias de muestreo.

(c) El ancho de banda de la señal resultante PAM/TDM/NRZ se puede deducir de la Fig. P5.33(b).

Sea $\tau = \dfrac{T_{s2}}{3} \therefore B = \dfrac{1}{\tau} = 3f_{s2} = 7200 \text{ Hz}.$

Este ancho de banda es independiente de que se esté muestreando 2 u 8 señales de 80 Hz.

5.34. Se desea construir una red lineal que convierta impulsos rectangulares en impulsos coseno elevado, es decir, una red donde la entrada sea $x(t) = A\Pi[\frac{t}{\tau}]$ y la salida tenga la forma $y(t) = \dfrac{A}{2}\left[1 + \cos(\dfrac{2\pi t}{\tau})\right] \cdot \Pi(\dfrac{t}{\tau})$. Vamos a determinar la función de transferencia de esta red.

Solución:

$$X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f); \quad y(t) = \frac{A}{2}\Pi(\frac{t}{\tau}) + \frac{A}{2}\Pi(\frac{t}{\tau})\cos(2\pi\frac{1}{\tau}t); \quad \frac{A}{2}\Pi(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \frac{A\tau}{2}\text{sinc}(\tau f)$$

$$Y(f) = \frac{A\tau}{2}\text{sinc}(\tau f) + \frac{A\tau}{4}\text{sinc}[\tau(f + \frac{1}{\tau})] + \frac{A\tau}{4}\sin[\tau(f - \frac{1}{\tau})]$$

$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$, de donde

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\frac{A\tau}{2}\text{sinc}(\tau f) + \frac{A\tau}{4}\text{sinc}[\tau(f + \frac{1}{\tau})] + \frac{A\tau}{4}\text{sinc}[\tau(f - \frac{1}{\tau})]}{A\tau \text{sinc}(\tau f)}$$

Esta expresión se reduce a (¡Oh, milagros de MATHCAD!)

$$H(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\tau^2 f^2} \quad \text{para } |f| < \frac{1}{\tau}$$

5.35. La señal de entrada a un filtro acoplado tiene la forma mostrada en la Fig. 5.104 del Texto. El ruido de entrada tiene una densidad espectral de potencia $S_n(f)$.

(a) Determinar la función de transferencia del filtro acoplado.

Solución:

De la expresión (5.139) del Texto, con $t_o = T$, $H(f) = \dfrac{kV(-f)\exp(-j2\pi Tf)}{S_n(f)}$

De la Fig. 5.104 del Texto, $v(t) = -\dfrac{A}{T}(t-T)\Pi(\dfrac{t-T/2}{T})$

$V(f) = -\dfrac{A}{T}\int_0^T (t-T)\exp(-j2\pi ft)dt$. Resolviendo esta integral, obtenemos

$$V(f) = \frac{A}{(2\pi f)^2 T}\left[1 - j2\pi Tf - \exp(-j2\pi Tf)\right]$$

$$V(-f) = \frac{A}{(2\pi f)^2 T}\left[1 + j2\pi Tf - \exp(j2\pi Tf)\right]$$

$$H(f) = \frac{kA}{T(2\pi f)^2 S_n(f)}\left[\exp(-j2\pi Tf) + j2\pi Tf\exp(-j2\pi Tf) - 1\right]$$

$$H(f) = \frac{kA}{S_n(f)}\frac{1}{4T\pi^2 f^2}\left[(1 + j2\pi Tf)\exp(-j2\pi Tf) - 1\right]$$

(b) $A = 10;\ T = 1;\ S_n(f) = \dfrac{\eta}{2};\ k = \dfrac{\eta}{2}$

$$V(f) = \frac{10}{(2\pi f)^2}\left[1 - j2\pi f - \exp(-j2\pi f)\right]$$

De la expresión (5.135) del Texto, el valor máximo de la relación S/N es

$\rho_{max} = \int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{|V(f)|^2}{S_n(f)}df = \dfrac{2}{10^{-6}}\int_{-\infty}^{\infty}|V(f)|^2 df$; y por el Teorema de Raleigh,

$$\rho_{max} = \frac{2}{10^{-6}}\int_0^T \frac{A^2}{T^2}(t-T)^2 dt = 6{,}6666\text{x}10^7 = 78{,}239\,\text{dB}$$

5.36. El impulso coseno elevado de la Fig. 5.105 del Texto, se aplica a un filtro acoplado. El ruido de entrada es blanco de densidad espectral $\frac{\eta}{2}$ y $k = \frac{\eta}{2}$.

(a) Determine la función de transferencia del filtro acoplado.

Solución:

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2}; \quad k = \frac{\eta}{2}; \qquad v(t) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos[\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2})]\right] \cdot \Pi(\frac{t - T/2}{T})$$

$$V(f) = \frac{A}{2}\int_0^T \left\{1 + \cos[\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2})]\right\}\exp(-j2\pi ft)dt$$. Resolviendo esta integral, obtenemos

$$V(f) = j\frac{A}{4\pi}\frac{\exp(-j2\pi Tf) - 1}{f(1 - T^2f^2)}; \qquad V(-f) = j\frac{A}{4\pi}\frac{\exp(j2\pi Tf) - 1}{f(T^2f^2 - 1)}$$

$$H(f) = V(-f)\exp(-j2\pi Tf) = j\frac{A}{4\pi}\frac{1 - \exp(-j2\pi Tf)}{f(T^2f^2 - 1)}$$

$$H(f) = j\frac{A}{4\pi}\frac{\exp(-j2\pi Tf)\left[\exp(j\pi Tf) - \exp(-j\pi Tf)\right]}{f(T^2f^2 - 1)} = \frac{A}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi Tf)}{f(1 - T^2f^2)}\exp(-j\pi Tf)$$

$H(f) = H_1(f)\exp(-j\pi Tf)$, donde $\quad H_1(f) = \frac{A}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi Tf)}{f(1 - T^2f^2)}$

(b) $A = 10; \ T = 1; \ \eta = 10^{-6}$ W/Hz; $S_n(f) = \frac{\eta}{2} = 0{,}5\text{x}10^{-6}$ W/Hz

$$v(t) = 5[1 + \cos[2\pi(t - \frac{1}{2})]] \cdot \Pi(t - \frac{1}{2})$$

$$\rho_{max} = \frac{2}{10^{-6}}\int_{-\infty}^{\infty}|v(t)|^2 dt = \frac{2}{10^{-6}}\int_0^1 25\left[1 + \cos[2\pi(t - \frac{1}{2})]\right]^2 dt$$

$$\rho_{max} = 7{,}5\text{x}10^7 = 78{,}751\,\text{dB}$$

5.37. Vamos a comparar el comportamiento entre un filtro pasabajo RC y un filtro acoplado. La señal de entrada es un impulso de la forma $v(t) = A\Pi(\frac{t - T/2}{T})$, el ruido es blanco de densidad espectral $\frac{\eta}{2}$ y $k = \frac{\eta}{2}$.

Para el filtro RC

(a) Determinar la señal de salida $v_o(t)$.

Solución:

Para el filtro RC, del Problema 2.22, Fig. 2.67(a)

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})u(t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f}$$

$$v(t) = A\Pi(\frac{t - T/2}{T}) \Leftrightarrow V(f) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(-j\pi Tf)$$

$$V_o(f) = H(f)V(f) \Leftrightarrow v_o(t) = h(t) * v(t)$$

$$v_o(t) = \frac{A}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{t-\tau}{RC})u(t-\tau)\Pi(\frac{\tau - T/2}{T})d\tau$$

pero $\Pi(\frac{\tau - T/2}{T}) = u(\tau) - u(\tau - T)$

$$v_o(t) = \frac{A}{RC}\int_{\infty}^{\infty}\exp(-\frac{t}{RC})\exp(\frac{\tau}{RC})u(t-\tau)[u(\tau) - u(\tau - T)]d\tau$$

$$v_o(t) = \frac{A\exp(-\frac{t}{RC})}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\frac{\tau}{RC})u(t-\tau)u(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{A\exp(-\frac{t}{RC})}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\frac{\tau}{RC})u(t-\tau)u(\tau - T)d\tau$$

pero $u(t-\tau)u(\tau) = 1$ para $0 \le t \le T$ y $0 < \tau$

$u(t-\tau)u(\tau - T) = 1$ para $T < t$ y $T < \tau$

Sea $v_o(t) = v_{o1}(t) + v_{o2}(t)$, donde

$$v_{o1}(t) = \frac{A\exp(-\frac{t}{RC})}{RC}\left\{\int_0^t \exp(\frac{\tau}{RC})d\tau\right\}\Pi(\frac{t - T/2}{T})$$

$$v_{o2}(t) = -\frac{A\exp(-\frac{t}{RC})}{RC}\left\{\int_T^t \exp(\frac{\tau}{RC})d\tau\right\}u(t-T)$$

Resolviendo las integrales y rearreglando, obtenemos finalmente,

$$v_{o1}(t) = A[1 - \exp(-\frac{t}{RC})]\Pi(\frac{t - T/2}{T}) \quad \text{y} \quad v_{o2}(t) = A[\exp(-\frac{t-T}{RC}) - 1]u(t-T)$$

de donde, $v_o(t) = A[1 - \exp(-\frac{t}{RC})]\Pi(\frac{t - T/2}{T}) + [\exp(-\frac{t-T}{RC}) - 1]u(t-T)$

En la Fig. P5.37(a) se muestra esta señal para $T = 0{,}1$ seg y $RC = 0{,}5$

(b) Determinar la potencia de ruido.

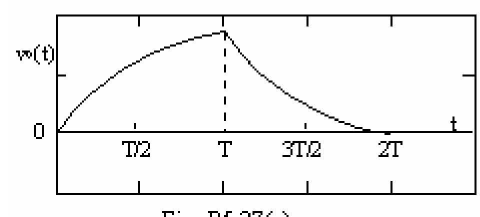


Fig. P5.37(a)

$$< n_o^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df$$

$$< n_o^2(t) >= \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

o también, mediante el Teorema de Raleigh,

$$< n_o^2(t) >= \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2}\frac{1}{(RC)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{2t}{RC})u(t)dt = \frac{\eta}{2(RC)^2}\int_{0}^{\infty} \exp(-\frac{2t}{RC})dt$$

$$< n_o^2(t) >= \frac{\eta}{4RC}$$

(c) $T = 1; \quad A = 10; \quad RC = 10; \quad \eta = 10^{-6}$

$$v_o^2(t) = A^2[1 - \exp(-\frac{T}{RC})] = 0{,}9056; \quad < n_o^2(t) >= \frac{\eta}{4RC} = 2{,}5x10^{-8}$$

$$z_{max} = \frac{|v_o(T)|^2}{< n_o^2(t) >} = \frac{0{,}9056}{2{,}5x10^{-8}} = 3{,}622x10^7 = 75.59\,\text{dB}$$

Para el filtro acoplado

$$V(f) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(-j\pi Tf); \qquad V(\text{-}f) = AT\text{sinc}(TF)\exp(j\pi Tf)$$

$$H(f) = V(-f)\exp(-j2\pi Tf) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(j\pi Tf)\exp(-j2\pi Tf)$$

$$H(f) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(-j\pi Tf)$$

Aunque no se pide en el problema, sería interesante ver la forma de la señal de salida del filtro acoplado cuando se le aplica el impulso rectangular $v(t) = A\Pi(\frac{t - T/2}{T})$.

Entonces, para el filtro acoplado,

$$H(f) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(-j\pi Tf); \qquad V(f) = AT\text{sinc}(Tf)\exp(\text{-}j\pi Tf)$$

$$V_o(f) = H(f)V(f) = A^2T^2\text{sinc}^2(TF)\exp(-j2\pi Tf)$$

$$v_o(t) = \frac{A^2}{T}\Lambda(\frac{t - T}{T})$$

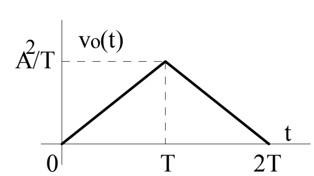


Fig.P5.37(b)

Obsérvese la forma de la salida, Fig. P5.37(b), que no se parece en nada a la entrada; pero lo importante es que el valor máximo de la salida ocurre para t = T con un valor igual a la energía de la señal de entrada y la probabilidad de detección se ha optimizado. Esta es la importancia de los filtros óptimos, sobre todo en la detección de señales digitales, donde lo que se quiere detectar no es una "forma" sino una "presencia" (impulso presente o impulso ausente).

(d) Determinar ρ_{max} para el filtro acoplado.

$$\rho_{max} = \frac{2}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|v(t)|^2 dt = \frac{2A^2}{\eta}\int_0^T dt = \frac{2A^2}{\eta}T = 2x10^8 = 83{,}01\,dB$$

Nótese la ventaja del filtro acoplado sobre el filtro RC: en las mismas condiciones su relación S/N máxima de salida es 7,41 dB superior.

5.38. Sobre un canal telefónico de 3 kHz de ancho de banda se transmite datos binarios. La relación S/N máxima en el canal es de 6,0206 dB. Se considera ASK Coherente.

Nota de advertencia al lector.

Antes de la aparición de programas matemáticos mediante computadoras, el cálculo de erfc(x) se efectuaba mediante una serie de potencias y tomando un número de términos que uno consideraba suficiente; ese fue el método que utilizamos originalmente. Pero ahora que disponemos de programas potentes como MATHCAD, MATLAB, MATEMATICA y otros, la exactitud y rapidez en el cálculo es muchísimas veces superior.

En este Problemario estaremos utilizando el programa MATHCAD en el cual la Función Error erf(x) y la Función Error Complementaria erfc(x) se definen en la forma

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-z^2)dz;\quad erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} \exp(-z^2)dz;\quad erf(x) + erfc(x) = 1$$

como se puede ver en el Apéndice D del Texto. En consecuencia, el cálculo de erf(x) y erfc(x) será mucho más exacto y puede haber diferencias con los valores dados en el Texto en el cálculo de erf(x) y erfc(x).

(a) Determine la velocidad de información máxima en el canal y la probabilidad de error.

Solución:

$$B = 3\,kHz;\quad \frac{S}{N} = 6{,}0206\,dB = 4.\ \text{ ASK Coherente.}$$

$$B = 2f_b;\ f_b = 1500\,Hz;\ T_b = \frac{1}{1500};\quad V_i = 1500\,bps;\ V_b = 1500\,baudios$$

$$\frac{S_i}{N_i} = 4.\quad \text{De la expresión (5.159a) del Texto,}\quad \gamma = 4\frac{S_i}{N_i} = 16$$

En ASK Coherente, $P_e = \frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}) = \frac{1}{2}erfc(2) = 2{,}339x10^{-3}$

Si se considera ASK No Coherente, $P_e = \frac{1}{2}\exp(-\frac{\gamma}{4}) = 9{,}158\text{x}10^{-3}$

(b) Si $V_i = 300\text{ bps}, \quad V_b = 300\text{ baudios}$; $f_b = 300$ Hz

$16 = \frac{A^2}{2\eta f_b} \therefore \frac{A^2}{2\eta} = 16f_b = 2{,}4\text{x}10^4$. Entonces, para $f_b = 300$ Hz,

$$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} = \frac{2{,}4\text{x}10^4}{300} = 80 \quad ; \quad P_e = \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\frac{80}{4}}) = 1{,}0306\text{x}10^{-10}$$

5.39. Se transmite datos binarios por un canal de RF. El ancho de banda útil del canal es de 10 MHz. La velocidad de información es de 4,8 Mbps y se utiliza modulación ASK. La amplitud de la portadora en la antena del receptor es de 1 mV y la densidad espectral de potencia del ruido es de 10^{-15} W/Hz.

(a) Determine las probabilidades de error en Coherente y No Coherente.

Solución:

(a) En ASK: $\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} = \frac{10^{-6}}{2\text{x}2\text{x}10^{-15}\text{x}4{,}8\text{x}10^6} = 52{,}083333$

ASK Coherente: $Pe = \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}) = 1{,}671\text{x}10^{-7}$

ASK No Coherente: $Pe = \frac{1}{2}\exp(-\frac{\gamma}{4}) = 1{,}1068\text{x}10^{-6}$

(b) La relación S/N en la antena o a la entrada del receptor es

$$[Si/Ni]_{ASK} = \frac{A^2}{4\eta B} = \frac{10^{-6}}{4\text{x}2\text{x}10^{-15}\text{x}10\text{x}10^6} = 12{,}5 = 10{,}969 \text{ dB}.$$

5.40. En la expresión (5.147) y Fig. 5.62 del Texto, se da la densidad espectral de potencia de una señal ASK para una secuencia binaria unipolar NRZ.

(a) Demuestre que la potencia contenida dentro del ancho de banda $B = 2f_b$, centrado en f_c, es el 95% de la potencia total de la señal ASK.

Solución:

Como se trata de calcular potencias (áreas positivas), la potencia contenida en el ancho de banda $B = 2f_b$ se puede calcular refiriendo $S_{ASK}(f)$ al origen, es decir,

$$< y^2(t) >= 2\left[\int_{-f_b}^{f_b} \frac{A^2}{16}\delta(f)df + \frac{A^2}{16f_b}\int_{-f_b}^{f_b} \text{sinc}^2(\frac{f}{f_b})df\right]$$

$$< y^2(t) >= \frac{A^2}{8} + \frac{A^2}{4f_b}\int_0^{f_b} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi f / f_b)}{(\pi f / f_b)^2} df = \frac{A^2}{8} + \frac{A^2}{4}\frac{1{,}418}{\pi}$$

Entonces $< y^2(t) >= \frac{A^2}{8} + \frac{A^2}{4} 0{,}451 = \frac{A^2}{4}(\frac{1}{2} + 0{,}451) = 0{,}951\frac{A^2}{4}$

Puesto que $< x_{ASK}^2(t) >= \frac{A^2}{4}$, se verifica entonces que

$< y^2(t) >= 0{,}951 < x_{ASK}^2(t) >$.

La potencia contenida en el ancho de banda B = $2f_b$ es igual al 95,1% de la potencia total de la señal ASK.

(b) Nótese que la potencia de portadora está representada por los impulsos en $\pm f_c$. Esta potencia Pcc es, del cálculo anterior (parte (a)),

$$Pcc = \frac{A^2}{8} = (\frac{1}{2})\frac{A^2}{4} = \frac{1}{2} < x_{ASK}^2(t) > \ .$$

Puede observarse que la mitad de la potencia total de la señal ASK se consume en la transmisión de la portadora.

5.41. Sobre un canal se transmite datos binarios en FSK. El ancho de banda útil del canal es de 3 kHz. Las frecuencias de transmisión son: $f_1 = 1500\,\text{Hz}$ y $f_o = 2100\,\text{Hz}$. Se utiliza un módem que trabaja a una velocidad de modulación de 300 baudios. La relación S/N en el canal es de 6,0206 dB = 4.

Determine todas las características del sistema.

Solución:

La distribución de las frecuencias y de los anchos de banda se muestra en la Fig. P5.41. Entonces,

$$f_c = \frac{f_1 + f_o}{2} = 1800\,\text{Hz}$$

$$f_d = 2100 - 1800 = 300\,\text{Hz}$$

$$B_c = 2(f_d + f_b) = 1200\,\text{Hz}$$

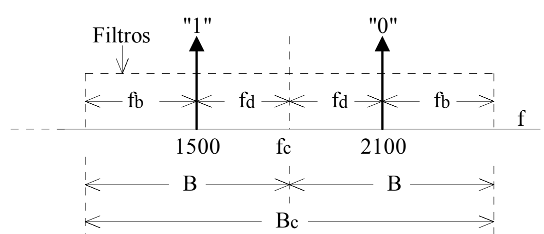


Fig. P5.41.

Como el ancho de banda del canal es de 3 kHz, hay ancho de banda de sobra, aún para agregar otro canal de transmisión, como es lo normal en los Módems UIT-T V.21 y Bell 102/113.

En FSK $\gamma = 2\frac{S_i}{N} = 8$

FSK Coherente: $P_e = \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\frac{8}{2}}) = 2{,}339\text{x}10^{-3}$

FSK No Coherente: $P_e = \frac{1}{2}\exp(-\frac{8}{2}) = 9{,}158\text{x}10^{-3}$

5.42. El Módem Bell 102/113 transmite a 300 bps, igual que el Módem UIT-T V.21, pero sus frecuencias de operación son: en la banda inferior, $f_1 = 1070\,\text{Hz}$ y $f_o = 1270\,\text{Hz}$; y en la banda superior, $f_1 = 2025\,\text{Hz}$ y $f_o = 2225\,\text{Hz}$. La amplitud de la portadora es 0,5 mV y la densidad espectral de ruido en el sistema es de 10^{-11}W/Hz.

Repetir para este Modem Bell los cálculos efectuados en el Ejemplo 5.18, parte (b), del Texto.

Solución:

$f_b = 300\,\text{Hz};\; A = 0{,}5\text{X}10^{-3};\; \eta = 2\text{x}10^{-11}\,\text{W/Hz}$

$2f_d = 200 \therefore f_d = 100\,\text{Hz};\; f_c = \frac{1270 + 2025}{2} = 1648\,\text{Hz}$

Con estos datos se construye la Fig. P5.42, de la cual obtenemos:

Filtros de Canal: $B_{I1} = B_{I0} = B_{S1} = B_{S0} = f_b + f_d = 400\,\text{Hz}$

Filtros de Banda: $B_{BI} = B_{BS} = f_b + 2f_d + 378 = 878\,\text{Hz}$

Filtro de Línea: $B_c = B_{BI} + B_{BS} = 1756\,\text{Hz}$

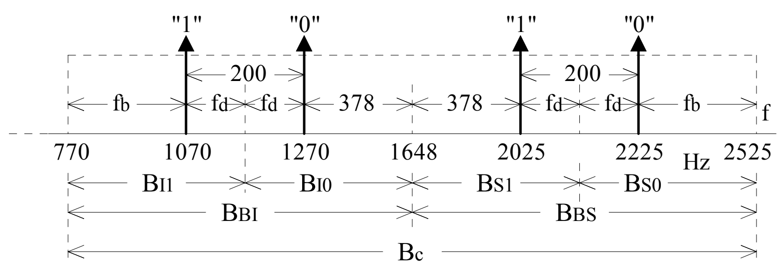


Fig. P5.42.

$A = \frac{10^{-3}}{2};\quad \eta = 2\text{x}10^{11}\,\text{W/Hz};\; f_b = 300$

$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} = 20{,}833;\; S_i = \frac{A^2}{2} = 1{,}25\text{x}10^{-7};\; N_i = B_{I1}\eta = 8\text{x}10^{-9}$

$\frac{S_i}{N_i} = 15{,}125 = 11{,}938\,\text{dB}$; FSK Coherente: $P_e = 2{,}5\text{x}10^{-6}$

FSK No Coherente: $P_e = 1{,}496\text{x}10^{-5}$

5.43. Sea los sistemas ASK, FSK y PSK, de amplitud de portadora A y frecuencia de señalización f_b. La potencia en los tres sistemas es la misma.

(a) Demuestre que para una misma probabilidad de error P_e y en demodulación coherente

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{ASK} = \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{FSK} = 2\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{PSK}$$

Solución:

(a) En Demodulación Coherente:

ASK: $\quad Pe = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}); \qquad \gamma = 4\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{ASK}$

FSK: $\quad Pe = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}); \qquad \gamma = 2\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{FSK}$

PSK: $\quad Pe = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}); \qquad \gamma = 2\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{PSK}$

Si las probabilidades de error P_e son iguales, entonces los argumentos de P_e son iguales, es decir,

$$\sqrt{\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{ASK}} = \sqrt{\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{FSK}} = \sqrt{2\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{PSK}}, \text{ de donde } \left[\frac{Si}{Ni}\right]_{ASK} = \left[\frac{Si}{Ni}\right]_{FSK} = 2\left[\frac{Si}{Ni}\right]_{PSK}$$

(b) $f_b = 1200$ Hz; $\eta = 2x10^{-10}$ W/Hz; [Si/Ni] = 10 dB = 10

ASK: $\quad \gamma = 4[Si/Ni] = \frac{A^2}{2\eta f_b}$. De aquí: $\quad A = \sqrt{8\eta f_b[Si/Ni]} = 4{,}382\text{ mV}$

FSK: $\quad \gamma = 2[Si/Ni]$. De donde $\quad A = \sqrt{4\eta f_b[Si/Ni]} = 3{,}098\text{ mV}$

PSK: Igual que en FSK: $\quad A = 3{,}098$ mV

En cuanto a las probabilidades de error P_e,

En ASK: $\quad \gamma = 4\frac{S_i}{N_i} = 4x10 = 40; \quad P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{4}}) = 3{,}872x10^{-6}$

En FSK: $\quad \gamma = 2\frac{S_i}{N_i} = 2x10 = 20; \quad P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}) = 3{,}872x10^{-6}$

En PSK: $\quad \gamma = 2\frac{S_i}{N_i} = 2x10 = 20; \quad P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) = 1{,}27x10^{-10}$

5.44. Un canal tiene un ancho de banda útil de 3 kHz. La potencia promedio máxima permitida es de –30 dBm y en el canal la densidad espectral es de $2x10^{-11}$ W/Hz.

(a) Determine la capacidad teórica del canal

Solución:

B_c = 3000 Hz; S_i = -30 dBm; $\eta = 2x2x10^{-11}$ W/Hz

S_i = -30 dBm = 10^{-6} W; $N_i = \eta B_c = 3000x4x10^{-11} = 12x10^{-8}$ W = -39,208 dBm

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{10^{-6}}{12x10^{-8}} = 8{,}333 = 9{,}208\,\text{dB}$$

$$C = 3000\log_2(1+\frac{S_i}{N_i}) = 9667 \text{ bps}$$

(b) Determine las velocidades de información máximas en FSK y PSK

Solución:

$f_b = B_c/2$ = 1500 Hz; por lo tanto, en binario, tanto en FSK como en PSK,

Vi = 1500 bps

(c) $\gamma = 2\left[\frac{Si}{Ni}\right] = 2x8{,}333 = 16{,}667$

FSK: $Pe = \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}) = 2{,}228x10^{-5}$; PSK: $Pe = \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\gamma}) = 3{,}882x10^{-9}$

5.45. Se dispone de un canal cuya respuesta de frecuencia se muestra en la Fig. 5.106 del Texto, y por el cual se va a transmitir información binaria a 300 baudios en FSK. La relación S/N en el canal es igual a 3,0103 dB y la densidad espectral de potencia del ruido es de $2x10^{-10}$ W/Hz.

(a) Determine los valores apropiados de la frecuencia de portadora y de las frecuencias f_o y f_1.

Solución:

V_b = 300 baudios. De donde f_b = 300 Hz;

B_c = 2800 – 800 = 2 kHz;

$$\frac{S_i}{N_i} = 3{,}0103\,\text{dB} = 2$$

$\eta = 4x10^{-10}$ W/Hz.

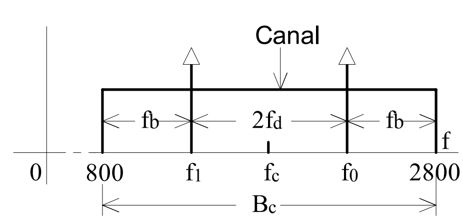


Fig. P5.45.

Sea la Fig P5.45:

f_c = (2800+800)/2 = 1800 Hz

De la ecuación (5.163) del TEXTO ,

$B_c = 2(f_b + f_d)$; de donde $f_d = B_c/2 - f_b$; $f_d = 1000 - 300 = 700$ Hz

$f_1 = f_c - f_d = 1800 - 700 = 1100$ Hz; $f_0 = f_c + f_d = 1800+700 = 2500$ Hz

(b) $\gamma = 2[S_i/N_i] = 4 = \dfrac{A^2}{2\eta f_b}$; $A = \sqrt{8\eta f_b} = 9{,}798\text{x}10^{-4}$ V

(c) FSK Coherente: $Pe = \dfrac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\dfrac{\gamma}{2}}) = 2{,}275\text{x}10^{-2}$

FSK No Coherente: $Pe = \dfrac{1}{2}\exp(-\dfrac{\gamma}{2}) = 6{,}767\text{x}10^{-2}$

(d) De la ecuación de Hartley-Shannon,

$C = 2000\log_2(1+2) = 3170\,\text{bps}$

5.46. Al codificador diferencial de la Fig. 5.73 del Texto, se le aplica una secuencia binaria de la forma 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0.

Determine la secuencia de salida (mensaje codificado) del codificador y las fases de la señal DPSK. Suponga que el primer dígito es un “0” y que la fase correspondiente es 0^o.

Solución:

Se hace un cuadro como el mostrado en la Fig. P5.46. $C = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

Secuencia Binaria de Entrada		1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
Mensaje Codificado Diferencial	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
Fase Transmitida ϕ_n	0^o	0^o	0^o	π	π	0^o	π	0^o	0^o	0^o	π

Fig. P5.46.

5.47. En la Fig. 5.107 del Texto se muestra otra forma de codificador diferencial.

(a) Utilizando los mismos datos del Problema anterior, construya una tabla de valores como la mostrada en la Fig. 5.75 del Texto.

Solución:

Se hace un Cuadro como el de la Fig. P5.47(a). $C = A\,\overline{B} + \overline{A}\,B$

Secuencia Binaria de Entrada		1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
Mensaje Codificado Diferencial	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
Fase Transmitida ϕ_n	0^o	π	0^o	0^o	π	π	π	π	0^o	π	π

Fig. P5.47(a).

(b) Repetir la parte (a) si el primer dígito es un “1” y la fase es 0^o.

Siguiendo el mismo procedimiento, se hace un Cuadro como el de la Fig. P5.47(b).

Secuencia Binaria de Entrada		1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
Mensaje Codificado Diferencial	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Fase Transmitida ϕ_n	0^o	π	0^o	0^o	π	π	π	π	0^o	π	π

Fig. P5.47(b).

5.48. En la Fig. 5.108 del Texto se muestra el diagrama de bloques de un receptor PSK binario. No se muestra el sincronizador de temporización.

Suponga que $x_{PSK}(t) = A\cos(2\pi f_c t - \phi_i)$, donde

$$\left.\begin{array}{l} \phi_i = 0^o \text{ si se ha transmitido un "1"} \\ \phi_i = \pi \text{ si se ha transmitido un "0"} \end{array}\right\} \text{ en un intervalo } T_b \text{ dado}$$

(a) Determine el voltaje $v_d(t)$ de entrada al comparador en un intervalo T_b dado.

(b) Establezca para el comparador un algoritmo de decisión apropiado.

Solución:

(a) La señal $x_{PSK}(t)$ pasa directamente a través del filtro pasabanda de entrada. Entonces, a la salida del elevador al cuadrado se tiene

$$v_1(t) = x_{PSK}^2(t) = A^2\cos^2(\omega_c t - \phi_i) = \frac{A^2}{2}\left[1 + \cos(2\omega_c t - 2\phi_i)\right]$$

El filtro pasabanda rechaza el término en continua y deja pasar solamente la señal centrada en $2f_c$, de donde

$v_2(t) = \frac{A^2}{2}\cos(2\omega_c t - 2\phi_i)$. La operación de división de frecuencia solamente afecta al término $2\omega_c t$ y nó al término de fase. Esto se puede demostrar a partir del siguiente desarrollo:

$$v_2(t) = \frac{A^2}{2}\cos(2\phi_i)\cos(2\omega_c t) + \frac{A^2}{2}\operatorname{sen}(2\phi_i)\operatorname{sen}(2\omega_c t)$$

Los términos $\cos(2\phi_i)$ y $\operatorname{sen}(2\phi_i)$ son constantes (en un intervalo T_b) y no son afectados por la operación de división de frecuencia. Entonces, a la salida del divisor de frecuencia se tiene:

$v_3(t) = \frac{A^2}{2}\cos(2\phi_i)\cos(\omega_c t) + \frac{A^2}{2}\operatorname{sen}(2\phi_i)\operatorname{sen}(\omega_c t)$, que en forma polar es

$$v_3(t) = \frac{A^2}{2}\sqrt{\cos^2(2\phi_i) + \operatorname{sen}^2(2\phi_i)}\cos\left[\omega_c t - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}(2\phi_i)}{\cos(2\phi_i)}\right]$$

pero $\sqrt{\cos^2(2\phi_i) + \operatorname{sen}^2(2\phi_i)} = 1$ y $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}(2\phi_i)}{\cos(2\phi_i)} = 2\phi_i$; entonces,

$v_3(t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_c t - 2\phi_i)$. También, $v_4(t) = A\cos(\omega_c t - \phi_i)\frac{A^2}{2}\cos(\omega_c t - 2\phi_i)$

$v_4(t) = \frac{A^3}{4}\cos(2\omega_c t - 3\phi_i) + \frac{A^3}{4}\cos(\phi_i)$. El filtro pasabajo elimina la componente en $2f_c$ y la tensión de entrada al comparador en un intervalo T_b dado es entonces $v_d(t) = \frac{A^3}{4}\cos(\phi_i)$.

(b) Algoritmo de decisión del comparador.

Puesto que en un intervalo T_b dado

$\phi_i = 0$ cuando se ha transmitido un "1"

y $\phi_i = \pi$ cuando se ha transmitido un "0",

entonces $v_d(t) = \pm\frac{A^3}{4}$, y la comparación se hace respecto a cero, es decir, el valor del V_u del umbral debe ser $V_u = 0$. El algoritmo de decisión del comparador en un intervalo de tiempo t_n será:

Si $v_d(t_n) \geq 0$, sacar un "1"

Si $v_d(t_n) < 0$, sacar un "0"

5.49. Calcule las potencias pico y promedio de la señal, así como las correspondientes relaciones S/N, en ASK, FSK, PSK y DPSK, tanto coherente como no coherente, cuando se opera sobre un canal de 3 kHz de ancho de banda, a una velocidad de 1000 bps, con una densidad espectral de ruido de $2\text{x}10^{-10}$ W/Hz y una probabilidad de error de $3{,}216\text{x}10^{-5}$. Tabule y compare los resultados.

Solución:

$$B = 3000;\ f_b = 1000;\ \frac{\eta}{2} = 2\text{x}10^{-11}\,\text{W/Hz};\ \ P_e = 3{,}216\text{x}10^{-5}$$

$P_e = \frac{1}{2}\text{erfc}(x) = 3{,}216x10^{-5}$. Resolviendo obtenemos $x = 2{,}823$

En ASK Coherente

$x = 2{,}823 = \sqrt{\frac{\gamma}{4}} \therefore \gamma = 31{,}945$; $\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b}$. $A^2 = 2\eta f_b \gamma$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 2{,}556x10^{-6}\,W$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{4}$: $\frac{A^2}{4} = 6{,}39x10^{-7}\,W$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{ASK} = \frac{\gamma}{4} = 7{,}936 = 9{,}0234\ dB$$

En ASK No Coherente

$P_e = \frac{1}{2}\exp(-\frac{\gamma}{4}) = 3{,}216x10^{-5}$. Resolviendo, $\gamma = 38{,}607$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 3{,}088x10^{-6}\,W$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{4}$: $\frac{A^2}{4} = 1{,}1544x10^{-6}\,W$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{ASK} = \frac{\gamma}{4} = 9{,}6516 = 9{,}846\ dB$$

En FSK Coherente

$x = 2{,}823 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \therefore \gamma = 15{,}972$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 1{,}278x10^{-6}\,W$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{2} = 6{,}39x10^{-7}\,W$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{FSK} = \frac{\gamma}{2} = 7{,}968 = 9{,}023\ dB$$

En FSK No Coherente

$P_e = \frac{1}{2}\exp(-\frac{\gamma}{2}) = 3{,}216x10^{-5} \therefore \gamma = 19{,}303$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 1{,}544x10^{-6}\,W$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{2}$: $\frac{A^2}{2} = 7{,}721\text{x}10^{-7}\,\text{W}$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{FSK} = \frac{\gamma}{2} = 9{,}6516 = 9{,}846\,\text{dB}$$

En PSK

$$x = 2{,}823 = \sqrt{\gamma} \therefore \gamma = 7{,}986$$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 6{,}389\text{x}10^{-7}\,\text{W}$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{2} = 3{,}194\text{x}10^{-7}\,\text{W}$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{PSK} = \frac{\gamma}{2} = 3{,}993 = 6{,}0131\,\text{dB}$$

En DPSK

$$P_e = \frac{1}{2}\exp(-\gamma) = 3{,}216\text{x}10^{-5} \therefore \gamma = 9{,}6516$$

Potencia Pico A^2: $A^2 = 2\eta f_b \gamma = 7{,}721\text{x}10^{-7}\,\text{W}$

Potencia Promedio $\frac{A^2}{2}$: $\frac{A^2}{2} = 3{,}86\text{x}10^{-7}\,\text{W}$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{DPSK} = \frac{\gamma}{2} = 4{,}826 = 6{,}836\,\text{dB}$$

En la Tabla siguiente se muestra todos los parámetros para

$$\frac{\eta}{2} = 2\text{x}10^{-11}\ \text{W/Hz};\quad f_b = 1000\,\text{Hz};\quad P_e = 3{,}216\text{x}10^{-5}$$

TABLA DE RESULTADOS

Parámetro	ASK		FSK		PSK	DPSK
	COHER.	NO COH.	COHER.	No COH.		
γ	31,945	38,607	15,972	19,303	7,986	9,6516
Potencia Pico (W)	$2{,}556\text{x}10^{-6}$	$3{,}088\text{x}10^{-6}$	$1{,}278\text{x}10^{-6}$	$1{,}544\text{x}10^{-6}$	$6{,}389\text{x}10^{-7}$	$7{,}721\text{x}10^{-7}$
Potencia Promedio (W)	$6{,}39\text{x}10^{-7}$	$1{,}1544\text{x}10^{-6}$	$6{,}39\text{x}10^{-7}$	$7{,}721\text{x}10^{-7}$	$3{,}194\text{x}10^{-7}$	$3{,}86\text{x}10^{-7}$
$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]$(dB)	9,0234	9,846	9,023	9,846	6,0131	6,836

5.50. Una señal de voz se va a transmitir en PCM por microondas. La frecuencia de muestreo de la señal es de 8000 muestras por segundo y las palabras codificadas constan de 7 dígitos binarios más un dígito de sincronización, todos de igual duración.

(a) Determine la velocidad de información de las secuencias PCM.

Solución:

$f_s = 8000;\ n = 7;$ un dígito de sincronización.

Sea la Fig. P5.50(a):

$$I = 7 \text{ bits};\ T_s = \frac{1}{8000}$$

$$V_i = \frac{I}{T_s} = 7x8000 = 56 \text{ kbps}$$

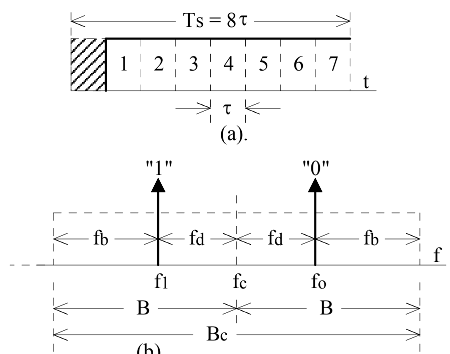


Fig. P5.50

(b) $T_s = 8\tau \therefore \tau = \frac{T_s}{8}$

$$B_{PCM} = \frac{1}{\tau} = 8x8000 = 64 \text{ kHz}$$

que equivale a una frecuencia de señalización $f_b = 64$ kHz.

(c) En PSK binario, $B_{PSK} = 2f_b = 128 \text{ kHz}$

(d) En FSK binario, $f_d = 40 \text{ kHz};\ f_c = 1{,}5x10^9 \text{ Hz}$

De la Fig. P3.51(b), las frecuencias de operación son

$$f_1 = f_c - f_d = 1{,}496x10^9 \text{ Hz};\qquad f_o = f_c + f_d = 1{,}504x10^9 \text{ Hz}$$

Para el ancho de banda mínimo, puesto que $k = \frac{f_d}{f_b} < 1$, entonces de la expresión (5.164) del Texto o de la Fig. P5.50(b), el ancho de banda en FSK binario es

$$B_c = 2(f_b + f_d) = 208 \text{ kHz}$$

(e) FSK No Coherente

$$\frac{\eta}{2} = 10^{-14} \text{ W/Hz};\ P_e = 2{,}038x10^{-8};\ B_c = 208 \text{ kHz};\ f_b = 64 \text{ kHz};\ B = f_b + f_d = 104 \text{ kHz}$$

$$P_e = \frac{1}{2}\exp(-\frac{\gamma}{2}) = 2{,}038x10^{-8} \therefore \gamma = 17{,}016 = \frac{A^2}{2\eta B}$$

La potencia pico es $A^2 = 2\eta B\gamma = 7{,}079x10^{-8}$ W

De la expresión (5.165), $\dfrac{S_i}{N_i} = \dfrac{A^2}{2(f_b + f_d)\eta} = 17{,}016 = 12{,}309 \text{ dB}$

5.51. En la Fig. 5.109 del Texto se muestra un receptor FSK. Un receptor de este tipo se denomina "receptor heterodino".

Los filtros FI1 y FI0 son pasabanda, centrados en las frecuencias f_{I1} y f_{I0}, respectivamente, donde $f_{I0} > f_{I1}$. La señal de entrada $v_c(t)$ se puede escribir en la forma $v_c(t) = A_c \cos[2\pi(f_c \pm f_d)]$, y las frecuencias de transmisión son:

$f_1 = 1300 \text{ Hz}$, cuando se transmite un "1"

$f_o = 1700 \text{ Hz}$, cuando se transmite un "0"

Analice el sistema y determine los valores apropiados de las frecuencias f_{I1}, f_{I0} y f_o, sujeto a las condiciones siguientes:

1. Que $\dfrac{f_{I1} + f_{I0}}{2} = f_c$, donde f_c es la frecuencia de portadora
2. Que $1 \text{ kHz} < [f_{I0} - f_{I1}] < 2 \text{ kHz}$

Solución:

Las frecuencias de transmisión dadas son las de un Módem V.23 para 600 baudios:

$f_1 = 1300$ Hz cuando se transmite un "1"

$f_0 = 1700$ Hz cuando se transmite un "0"

$$f_c = \frac{f_1 + f_0}{2} = 1500 \text{ Hz}$$

Para una señal FSK, se tiene:

$v_c(t) = A\cos[2\pi(f_c \pm f_d)t]$. Sea también $v_1(t)$ la salida del multiplicador

De la Fig. P5.51(a),

$f_c = 1500$ Hz; $f_d = 200$ Hz; también,

$v_1(t) = v_c(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$; f_0 es la frecuencia del Oscilador Local .

$v_1(t) = A\cos[2\pi(f_c \pm f_d)t]\cos(2\pi f_0 t)$

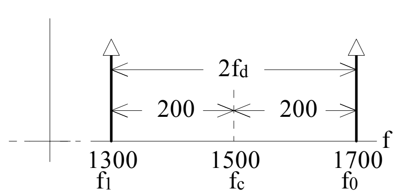


Fig. P5.51(a)

$v_1(t) = \dfrac{A}{2}\cos\left[2\pi(f_c + f_0 \pm f_d)t\right] + \dfrac{A}{2}\cos\left[2\pi(f_c - f_0 \pm f_d)t\right]$. Vemos que las frecuencias presentes en la entrada de los filtro FI y F0 son:

$f_1 = f_c + f_d + f_0$; $f_2 = f_c + f_d - f_0$; $f_3 = f_c - f_d + f_0$; $f_4 = f_c - f_d - f_0$

De estas cuatro frecuencias hay que elegir dos: f_{I1} y f_{I0}, que cumplan con las condiciones dadas más arriba. La condición 1 implica que f_{I1} y f_{I0} deben ser simétricas respecto a f_c, con una separación menor que 2000 Hz y mayor que 1000 Hz (condición 2). Reemplazando los valores de f_c y f_d en f_1, f_2, f_3 y f_4,

$f_1 = 1700 + f_0$; $f_2 = 1700 - f_0$; $f_3 = 1300 + f_0$; $f_4 = 1300 - f_0$.

Sea $f_{01} = f_{I0} - f_{I1}$; debe cumplirse entonces que $1000 \text{ Hz} < f_{01} < 2000 \text{ Hz}$ y hagamos la siguiente figura:

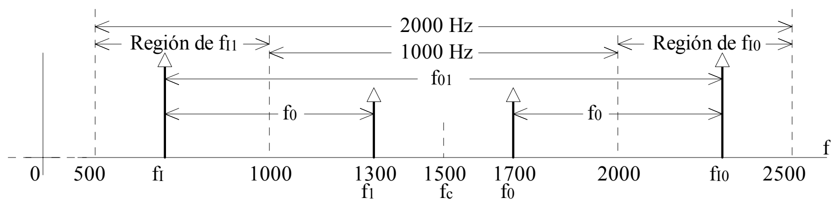


Fig. P5.51(b)

En la Fig. P5.51(b) podemos ver que $500 \text{ Hz} < f_{I1} < 1000 \text{ Hz}$ y $2000 \text{ Hz} < f_{I0} < 2500$ Hz.

También: $f_{I1} = f_c - \dfrac{f_{01}}{2}$; $f_{I0} = f_c + \dfrac{f_{01}}{2}$; $f_0 = f_1 - f_{I1} = f_{I0} - f_0$

Por lo tanto, si se elige el valor de la separación f_{01} podemos determinar f_{I1}, f_{I0} y f_0. Por ejemplo, sea la separación $f_{01} = 1200$ Hz. Reemplazando más arriba, obtenemos:

$$f_{I1} = 1500 - \frac{1200}{2} = 900\text{Hz};\ f_{I0} = 1500 + \frac{1200}{2} = 2100\text{ Hz}.$$

Podemos constatar que estos valores cumplen con las condiciones 1 y 2. En efecto,

$$\frac{f_{I1} + f_{I0}}{2} = f_c = \frac{900 + 2100}{2} = 1500 \quad \rightarrow \text{cumple con la condición 1}$$

$$f_{I0} - f_{I1} = 2100 - 900 = 1200\text{Hz} \rightarrow \quad \text{cumple con la condición (2).}$$

Nótese entonces que las condiciones (1) y (2), para los datos del problema, se cumplen cuando

$$500\text{ Hz} < f_{I1} < 1000\text{Hz};\quad 2000\text{ Hz} < f_{I0} < 2500\text{H};\quad 300\text{ Hz} < f_0 < 800\text{ Hz}$$

La ventaja del sistema con heterodinación es que permite una mejor recuperación de las señales o frecuencias en la recepción y el diseño de los filtros se simplifica.

5.52. Relaciones entre PSK M-ario y PSK Binario.

(a) Sea B_B el ancho de banda en binario y B_M el correspondiente M-ario. Demuestre que $B_B = B_M \log_2 M$.

Solución:

En PSK binario, $\gamma = \dfrac{A^2}{2\eta f_b} = \dfrac{A^2 T_b}{2\eta}$

En PSK M-ario, $\gamma_s = \dfrac{A^2 T_s}{2\eta}$, pero $T_s = LT_b = T_b \log_2 M$. De donde,

$\gamma_s = \dfrac{A^2 T_b}{2\eta}\log_2 M$. Por consiguiente, $\gamma_s = \gamma \cdot \log_2 M$

En general, $B_B = Kf_b$, donde K es una constante. Pero $f_s = \dfrac{f_b}{L} = \dfrac{f_b}{\log_2 M}$

Entonces, $B_B = Kf_s \log_2 M$; pero $Kf_s = B_M$ y $B_B = B_M \log_2 M$, de donde

$\dfrac{B_B}{B_M} = \log_2 M$ o también $\dfrac{B_B}{B_M} = L$.

(b) Sea P_B la potencia de señal en binario y P_M la correspondiente en M-ario.

Demuestre que $P_m = \dfrac{1{,}094 P_B}{[\log_2 M]\,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{M})}$ cuando $P_e = 10^{-4}$

Solución:

En PSK binario: $Pe = \dfrac{1}{2}\mathrm{erfc}(\sqrt{\gamma}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{erfc}(X1)$

En PSK M-ario: $Pe = \mathrm{erfc}(\sqrt{\gamma_S \,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{M})}) = \mathrm{erfc}(X2)$

Si la probabilidad de error en ambos casos es de 10^{-4}, entonces

$\mathrm{erfc}(X1) = 2\mathrm{x}10^{-4}$ => $X1 = 2{,}6297$, $\sqrt{\gamma} = 2{,}6297$ y $\gamma = 6{,}915$

$\mathrm{erfc}(X2) = 10^{-4}$ => $X2 = 2{,}751$, $\sqrt{\gamma_s \,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{M})} = 2{,}751$

$\gamma_s \,\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{M}) = 7{,}568 = K1$. También, $\gamma = \dfrac{A^2 T_b}{2\eta} = P_B \dfrac{T_b}{\eta} = P_B \dfrac{T_s}{\eta L} = 6{,}915 = K2$

$\gamma_s = \dfrac{A^2 T_s}{2\eta} = P_M \dfrac{T_s}{\eta}$ y $P_M \dfrac{T_s}{\eta}\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{M}) = 7{,}568 = K1$

Estableciendo la relación K1/K2, obtenemos

$$\frac{LP_M \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{M})}{P_B} = \frac{7{,}568}{6{,}915} = 1{,}094\,,$$ pero $L = \log_2 M$, entonces,

$$P_M = \frac{1{,}094 \cdot P_B}{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{M}) \cdot \log_2 M}$$ para una probabilidad de error $Pe = 10^{-4}$.

5.53. Relaciones entre PSK M-ario y DPSK M-ario

Sea P_{MPSK} la potencia de señal en PSK M-ario, y P_{MDPSK} la correspondiente en DPSK M-ario.

(a) Para una probabilidad de error P_e cualquiera, demuestre que

$$P_{MDPSK} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/M)}{\operatorname{sen}^2(\pi/2M)} P_{MPSK}$$

Solución:

Para PSK M-ario: $Pe = \operatorname{erfc}(K1)$, donde K1 es el mismo del problema anterior.

Para DPSK M-ario: $Pe = \operatorname{erfc}(\sqrt{2\gamma_s \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2M})}) = \operatorname{erfc}(K3)$

Si la probabilidad de error es la misma en ambos casos, entonces K1 = K3.
Reemplazando valores de K1 y K3 y rearreglando, se obtiene finalmente

$$P_{MDPSK} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{M})}{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2M})} P_{MPSK}$$

(b) Verifique que si $M >> 1$, entonces $P_{MDPSK} \to 2P_{MPSK}$; es decir, el sistema DPSK M-ario requiere un aumento de 3 dB de potencia sobre el requerido por PSK M-ario.

Solución:

Cuando $M >> 1$, entonces $\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{M}) \to \frac{\pi^2}{M^2}$ y $\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2M}) \to \frac{\pi^2}{4M^2}$;

En este caso, la expresión obtenida en la parte (b) será $P_{MDPSK} = 2P_{MPSK}$;

y en dB, $[P_{MDPSK}]_{dB} = 3\,dB + [P_{MPSK}]_{dB}$

Por ejemplo, para M = 4, se verifica que $P_{MDPSK} = 1{,}999906\ P_{MPSK}$. Prácticamente, para $M > 2$ se tiene que $P_{MDPSK} = 2P_{MPSK}$.

El sistema DPSK M-ario, para una misma probabilidad de error Pe, requiere un aumento de 3 dB de potencia sobre el requerido para PSK M-ario. En otras palabras, la potencia en DPSK M-ario, para una misma probabilidad de error Pe, demanda el doble de potencia que en PSK M-ario.

5.54. La secuencia binaria de entrada a un modulador DPSK 4-ario tiene una velocidad de modulación de 1200 baudios. El modulador toma bloques de $L = \log_2 4 = 2$ dígitos binarios y le asigna a cada dupla de dígitos, ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$00 \to \phi_1 = 0^o; \quad 01 \to \phi_2 = 90^o; \quad 11 \to \phi_3 = 180^o; \quad 10 \to \phi_4 = 270^o$$

La frecuencia de portadora es de 1800 Hz, el ancho de banda del canal es de 3 kHz, la amplitud de la portadora de 1 mV y la densidad espectral de ruido de 10^{-11} W/Hz

(a) Dibuje el Diagrama de Fresnel correspondiente.

Con la asignación dada, el Diagrama de Fresnel tiene la forma mostrada en la Fig. P5.54(a).

Nótese que de acuerdo con el UIT-T con este módem se puede transmitir hasta 2400 bps.

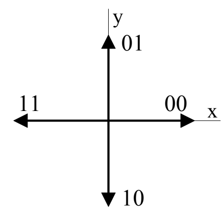


Fig. P5.54(a)

(b) Determine la relación S/N en el canal y la probabilidad de error P_e.

En DPSK

$$f_c = 1800\,\text{Hz}; \quad B = 3\,\text{kHz}; \quad A = 1\,\text{mV} = 10^{-3}\,\text{V}; \quad \eta = 2\text{x}10^{-11}\,\text{W/Hz}$$

$$S_i = \frac{A^2}{2}; \quad N_i = B\eta; \quad M = 4; \quad L = 2; \quad f_s = \frac{f_b}{L} = 600\,\text{Hz}$$

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{2B\eta} = 8{,}33 = 9{,}208\,\text{dB}; \qquad \gamma_s = \frac{A^2}{2\eta f_s} = 41{,}666$$

$$P_{eDPSK} = \text{erfc}\left[\sqrt{2\gamma_s \,\text{sen}^2(\frac{\pi}{2M})}\right] = 7{,}795\text{x}10^{-7}$$

(c) Repetir (b) para A = 2 mV.

$$S_i = \frac{A^2}{2}; \quad N_i = \eta B; \quad \frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{2\eta B} = 33{,}333 = 15{,}228\,\text{dB}$$

Nótese que con sólo aumentar al doble la amplitud de entrada, la relación S/N es 6,021 dB más alta que la obtenida en la parte (b), es decir, la relación S/N es cuatro veces más alta.

$\gamma_s = \dfrac{A^2}{2\eta f_s} = 166{,}66$. La probabilidad de error será $P_e = \text{erfc}\left[\sqrt{2\gamma_s \,\text{sen}^2(\frac{\pi}{2M})}\right] \approx 0$

(d) Señal de entrada 0 0 0 1 1 1 1 0.

$f_c = 1800;\ f_s = 600;\ \dfrac{T_s}{T_c} = 3 \therefore T_s = 3T_c \rightarrow$ Cada período de T_s contiene tres períodos de T_c.

El algoritmo de codificación de salida tendrá la siguiente forma:

$00 \rightarrow \phi_1 = 0^o \quad \rightarrow s_1(t) = A\cos(2\pi f_c t)$

$01 \rightarrow \phi_2 = 90^o \quad \rightarrow s_2(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$

$11 \rightarrow \phi_3 = 180^o \rightarrow s_3(t) = -A\cos(2\pi f_c t)$

$10 \rightarrow \phi_4 = 270^o \rightarrow s_4(t) - A\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$

La señal DPSK tendrá la forma siguiente, Fig. P5.54(b)

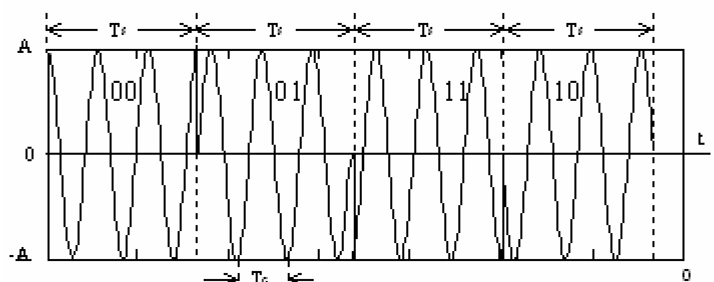


Fig. P5.54(b)

Nótese los cambios de fase de la señal

El módem cuyo diagrama de Fresnel vimos en la parte (a) se utiliza también para transmitir a una velocidad de 2400 bps. Vamos repetir la parte (b) para una velocidad de 2400 bps. En este caso:

$f_b = 2400;\quad f_s = 1200;\quad f_c = 1800;\quad T_s = 1{,}5T_c$

Con el mismo procedimiento utilizado para $f_s = 600$ Hz, la señal DPSK tiene la forma mostrada en la Fig. P5.54 (c).

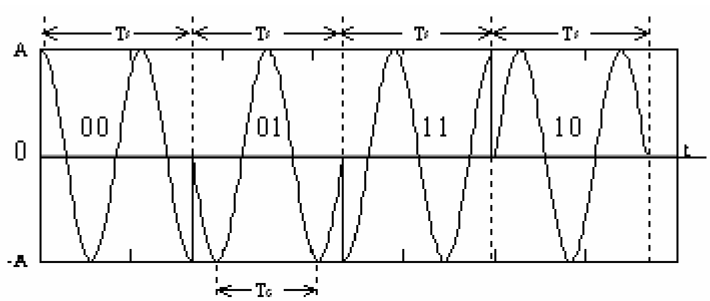


Fig. P5.54(c)

5.55. La velocidad de información de la secuencia binaria de entrada a un modulador PSK 8-ario es de 4800 bps. El modulador toma bloques de $L = \log_2 8 = 3$ dígitos y le asigna a cada tripleta ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$000 \to \phi_1 = 45^o; \quad 001 \to \phi_2 = 0^o; \quad 010 \to \phi_3 = 90^o; \quad 011 \to \phi_4 = 135^o$$

$$100 \to \phi_5 = -90^o; \quad 101 \to \phi_6 = -45^o; \quad 110 \to \phi_7 = -135^o; \quad 111 \to \phi_8 = 180^o$$

La frecuencia de portadora es de 1600 Hz, el ancho de banda del canal es de 3 kHz, la relación S/N de 13 dB y la densidad espectral de ruido de 10^{-10}W/Hz.

(a) El diagrama de Fresnel correspondiente a la asignación de fases se muestra en la Fig. P5.55(a).

Este diagrama de Fresnel corresponde a los Módems de la Serie UIT-T V.27.

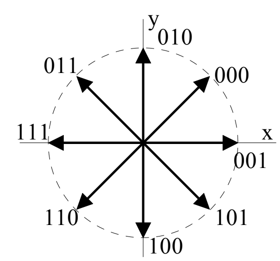


Fig. P5.55(a).

(b) Determine la amplitud de la portadora y la probabilidad de error.

Solución:

PSK M-ario.

$$M = 8;\ L = 3;\ f_b = 4800;\ f_c = 1600;\ B = 3\,\text{kHz};\ S/N = 13\,\text{dB} = 19{,}95; \eta = 2x10^{10}\,\text{W/Hz}$$

$$f_s = \frac{f_b}{L} = 1600\,; \quad S_i = \frac{A^2}{2}; \quad N_i = \eta B; \ \frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{2\eta B} = 19{,}95$$

$$A = \sqrt{2\eta B \frac{S_i}{N_i}} = 4{,}893\,\text{mV}\,; \qquad \gamma_s = \frac{A^2}{2\eta f_s} = 37{,}41$$, y la probabilidad de error,

$$P_e = \text{erfc}\left[\sqrt{\gamma_s \sin^2(\frac{\pi}{M})}\right] = 9{,}323x10^{-4}$$

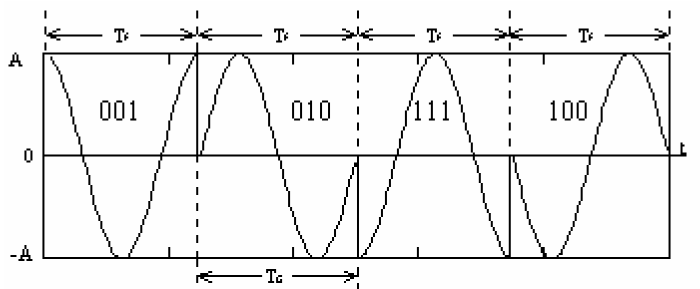
(c) $f_c = 1600;\ f_s = 1600;\ \ T_s = T_c$. A cada período de T_s corresponde un período de T_c.

Para la señal de entrada 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0, el algoritmo de codificación es el siguiente, con L = 3:

$$001 \to \phi_1 = 0^o \to s_1(t) = A\cos(2\pi f_c t); \qquad 010 \to \phi_2 = 90^o \to A\,\text{sen}(2\pi f_c t)$$

$$111 \to \phi_3 = 180^o \to s_3(t) = -A\cos(2\pi f_c t); \quad 100 \to \phi_4 = 270^o \to -A\,\text{sen}(2\pi f_c t)$$

La señal modulada PSK 8-aria correspondiente tendrá la forma, Fig. P5.55(b).



P5.55(b)

5.56. Si se considera la señal FSK M-aria como si estuviera formada por M señales de frecuencia f_i para $i = 1, 2, 3,.....,M$, separadas en Δf, demuestre que el ancho de banda de la señal FSK M-aria se puede expresar en la forma $B_c \approx (M-1)\Delta f + 2f_s$, donde $f_s = \dfrac{f_b}{\log_2 M}$, siendo f_b la frecuencia de señalización a la entrada del modulador.

Solución:

Se hace una construcción como la mostrada en la Fig. P5.56.

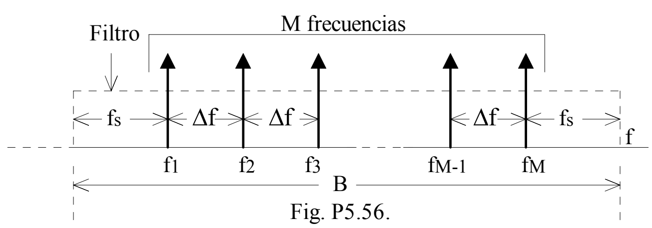


Fig. P5.56.

El filtro debe dejar pasar las M frecuencias con un intervalo de frecuencia f_s a cada lado; por lo tanto, podemos decir que el ancho del filtro es, de la Fig. P5.56,

$$B \approx (M-1)\Delta f + 2f_s$$

Nótese que cuando la separación entre las frecuencias es ortogonal, $f_s = \Delta f$, de donde,

$$B \approx (M+1)f_s, \text{ donde } f_s = \frac{f_b}{L} = \frac{f_b}{\log_2 M}$$

5.57. Por un canal de microondas se quiere transmitir datos binarios a una velocidad de 3 Mbps y se desea utilizar un modulador PSK 4-ario o FSK 4-ario. La probabilidad de error debe ser de 10^{-5}. Elija Ud. el sistema que mejor se adapte a la situación en la cual Ud. está trabajando.

Solución:

Haremos los cálculos tanto para PSK como para FSK y después se efectuará la comparación.

PSK 4-ario/FSK 4-ario. $M = 4;\ L = 2;\ f_b = 3x10^6$.

En PSK, $B = 2f_s$; en FSK, $\Delta f = 1{,}5f_s$

<u>PSK</u>

$$P_e = \text{erfc}\left[\sqrt{\gamma_s \,\text{sen}^2(\frac{\pi}{M})}\right]. \quad \text{Sea} \quad x = \sqrt{\gamma_s \,\text{sen}^2(\frac{\pi}{M})}$$

Si $P_e = \text{erfc}(x) = 10^{-5}$, entonces $x = 3{,}0876 = \sqrt{\gamma_s \,\text{sen}^2(\frac{\pi}{4})}$ y $\gamma_s = 19{,}0666$

$$f_s = \frac{f_b}{2} = 1{,}5x10^6.$$

De la expresión (5.178a) del Texto, con $\gamma = \gamma_s$

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{PSK} = \frac{\gamma_s}{2} = 9{,}533 = 9{,}792\,\text{dB}; \qquad B_{PSK} = 2f_s = 3\,\text{MHz}$$

<u>FSK</u>

$$\Delta f = 1{,}5f_s = 2{,}25x10^6; \quad f_d = \frac{\Delta f}{2} = 1{,}125x10^6$$

De la Fig. 5.87 del Texto, para $P_e = 10^{-5}$ y $M = 4$, el valor aproximado de γ_s es

$\gamma_s \approx 10\,\text{dB} = 10$. De la expresión (5.166) del Texto,

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{FSK} = \frac{\gamma_s}{2} = 5 = 6{,}989\,\text{dB}$$

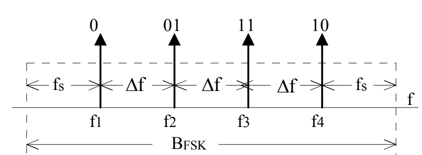


Fig. P5.57.

Para el ancho de banda hacemos la Fig. P5.57:

$$B_{FSK} = 3\Delta f + 2f_s = 9{,}75\,\text{MHz}$$

Es evidente que la mejor selección es PSK 4-ario, pues la relación S/N es superior a FSK 4-ario en 2,803 dB; además, el ancho de banda en FSK 4-ario es 3,25 veces el ancho de banda en PSK 4-ario.

5.58. En un sistema PSK/DSSS la ganancia de procesamiento es de 1000. Se desea que la probabilidad de error esté por debajo de $1{,}081x10^{-6}$.

Demuestre que para ser efectiva, la potencia de la señal interferente debe estar, como mínimo, a 19,5 dB por arriba de la potencia de la señal útil. Nótese entonces que para que la interferencia pueda causar daño se necesita grandes potencias de transmisión.

Solución:

$$N = 1000;\ P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{N}{P_j/P_s}}\right] = 1{,}081\text{x}10^{-6}.\quad \text{Sea}\quad x = \sqrt{\frac{N}{P_j/P_s}}$$

$$\text{Si}\quad P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}[x] = 1{,}081\text{x}10^{-6},\quad \text{entonces}\quad x = 3{,}35 = \sqrt{\frac{1000}{P_j/P_s}};\ \text{de donde,}$$

$$\frac{P_j}{P_s} = 89{,}107 = 19{,}499\ \text{dB}.$$

La potencia de la señal interferente Pj es 86,107 (19,499 dB) veces más alta que la potencia de la señal útil P_s.

5.59. En un sistema CDMA se desea una probabilidad máxima de $1{,}081\text{x}10^{-6}$. Haga una gráfica del número de usuarios M vs N, donde N es la ganancia de procesamiento. En particular, demuestre que con una ganancia de procesamiento de 2048 el sistema puede atender hasta 184 usuarios.

Solución:

$$N = 1000;\ P_{emax} = 1{,}081\text{x}10^{-6}.\quad \text{Sea}\quad x = \sqrt{\frac{N}{M-2}}\ \text{y del Problema anterior}\ x = 3{,}5$$

$\frac{N}{M-2} = x^2$, de donde $M = \frac{N}{x^2} + 2$. En la Fig. P5.59(a) se muestra la variación de M en función de N para una probabilidad de $1{,}081\text{x}10^{-6}$. En particular, si N = 2048, el sistema puede atender hasta 184 usuarios.

Si se considera que el coeficiente de actividad máximo es de 25%, es decir, que en la hora más cargada puedan estar comunicados el 25% de los usuarios, la capacidad teórica de un sector de telefonía celular se puede estimar en $\frac{4M}{2}$ usuarios. En el caso particular para N = 2048, la capacidad de un sector sería de 368 usuarios. En este caso habría problemas de comunicación cuando 184 usuarios o más estén en línea.

En la Fig. P5.59(b) se puede observar la variación de la probabilidad de error P_e en función del número de usuarios M para diferentes valores de la ganancia de procesamiento N.

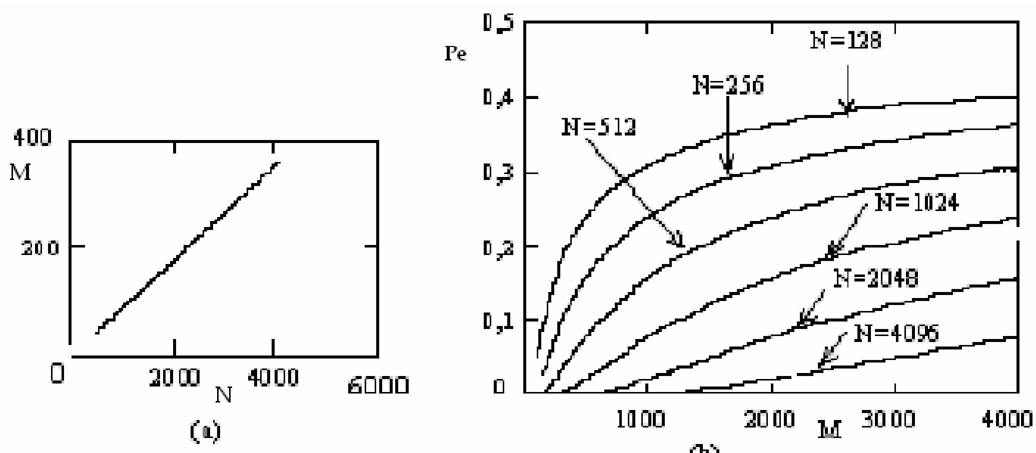

400
M
200
0
2000
4000
6000
N
(a)
0,5
Pe
0,4
0,3
0,2
0,1
0
N=128
N=256
N=512
N=1024
N=2048
N=4096
1000
2000
3000
4000
M
(b)

Fig. P5.59

CAPITULO VI

6.1. Sea el sistema de la Fig. 6.54 del Texto, donde

$$M(f) = 4\Lambda(\frac{f}{2}), \quad H_2(f) = 4\Pi(\frac{f}{4}) \text{ y}$$

$$H_1(f) = \Pi(\frac{f+4}{2}) + \Pi(\frac{f-4}{2})$$

Determinar la salida y(t).

Solución:

M(f) se muestra en la Fig. P6.1(a)

$$M(f) = 4\Lambda(\frac{f}{2}) \Leftrightarrow m(t) = 8\text{sinc}^2(2t)$$

A la salida del primer multiplicador,

$$x_1(t) = m(t)\cos(2\pi 5t)$$

$$X_1(f) = 2\left[\Lambda(\frac{f+5}{2}) + \Lambda(\frac{f-5}{2})\right];$$ esta señal se muestra en (b)

Al pasar por el filtro $H_1(f)$ la salida $X_2(f)$ tiene la forma dada en (c).

A la salida del segundo amplificador el espectro $X_3(f)$ tiene la forma dada en (e).

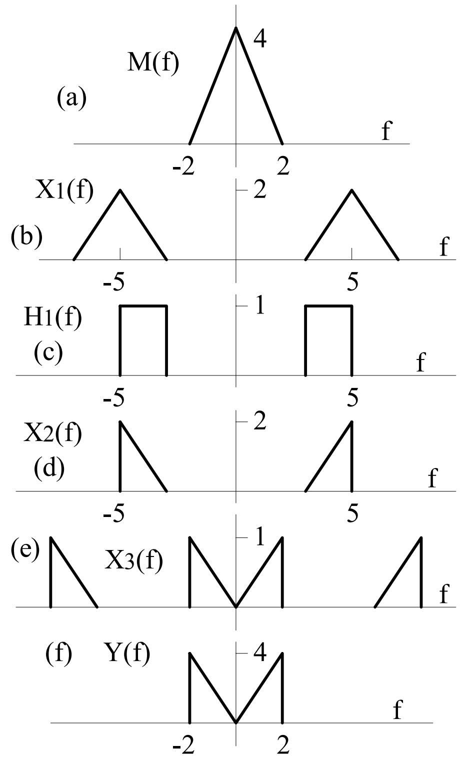


Fig. P6.1

$$X_3(f) = \frac{1}{2}\left[X_2(f+3) + X_2(f-3)\right]$$

El filtro $H_2(f)$ deja pasar señales en la banda $|f| \le 2$ con ganancia 4. La salida será

$$Y(f) = 4\Pi(\frac{f}{4}) - 4\Lambda(\frac{f}{2}) \Leftrightarrow y(t) = 16\text{sinc}(4t) - 8\text{sinc}^2(2t)$$ que se muestra en (f).

6.2. Vamos a investigar el efecto de la no sincronización de la portadora local en un detector coherente. Supóngase que la salida del oscilador local sea $2A_c\cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \Delta\phi]$, donde Δf y $\Delta\phi$ son los errores de frecuencia y fase, respectivamente. La entrada al detector es de la forma $A_r m(t)\cos(2\pi f_c t)$. La ganancia del filtro de salida es la unidad.

(a) Determine la salida del filtro para Δf y $\Delta\phi$ distintos de cero.

(b) Repita cuando $\Delta f = 0$ y $\Delta\phi = \pi/2$.

(c) Si $m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$, $\Delta\phi = 0$ y $\Delta f = 1$ kHz, y con $A_r A_c = 2\text{x}10^3$, grafique el espectro de salida.

(a)
Solución:

Sea el detector sincrónico mostrado en la Fig. P6.2(a).

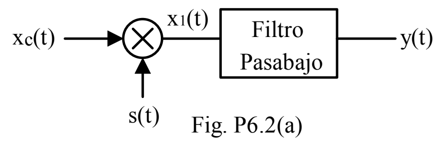


Fig. P6.2(a)

$x_c(t) = A_r m(t)\cos(2\pi f_c t)$

$s(t) = 2A_c \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \Delta\phi]$

A la salida del multiplicador,

$x_1(t) = 2A_r A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \Delta\phi]$

$x_1(t) = A_r A_c m(t)\cos(4\pi f_c t + 2\pi\Delta f t + \Delta\phi) + A_r A_c m(t)\cos(2\pi\Delta f t + \Delta\phi)$

El filtro pasabajo elimina los términos de alta frecuencia quedando

$y(t) = A_r A_c \cos(2\pi\Delta f t + \Delta\phi)m(t)$

El término $\cos(2\pi\Delta f t + \Delta\phi)$ es un término de distorsión de amplitud. En la práctica se trata siempre de hacer $\Delta f = \Delta\phi = 0$ para que no haya distorsión.

(b) Si $\Delta f = 0$ y $\Delta\phi = \pi/2$, $\cos(2\pi\Delta f t + \Delta\phi) = \cos(\pi/2) = 0$

Este es el caso peor: la salida y(t) = 0.

(c)

$m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t) \Leftrightarrow M(f) = 10^{-3}\Pi(\frac{f}{10^4})$; $\Delta f = 0$; $\Delta\phi = 1\,\text{kHz}$; $A_r A_c = 2x10^3$;

$y(t) = 2x10^4 \text{sinc}(10^4 t)\cos(2\pi 10^3 t)$; $\text{sinc}(10^4 t) \Leftrightarrow 10^{-4}\Pi(\frac{f}{10^4})$

Fig. P6.2(b)

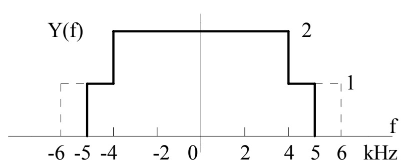


Fig. P6.2(c)

$$Y(f) = \Pi(\frac{f + 1000}{10^4}) + \Pi(\frac{f - 1000}{10^4})$$

Esta señal tiene la forma mostrada en la Fig. P6.2(c); nótese la diferencia con la señal de la Fig. P6.2(b) que es la salida correcta. La diferencia de frecuencia entre las portadoras ha producido un desplazamiento de espectros a la salida y como consecuencia se ha producido distorsión de amplitud.

6.3. Hemos dicho que la modulación se puede efectuar mediante el empleo de sistemas no lineales, es decir, sistemas que contienen elementos no lineales. En la Fig. 6.55 del Texto se muestra un modulador de este tipo.

Si m(t) es de banda limitada f_m, determine los parámetros del filtro pasabanda a fin de que y(t) sea una señal modulada DSB. Especifique las restricciones, si las hay, entre f_c y f_m.

Solución:

Sea el sistema mostrado en la Fig. 6.55 del Texto.

A la salida del sumador, $x_1(t) = m(t) + \cos(2\pi f_c t)$

A la salida del elevador al cuadrado,

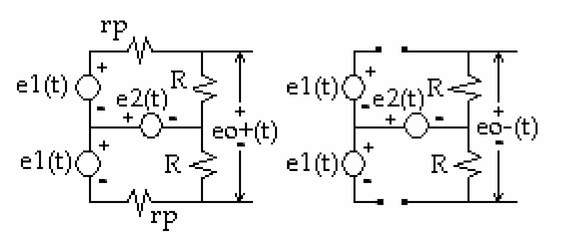
$$x_2(t) = x_1^2(t) = m^2(t) + 2m(t)\cos(2\pi f_c t) + \cos^2(2\pi f_c t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_c t) + +m^2(t) + 2m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

Para que la señal de salida sea una señal DSB, el filtro debe ser pasabanda, de ancho de banda $2f_m$ y centrado en f_c. Como $m^2(t)$ tiene un ancho de banda $2f_m$, entonces para que no haya solapamiento debe verificarse que $f_c > 3f_m$, y en general $f_c >> f_m$. En estas condiciones la salida del fitro pasabanda será

$y(t) = 2m(t)\cos(2\pi f_c t)$ que en efecto es una señal DSB.

6.4. El modulador balanceado es el elemento principal de los detectores sincrónicos. En la Fig. 6.56 del Texto se muestra el circuito equivalente de un modulador balanceado y en la Fig. P6.4 los modelos lineales por tramo correspondientes.



(a) Los diodos conducen (b) Los diodos bloquean

Fig. P6.4.

(a) Utilizando el modelo lineal por tramos del diodo, Fig. P6.4(a), determine el voltaje de salida del circuito equivalente del modulador balanceado, Fig. 6.56(b) del Texto, cuando $e_1(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t);\ e_2(t) = A_c\cos(2\pi f_c t)$. Suponga que $A_c >> |m(t)|$ para todo t.

(b) ¿Cómo se puede recobrar m(t) a partir de $e_o(t)$?

(c) El circuito mostrado en la Fig. 6.56(b) del Texto se puede utilizar como detector o discriminador de fase, es decir, que puede determinar el desfase entre dos señales. Demuestre que si $e_1(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta)$, el voltaje de salida $e_o(t)$ contendrá una componente continua proporcional a $\cos(\theta)$.

Solución: Sea la Fig. P6.4, donde se muestra los circuitos equivalentes de los diodos.

(a) La condición $A >> |m(t)|$ para todo t, quiere decir que cuando $\cos(\omega_c t)$ es positivo, los diodos conducen, Fig. P6.4(a), y cuando $\cos(\omega_c t)$ es negativo los diodos bloquean, Fig. P6.4(b). Por lo tanto, la entrada estará conectada con la salida durante los semiciclos positivos, y en corte durante los semiciclos negativos. Los diodos producen el efecto de multiplicar la señal de entrada por una señal periódica rectangular p(t) de frecuencia f_c, como lo vamos a demostrar a continuación.

Entonces, para $\cos(\omega_c t) \geq 0$, se tiene el circuito mostrado en (a). Por superposición:

$$e_{o+}(t) = \frac{R}{r_p + R}[e_1(t) + e_2(t)] - \frac{R}{r_p + R}[e_2(t) - e_1(t)] = \frac{2R}{r_p + R} e_1(t)$$

$$e_{0+}(t) = Ke_1(t), \quad \text{donde} \quad K = \frac{2R}{r_p + R}$$

Para $\cos(\omega_c t) < 0$, se tiene el circuito mostrado en (b). En este caso, $e_{0-}(t) = 0$.

Vemos que los diodos tiene el efecto de multiplicar la señal $e_1(t)$ por una señal periódica rectangular p(t) de amplitud unitaria, frecuencia f_c y ciclo de trabajo 0,5. En estas condiciones, la salida $e_o(t)$ es

$$e_o(t) = Ke_1(t)p(t) = Km(t)\cos(\omega_c t)p(t)$$

p(t) se puede representar mediante su desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$p(t) = X_o + 2|X_1|\cos(\omega_c t) + 2|X_2|\cos(2\omega_c t) + \cdots$$

$$\text{donde} \quad X_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{n}{2}) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases} \quad ; \quad \phi_n = 0; \quad X_o = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$e_o(t) = Km(t)\cos(\omega_c t)\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_c t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_c t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_c t) - \cdots\right]$$

$$e_o(t) = \frac{K}{2}m(t)\cos(\omega_c t) + \frac{2K}{\pi}m(t)\cos^2(\omega_c t) - \frac{2K}{3\pi}m(t)\cos(\omega_c t)\cos(3\omega_c t) +$$

$$+\frac{2K}{5\pi}m(t)\cos(\omega_c t)\cos(5\omega_c t)-\cdots$$

La señal de salida del modulador será

$$e_o(t)=\frac{K}{\pi}m(t)+\ \text{términos a las frecuencias armónicas de } nf_c \ \text{(n impar)}$$

(b) Si se pasa $e_o(t)$ por un filtro pasabajo de ganancia unitaria, la salida del filtro será

$$y(t)=\frac{K}{\pi}m(t)=\frac{2R}{\pi(r_p+R)}m(t)$$

Debe verificarse siempre que $f_c >> f_m$.

(c) En la parte (a) obtuvimos $e_o(t)=Ke_1(t)p(t)$

Sea entonces $e_1(t)=\cos(\omega_c t+\theta)$, donde θ es un ángulo de desfase que queremos determinar. Entonces,

$$e_o(t)=K\cos(\omega_c t+\theta)p(t)=K\cos(\omega_c t+\theta)\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(\omega_c t)-\frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_c t)+\cdots\right]$$

$$e_o(t)=\frac{K}{2}\cos(\omega_c t+\theta)+\frac{2K}{\pi}\cos(\omega_c t+\theta)\cos(\omega_c t)-\frac{2K}{3\pi}\cos(\omega_c t+\theta)\cos(3\omega_c t)+$$
$$+\frac{2K}{5\pi}\cos(\omega_c t+\theta)\cos(5\omega_c t)-\cdots$$
$$e_o(t)=\frac{K}{2}\cos(\omega_c t+\theta)+\frac{K}{\pi}\cos(2\omega_c t+\theta)+\frac{K}{\pi}\cos(\theta)-\frac{K}{3\pi}\cos(4\omega_c t+\theta)-\cdots$$

Con un filtro pasabajo de ancho de banda $B << f_c$, podemos extraer la componente continua de $e_o(t)$; en efecto, la salida del filtro será

$$E_o=\frac{K}{\pi}\cos(\theta)=\frac{R}{\pi(r_p+R)}\cos(\theta),\ \text{de donde} \qquad \theta=\arccos\left(\frac{\pi E_o}{K}\right)$$

Nótese que colocando un voltímetro de CC calibrado en radianes o grados a la salida del circuito, podemos determinar el desfase entre dos señales sinusoidales de la misma frecuencia.

6.5. En la Fig. 6.57(a) del Texto se muestra un sistema de modulación DSB; la señal s(t) se muestra en (b). Se tiene también que $f_c=f_s=4f_m$; $f_1=2f_m$; $f_2=6f_m$. Las frecuencias f_1 y f_2 son las frecuencias inferior y superior, respectivamente, del filtro pasabanda.

(a) Demuestre que el tren de impulsos se puede representar mediante la expresión

$$s(t)=4f_m\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos[2\pi nf_s(t-\Delta t)]\right] \ \text{cuando} \quad f_s=4f_m$$

(b) Demuestre también que $x_c(t) = 8f_m m(t)\cos[8\pi f_m(t-\Delta t)]$

Solución:

(a) La señal generatriz de s(t) es $g(t) = \delta(t-\Delta t) \Leftrightarrow G(f) = \exp(-j2\pi\Delta t f)$

y el respectivo coeficiente de Fourier, con $f_s = \dfrac{1}{T_s} = 4f_m;\quad f_s T_s = 1$

$G_n = f_s G(nf_s) = f_s \exp(-j2\pi n\Delta t f_s)$; pero de la expresión (1.105) del Texto,

$$s(t) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi n\Delta t f_s)\exp(j2\pi n f_s t) = 4f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi n f_s(t-\Delta t)]$$

s(t) se puede escribir en la forma siguiente:

$$s(t) = 4f_m + 8f_m \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi n f_s(t-\Delta t)] = 4f_m\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos[2\pi n f_s(t-\Delta t)]\right]$$

(b) Sea la Fig. 6.57 del Texto.

A la salida del multiplicador, $x_1(t) = m(t)s(t)$

$$x_1(t) = 4f_m m(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos[2\pi n f_s(t-\Delta t)]\right]$$

Como el filtro es pasabanda y centrado en f_s, la salida $x_c(t)$ será aquella para la cual $n = 1$; entonces,

$$x_c(t) = x_1(t)\,|_{n=1} = 8f_m m(t)\cos[2\pi f_s(t-\Delta t)] = 8f_m m(t)\cos[8\pi f_m(t-\Delta t)]$$

6.6. La detección de una señal DSB se puede efectuar multiplicando la señal recibida por una señal periódica cualquiera p(t) de período $1/f_c$. El resultado de la multiplicación es una señal de la forma $y(t) = x_{DSB}(t)p(t)$, donde $x_{DSB}(t)$ viene dada por (4.5).

Deduzca una expresión analítica para el espectro de y(t) y demuestre que el mensaje m(t) se puede recobrar de y(t) mediante un filtro pasabajo. La señal de salida del filtro tendrá la forma $s_o(t) = A_c|P_1|\cos(\phi_1)m(t)$, donde P_1 y ϕ_1 son los coeficientes y fase de Fourier de la componente fundamental de la señal periódica p(t).

Solución:

$x_{DSB}(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$

Sea p(t) una señal periódica de período $T_c = 1/f_c$. Hagamos la multiplicación

$y(t) = x_{DSB}(t)p(t)$; pero de la expresión (1.47a) del Texto,

$p(t) = P_o + 2\sum_{n=1}^{\infty}|P_n|\cos(2\pi n f_c t + \phi_n)$. Entonces,

$$y(t) = x_{DSB}(t)\left[P_o + 2\sum_{n=1}^{\infty}|P_n|\cos(2\pi n f_c t + \phi_n)\right]$$

$$y(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\left[P_o + 2\sum_{n=1}^{\infty}|P_n|\cos(2\pi n f_c t + \phi_n)\right]$$

Para n = 1, $\quad y(t)|_{n=1} = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)2|P_1|\cos(2\pi f_c t + \phi_1)$

$$y(t)|_{n=1} = 2A_c|P_1|m(t)\left[\frac{1}{2}\cos(4\pi f_c t + \phi_1) + \frac{1}{2}\cos(\phi_1)\right]$$

Al pasar por un filtro pasabajo, se elimina las componentes de alta frecuencia quedando $s_o(t) = A_c|P_1|\cos(\phi_1)m(t)$ que es la señal mensaje afectada por algunos coeficientes constantes. Nótese que ϕ_1 debe ser muy pequeño para no afectar la amplitud; pero el lector debe recordar que ϕ_1 o ϕ_n en general, dependen del eje de coordenadas elegido para definir p(t). En la práctica ϕ_n generalmente es definido cero.

6.7. En la detección sincrónica de señales DSB es necesaria la sincronización tanto de fase como de frecuencia (Problema de Aplicación 6.2). Sin embargo, utilizando el sistema mostrado en la Fig. 6.58 del Texto, solamente se requiere sincronización de frecuencia pero no de fase.

Demuestre que este sistema permite recobrar |m(t)| de $x_c(t)$ sin necesidad de conocer el ángulo de desfase θ_c. Nótese que en este sistema se pierde la información de fase.

Solución:

Sea la Fig. 6.58 del Texto.

$x_c(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_c)$, $\qquad \omega_c = 2\pi f_c$

Por la rama superior:

A la salida del multiplicador, $x_1(t) = x_c(t)2\cos(\omega_c t) = 2m(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t)$

$$x_1(t) = m(t)[\cos(2\omega_c t + \theta_c) + \cos(\theta_c)]$$

A la salida del filtro pasabajo, $x_2(t) = m(t)\cos(\theta_c)$

A la salida del elevador al cuadrado, $x_3(t) = m^2(t)\cos^2(\theta_c)$

Ahora por la rama inferior:

$$x_4(t) = x_c(t)2\,\mathrm{sen}(\omega_c t) = 2m(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

$$x_4(t) = m(t)[\mathrm{sen}(2\omega_c t + \theta_c) + \mathrm{sen}(-\theta_c)]$$

A la salida del filtro pasabajo, $x_5(t) = -m(t)\text{sen}(\theta_c)$

A la salida del elevador al cuadrado, $x_6(t) = m^2(t)\text{sen}^2(\theta_c)$

A la salida del sumador, $x_7(t) = x_3(t) + x_6(t)$

$$x_7(t) = m^2(t)\cos^2(\theta_c) + m^2(t)\text{sen}^2(\theta_c) = m^2(t)$$

A la salida del extractor de raíz cuadrada, $y(t) = m(t)$. Para que ésta sea la salida correcta, es necesario que a la salida del sumador la señal sea, en realidad,

$x_7(t) = |m(t)|^2$, es decir, que la señal ha perdido la información de fase; por consiguiente, la salida real será $y(t) = |m(t)|$ y no necesitamos conocer el desfase θ_c.

Nótese que en señales de audio el oído diferencia entre m(t) y |m(t)|, y siempre se notará un poco de distorsión al escuchar |m(t)|; esta distorsión puede ser inteligible debido a la naturaleza del cerebro humano. Por ejemplo, si $m(t) = \cos(\omega_m t)$ el oído escuchará un solo tono a la frecuencia f_m; pero si $m(t) = |\cos(\omega_c t)|$ el oído estará escuchando f_m y un número muy grande (teóricamente infinito) de tonos armónicos de f_m. En otras aplicaciones, por ejemplo, en el análisis y procesamiento de señales, y en la transmisión de señales digitales en banda de base es necesario conservar toda la información de fase.

6.8. Demuestre que el sistema de la Fig. 6.59 del Texto se comporta como un filtro pasabanda centrado en f_c, de ancho de banda 2B y de ganancia 2.

Solución:

Sea la Fig. 6.59 del Texto. Expresando $x_c(t)$ por su forma canónica,

$$x_c(t) = m(t)\cos(\omega_c t) - m_s(t)\text{sen}(\omega_c t)$$

Se supone que m(t) y $m_s(t)$ son señales pasabajo de ancho de banda B.

Por la rama superior:

A la salida del multiplicador, $x_1(t) = x_c(t)2\cos(\omega_c t)$

$$x_1(t) = 2m(t)\cos^2(\omega_c t) - 2m_s(t)\text{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_1(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - m_s(t)\text{sen}(2\omega_c t)$$

El filtro elimina las componentes de alta frecuencia; entonces, a la salida del filtro pasabajo,

$$x_2(t) = m(t)$$

A la salida del segundo multiplicador, $x_3(t) = m(t)2\cos(\omega_c t)$

Por la rama inferior:

A la salida del primer multiplicador, $x_4(t) = x_c(t)2\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$

$$x_4(t) = 2m(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t) - 2m_s(t)\,\mathrm{sen}^2(\omega_c t)$$

$$x_4(t) = m(t)\,\mathrm{sen}(2\omega_c t) - m_s(t) + m_s(t)\cos(2\omega_c t)$$

A la salida del filtro pasabajo (no hay pérdida de fase),

$$x_5(t) = -m_s(t)$$

A la salida del segundo multiplicador, $x_6(t) = -2m_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$

A la salida del sumador, $y(t) = x_3(t) + x_6(t)$

$$y(t) = 2m(t)\cos(\omega_c t) - 2m_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t) = 2x_c(t)$$

La salida y(t) es igual a $2x_c(t)$, y como la señal de entrada $x_c(t)$ es una señal pasabanda, centrada en f_c y de ancho de banda 2B, el sistema se ha comportado como un filtro pasabanda, centrado en f_c, de ancho de banda 2B y ganancia 2.

6.8. Demuestre que el esquema mostrado en la Fig.6.60 del Texto, se comporta como un filtro pasabajo. $H_1(f)$ es un filtro de Hilbert y x(t) es una señal pasabajo real. El filtro $H_2(f)$ extrae la parte imaginaria de z(t).

Solución:

x(t) es una señal pasabajo real.

A la salida del Multiplicador 1, $x_1(t) = x(t)\exp(j\omega_c t) = x(t)\cos(\omega_c t) + jx(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$

A la salida del Filtro de Hilbert $H_1(f)$, $x_2(t) = \hat{x}(t) = x(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t) - jx(t)\cos(\omega_c t)$

$$x_2(t) = x(t)\left[\mathrm{sen}(\omega_c t) - j\cos(\omega_c t)\right]$$

A la salida del Multiplicador 2, $z(t) = x_2(t)\exp(-j\omega_c t) = x_2(t)[\cos(\omega_c t) - j\,\mathrm{sen}(\omega_c t)]$

$$z(t) = x(t)[\mathrm{sen}(\omega_c t) - j\cos(\omega_c t)][\cos(\omega_c t) - j\,\mathrm{sen}(\omega_c t)]$$

$$z(t) = x(t)\left[\mathrm{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t) - j\,\mathrm{sen}^2(\omega_c t) - j\cos^2(\omega_c t) - \mathrm{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t)\right] = -jx(t)$$

z(t) es una señal imaginaria de la forma $z(t) = 0 - jx(t)$. Por lo tanto,

$x(t) = \mathrm{Im}\left[z(t)\right]$; y como el Filtro $H_2(f)$ extrae la parte imaginaria de z(t), su salida será

$$y(t) = \mathrm{Im}[|\,z(t)\,|] = x(t)$$

Como la entrada al circuito era x(t) y su salida es también x(t), y por cuanto x(t) es una señal pasabajo real, el circuito se comporta como un filtro pasabajo.

6.10. El procedimiento seguido en el Problema 6.6 se puede aplicar también para la generación de señales DSB. En efecto, sea f_m la frecuencia máxima de m(t); se multiplica m(t) por la señal periódica p(t) y luego se pasa el producto por un filtro pasabanda centrado en f_c y de ancho de banda $2f_m$; la salida del filtro será una señal DSB.

Si $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left[\frac{t-10^{-6}n}{2{,}5x10^{-7}}\right]$, demuestre que la salida del filtro pasabanda es una señal DSB de la forma $y(t) = \frac{4}{\pi^2} m(t)\cos(2\pi f_c t)$, donde $f_c = 1$ MHz.

Solución:

Sea el circuito mostrado en la Fig. P6.10,

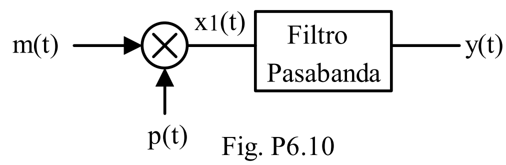


Fig. P6.10

$x_1(t) = m(t)p(t)$ donde p(t) es

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left[\frac{t-10^{-6}n}{2{,}5x10^{-7}}\right];$$

$$f_c = 10^6 = \frac{1}{T_c}$$

La señal generatriz de p(t) es

$$g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2{,}5x10^{-7}}\right) \Leftrightarrow G(f) = 2{,}5x10^{-7}\text{sinc}^2(2{,}5x10^{-7}f) = \frac{1}{4x10^6}\text{sinc}^2\left(\frac{f}{4x10^6}\right)$$

El coeficiente de Fourier de p(t) será:

$$P_n = f_c G(nf_c) = \frac{10^6}{4x10^6}\text{sinc}^2\left(\frac{nx10^6}{4x10^6}\right) = \frac{1}{4}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$p(t) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)\exp(j2\pi nf_c t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)\cos(2\pi nf_c t)$$

$$x_1(t) = m(t)\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)\cos(2\pi nf_c t)\right]$$

Como el filtro es pasabanda y está centrado en f_c, entonces, para n = 1, la salida del filtro será:

$y(t) = \frac{1}{2}m(t)\text{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)\cos(\omega_c t)$, pero $\frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$; de donde,

$y(t) = \frac{4}{\pi^2}m(t)\cos(\omega_c t)$ para $f_c = 1$ MHz.

6.11. Se dispone de una señal $p(t) = A_c \cos^3(2\pi f_c t)$ que vamos a utilizar para generar una señal DSB. Si se forma el producto $z(t) = m(t) \cdot p(t)$, ¿ Cómo podríamos, a partir de z(t), producir una señal DSB? Si $m(t) = B\text{sinc}^2(Bt)$, donde $f_c >> B$, dibuje el espectro de z(t).

Solución:

$$p(t) = A_c \cos^3(\omega_c t) = A_c\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\right]\cos(\omega_c t)$$

$$p(t) = A_c\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\cos(\omega_c t)\right] = \frac{A_c}{2}\cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos(3\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos(\omega_c t)$$

$$p(t) = \frac{3}{4}A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos(3\omega_c t)$$

Vemos que p(t) contiene una componente a la frecuencia de portadora f_c. El producto $z(t) = m(t)p(t)$ se pasa por un filtro pasabanda centrado en f_c y de ancho de banda $2f_m$; la salida de este filtro será una señal DSB de la forma

$$y(t) = \frac{3}{4}A_c m(t)\cos(\omega_c t).$$

Si $m(t) = B\text{sinc}^2(BT)$, entonces,

$$z(t) = m(t)p(t) = \frac{3A_cB}{4}\text{sinc}^2(Bt)\cos(\omega_c t) + \frac{A_cB}{4}\text{sinc}^2(Bt)\cos(3\omega_c t)$$

Puesto $\text{sinc}^2(Bt) \Leftrightarrow \frac{1}{B}\Lambda(\frac{f}{B})$, el espectro de z(t) será, con $f_c = 5B$,

$$Z(f) = \frac{3A_c}{8}[\Lambda(\frac{f+f_c}{B}) + \Lambda(\frac{f-f_c}{B})] +$$

$$+\frac{A_c}{8}[\Lambda(\frac{f+3f_c}{B}) + \Lambda(\frac{f-3f_c}{B})]$$

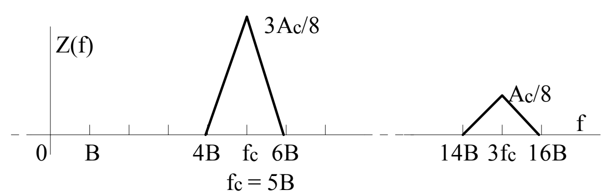


Fig. P6.11.

La forma de Z(f) se muestra en la Fig. P6.11.

Con un filtro pasabanda centrado en f_c y de ancho de banda 2B, se puede extraer la señal DSB deseada.

6.12. El modulador con elemento no lineal mostrado en la Fig. 6.8(c) del Texto se puede representar en la forma dada en la Fig. 6.61 del Texto, donde

$x_i(t) = a_1 e_i(t) + a_2 e_1^2(t)$. m(t) es de banda limitada f_m y de valor promedio cero.

(a) Determine $x_i(t)$

(b) Especifique las características del filtro pasabanda para que y(t) sea una señal AM. En este caso determine y(t).

(c) Si $a_1 = 10,\ a_2 = 0{,}5$ y $A_c = 2,$ determine la cota máxima de |min m(t)| para que y(t) sea una señal AM. Demuestre también que si el índice de modulación AM es del 50%, entonces |min m(t)| = 5.

(d) Para los valores dados en la parte (c) y con $m(t) = 10\cos(2\pi f_m t)$, demuestre que el rendimiento de transmisión es del 33,3%. Demuestre también que éste es el máximo rendimiento.

Solución:

(a) Sea la Fig. 6.61 del Texto. También, $x_i(t) = a_1 e_i(t) + a_2 e_1^2(t)$.

A la salida del sumador, $e_i(t) = m(t) + A_c\cos(\omega_c t)$

A la salida del elemento no lineal,

$$x_i(t) = a_1[m(t) + A_c\cos(\omega_c t)] + a_2[m^2(t) + 2A_c m(t)\cos(\omega_c t) + A_c^2\cos^2(\omega_c t)]$$

$$x_i(t) = a_1 m(t) + a_1 A_c[1 + \frac{2a_2}{a_1}m(t)]\cos(\omega_c t) + \frac{a_2 A_c^2}{2}[1 + \cos(2\omega_c t)]$$

(b) Para que la salida y(t) sea una señal AM, el filtro pasabanda deberá estar centrado en f_c y de ancho de banda $B = 2f_m$. En este caso, la salida será

$y(t) = a_1 A_c[1 + \frac{2a_2}{a_1}m(t)]\cos(\omega_c t)$ que representa una señal modulada AM

(c) $a_1 = 10;\ a_2 = 0{,}5;\ A_c = 2;\quad y(t) = 20[1 + 0{,}1m(t)]\cos(\omega_c t)$

$y(t) = [20 + 2m(t)]\cos(\omega_c t)$.

Para que y(t) sea una señal modulada AM, debe verificarse que

$20 \ge 2|\min m(t)|$ o también $10 \ge |\min m(t)|$

La cota máxima de |min m(t)| es entonces, |min m(t)| = 10

$$y(t) = [20 + 2|\min m(t)|m_n(t)]\cos(\omega_c t) = 20[1 + \frac{2|\min m(t)|}{20}m_n(t)]\cos(\omega_c t)$$

donde $a = \frac{2|\min m(t)|}{20} = \frac{|\min m(t)|}{10}$ es el índice de modulación.

Si el índice de modulación es del 50%, $a = \frac{1}{2}$ y $|\min m(t)| = 5$

(d) $m(t) = 10\cos(\omega_m t);\qquad y(t) = [20 + 20\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

$$y(t) = 20\cos(\omega_c t) + 10\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + 10\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

Potencia Util: $\quad P_B = \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(10)^2 = 100\,W$

Potencia Total: $\quad P_t = \frac{1}{2}(20)^2 + P_B = 300\,W$

Rendimiento $\quad E\% = \frac{\text{Potencia Util}}{\text{Potencia Total}}100 = \frac{100}{300}100 = 33{,}33\%$

6.13. Demuestre que el sistema mostrado en la Fig. 6.62 del Texto puede utilizarse para demodular señales AM si el filtro pasabajo tiene un ancho de banda $2f_m$, donde f_m es la frecuencia máxima del mensaje m(t). En general, demuestre que este sistema opera como un detector de envolvente y no podrá demodular señales DSB.

Solución:

Sea la Fig. 6.62 del Texto.

$$x_{AM}(t) = [A_c + m(t)]\cos(\omega_c t)$$

A la salida del elevador al cuadrado, $\quad x_1(t) = [A_c + m(t)]^2\cos^2(\omega_c t)$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[A_c + m(t)]^2 + \frac{1}{2}[A_c + m(t)]^2\cos(2\omega_c t)$$

El filtro pasabajo elimina las componentes de alta frecuencia; a su salida se tiene

$$x_2(t) = \frac{1}{2}[A_c + m(t)]^2$$

La condición que debe tener el filtro pasabajo es que su ancho de banda debe ser $2f_m$ para poder pasar la señal $m^2(t)$ que sabemos tiene un ancho de banda $2f_m$.

A la salida del extractor de raíz cuadrada, y como en transmisión AM debe verificarse que $[A_c + m(t)] \ge 0$, entonces

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_c + m(t)]$$

Nótese que ésta es la envolvente de la señal AM; la componente continua se elimina en el amplificador quedando solamente el mensaje m(t) afectado por algún factor de escala. Por lo tanto, el sistema se puede utilizar como un detector de envolvente de señales AM y al operar como tal no podrá demodular señales DSB. Vamos a demostrarlo.

Sea la entrada una señal DSB de la forma $\quad x_{DSB}(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t)$

A la salida del elevador al cuadrado, $\quad x_1(t) = A_c^2 m^2(t)\cos^2(\omega_c t)$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}A_c^2 m^2(t) + \frac{1}{2}A_c^2 m^2(t)\cos(2\omega_c t)$$

y a la salida del filtro pasabajo, $x_2(t) = \frac{1}{2}A_c^2 m^2(t)$

En $x_2(t)$ el término $m^2(t)$ tiene eliminada toda la información de fase de m(t), la cual no puede ser restituida ni siquiera tomándose la raíz cuadrada, es decir, que

$\sqrt{m^2(t)} \neq m(t)$ y cuando más $\sqrt{m^2(t)} = |m(t)|$ que presentará un cierto grado de distorsión. El sistema se comporta como un detector de envolvente y no podrá demodular señales DSB.

6.14. El circuito de la Fig. 6.63 del Texto se puede utilizar para demodular señales AM. La rectificación de onda completa de una señal AM es equivalente a multiplicarla por una señal periódica cuadrada bipolar de período $1/f_c$ y amplitud ± 1.

(a) Desarrolle una expresión analítica para el espectro de la señal rectificada $x_i(t)$.

(b) Demuestre que a la salida del filtro pasabajo (de ganancia unitaria), una vez removida la componente continua, la señal es $y(t) = \frac{2}{\pi}m(t)$.

(c) Este circuito se puede utilizar también para generar señales DSB cuando la señal de entrada es de la forma $x(t) = m(t) + K\cos(2\pi f_c t)$ y se utiliza un filtro pasabanda centrado en f_c. Demuestre que si la ganancia del filtro es unitaria, a su salida la señal tendrá la forma $y(t) = \frac{4}{\pi}m(t)\cos(2\pi f_c t)$.

Solución:

La rectificación de onda completa una señal AM equivale a multiplicarla por una señal como la mostrada en la Fig. P6.14.

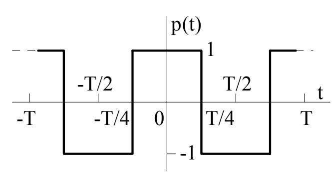


Fig. P6.14.

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right) \quad \text{en } T; \qquad f_c = \frac{1}{T}$$

El correspondiente coeficiente de Fourier es

$$P_n = 2f_c\int_0^{\frac{T}{4}}\cos(2\pi n f_c t)dt - 2f_c\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\cos(2\pi n f_c t)dt$$

Integrando, $$P_n = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}; \quad \phi_n = 0; \quad P_o = 0$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \exp(j2\pi n f_c t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} |P_n| \cos(2\pi n f_c t) \quad \text{para n impar}$$

La salida del rectificador de onda completa será

$$x_i(t) = x_{AM}(t)p(t) = [A_c + m(t)]\cos(\omega_c t) \cdot p(t)$$

$$x_i(t) = 2[A_c + m(t)]\cos(\omega_c t)\sum_{n=1}^{\infty} |P_n| \cos(2\pi n f_c t), \text{ donde } \quad P_n = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} \quad \text{n impar}$$

(b) Para extraer m(t) de $x_i(t)$, se pasa esta señal por un filtro pasabajo. En este caso, para n = 1,

$$x_i(t) = \frac{4}{\pi}[A_c + m(t)]\cos^2(\omega_c t) = \frac{2}{\pi}[A_c + m(t)] + \frac{2}{\pi}[A_c + m(t)]\cos(2\omega_c t)$$

El filtro pasabajo elimina las componentes de alta frecuencia, quedando (sin remoción de la componente continua)

$$y(t) = \frac{2A_c}{\pi} + \frac{2}{\pi}m(t); \quad \text{y con remoción de la componente continua,}$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}m(t)$$

(c) Si $x(t) = m(t) + K\cos(\omega_c t)$, entonces $x_i(t) = [m(t) + K\cos(\omega_c t)]p(t)$; para n = 1,

$$x_i(t)|_{n=1} = [m(t) + K\cos(\omega_c t)]2|P_1|\cos(\omega_c t) = \frac{4}{\pi}m(t)\cos(\omega_c t) + \frac{4K}{\pi}\cos^2(\omega_c t)$$

$$x_i(t)|_{n=1} = \frac{4}{\pi}m(t)\cos(\omega_c t) + \frac{2K}{\pi} + \frac{2K}{\pi}\cos(2\omega_c t)$$

Si esta señal se pasa por un filtro pasabanda centrado en f_c y de ancho de banda $B = 2f_m$, la salida será una señal DSB: en efecto,

$$y(t) = \frac{4}{\pi}m(t)\cos(\omega_c t) \quad \text{que es una señal DSB.}$$

6.15. Se desea transmitir en AM la señal periódica de la Fig. 6.64 del Texto; la frecuencia de portadora es de 100 kHz.

(a) Si el índice de modulación es del 75%, demuestre que la amplitud de la portadora es $A_c = 5/3$ y que el rendimiento de transmisión es del 15,8%.

(b) Si el filtro pasabanda de salida del transmisor tiene un ancho de banda de 70 kHz y ganancia unitaria, dibuje el espectro de la señal transmitida. Si el índice de modulación es del 100%, demuestre que en este caso el rendimiento de transmisión es del 24,96%.

(c) La señal recibida en el receptor AM es la señal transmitida en el caso (b). La densidad espectral de ruido a la entrada del amplificador de RF es

$$S_n(f) = 10^{-9}\exp(-1{,}5x10^{-5}|f|)\ \text{W/Hz}$$

Si la ganancia de los filtros es unitaria, demuestre que las relaciones de pre y postdetección son:

$$\frac{S_i}{N_i} = 1{,}58x10^5 = 51{,}986\ \text{dB}; \qquad \frac{S_o}{N_o} = 4{,}069x10^4 = 46{,}095\ \text{dB}$$

(a)

Solución:

La señal m(t) contiene una componente continua b_o, es decir,

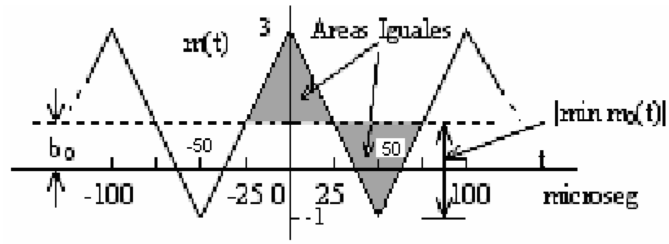


Fig. P6.15(a)

$$m(t) = b_o + m_o(t) \ \text{ y } \ < m_o(t) >= 0$$

$$m_o(t) = |\min m_o(t)| m_{on}(t)$$

Sea entonces la Fig. P6.15(a). Por inspección:

$$|\min m_o(t)| = 2 = 2b_o; \quad b_o = 1$$

$$x_{AM}(t) = [A_c + m(t)]\cos(\omega_c t) = [A_c + b_o + |\min m_o(t)| m_{on}(t)]\cos(\omega_c (t)$$

$$x_{AM}(t) = (A_c + b_o)[1 + \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o} m_{on}(t)]\cos(\omega_c (t)$$. Por definición, $a = \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o}$

Para $a\% = 75\%, \quad a = \frac{3}{4}$, de donde $A_c = \frac{5}{3}$

Con estos datos la señal AM es $x_{AM}(t) = [\frac{8}{3} + 2m_{on}(t)]\cos(\omega_c t)$

$$x_{AM}(t) = \frac{8}{3}\cos(\omega_c t) + 2m_{on}(t)\cos(\omega_c t)$$

Potencia Util: $P_B = \frac{1}{2}(2)^2 < m_{on}^2(t) >= 2 < m_{on}^2(t) >$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(\frac{8}{3})^2 + 2 < m_{on}^2(t) >= \frac{64}{18} + P_B$

Hay que calcular la potencia de $m_{on}(t)$, la cual tiene la forma mostrada en la Fig. P6.15(b)

$$< m_{on}^2(t) >= \frac{2}{T_m}\int_0^{50x10^{-6}} [\frac{2}{50x10^{-6}}(t - 25x10^{-6})]^2 dt \quad < m_{on}^2(t) >= \frac{1}{3}$$

El rendimiento de transmisión será:

$$E\% = \frac{2 < m_{on}^2(t) >}{\frac{64}{18} + 2 < m_{on}^2(t) >} = 15{,}78\%$$

para a = 75%

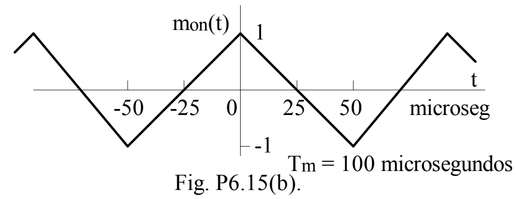


Fig. P6.15(b).

(c) El filtro de salida es de 70 kHz. $x_{AM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + m(t)\cos(\omega_c t)$

$$X_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{1}{2}[M(f + f_c) + M(f - f_c)]$$

Hay que determinar el espectro M(f) de m(t).

De la Fig. P6.15(a),

$$X_n = \frac{2}{T_m}\int_0^{50x10^{-6}} \frac{-4}{50x10^{-6}}(t - 37{,}5x10^{-6})\cos(2\pi n f_m t)dt$$

Integrando, $X_n = \begin{cases} \frac{0{,}811}{n^2} & \text{para n impar} \\ 0 & \text{para n par} \end{cases}$; $X_o = 1$

$$X_o = 1;\ X_1 = 0{,}811;\ X_3 = 0{,}09;\ X_5 = 0{,}032;\ X_7 = 0{,}0{,}016;\ X_9 = 0{,}01$$

$$X_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta[f + (f_c - nf_m)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta[f - (f_c + nf_m)]\right]$$

$$X_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n [\delta[f + (f_c - nf_m)] + \delta[f - (f_c + nf_m)]]$$

donde $f_m = 10\,\text{kHz};\ f_c = 100\,\text{kHz};\ A_c = 5/3;\ X_n = \frac{0{,}811}{n^2}$ para n par ; frecuencias en kHz.

$$X_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f + 100) + \delta(f - 100)] + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \{\delta[f + (100 - 10n)] + \delta[f - (100 + 10n)]\}$$

En la Fig. P6.15(c) se muestra este espectro; frecuencias en kHz.

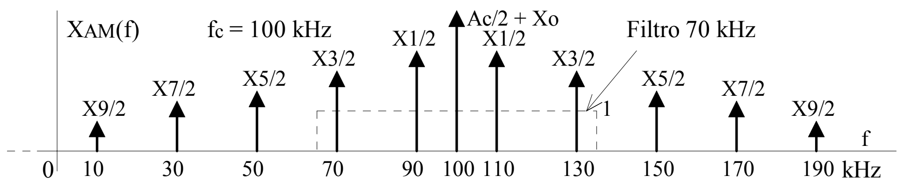


Fig. P6.15(c)

El espectro de la señal transmitida es el contenido dentro del filtro pasabanda centrado en f_c, con un ancho de banda de 70 kHz y ganancia unitaria, Fig. P6.15(c).

Sea ahora el índice de modulación del 100%.

$$a = \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o} = 1 = \frac{2}{A_c + 1} \therefore A_c = 1.$$ La señal AM será ahora,

$$x_{AM}(t) = [2 + 2m_{on}(t)]\cos(\omega_c t) = 2\cos(\omega_c t) + 2m_{on}(t)\cos(\omega_c t)$$

Potencia Util: $P_B = \frac{1}{2}(2)^2 < m_{on}^2(t) >= 2 < m_{on}^2(t) >$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(2)^2 + P_B = 2 + 2 < m_{on}^2(t) >$

Pero $< m_{on}^2(t) >= \frac{1}{3}$. El rendimiento será

$$E\% = \frac{2\frac{1}{3}}{2 + 2\frac{1}{3}} 100 = 25\%$$

(d) La señal recibida en el receptor es, de la Fig. P6.15(c),

$$x_r(t) = 2\left[\begin{array}{l}(\frac{A_c}{2} + X_o)\cos(2\pi 100x10^3 t) + \frac{X_1}{2}\cos(2\pi 90x10^3 t) + \frac{X_1}{2}\cos(2\pi 110x10^3 t) + \\ \frac{X_3}{2}\cos(2\pi 70x10^3 t) + \frac{X_3}{2}\cos(2\pi 130x10^3 t)\end{array}\right]$$

$x_r(t)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$x_r(t) = 2(\frac{A_c}{2} + X_o)\cos(2\pi 100x10^3 t) + 2X_1\cos(2\pi 10x10^3 t)\cos(2\pi 100x10^3 t) +$$

$$+ 2X_3\cos(2\pi 30x10^3 t)\cos(2\pi 100x10^3 t)$$

$$x_r(t) = \left[2(\frac{A_c}{2} + X_o) + 2X_1\cos(2\pi 10x10^3 t) + 2X_3\cos(2\pi 30x10^3 t)\right]\cos(2\pi 100x10^3 t)$$

$x_r(t) = [A_r + m_r(t)]\cos(\omega_c t)$, donde $A_r = 2(\frac{A_2}{2} + X_o)$; f_c = 100 kHz, B = 70 kHz.

La potencia de señal S_i a la entrada del detector será

$$S_i = \frac{1}{2}A_r^2 + \frac{1}{2} < m_r^2(t) >= \frac{1}{2}[2(\frac{A_c}{2} + X_o)]^2 + \frac{1}{2}(2X_1)^2 + \frac{1}{2}(2X_3)^2 = 2{,}719 \text{ W} = 4{,}344 \text{ dB}$$

Para la potencia de ruido, $S_n(f) = 10^{-9}\exp(-1{,}5x10^{-5}|f|)$ y

$$N_i = 2\int_{65x10^3}^{135x10^3} 10^{-9}\exp(-1{,}5x10^{-5}f)df = 3{,}269x10^{-5} \text{ W} = -44{,}855 \text{ dB}$$

La relación S/N de predetección será: $\frac{S_i}{N_i} = 8{,}317x10^4 = 49{,}2 \text{ dB}$

Este caso se puede considerar como de alta relación S/N, de modo que la potencia de señal a la salida es

$$S_o =< m_r^2(t) >= \frac{1}{2}(2X_1)^2 + \frac{1}{2}(2X_3)^2 = 1{,}33 \text{ W} = 1{,}239 \text{ dB}.$$

La potencia de ruido es igual a la de la entrada, de modo que la relación S/N de postdetección será

$$\frac{S_o}{N_o} = 4{,}069x10^4 = 46{,}095 \text{ dB}$$

La ganancia de conversión será entonces $\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 0{,}489$

6.16. Se desea demodular señales AM con un detector coherente, como se muestra en la Fig. 6.65 del Texto. La señal recibida es $x_{AM}(t) = 10^{-3}[1 + \frac{3}{4}\cos(10^4\pi t)]\cos(2\pi f_c t)$, donde $f_c = 1{,}5\text{MHz}$. El ruido en la antena lo podemos representar mediante su función de autocorrelación $R_n(\tau) = 3x10^{-6}\text{sinc}^2(3x10^6\tau)$. La ganancia de tensión del amplificador de RF es de 1000 y la ganancia de potencia del amplificador de audio es de 10.

Demuestre que la relación S_o/N_o de postdetección es de 18,066 dB.

Solución:

Sea la Fig. 6.65 del Texto.

$x_{AM}(t) = 10^{-3}[1 + \frac{3}{4}\cos(10^4\pi t)]\cos(2\pi f_c t)$; f_m = 5 kHz; $R_n(\tau) = 3x10^{-6}\text{sinc}^2(3x10^6\tau)$.

Cálculo de la Potencia de Señal.

A la salida del filtro de RF, $x_1(t) = 10^3 x_{AM}(t) = [1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

A la salida del multiplicador, $x_2(t) = x_1(t)2\cos(\omega_c t) = 2[1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)]\cos^2(\omega_c t)$

$$x_2(t) = [1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)] + [1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)]\cos(2\omega_c t)$$

El filtro de audio deja pasar las bajas frecuencias con una ganancia de potencia de 10, que equivale a una ganancia de tensión de $\sqrt{10}$. La salida será:

$y(t) = \sqrt{10}[1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)]$, cuya potencia es $S_o = 10 + 10\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 = 12{,}813\,\text{W}$

Potencia de Ruido.

$B_1 = 2f_m = 10\,\text{kHz};$

$R_n(\tau) = 3x10^{-6}\text{sinc}^2(3x10^6 t)$

$S_n(f) = 10^{-12}\Lambda(\frac{f}{3x10^6})$ W/Hz

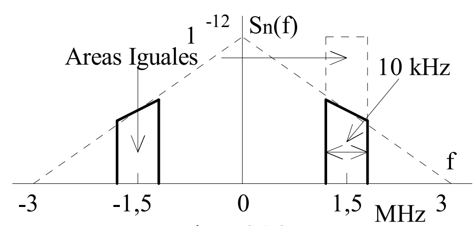


Fig. P6.16

La potencia en antena será, de la Fig. P6.16,

$$N_a = 10x10^3 x10^{-12} = 10^{-8}\,\text{W}$$

La ganancia de potencia del filtro de RF es de $(1000)^2 = 10^6$, de modo que la potencia a la salida del filtro de RF es

$$N_1 = 10^6 N_a = 10^{-2}\,\text{W}$$

A la salida del multiplicador, la potencia es, de la expresión (1.113) del Texto,

$$N_2 = \frac{1}{2}(2)^2 N_1 = 2N_1 = 2x10^{-2}\,\text{W}$$

Como el filtro de audio tiene una ganancia de potencia de 10, entonces la potencia de ruido a la salida es

$$N_o = 10N_2 = 20x10^{-2}\,\text{W}$$

La relación S/N a la salida será: $\frac{S_o}{N_o} = \frac{12{,}813}{20x10^{-2}} = 64{,}063 = 18{,}066\,\text{dB}.$

6.17. En un sistema AM el mensaje $m(t) = K[2\cos(2\pi f_m t) + \cos(4\pi f_m t) + 3\cos(10\pi f_m t)]$. Si A_c es la amplitud de la portadora sin modular,

(a) Demuestre que si el índice de modulación es del 100%, entonces $K = A_c/4$.

(b) Demuestre que el rendimiento de transmisión correspondiente es del 30,43%.

(c) Dibuje el espectro de la señal modulada AM.

Solución:

(a) Sea $m(t) = K[2\cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_m t) + 3\cos(5\omega_m t)]$

$$x_{AM}(t) = \{A_c + K[2\cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_m t) + 3\cos(5\omega_m t)]\}\cos(\omega_c t)\ ; \quad a = \frac{K|\min m(t)|}{A_c} = 1$$

Para determinar |min m(t)| se calcula $m'(t) = \frac{d}{dt}m(t) = 0$. Entonces,

$$m'(t) = -2\omega_m \operatorname{sen}(\omega_m t) - 2\omega_m \operatorname{sen}(2\omega_m t) - 15\omega_m \operatorname{sen}(5\omega_m t) = 0$$

Los valores de t que hacen m'(t) = 0 son: $t_1 = \frac{1}{2f_m};\ t_2 = \frac{1}{4f_m};\ t_3 = \frac{1}{10f_m}$

El valor mínimo de m(t) se obtiene cuando $t = \frac{1}{2f_m}$, en cuyo caso,

$$|\min m(t)| = m(\frac{1}{2f_m}) = |-4| = 4 \quad \text{y} \quad K = \frac{A_c}{4}$$

(b) $x_{AM}(t) = [A_c + \frac{A_c}{4}m(t)]\cos(\omega_c t) = A_c\cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}m(t)\cos(\omega_c t)$

Potencia Util: $P_B = \frac{1}{2}(\frac{A_c}{4})^2 < m^2(t) >$

Pero como $< m^2(t) >= \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3)^2 = 7 \qquad P_B = \frac{7A_c^2}{32}$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{7}{32}A_c^2$

Rendimiento $E\% = \dfrac{\frac{7}{32}A_c^2}{(\frac{1}{2} + \frac{7}{32})A_c^2}100 = 30{,}435\%$

(c) $x_{AM}(t) = \left[A_c + \frac{A_c}{4}2\cos(\omega_m t) + \frac{A_c}{4}\cos(2\omega_m t) + \frac{A_c}{4}3\cos(5\omega_m t)\right]\cos(\omega_c t)$

$$x_{AM}(t) = A_c\cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c}{4}\cos[(\omega_c - \omega_m)t] +$$
$$+ \frac{A_c}{8}\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + \frac{A_c}{8}\cos[(\omega_c - 2\omega_m)t] +$$

$$+\frac{3A_c}{8}\cos[(\omega_c+5\omega_m)t]+\frac{3A_c}{8}\cos[(\omega_c-5\omega_m)t]$$

El espectro $X_{AM}(f)$ de esta expresión se muestra en la Fig. P6.17.

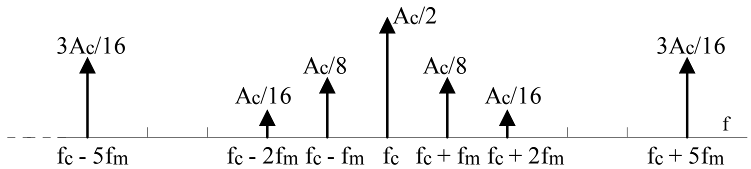


Fig. P6.17.

6.18. En la Fig. 6.66 del Texto se muestra la envolvente positiva de una señal AM. Se sabe que m(t) posee una componente continua y que la portadora tiene una potencia de 10,125 W.

(a) Demuestre que el índice de modulación es del 69,2% y que el rendimiento de transmisión es del 13,8%.

(b) Si el filtro de salida tiene un ancho de 800 kHz, ganancia unitaria y centrado en la portadora, que suponemos es de 100 kHz, demuestre que el rendimiento de transmisión de la señal AM es del 12,2%. Dibuje también el espectro de la señal transmitida.

(c) Repita las partes (a) y (b) en el caso de que m(t) no contenga una componente continua.

(a) Solución:
Puesto que m(t) contiene una componente continua,

$$m(t)=b_o+m_o(t),\quad \text{donde} \quad <m_o(t)>=0\,.$$

$$m_o(t)=|\min m_o(t)|m_{on}(t)$$

Se construye entonces la Fig. P6.18(a).

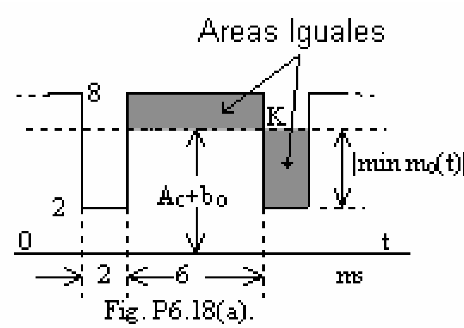


Fig. P6.18(a).

De la Fig. P6.18(a), para áreas iguales,

$$6x10^{-3}K=2x10^{-3}|\min m_o(t)|.\quad \text{También,}\quad |\min m_o(t)|+K=6$$

De estas ecuaciones obtenemos $K=1{,}5$ y $|\min m_o(t)|=4{,}5$

$$\frac{A_c^2}{2}=10{,}125\therefore A_c=\sqrt{20{,}25}=4{,}5$$

De la Fig. P6.18(a), $A_c + b_o + K = 8$, de donde $b_o = 2$.

Con estos datos la señal AM es

$$x_{AM}(t) = \left[A_c + b_o + |\min m_o(t)| m_{on}(t)\right]\cos(\omega_c t)$$

$$x_{AM}(t) = (A_c + b_o)\left[1 + \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o} m_{on}(t)\right]\cos(\omega_c t), \text{ de donde } a\% = \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o}100$$

El índice de modulación AM será $a\% = 69{,}23\%$

$$x_{AM}(t) = \left[6{,}5 + 4{,}5 m_{on}(t)\right]\cos(\omega_c t) = 6{,}5\cos(\omega_c t) + 4{,}5 m_{on}(t)\cos(\omega_c t)$$

Potencia Util: $P_B = \frac{1}{2}(4{,}5)^2 < m_{on}^2(t) >$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(6{,}5)^2 + P_B$

Hay que calcular $< m_{on}^2(t) >$. La señal $m_{on}(t)$ tiene la forma de la Fig. P6.18(b), cuya potencia es

$$< m_{on}^2(t) = \frac{2}{8x10^{-3}}\left[\int_0^{3x10^{-3}} \frac{1}{9} dt + \int_{3x10^{-3}}^{4x10^{-3}} dt\right] = \frac{1}{3} W$$

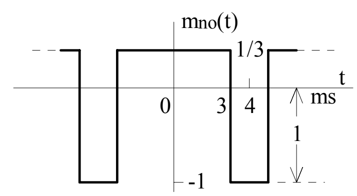


Fig. P6.18(b)

El rendimiento de transmisión será entonces

$$E\% = \frac{(4{,}5)^2 < m_{on}^2(t) >}{(6{,}5)^2 + (4{,}5)^2 < m_{on}^2(t) >} 100 = 13{,}776\%$$

(b) $B = 800$ kHz; $f_c = 100$; Con los datos de la parte (d) la señal AM es

$$x_{AM}(t) = 6{,}5\cos(\omega_c t) + 4{,}5 m_{on}(t)\cos(\omega_c t); \quad f_m = \frac{1}{T_m} = 125$$

Sea $M_{on}(f)$ el espectro de $m_{on}(t)$; el espectro de la señal AM será

$$X_{AM}(f) = \frac{6{,}5}{2}\left[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)\right] + \frac{4{,}5}{2}\left[M_{on}(f + f_c) + M_{on}(f - f_c)\right]$$

Hay que determinar el espectro $M_{on}(f)$ de $m_{on}(t)$, donde $m_{on}(t)$ se muestra en la Fig. P6.18(b). El coeficiente de Fourier es entonces,

$$X_n = 2x125\left[\int_0^{3x10^{-3}} \frac{1}{3}\cos(2\pi n125t)dt - \int_{3x10^{-3}}^{4x10^{-3}} \cos(2\pi n125t)dt\right]$$

Efectuando la integración, $X_n = \mathrm{sinc}(\frac{3n}{4})$; $X_o = 0$

$$X_1 = 0{,}3;\ X_2 = -0{,}212;\ X_3 = 0{,}1;\ X_4 = 0;\ X_5 = -0{,}06;\ X_6 = 0{,}071;\ X_7 = -0{,}043;\ X_8 = 0$$

$$M_{on}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\frac{3n}{4})\delta(f - nf_m); \qquad f_m = 125\,\text{Hz}$$

No hay componentes para n múltiplos de 4.

$$X_{AM}(f) = 3{,}25\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right] + 2{,}25\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\left\{\delta[f + (f_c - nf_m)] + \delta[f - (f_c + nf_m)]\right\}$$

El espectro de esta señal se muestra en la Fig. P6.18(c) (frecuencias positivas solamente.

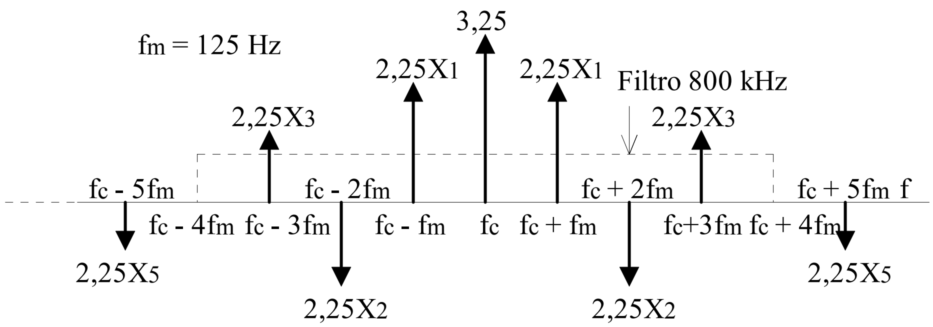


Fig. P6.18(c).

El espectro de la señal transmitida es el contenido dentro del filtro pasabanda centrado en f_c, con un ancho de banda de 800 kHz y ganancia unitaria.

La señal transmitida es, de la Fig. P6.18(c),

$$\begin{aligned} x_{AMT}(t) = 2\{3{,}25\cos(\omega_c t) &+ 2{,}25X_1\cos[2\pi(f_c - 125)t] + 2{,}25X_1\cos[2\pi(f_c + 125)t] - \\ &- 2{,}25X_2\cos[2\pi(f_c - 250)t] - 2{,}25X_2\cos[2\pi(f_c + 250)t] + \\ &+ 2{,}25X_3\cos[2\pi(f_c - 375)t] + 2{,}25X_3\text{cox}[2\pi(f_c + 375)t]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{AMT}(t) = 6{,}5\cos(\omega_c t) &+ 1{,}35\cos[2\pi(f - 125)t] + 1{,}35\cos[2\pi(f_c + 125)t] - \\ &- 0{,}955\cos[2\pi(f_c - 250)t] - 0{,}955\cos[2\pi(f_c + 250)t] + \\ &+ 0{,}45\cos[2\pi(f_c - 375)t] + 0{,}45\cos[2\pi(f_c + 375)t] \end{aligned}$$

Potencia Util: $P_B = 2\left[\frac{1}{2}(1{,}35)^2\right] + 2\left[\frac{1}{2}(-0{,}955)^2\right] + 2\left[\frac{1}{2}(0{,}45)^2\right] = 2{,}939\,\text{W}$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(6{,}5)^2 + P_B = 24{,}064\,\text{W}$

Rendimiento $E\% = \frac{\text{Potencia Util}}{\text{Potencia Total}}100 = 12{,}213\%$

(c) La señal m(t) no contiene una componente continua. En este caso $b_o = 0$, y la envolvente positiva de la señal AM tiene la forma de la Fig. P6.18(d).

$A_c = 4{,}5$. De la Fig. P6.18(d) para áreas iguales,

$6x10^{-3}K = 2x10^{-3}|\min m(t)|$.

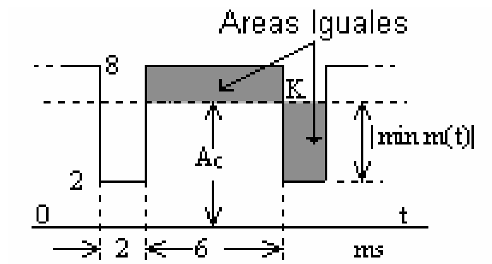


Fig. P6.18(d).

También,

$K + |\min m(t)| = 6.$ De donde,

$|\min m(t)| = 4{,}5 \quad \text{y} \quad K = 1{,}5$

Con estos datos, la señal AM será

$x_{AM}(t) = [4{,}5 + 4{,}5m_n(t)]\cos(\omega_c t) = 4{,}5[1 + (1)m_n(t)]\cos(\omega_c t)$

El índice de modulación es ahora a = 1 = 100%.

Veamos ahora el rendimiento de transmisión.

$x_{AM}(t) = 4{,}5\cos(\omega_c t) + 4{,}5m_n(t)\cos(\omega_c t)$

Potencia Util: $P_B = \frac{1}{2}(4{,}5)^2 < m_n^2(t) >$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(4{,}5)^2 + P_B$

Hay que calcular $< m_n^2(t) >$. Como $m_n(t)$ tiene la misma forma que $m_{on}(t)$, Fig. P6.18(b), entonces $< m_n^2(t) >= \frac{1}{3}$, y el rendimiento de transmisión será

$$E\% = \frac{\frac{1}{2}(4{,}5)^2 \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}(4{,}5)^2 + \frac{1}{2}(4{,}5)^2 \frac{1}{3}} 100 = 25\%$$

Pasemos ahora a la señal transmitida $x_{AMT}(t)$:

$x_{AM}(t) = 4{,}5\cos(\omega_c t) + 4{,}5m_n(t)\cos(\omega_c t)$

Sea $M_n(f)$ el espectro de $m_n(t)$; pero como $m_n(t)$ tiene la misma forma que $m_{on}(t)$, Fig. P6.18(b), entonces,

$M_n(f) = M_{on}(f)$, el espectro de $x_{AM}(t)$ será

$$X_{AM}(f) = \frac{4,5}{2}\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right] + \frac{4,5}{2}\left[M_n(f+f_c) + M_n(f-f_c)\right]$$

Como $M_n(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_m)$, donde $X_n = \mathrm{sinc}(\frac{3n}{2})$ y $f_m = 125\mathrm{Hz}$

$$X_{AM}(f) = 2,25\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right] + 2,25\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\left[\delta[f+(f_c - nf_m)] + \delta[f-(f+nf_m)]\right]$$

Este espectro es igual al espectro mostrado en la Fig. P6.18(c), con la única diferencia que ahora la amplitud de la portadora es 2,25 en vez de 3,25. En este caso, la señal transmitida $x_{AMT}(t)$ será

$$\begin{aligned} x_{AMT}(t) = 4,5\cos(\omega_c t) + 1,35\cos[2\pi(f_c - 125)t] + 1,35\cos[2\pi(f_c + 125)t] - \\ - 0,955\cos[2\pi(f_c - 250)t] - 0,955\cos[2\pi(f_c + 250)t] + \\ + 0,45\cos[2\pi(f_c - 375)t] + 0,45\cos[2\pi(f_c + 375)t] \end{aligned}$$

Potencia Util: $P_B = 2,939\,\mathrm{W}$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(4,5)^2 + 2,939 = 13,064\,\mathrm{W}$

Rendimiento: E% = 22,497%

Nótese que el rendimiento aumentó de 12,213% a 22,497%. Esto es consecuencia de no tener que gastar potencia en transmitir una componente continua que no lleva información.

6.19. Consideremos un sistema AM con modulación sinusoidal e índice de modulación del 100%.

(a) Demuestre que si la banda lateral superior está atenuada en un factor de 1/2, la señal AM se puede escribir en la forma

$$x_{AM}(t) = E(t)\cos[2\pi f_c t - \Psi(t)], \text{ donde } E(t) = \sqrt{\frac{17}{16} + \frac{3}{2}\cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{2}\cos^2(2\pi f_m t)}$$

y $\Psi(t) = \mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{sen}(2\pi f_m t)}{4 + 3\cos(2\pi f_m t)}\right]$. Sugerencia: Utilice el diagrama fasorial

(b) Demuestre también que si la banda lateral superior está desfasada en 180°, entonces

$$x_{AM}(t) = A_c\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2(2\pi f_m t)}\cos\{2\pi f_c t - \mathrm{arctg}[\mathrm{sen}(2\pi f_m t)]\}$$

Solución:

$m(t) = A_m \cos(\omega_m t); \quad a\% = 100\%; \quad a = 1$

(a) $x_{AM}(t) = [A_c + A_m \cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = A_c[1 + \frac{A_m}{A_c}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

puesto que $a = 1 = \frac{A_m}{A_c}$, $\quad x_{AM}(t) = A_c[1 + \cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

$$x_{AM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

Si la banda lateral superior está atenuada en 50%, entonces,

$$x_{AM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

cuyo diagrama fasorial se muestra en la Fig. P6.19(a)

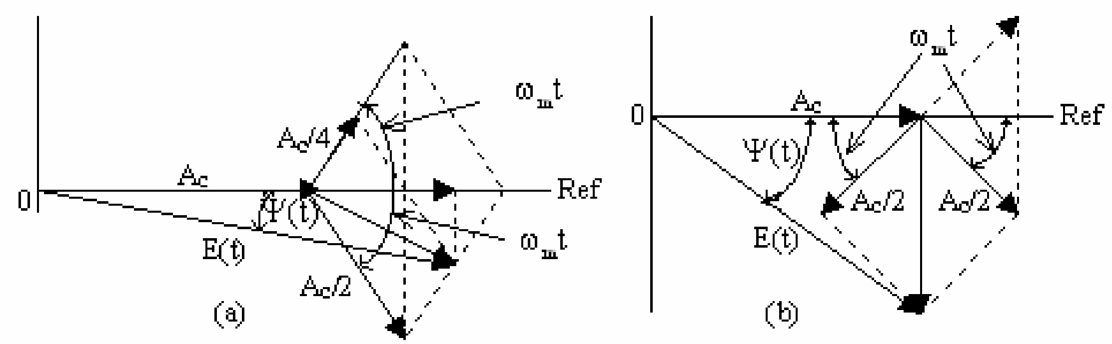


Fig. P6.19.

De la Fig. P6.19(a),

$$E^2(t) = \left[A_c + \frac{A_c}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{A_c}{4}\cos(\omega_m t)\right]^2 + \left[\frac{A_c}{2}\mathrm{sen}(\omega_m t) - \frac{A_c}{4}\mathrm{sen}(\omega_m t)\right]^2$$

$E^2(t) = A_c^2\left\{\left[1 + \frac{3}{4}\cos(\omega_m t)\right]^2 + \frac{1}{16}\mathrm{sen}^2(\omega_m t)\right\}$. Desarrollando, llegamos a

$$E(t) = A_c\sqrt{\frac{17}{16} + \frac{3}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{1}{2}\cos^2(\omega_m t)}$$

Para el ángulo $\Psi(t)$, del diagrama de la Fig. P6.19(a):

$$\Psi(t) = \mathrm{arctg}\frac{\frac{A_c}{4}\mathrm{sen}(\omega_m t)}{A_c + \frac{3}{4}A_c\cos(\omega_m t)} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{sen}(\omega_m t)}{4 + 3\cos(\omega_m t)}$$

Entonces, $x_{AM}(t) = E(t)\cos[\omega_c t - \Psi(t)]$. El signo menos de $\Psi(t)$ se debe a que E(t) está en atraso en relación con la portadora.

(b) Si la banda lateral superior está desfasada en 180°, la señal AM tendrá la forma

$$x_{AM}(t) = A_c\cos(\omega_c t) - \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

cuyo diagrama fasorial se muestra en la Fig. P6.19(b). Nótese que E(t) está en atraso en relación con la portadora. Del diagrama fasorial,

$$E^2(t) = A_c^2 + [2\frac{A_c}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \omega_m t)]^2 = A_c^2 + A_c^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_m t)$$

$$E(t) = A_c\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2(\omega_m t)}$$

$$\Psi(t) = \mathrm{arctg}\frac{A_c\,\mathrm{sen}(\omega_m t)}{A_c} = \mathrm{arctg}[\mathrm{sen}(\omega_m t)]$$

$$x_{AM}(t) = E(t)\cos[\omega_c t - \Psi(t)]$$

6.20. Sea la señal AM con modulación sinusoidal de la Fig. 6.67 del Texto.

(a) Determine su índice de modulación

(b) Dibuje su espectro para $f_c = 1600\,\mathrm{Hz}$ y $f_m = 100\,\mathrm{Hz}$. Demuestre que su rendimiento de transmisión es del 5,26%

(c) ¿En cuánto hay que aumentar (o disminuir) la amplitud de la portadora para que su índice de modulación sea del 10%? [Respuesta: Hay que aumentar A_c en 175V]

Solución:

(a) De la Fig. 6.67 del Texto,

$$E_{max} = 100\mathrm{V};\quad E_{min} = 50\mathrm{V}$$

De la expresión (4.18) del Texto,

$$a\% = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}100 = 33{,}33\%$$

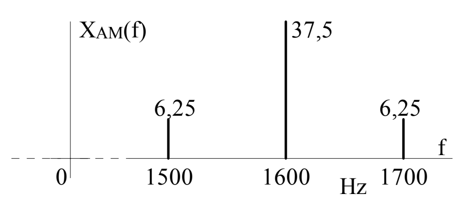


Fig. P6.20.

(b) De la Fig. 6.6(a) del Texto,

$$A_c = \frac{E_{max} + E_{min}}{2} = 75\mathrm{V};\quad A_m = \frac{E_{max} - E_{min}}{2} = 25\mathrm{V}$$

$$x_{AM}(t) = [75 + 25\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) \qquad f_c = 1600\mathrm{Hz};\ f_m = 100\mathrm{Hz}$$

$$x_{AM}(t) = 75\cos(\omega_c t) + 12{,}5\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + 12{,}5\cos[2\pi(f_c - f_m)t]$$

cuyo espectro se muestra en la Fig. P4.20.

Potencia Util: $P_B = 2\frac{1}{2}(12{,}5)^2 = 156{,}3\text{W}$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(75)^2 + P_B = 2969\text{W}$

Rendimiento: $E\% = \frac{P_B}{P_t}100 = 5{,}263\%$

(c) $x_{AM}(t) = [A_c + 25\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = A_c[1 + \frac{25}{A_c}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

$$a = \frac{25}{A_c} = 0{,}1 \therefore A_c = 250\text{V}$$

Hay que aumentar A_c de 75V a 250V, es decir, hay que aumentar A_c en 175V.

6.21. En un sistema AM la potencia de la portadora sin modular, referida a una resistencia de 50 Ohm, es de 100W. Cuando se modula con una señal sinusoidal de amplitud A_m, se encuentra que la potencia promedio de la salida aumenta en un 50%.En estas condiciones,

(a) Determine la potencia promedio de cada banda lateral y el valor de A_m

(b) Demuestre que el índice de modulación es del 100%

(c) Demuestre que el valor máximo de la señal modulada es de 200V

(d) Determine la potencia total de salida si la amplitud de la señal moduladora se reduce a la mitad

Solución:

$$100\text{W} = \frac{1}{50}[\frac{A_c^2}{2}] \therefore A_c = 100\text{V}$$

(a) $x_{AM}(t) = [100 + A_m\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

$$x_{AM}(t) = 100\cos(\omega_c t) + \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_m}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

$$< x_{AM}^2(t) >= \frac{1}{2}(100)^2 + 2\frac{1}{2}(\frac{A_m}{2})^2 = 5000 + \frac{A_m^2}{4}$$

pero, $\frac{A_m^2}{4} = 2500 \therefore A_m = 100\text{V}$

La potencia en cada banda lateral es $P_{B1} = \frac{1}{2}(\frac{A_m}{2})^2 = \frac{A_m^2}{8} = 1250\text{W}$

y la potencia total, $P_t = 5000 + 2x1250 = 7500W$

(b) Puesto que $A_c = 100V$ y $A_m = 100V$, el índice de modulación es

$$a\% = \frac{A_m}{A_c}100 = 100\%$$

(c) $x_{AM}(t) = 100\cos(\omega_c t) + 50\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + 50\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$

Un valor máximo de $x_{AM}(t)$ ocurre para t = 0, entonces,

$$\max x_{AM}(t) = x_{AM}(0) = 100 + 50 + 50 = 200V$$

(d) Si la amplitud de la señal moduladora se reduce a la mitad, $A_m = 50$, de donde,

$$x_{AM}(t) = [100 + 50\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$$

$$x_{AM}(t) = 100\cos(\omega_c t) + 25\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + 25\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

La potencia total de salida será

$$< x_{AM}^2(t) > = \frac{1}{2}(100)^2 + 2\frac{1}{2}(25)^2 = 5625W$$

Nótese que al reducir la amplitud de la señal moduladora en un 50%, la potencia total se reduce en un 25%.

6.22. La señal de la Fig. 6.68 del Texto se aplica a la entrada de un detector de envolvente, Fig. 6.5(a) del Texto, donde R = 10^4 Ohm y C = 10 μF.

(a) Si el diodo es ideal, dibuje la forma de la señal de salida, calculando las correspondientes constantes de tiempo.

(b) Repita (a) si el diodo tiene una resistencia inversa de 30 kOhm y la directa de 1200 Ohm.

Solución:

El detector de envolvente es un elemento no lineal, de modo que en su análisis no se puede emplear métodos basados en la función de transferencia. En el presente caso usaremos el método "lineal por tramos (piece-wise, en inglés)".

(a) Diodo Ideal. Resistencia directa = r_p; resistencia inversa = ∞.

Sea el circuito de la Fig. P6.22(a) que representa al detector de envolvente cuando el diodo conduce, es decir, cuando $v_i(t)$ es positivo.

Cuando al circuito se le aplica un rectángulo (o un escalón), el capacitor se carga casi instantáneamente al valor máximo del rectángulo (o escalón). El tiempo de carga está limitado por la resistencia interna de la fuente, que suponemos muy pequeña.

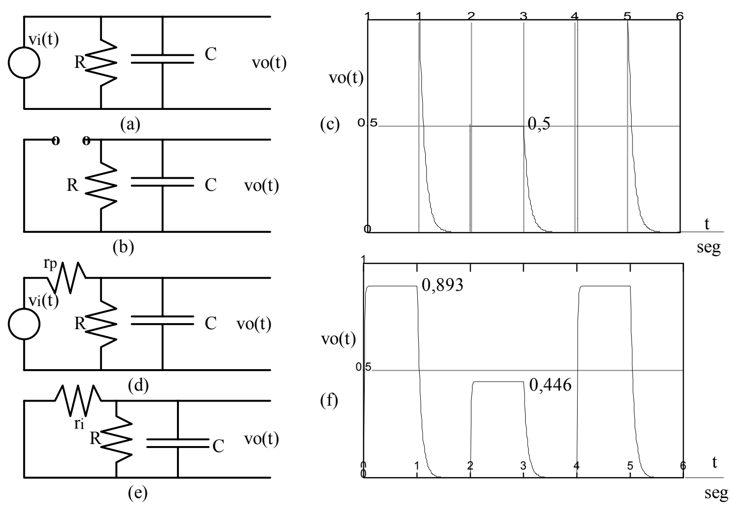


Fig. P6.22.

Cuando el rectángulo cae a cero, el capacitor queda cargado al valor máximo V_{max} del rectángulo. En este caso el circuito equivalente se muestra en la Fig. P6.22(b). El capacitor se descarga ahora a través de R, con una constante de tiempo RC; la ecuación de descarga tiene la forma

$$v_o(t) = V_{max}\exp(-\frac{t}{RC})$$

Sea entonces la señal de la Fig. 6.68 del Texto.

Para $t = 0^+$, el capacitor se carga casi instantáneamente al valor $V_{max} = 1$ y permanece en ese estado hasta el instante $t = 1$, es decir, la salida será

Para $0 < t < 1$, $v_o(t) \approx V_{1max}$, donde $V_{1max} = 1$

En el intervalo $1 \le t < 2$, $v_o(t) = V_{1max}\exp(-\frac{t-1}{RC})$, donde $RC = 0{,}1$

La señal $v_o(t)$ decae rápidamente, de modo que para $t = 1$, $v_o(t) \approx 0$

El procedimiento se repite para los otros dos rectángulos; en efecto,

En el intervalo $2 < t < 3$, $v_o(t) \approx V_{2max}$, donde $V_{2max} = \frac{1}{2}$

En el intervalo $3 \le t \le 4$, $v_o(t) = V_{2max}\exp(-\frac{t-3}{RC})$ y para $t = 4$, $v_o(t) \approx 0$

En el intervalo $4 < t < 5$, $v_o(t) \approx V_{1max}$

En el intervalo $5 \le t \le 6$, $v_o(t) = V_{1max}\exp(-\frac{t-5}{RC})$, y para $t = 6$, $v_o(t) \approx 0$

En la Fig. P6.22(c) se muestra la forma de la señal de salida $v_o(t)$.

Nótese que utilizamos signos de aproximación ($\approx$) porque los exponenciales, tanto en carga como en descarga, nunca llegan a un valor para $t < \infty$.

(b) El diodo es real: resistencia directa r_p = 1200 Ohm; resistencia inversa $r_i = 3x10^4$.

En este caso los circuitos equivalentes se muestran en la Fig. P6.22(d) y (e).

Cuando $v_i(t)$ es positiva, el diodo conduce y el capacitor se carga a través de r_p hasta el voltaje $\frac{R}{r_p + R}V_{imax} = V'_{imax}$. La ecuación de carga es,

para $0 \le t < t_o$, $v_o(t) = V'_{imax}[1 - \exp(-\frac{t}{r_p C})]$, y para $t = t_o$, $v_o(t) \approx V'_{imax}$

Cuando $v_o(t)$ cae a cero en el instante $t = t_o$, el capacitor se descarga a través del paralelo de R y r_i, como se muestra en la Fig. P.22(e) . La ecuación de descarga es

Para $t_o \le t < t_1$, $v_o(t) = V'_{imax}\exp(-\frac{t - t_o}{R_i C})$, donde $R_i = \frac{r_i R}{r_i + R}$

El procedimiento es el mismo para los otros rectángulos.

Sea entonces la señal de la Fig. 6.68 del Texto.

Nótese que $V'_{1max} = \frac{R}{r_p + R}V_{1max}$ y $V'_{2max} = \frac{R}{r_p + R}V_{2max}$; con $V_{1max} = 1$ y $V_{2max} = \frac{1}{2}$

En el intervalo $0 \le t < 1$, $v_o(t) = V'_{1max}[1 - \exp(-\frac{t}{r_p C})]$, y para $t = 1$, $v_o(t) \approx V'_{1max}$

En el intervalo $1 \le t < 2$, $v_o(t) = V'_{1max}\exp(-\frac{t-1}{R_i C})$, y para $t = 2$, $v_o(t) \approx 0$

En el intervalo $2 \le t < 3$, $v_o(t) = V'_{2max}[1 - \exp(-\frac{t-2}{r_p C})]$, y para $t = 3$, $v_o(t) \approx V'_{2max}$

En el intervalo $3 \le t < 4$, $v_o(t) = V'_{2max}\exp(-\frac{t-3}{R_i C})$, y para $t = 4$, $v_o(t) \approx 0$

En el intervalo $4 \le t < 5$, $v_o(t) = V'_{1max}[1 - \exp(-\frac{t-4}{r_p C})$, y para $t = 5$, $v_o(t) \approx V'_{1max}$

Finalmente, para $5 \le t$, $v_o(t) = V'_{1max}\exp(-\frac{t-5}{R_i C})$

En la Fig. P6.22(f) se muestra la señal de salida $v_o(t)$. Nótese la influencia de las resistencias r_p y r_i del diodo real, para los mismos valores de R y C.

6.23. Un tono de prueba de 1 kHz modula en AM una portadora de 1 MHz con un índice de modulación del 50%. En el receptor la señal AM llega contaminada por interferencia aditiva representada por una señal sinusoidal de 1002 kHz cuya amplitud es el 1% de la portadora sin modular.

Demuestre que a la salida del detector de envolvente la salida interferente estará a 33,98 dB por debajo del tono de prueba.

Solución:

Modulación AM. $f_m = 1\text{kHz};\ f_c = 1\text{MHz} = 1000\text{kHz};\quad a = \dfrac{A_m}{A_c} = \dfrac{1}{2}$

Frecuencia interferente, $f_{ci} = 1002\,\text{kHz} = f_c + f_i$ donde $f_i = 2$ kHz; $A_{ci} = \dfrac{A_c}{100}$

Nótese que f_i es del mismo orden que f_m y por lo tanto representa una interferencia.

$$x_{AM}(t) = [A_c + A_m\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = [A_c + \frac{A_c}{2}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$$

La señal recibida será entonces,

$$x_r(t) = x_{AM}(t) + \frac{A_c}{100}\cos[(\omega_c + \omega_i)t]$$

$$x_r(t) = A_c\cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{4}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c}{4}\cos[(\omega_c - \omega_m)t] + \frac{A_c}{100}\cos[(\omega_c + \omega_i)t]$$

Hay que expresar esta señal en la forma polar $x_r(t) = E(t)\cos[\omega_c t + \Psi(t)]$, donde $E(t)$ es su envolvente, la cual es detectada por el detector de envolvente del receptor. El diagrama fasorial de $x_r(t)$, en relación con la portadora, tiene la forma mostrada en la Fig. P6.23.

Del diagrama fasorial,

$$E^2(t) = \left[A_c + \frac{2A_c}{4}\cos(\omega_m t) + \frac{A_c}{100}\cos(\omega_i t)\right]^2 + \left[\frac{A_c}{100}\operatorname{sen}(\omega_i t)\right]^2$$

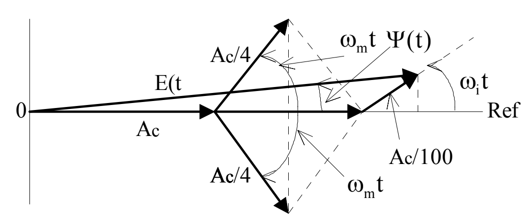


Fig. P6.23.

$$E(t) = A_c\sqrt{\left[1 + \frac{1}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{A_c}{100}\cos(\omega_i t)\right]^2 + \frac{1}{10^4}\operatorname{sen}^2(\omega_i t)}$$

El término dentro de los corchetes es mucho mayor que el otro, de modo que la salida del detector de envolvente será

$$E_o(t) = A_c\left[1 + \frac{1}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{1}{100}\cos(\omega_i t)\right]$$

Sea P_B la potencia del tono de prueba, y P_i la potencia de la señal interferente, entonces,

$$P_B = \frac{1}{2}(\frac{A_c}{2})^2 = \frac{A_c^2}{8};\quad P_i = \frac{1}{2}(\frac{A_c}{100})^2 = \frac{A_c^2}{2x10^4}$$

$$\frac{P_B}{P_i} = \frac{2x10^4 A_c^2}{8A_c^2} = \frac{10^4}{4} = 2500,\quad \text{y en dB, } \left[\frac{P_B}{P_i}\right]_{dB} = 10\log_{10}(\frac{P_B}{P_i}) = 33{,}98\,\text{dB}$$

La señal interferente está a 33,98 dB por debajo del tono de prueba.

6.24. En la Fig. 6.69 del Texto se muestra el modulador de Weaver. Si m(t) es de banda limitada f_m,

(a) Demuestre que la señal de salida es una señal modulada SSB: de banda lateral superior cuando se toma el signo "+", y de banda lateral inferior cuando se toma el signo "-". El ancho de banda de los filtros es B.

(b) Sea $m(t) = B\text{sinc}^2(Bt)$, con $f_c = 4B$ y con el signo "+". Dibuje el espectro en los puntos en los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

(c) ¿Por qué este modulador es más sencillo de instrumentar que el modulador por desplazamiento de fase, Fig. 6.12(f) del Texto?

Solución:

(a) Sea el modulador de Weaver mostrado en la Fig. 6.69 del Texto.

Supongamos que m(t) tiene un espectro como el mostrado en la Fig. P6.24(1)(a).

Por la rama superior: $x_1(t) = m(t)\cos(2\pi Bt)$, cuyo espectro se muestra en la Fig. P6.24(1)(b), Punto 1. Esta señal se pasa por el filtro pasabajo de ancho de banda B, cuya salida, Punto 2, se muestra en la Fig.P6.24(1)(c).

Atención: nótese que si $B >> f_m$, entonces el filtro puede ser pasabanda, de ancho de banda f_m y cuya frecuencia de corte superior es B.

En el Punto 3, la señal $x_2(t)$ sale multiplicada por $\cos[2\pi(f_c + B)t]$, tomando el signo "+". La señal $X_3(f)$ tendrá la forma dada en la Fig. P6.24(1)(d).

Vamos ahora por la rama inferior.

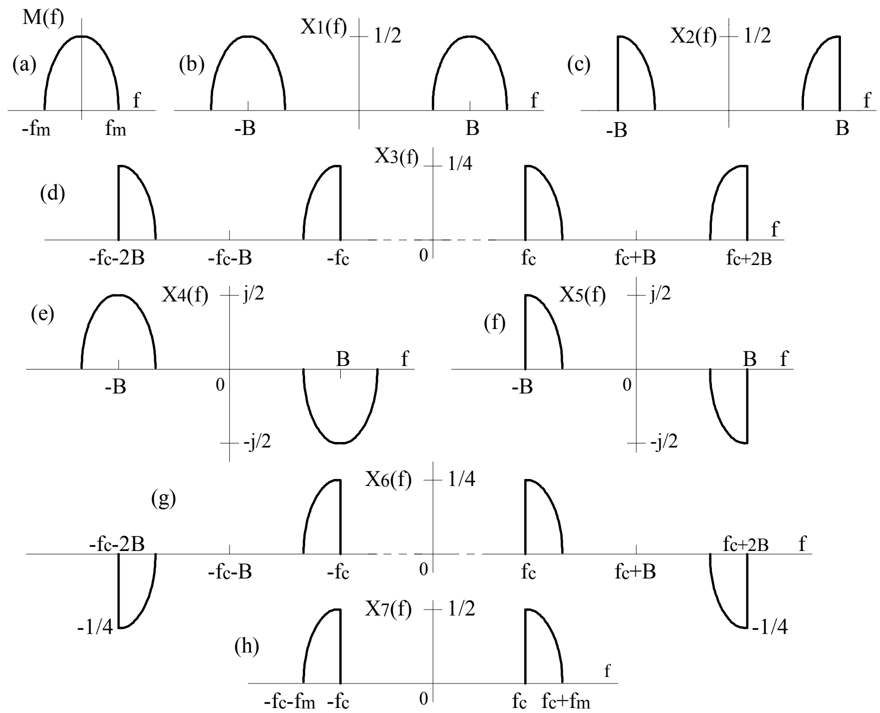


Fig. P6.24(1).

En el Punto 4, $x_4(t) = m(t)\,\text{sen}(2\pi Bt)$, cuyo espectro se muestra en la Fig. P6.24(1)(e). Esta señal pasa por el filtro pasabajo de ancho de banda B y su salida, Punto 5, es $x_5(t)$ y tiene la forma mostrada en la Fig. P6.24(1)(f).

En el Punto 6 la señal $x_5(t)$ sale multiplicada por $\text{sen}[2\pi(f_c + B)t]$ y su espectro $X_6(f)$ tendrá la forma dada en la Fig. P6.24(1)(g).

En el Punto 7 se tiene que $X_7(f) = X_3(f) + X_6(f)$, donde $X_7(f)$ tiene la forma mostrada en la Fig. P6.24(1)(h). Puede observarse que $X_7(f)$ es el espectro de una señal modulada SSB superior.

El lector puede seguir el mismo procedimiento cuando se toma el signo "-" y verificar que la señal de salida es en efecto una señal modulada SSB inferior.

(b) Si $m(t) = B\mathrm{sinc}^2(Bt) \Leftrightarrow M(f) = \Lambda(\frac{f}{B})$ y siguiendo el mismo procedimiento de la parte (a), los espectros correspondientes se muestran en la Fig. P6.24(2).

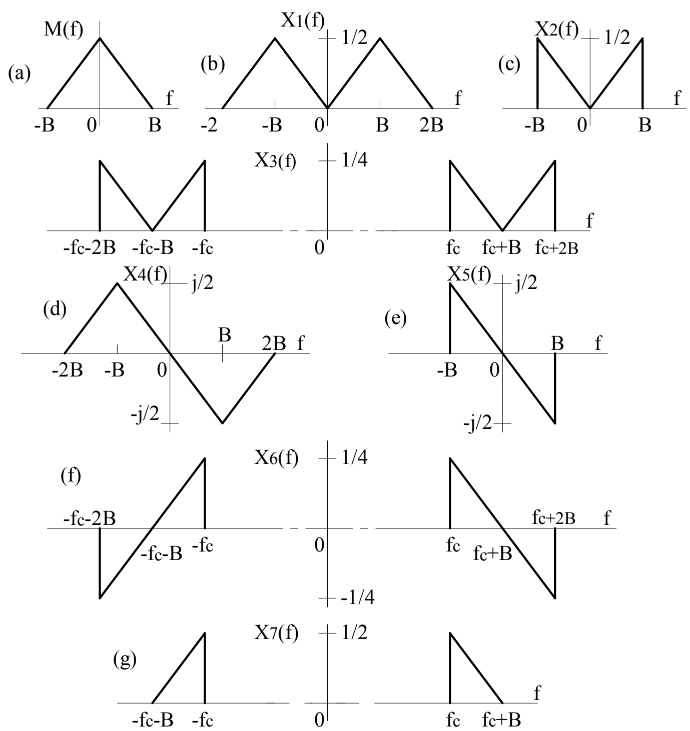


Fig. P6.24(2)

(c) El modulador de Weaver es más fácil de instrumentar porque no utiliza filtros de Hilbert, que son de más difícil diseño que los filtros convencionales utilizados en el modulador de Weaver.

6.25. En el modulador SSB por desplazamiento de fase, Fig. 6.12(f) del Texto, el transformador de Hilbert produce un desfase de $\pi/2$ a todas las componentes de frecuencia de m(t). Sin embargo, en la práctica esta transformación es de difícil realización física. Supongamos entonces que la transformación no es perfecta y que el desfase producido es de $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, donde $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Sea también $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ y consideremos la banda lateral inferior.

(a) Demuestre que a la salida del demodulador habrá una componente de distorsión dada por

$$y_d(t) = A_c\{[\cos(\alpha) - 1]\mathrm{sen}(2\pi f_m t) - \mathrm{sen}(\alpha)\cos(2\pi f_m t)\}\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

(b) A la salida del circuito se coloca un filtro pasabajo. Demuestre que si la entrada del circuito es una señal SSB con modulación sinusoidal de la forma $x_r(t) = A_r \cos[2\pi(f_c - f_m)t]$, la salida del filtro pasabajo será

$$y(t) = A_r A_c \cos(\alpha/2)\cos(2\pi f_m t + \frac{\alpha}{2})$$

Solución:

(a) $m(t) = \cos(\omega_m t)$

Consideremos el modulador SSB por desplazamiento de fase de la Fig. 6.12(f) del Texto.

Por la rama superior, a la salida del moduladoer balanceado,

$$x_1(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t) = A_c \cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t)$$

Por la rama inferior.

El seudofiltro de Hilbert produce un desfase de $(\pi/2+\alpha)$ a todas las señales de entrada. Puesto que la entrada al filtro es $m(t) = \cos(\omega_m t)$, la salida del filtro, que llamaremos $m_T(t)$, será:

$$m_T(t) = \cos[\omega_m t - (\frac{\pi}{2}+\alpha)] = -\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\omega_m t)$$

Entonces, a la salida del modulador balanceado inferior,

$$x_2(t) = A_c\left[-\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\omega_m t)\right]\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

La salida del sumador será: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$y(t) = A_c\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t) - A_c\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t) + A_c\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

pero la salida SSB inferior tiene la forma

$$y_{SSB}(t) = A_c\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t) + A_c\,\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

entonces sumamos y restamos de y(t) la expresión $A_c\,\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$. Por consiguiente,

$$y(t) = \left[A_c\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t) + A_c\,\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)\right] - A_c\,\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t) -$$
$$- A_c\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t) + A_c\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

$$y(t) = y_{SSB}(t) + A_c\,\mathrm{sen}(\omega_c t)\left\{\mathrm{sen}(\omega_m t)[\cos(\alpha)-1] - \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t)\right\}$$

$$y(t) = y_{SSB}(t) + y_d(t)$$

donde $y_d(t) = A_c\left\{[\cos(\alpha)-1]\mathrm{sen}(\omega_m t) - \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\omega_m t)\right\}\mathrm{sen}(\omega_c t)$

$y_d(t)$ representa un término de distorsión.

Nótese que si $\alpha = 0$, entonces $y_d(t) = 0$ e $y(t) = y_{SSB}(t)$

(b) La entrada al circuito es ahora $x_r(t) = A_r \cos[2\pi(f_c - f_m)t]$ que representa una banda lateral inferior. El circuito va a trabajar ahora como demodulador.

Por la rama superior, $x_1(t) = A_c A_r \cos[(\omega_c - \omega_m)t]\cos(\omega_c t)$

Si la entrada al seudofiltro de Hilbert es $x_r(t) = A_r \cos[(\omega_c - \omega_m)t]$, su salida, que llamaremos $x_T(t)$, será:

$$x_T(t) = A_r \cos[(\omega_c - \omega_m)t - (\frac{\pi}{2} + \alpha)]$$

$$x_T(t) = A_r \cos[(\omega_c - \omega_m)t]\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + A_r \operatorname{sen}[(\omega_c - \omega_m)t]\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

$$x_T(t) = -A_r \operatorname{sen}(\alpha)\cos[(\omega_c - \omega_m)t] + A_r \cos(\alpha)\operatorname{sen}[(\omega_c - \omega_m)t]$$

A la salida del modulador balanceado inferior,

$$x_2(t) = A_c[-A_r \operatorname{sen}(\alpha)\cos[(\omega_c - \omega_m)t] + A_r \cos(\alpha)\operatorname{sen}[(\omega_c - \omega_m)t]]\operatorname{sen}(\omega_c t)$$

$$x_2(t) = -A_c A_r \operatorname{sen}(\alpha)\cos[(\omega_c - \omega_m)t]\operatorname{sen}(\omega_c t) + A_c A_r \cos(\alpha)\operatorname{sen}[(\omega_c - \omega_m)t]\operatorname{sen}(\omega_c t)$$

A la salida del sumador,

$$y_s(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_c A_r \cos[(\omega_c - \omega_m)t]\cos(\omega_c t) - A_c A_r \operatorname{se}(\alpha)\cos[(\omega_c - \omega_r)t]\operatorname{sen}(\omega_c t) +$$
$$+ A_c A_r \cos(\alpha)\operatorname{sen}[(\omega_c - \omega_m)t]\operatorname{sen}(\omega_c t)$$

Desarrollando los productos obtenemos

$$y_s(t) = \frac{A_c A_r}{2}\{\cos[(2\omega_c - \omega_m)t] + \cos(\omega_m t) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}[(2\omega_c - \omega_m)t] -$$
$$- \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\omega_m t) + \cos(\alpha)\cos(\omega_m t) - \cos(\alpha)\cos[(2\omega_c - \omega_m)t]\}$$

Si en la salida del sumador hay un filtro pasabajo, él eliminará los términos de alta frecuencia quedando,

$$y(t) = \frac{A_c A_r}{2}\left[\cos(\omega_m t) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\omega_m t) + \cos(\alpha)\cos(\omega_m t)\right]$$

$$y(t) = \frac{A_c A_r}{2}[1 + \cos(\alpha)]\cos(\omega_m t) - \frac{A_c A_r}{2}\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\omega_m t)$$

Nótese que y(t) tiene la forma $y(t) = A\cos(\omega_m t) - B\,\mathrm{sen}(\omega_m t)$, que expresado en forma polar es $y(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos[\omega_m t + \phi(t)]$, donde $A = \frac{A_c A_r}{2}[1 + \cos(\alpha)]$, $B = \frac{A_c A_r}{2}\mathrm{sen}(\alpha)$ y $\phi(t) = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}$. Entonces, reemplazando términos, llegamos a

$\sqrt{A^2 + B^2} = A_c A_r \cos(\frac{\alpha}{2})$ y $\phi(t) = \frac{\alpha}{2}$, de donde,

$$y(t) = A_c A_r \cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\omega_m t + \frac{\alpha}{2})$$

Nótese que si $\alpha = 0$, $y(t) = A_c A_r \cos(\omega_m t)$ y se ha recuperado el mensaje $m(t) = \cos(\omega_m t)$.

6.26. Sea el sistema de la Fig. 6.70 del Texto, donde $x_i(t) = x_r(t) + n(t)$, siendo

$$x_r(t) = [A + m_1(t) + m_2(t)]\cos(\omega_c t) + [A + m_1(t) - m_2(t)]\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

$$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-8}\ \mathrm{W/Hz}$$

(a) Demuestre que $y_1(t) = A + m_1(t)$ e $y_2(t) = m_2(t)$, es decir, el sistema permite recobrar $m_1(t)$ y $m_2(t)$ a partir de $x_1(t)$.

(b) Suponga que el ruido n(t) es pasabanda de ancho de banda 2B y centrado en f_c. Demuestre que la potencia de ruido en el Punto 1 en $N_1 = -3{,}98\ \mathrm{dBm}$.

Solución:

(a) Hagamos $m_{11}(t) = [A + m_1(t) + m_2(t)]$ y $m_{12}(t) = [A + m_1(t) - m_2(t)]$

Cálculo de la Señal.

Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = x_r(t)\mathrm{sen}(\omega_c(t) = m_{11}(t)\cos(\omega_c t)\mathrm{sen}(\omega_c t) + m_{12}(t)\mathrm{sen}^2(t)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}m_{11}(t)\mathrm{sen}(2\omega_c t) + \frac{1}{2}m_{12}(t) - \frac{1}{2}m_{12}(t)\cos(2\omega_c t)$$

El filtro pasabajo bloquea las componentes de alta frecuencia; su salida será:

$$x_2(t) = \frac{1}{2}[A + m_1(t) + m_2(t)]$$

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$x_3(t) = x_r(t)\cos(\omega_c t) = m_{11}(t)\cos^2(\omega_c t) + m_{12}(t)\mathrm{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}m_{11}(t) + \frac{1}{2}m_{11}(t)\cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2}m_{12}(t)\operatorname{sen}(2\omega_c t)$$

La salida del filtro pasabanda de la rama inferior será

$$x_4(t) = \frac{1}{2}m_{12}(t) = \frac{1}{2}[A + m_1(t) - m_2(t)]$$

A la salida del sumador superior, Punto 1, la señal será

$$y_1(t) = x_2(t) + x_4(t) = \frac{1}{2}[A + m_1(t) + m_2(t)] + \frac{1}{2}[A + m_1(t) - m_2(t)]$$

$$y_1(t) = A + m_1(t)$$

La componente continua A generalmente se elimina en los amplificadores presentes.

La salida del sumador inferior, Punto 2, será

$$y_2(t) = x_2(t) - x_4(t) = \frac{1}{2}[A + m_1(t) + m_2(t)] - \frac{1}{2}[A + m_1(t) - m_2(t)]$$

$$y_2(t) = m_2(t)$$

(b) Cálculo de la Potencia de Ruido.

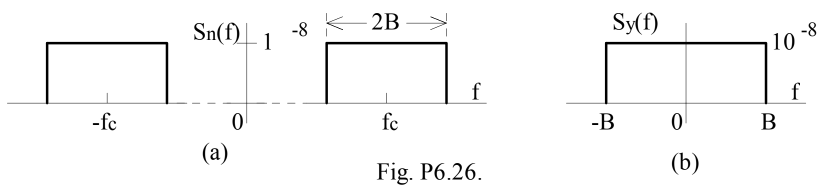


Fig. P6.26.

La densidad espectral de ruido a la entrada tiene la forma mostrada en la Fig. P6.26(a), donde

$$S_n(f) = 10^{-8}[\Pi(\frac{f + f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f - f_c}{2B})]$$

Por la rama superior.

A la salida de multiplicador superior y de acuerdo con el Teorema de la Modulación de Señales de Potencia,

$$S_1(f) = \frac{10^{-8}}{4}\left[S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c)\right], \text{ donde } \quad f_c > B$$

$$S_1(f) = \frac{10^{-8}}{4}\left[\Pi(\frac{f + 2f_c}{2B}) + \Pi(\frac{f}{2B}) + \Pi(\frac{f}{2B}) + \Pi(\frac{f - 2f_c}{2B})\right]$$

Al pasar por el filtro pasabajo superior, la salida será

$$S_2(f) = \frac{10^{-8}}{2}\Pi(\frac{f}{2B})$$

Por la rama inferior.

De acuerdo con el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia, la densidad espectral a la salida del amplificador inferior será igual a la densidad espectral del filtro pasabajo superior, es decir,

$$S_4(f) = \frac{10^{-8}}{2}\Pi(\frac{f}{2B})$$

La densidad espectral de salida del sumador superior será

$S_y(f) = S_2(f) + S_4(f) = 10^{-8}\Pi(\frac{f}{2B})$, cuya forma se muestra en la Fig. P6.26(b).

La correspondiente potencia de salida es

$$N_1 = 2Bx10^{-8} = 2x20x10^3x10^{-8} = 4x10^{-4} = -3{,}98\,\text{dBm}$$

6.27. Para la transmisión de dos señales se propone el circuito de la Fig. 6.71 del Texto, que utiliza una sola portadora de frecuencia f_c. La señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son de banda limitada f_{m1} y f_{m2}, respectivamente.

(a) ¿Qué características deben tener los filtros F1, F2 y F3 para poder transmitir y recobrar las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$? (con estas características se harán las partes (b) y (c) siguientes).

(b) Si $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son sinusoidales de frecuencias f_{m1} y f_{m2}, respectivamente, y amplitud unitaria, calcule la señal $x_c(t)$.

(c) Si $m_1(t) = f_{m1}\text{sinc}^2(f_{m1}t)$ y $m_2(t) = f_{m2}\text{sinc}(f_{m2}t)$, donde $f_{m2} = 2f_{m1}$ y $f_c >> f_{m2}$,

Dibuje el espectro de la señal transmitida $x_c(t)$.

(d) Diseñe un sistema para demodular $x_c(t)$ y recobrar $m_1(t)$ y $m_2(t)$.

Solución:

(a) Sea la Fig. 6.71 del Texto. Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = 2m_1(t)\cos(\omega_c t)$$

Tentativamente, el filtro F1 pudiera ser pasabanda, de ancho de banda $2f_{m1}$ y centrado en la frecuencia f_c. Suponemos ganancia unitaria.

La señal $x_1(t)$ pasa directamente por el filtro, de modo que la salida del filtro F1 será

$$x_2(t) = x_1(t) = 2m_1(t)$$

Por la rama inferior, a la salida delmultiplicador,

$$x_3(t) = 2m_2(t)\cos(\omega_c t)$$

Vemos que esta señal se superpone a la señal $x_1(t)$ y no habría manera de extraer $m_1(t)$ y $m_2(t)$ de la señal transmitida. Para poder recobrar las señales, el filtro F1 deberá dejar pasar, por ejemplo, la banda inferior de $m_1(t)$, mientras que el filtro F2 deberá dejar pasar entonces la banda lateral superior de $m_2(t)$. En este caso, las características de los filtros serán:

Filtro F1: pasabanda, ancho de banda f_{m1} y centrado $f_c - \frac{f_{m1}}{2}$

Filtro F2: pasabanda, ancho de banda f_{m2} y centrado en $f_c + \frac{f_{m2}}{2}$

La señal de salida del sumador es una señal pasabanda centrada en f_c, cuya banda lateral inferior es la banda lateral inferior de $x_1(t)$ mientras que su banda lateral superior es la banda lateral superior de $x_2(t)$. El filtro F3 será entonces pasabanda, con una frecuencia inferior $f_i = f_c - f_{m1}$ y una frecuencia superior $f_s = f_c + f_{m2}$; su ancho de banda será $B = f_{m1} + f_{m2}$.

(c) Sea $m_1(t) = \cos(\omega_{m1}t)$ y $m_2(t) = \cos(\omega_{m2}t)$

Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = 2\cos(\omega_{m1}t)\cos(\omega_c t) = \cos[2\pi(f_c + f_{m1})t] + \cos[2\pi(f_c - f_{m1})t]$$

El filtro F1 elimina la banda lateral superior, de modo que su salida será

$$x_2(t) = \cos[2\pi(f_c - f_{m1})t]$$

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$x_3(t) = 2\cos(\omega_{m2}t)\cos(\omega_c t) = \cos[2\pi(f_c + f_{m2})t] + \cos[2\pi(f_c - f_{m2})t]$$

El filtro F2 elimina la banda lateral inferior y su salida será:

$$x_4(t) = \cos[2\pi(f_c + f_{m2})t]$$

A la salida del sumador,

$$x_5(t) = x_2(t) + x_4(t) = \cos[2\pi(f_c - f_{m1})t] + \cos[2\pi(f_c + f_{m2})t]$$

El filtro F3 deja pasar esta señal directamente; la señal transmitida será

$$x_c(t) = x_5(t) = \cos[2\pi(f_c - f_{m1})t] + \cos[2\pi(f_c + f_{m2})t]$$

(d) Sea $m_1(t) = f_{m1}\text{sinc}^2(f_{m1}t) \Leftrightarrow M_1(f) = \Lambda(\frac{f}{f_{m1}})$

y $m_2(t) = f_{m2}\text{sinc}(f_{m2}t) \Leftrightarrow M_2(f) = \Pi(\frac{f}{2f_2})$

$M_1(f)$ y $M_2(f)$ se muestran en la Fig. P6.27(a) y (b).

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = 2m_1(t)\cos(\omega_c t) \Leftrightarrow X_1(f) = \Lambda\left[\frac{f+f_c}{f_{m1}}\right] + \Lambda\left[\frac{f-f_c}{f_{m1}}\right]$$ que se muestra en (c).

El filtro F1 elimina la banda lateral superior de $X_1(f)$ quedando $X_2(f)$ cuya forma se muestra en (d).

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$x_3(t) = 2m_2(t)\cos(\omega_c t)$ cuyo espectro es

$$X_3(f) = \Pi\left[\frac{f+f_c}{2f_{m2}}\right] + \Pi\left[\frac{f-f_c}{2f_{m2}}\right]$$

Este espectro se muestra en (e).

Después del filtro F2, el cual elimina la banda lateral inferior de $X_3(f)$, aparece $X_4(f)$ cuya forma se muestra en (f).

Finalmente, a la salida del sumador aparece $X_c(f) = X_2(f) + X_4(f)$ cuya forma se muestra en (g).

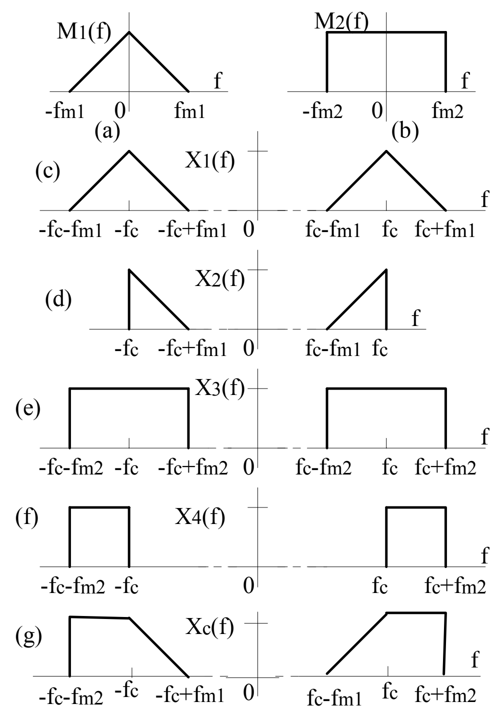


Fig. P6.27.

(e) El diseño de un sistema para demodular $x_c(t)$ y recobrar $m_1(t)$ y $m_2(t)$ se deja a la ingeniosidad del lector. Nótese que este es un sistema SSB.

6.28. Demuestre que la ganancia de potencia del filtro $H_{SSB}(f)$, Fig. 6.12(d) del Texto, para que la potencia de la señal SSB sea la misma que la del sistema de la Fig. 6.12(f) del Texto, debe ser igual a 2.

Solución:

Sean las figuras 6.12(d) y 6.12(f) del Texto,

En la Fig. 6.12(d), a la salida delmodulador balanceado, $x_1(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t)$, cuya potencia es $<x_1^2(t)> = \frac{A_c^2}{2} <m^2(t)>$. Como el filtro $H_{SSB}(f)$ elimina una de las bandas laterales, la potencia de salida será la mitad de la potencia de entrada multiplicada por la ganancia de potencia G_p del filtro. Entonces,

$$<x_{SSB}^2(t)> = \frac{G_p}{2} <x_1^2(t)> = \frac{G_p A_c^2}{4} <m^2(t)>$$

Vamos ahora a la Fig. 6.12(f).

La salida SSB es $x_{SSB}(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t) \pm A_c \hat{m}(t)\operatorname{sen}(\omega_c t)$ cuya potencia es

$< x_{SSB}^2(t) >= \frac{A_c^2}{2} < m^2(t) > + \frac{A_c^2}{2} < \hat{m}^2(t) >;$ pero como $< m^2(t) >=< \hat{m}^2(t) >$, entonces $< x_{SSB}^2(t) >= A_c^2 < m^2(t) >$

Para que la potencia de salida en ambos circuitos sea la misma, debe verificarse entonces que $\frac{G_p A_c^2}{4} < m^2(t) >= A_c^2 < m^2(t) >$, de donde $G_p = 4$. La ganancia de potencia del filtro H_{SSB} será igual a 4.

6.29. La señal periódica de la Fig. 6.72 del Texto se transmite en SSB Inferior con una portadora de frecuencia de 100 kHz y amplitud 10. La detección es coherente y suponemos que la señal SSB a la entrada del detector es igual a la señal transmitida. Los filtros de RF (transmisión y recepción) tienen un ancho de banda de 4,5 kHz y todos son de ganancia unitaria. La densidad de ruido a la entrada del filtro de RF es

$$S_n(f) = 2x10^{-6}\exp[-10^{-5}\ln(2)|f|]\ \text{W/Hz}$$

Demuestre que la relación de postdetección es $\frac{S_o}{N_o} = 48{,}97$ dB

Solución:

Sea la señal periódica de la Fig. 6.72 del Texto, donde $T = 10^{-3};\ f_o = 1000;\ f_c = 100\text{kHz}$

$$m(t) = \frac{20}{T} t\Pi(\frac{t}{T}) \text{ en } T;\ \text{ señal impar, el desarrollo de Fourier es una serie de senos.}$$

$$m(t) = 2x10^4 t\Pi(10^3 t);\quad X_n = -j10^7 \int_0^{10^{-3}/2} t\operatorname{sen}(2x10^3 \pi n t)dt\text{ . Integrando,}$$

$$X_n = j\frac{10(-1)^n}{n\pi};\ X_o = 0;\ |X_n| = \frac{10(-1)^n}{n\pi};\ \phi_n = \frac{\pi}{2};\ m(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\operatorname{sen}(n\omega_o t)$$

$$m(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}(n\omega_o t)$$

$$|X_1| = -3{,}189;\ |X_2| = 1{,}592;\ |X_3| = -1{,}061;\ |X_4| = 0{,}796;\ |X_5| = -0{,}637;\ |X_6| = 0{,}531$$

El espectro de m(t) tiene la forma mostrada en la Fig. P6.29(a).

La señal modulada en DSB es

$$x_{DSB}(t) = 10m(t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = 20\left[\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\operatorname{sen}(n\omega_o t)\right]\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = 10\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\{\operatorname{sen}[2\pi(f_c + nf_o)t] - \\ - \operatorname{sen}[2\pi(f_c - nf_o)t]\}$$

Al pasar por el filtro $H_{SSB}(f)$ el espectro de la señal transmitida SSB inferior tiene la forma mostrada en (b); pasa solamente 4 componentes. La señal SSB transmitida será,

$$x_{SSB}(t) = -10\sum_{n=1}^{4}|X_n|\operatorname{sen}[2\pi(f_c - nf_o)t]$$

y cuyo espectro se muestra en (b)

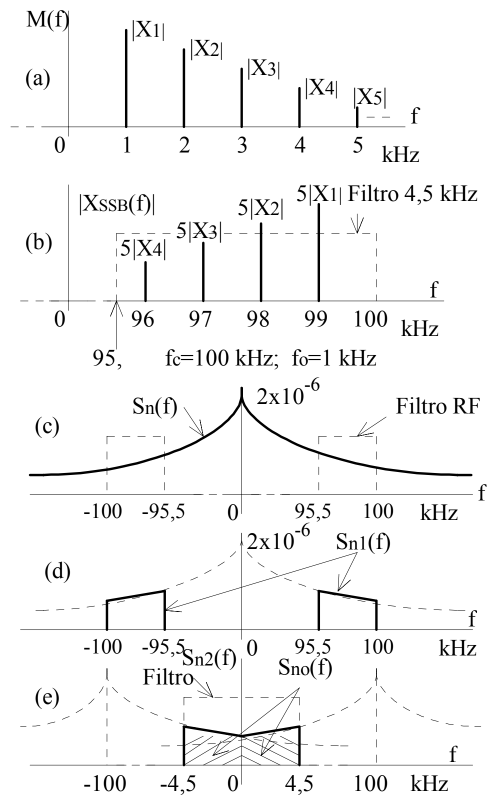


Fig. P6.29.

Veamos ahora la recepción.

Cálculo de la Potencia de Señal.

Sea el receptor sincrónico mostrado en la Fig. 6.12(e) del Texto, donde $x_r(t)$ es

$$x_r(t) = -10\sum_{n=1}^{4}|X_n|\operatorname{sen}[2\pi(f_c - nf_o)t]$$

Esta señal pasa directamente por el filtro de RF, de modo que a la entrada del multiplicador se tiene todavía $x_r(t)$. A la salida del multiplicador,

$$y(t) = x_r(t)2A_c\cos(\omega_c t) = -20A_c\sum_{n=1}^{4}|X_n|\operatorname{sen}[2\pi(f_c - nf_o)t]\cos(2\pi f_c t)$$

$$y(t) = -10A_c\sum_{n=1}^{4}|X_n|\{\operatorname{sen}[2\pi(2f_c - nf_o)t] - \operatorname{sen}(2\pi nf_o t)\}$$

Al pasar por el filtro pasabajo se eliminan las componentes de alta frecuencia, quedando

$$y_d(t) = 10A_c\sum_{n=1}^{4}|X_n|\operatorname{sen}(2\pi nf_o t)$$

La potencia promedio de y(t) será entonces,

$$S_o = \langle y_d^2(t) \rangle = \frac{1}{2}(10A_c)^2\left[|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2\right] = 721{,}21A_c^2 \text{ W}$$

Cálculo de la Potencia de Ruido.

La densidad espectral del ruido es $S_n(f) = 2x10^{-6}\exp[-10^{-5}\ln(2)|f|]$ W/Hz, la cual tiene la forma mostrada en (c), se muestra también la forma del filtro de RF.

A la salida del filtro de RF, la densidad espectral del ruido tendrá la forma mostrada en (d), donde $S_{n1}(f) = 2x10^{-6}\exp[-10^{-5}\ln(2)|f|]$ para $95{,}5 \text{ kHz} \le |f| \le 100 \text{ kHz}$, es decir,

$$S_{n1}(f) = 2x10^{-6}\exp[-10^{-5}\ln(2)|f|]\left[\Pi\left(\frac{f + 97{,}75x10^3}{4{,}5x10^3}\right) + \Pi\left(\frac{f - 97{,}75x10^3}{4{,}5x10^3}\right)\right]$$

Al pasar por el multiplicador, y de acuerdo con el Teorema de la Modulación para señales de potencia, a la salida del multiplicador se tendrá

$$S_{n2}(f) = A_c^2\left[S_{n1}(f + f_c) + S_{n1}(f - f_c)\right]$$

$$S_{n2}(f) = 2x10^{-6}A_c^2\left\{\exp[-10^{-5}\ln(2)|f + 100x10^3|]\left[\Pi\left(\frac{f + 197{,}75x10^3}{4{,}5x10^3}\right) + \Pi\left(\frac{f + 2{,}25x10^3}{4{,}5x10^3}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \exp[-10^{-5}\ln(2)|f - 100x10^3|]\left[\Pi\left(\frac{f - 2{,}25x10^3}{4{,}5x10^3}\right) + \Pi\left(\frac{f - 197{,}75x10^3}{4{,}5x10^3}\right)\right]\right\}$$

El filtro pasabajo de salida elimina las componentes de alta frecuencia, quedando

$$S_{no}(f) = 2x10^{-6}A_c^2\left\{\exp[-10^{-5}\ln(2)|f + 100x10^3|]\Pi\left(\frac{f + 2{,}25x10^3}{4{,}5x10^3}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp[-10^{-5}\ln(2)|f - 100x10^3|]\Pi\left(\frac{f - 2{,}25x10^3}{4{,}5x10^3}\right)\right\}$$

$S_{no}(f)$ se muestra en (e), región sombreada.

La potencia de ruido correspondiente es el área de la parte sombreada, pero para simplificar el cálculo, puede verse que las áreas sombreadas son iguales a las áreas de $S_{n1}(f)$; por consiguiente, la potencia de ruido a la salida es

$$N_o = 4x10^{-6}A_c^2\int_{95{,}5x10^3}^{100x10^3}\exp[-10^{-5}\ln(2)f]df = 9{,}142x10^{-3}A_c^2 \text{ W}$$

La relación S/N de postdetección será

$$\frac{S_o}{N_o} = 7889x10^4 = 48{,}97 \text{ dB}$$

6.30. En la Fig. 6.73 del Texto se muestra un cierto sistema que permite demodular señales SSB. Si el ruido es pasabanda de densidad espectral 10^{-2} W/Hz, y la señal mensaje es $m(t) = 40\text{sinc}(20t)$ y $A_r = 1$,

(a) Demuestre que este sistema es en efecto un demodulador SSB Inferior.

(b) Demuestre que la potencia de ruido a la salida es de 26,0206 dBm y que la energía de la señal a la salida es de 320 joules.

(c) Si por equivocación se pretendiera demodular una señal SSB Superior, determine lo que se obtendría a la salida.

(d) Demuestre que este modulador se puede modificar para demodular señales SSB Superior cambiando el sumador de salida de tal manera que se sumen las dos señales de entrada. Demuestre que en este caso el filtro de salida no es necesario.

Solución:

(a) Sea la Fig. 6.73 del Texto, y sea $x_r(t) = m(t)\cos(\omega_c t) + \hat{m}(t)\text{sen}(\omega_c t)$ que representa una señal SSB Inferior.

Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = x_r(t)2\text{sen}(\omega_c t) = 2m(t)\cos(\omega_c t)\text{sen}(\omega_c t) + 2\hat{m}(t)\text{sen}^2(\omega_c t)$$

$$x_1(t) = m(t)\text{sen}(2\omega_c t) + \hat{m}(t) - \hat{m}(t)\cos(2\omega_c t)$$

Al pasar por el filtro de Hilbert la salida es (Ver Sección 2.16.1 del Texto),

$$x_2(t) = -m(t)\cos(2\omega_c t) - m(t) - \hat{m}(t)\text{sen}(2\omega_c t)$$

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$x_3(t) = 2m(t)\cos^2(\omega_c t) + 2\hat{m}(t)\text{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_3(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) + \hat{m}(t)\text{sen}(2\omega_c t)$$

A la salida del sumador, $x_4(t) = x_3(t) - x_2(t)$

$$x_4(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) + \hat{m}(t)\text{sen}(2\omega_c t) + m(t)\cos(2\omega_c t) + m(t) + \hat{m}(t)\text{sen}(2\omega_c t)$$

$$x_4(t) = 2m(t) + 2m(t)\cos(2\omega_c t) + 2\hat{m}(t)\text{sen}(2\omega_c t)$$

El filtro pasabajo de salida elimina los términos de alta frecuencia, quedando

$$y(t) = 2m(t)$$

Vemos que en efecto el circuito es un demodulador SSB Inferior, pues a su salida se recupera la señal mensaje con un factor de escala 2.

(b) $m(t) = 40\mathrm{sinc}(20t) \Leftrightarrow M(f) = 2\Pi(\frac{f}{20})$; $x_r(t) = m(t)\cos(\omega_c t) + \hat{m}(t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$

Cálculo de la Energía de la Señal.

En la parte (a) obtuvimos $y(t) = 2m(t) \Leftrightarrow Y(f) = 2M(f) = 4\Pi(\frac{f}{20})$

La energía de la salida es, de la expresión (2.84) del Texto,

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_0^{10} 16df = 32f\,\Big|_0^{10} = 320 \text{ joules.}$$

Cálculo de la Potencia de Ruido.

A la entrada del circuito se tiene ruido blanco pasabanda cuya densidad espectral se muestra en la Fig. P6.30(a).

Para el cálculo de la potencia, vamos a representar el ruido blanco pasabanda de la Fig. P6.30(a) en su forma canónica:

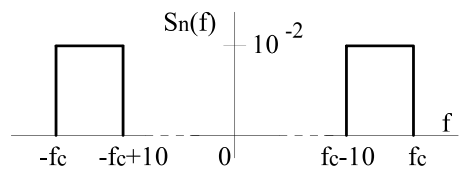


Fig. P6.30(a)

$$n(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t) + n_s(t)\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

y cuya potencia es $< n^2(t) >= N = 2x10x10^{-2} = 0{,}2$ W

Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$n_1(t) = 2n_c(t)\cos(\omega_c t)\mathrm{sen}(\omega_c t) + 2n_s(t)\mathrm{sen}^2(\omega_c t)$$

$$n_1(t) = n_c(t)\mathrm{sen}(2\omega_c t) + n_s(t) - n_s(t)\cos(2\omega_c t)$$

A la salida del Filtro de Hilbert se tiene

$$n_2(t) = -n_c(t)\cos(2\omega_c t) + \hat{n}_s(t) - n_s(t)\mathrm{sen}(2\omega_c t)$$

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$n_3(t) = 2n_c(t)\cos^2(\omega_c t) + 2n_s(t)\mathrm{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t)$$

$$n_3(t) = n_c(t) + n_c(t)\cos(2\omega_c t) + n_s(t)\mathrm{sen}(2\omega_c t)$$

A la salida del sumador, $n_4(t) = n_3(t) - n_2(t)$

$$n_4(t) = n_c(t) - \hat{n}_s(t) + 2n_c(t)\cos(2\omega_c t) + 2n_s(t)\mathrm{sen}(2\omega_c t)$$

Al pasar por el filtro pasabajo se eliminan las componentes de alta frecuencia, quedando,

$n_y(t) = n_c(t) - \hat{n}_s(t)$, cuya potencia es

$<n_y^2(t)>=<n_c^2(t)>+<\hat{n}_s^2(t)>=N_o$

pero como $<n^2(t)>=<n_c^2(t)>=<\hat{n}_s^2(t)>=N=0{,}2\ \text{W}$,

entonces $N_o = 2N = 0{,}4\ \text{W} = 26{,}0206\ \text{dBm}$.

(c) Si la señal de entrada es una señal SSB Superior, ella tendrá la forma

$$x_r(t) = m(t)\cos(\omega_c t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(\omega_c t)$$

Por la rama superior, a la salida del multiplicador,

$$x_1(t) = 2m(t)\cos(\omega_c t)\,\text{sen}(\omega_c t) - 2\hat{m}(t)\,\text{sen}^2(\omega_c t) = m(t)\,\text{sen}(2\omega_c t) - \hat{m}(t) + \hat{m}(t)\cos(2\omega_c t)$$

Al pasar por el Filtro de Nyquist, su salida será

$$x_2(t) = -m(t)\cos(2\omega_c t) + m(t) + \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

Por la rama inferior, a la salida del multiplicador,

$$x_3(t) = 2m(t)\cos^2(\omega_c t) - 2\hat{m}(t)\,\text{sen}(\omega_c t)\cos(\omega_c t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

A la salida del sumador, $x_4(t) = x_3(t) - x_2(t)$

$$x_4(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - m(t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

$$x_4(t) = 2m(t)\cos(2\omega_c t) - 2\hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

Nótese que a la salida del sumador no aparece el mensaje m(t) en forma explícita, sino solamente componentes de alta frecuencia que serán eliminadas por el filtro pasabajo. Por lo tanto, si se pretendiera demodular con este circuito una señal SSB Superior, la salida sería cero.

(d) Se tiene una señal SSB Superior pero en el sumador de salida se suman las señales.

En la parte (c) obtuvimos

$$x_2(t) = -m(t)\cos(2\omega_c t) + m(t) + \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t) \quad \text{y}$$

$$x_3(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

Entonces, si se suman esta señales obtenemos

$$x_4(t) = x_3(t) + x_2(t) = m(t) + m(t)\cos(2\omega_c t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t) + \\ - m(t)\cos(2\omega_c t) + m(t) + \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\omega_c t)$$

$x_4(t) = 2m(t)$

Vemos que a la salida del sumador aparece solamente la señal m(t) con factor escala 2, y ya no es necesario el filtro pasabajo de salida.

En la Fig. P6.30(b) se muestra la configuración del circuito para demodular Señales SSB Inferior y Superior.

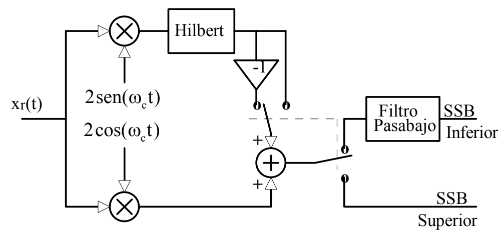


Fig. P6.30(b)

6.31. Sea las tres señales $x_{DSB}(t) = A_1\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)$, $x_{SSB}(t) = A_3\cos[2\pi(f_c + f_m)t]$ y $x_{AM}(t) = A_2[1+\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t)$. Si la potencia promedio útil es la misma para las tres señales, determine las relaciones A_1/A_3, A_2/A_3 y A_1/A_2.

Solución:

DSB: $x_{DSB}(t) = \dfrac{A_1}{2}\cos[(\omega_c+\omega_m)t] + \dfrac{A_1}{2}\cos[(\omega_c-\omega_m)t]$

En DSB toda la potencia es útil, por lo tanto, $P_B = <x_{DSB}^2(t)> = 2\dfrac{1}{2}(\dfrac{A_1}{2})^2 = \dfrac{A_1^2}{4}$

SSB: $x_{SSB}(t) = A_3\cos[(\omega_c+\omega_m)t]$

En SSB toda la potencia es útil, por lo tanto, $P_B = <x_{SSB}^2(t)> = \dfrac{1}{2}A_3^2$

AM: $x_{AM}(t) = A_2\cos(\omega_c t) + \dfrac{A_2}{2}\cos[(\omega_c+\omega_m)t] + \dfrac{A_2}{2}\cos[(\omega_c-\omega_m)t]$

Potencia útil, $P_B = 2\dfrac{1}{2}(\dfrac{A_2}{2})^2 = \dfrac{A_2^2}{4}$

Si las tres potencias útiles son iguales, entonces se verifica que $\dfrac{A_1^2}{4} = \dfrac{A_3^2}{2} = \dfrac{A_2^2}{4}$, de donde,

$$\frac{A_1}{A_3} = \sqrt{2};\quad \frac{A_2}{A_3} = \sqrt{2};\quad \frac{A_1}{A_2} = 1$$

6.32. Una señal VSB se puede generar pasando una señal DSB a través de un filtro VSB apropiado, como el mostrado en la Fig. 6.74 del Texto.

(a) Determine la frecuencia de portadora apropiada. Suponga que su amplitud es 10.

(b) Determine la señal VSB a la salida del filtro cuando

(1) $m(t) = 5\cos(10^3\pi t)$; (2) $m(t) = 10\cos(1600\pi t) + 5\cos(800\pi t)$

(2) $m(t) = 10\cos(1500\pi t)\cos(300\pi t)$

(c) Calcule las potencias de la señal VSB en el caso (b)

(d) Dibuje el espectro de la señal VSB cuando

(1) $m(t) = 2x10^3 \text{sinc}(2x10^3 t)$; (2) $m(t) = 10^3 \text{sinc}^2(10^3 t)$

Solución:

(a) De la forma de la Fig. 6.74 del Texto, la frecuencia apropiada de la portadora es $f_c = 9{,}5\,\text{kHz}$; $A_c = 10$.

(b) (1) Sea $m(t) = 5\cos(10^3\pi t) = 5\cos(\omega_m t)$; $f_m = 500\,\text{Hz}$

$$x_{DSB}(t) = m(t)10\cos(\omega_c t) = 50\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = 25\cos[2\pi(9500+500)t] + 25\cos[2\pi(9500-500)t]$$

$$x_{DSB}(t) = 25\cos(2\pi 10^4 t) + 25\cos(2\pi 9000t)$$

A la frecuencia f = 9 kHz, la ganancia del filtro $H_{VSB}(f)$ es 0, y a la frecuencia $f = 10\,\text{kHz}$, la ganancia es la unidad; por lo tanto, la salida VSB del filtro $H_{VSB}(f)$ será $x_{VSB}(t) = 25\cos(2\pi 10^4 t)$.

(2) Sea ahora $m(t) = 10\cos(1600\pi t) + 5\cos(800\pi t) = 10\cos(\omega_{m1}t) + 5\cos(\omega_{m2}t)$

donde f_{m1} = 800 Hz y f_{m2} = 400 Hz.

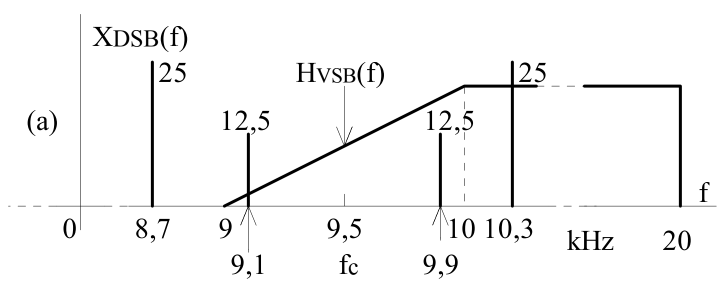


Fig. P6.32(a)

$$x_{DSB}(t) = m(t)10\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = 100\cos(\omega_{m1}t)\cos(\omega_c t) + 50\cos(\omega_{m2}t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = 50\cos[2\pi(9500+800)t] + 50\cos[2\pi(9500-800)t] + \\ + 25\cos[2\pi(9500+400)t] + 25\cos[2\pi(9500-400)t]$$

$$x_{DSB}(t) = 50\cos(2\pi 10300t) + 50\cos(2\pi 8700t) + 25\cos(2\pi 9900t) + 25\cos(2\pi 9100t)$$

En la Fig. P6.32(a) se muestra el espectro DSB en relación con el filtro $H_{VSB}(f)$. Puede observarse que la ganancia G del filtro $H_{VSB}(f)$ es:

Para $f = 8{,}7\text{kHz}, \ G = 0$; Para $f = 9{,}1\text{kHz}, \ G = 0{,}1$; Para $f = 9{,}9\text{kHz}, \ G = 0{,}9$

y para $f = 10{,}3\text{kHz}, \ G = 1$.

Por lo tanto, a partir de la Fig. P6.32(a), la señal de salida VSB es,

$$x_{VSB}(t) = 50\cos(2\pi 10300t) + 2{,}5\cos(2\pi 9100t) + 22{,}5\cos(2\pi 9900t)$$

(3)

$$m(t) = 10\cos(2\pi 750t)\cos(2\pi 150t)$$

$$m(t) = 5\cos(2\pi 900t) + 5\cos(2\pi 600t)$$

$$x_{DSB}(t) = 50\cos(2\pi 900t)\cos(2\pi 9500t) + 50\cos(2\pi 600t)\cos(2\pi 9500t)$$

$$x_{DSB}(t) = 25\cos(2\pi 10400t) + 25\cos(2\pi 8600t) + 25\cos(2\pi 10100t) + 25\cos(2\pi 8900t)$$

En la Fig. P6.32(b) se muestra el espectro DSB junto con el filtro $H_{VSB}(f)$.

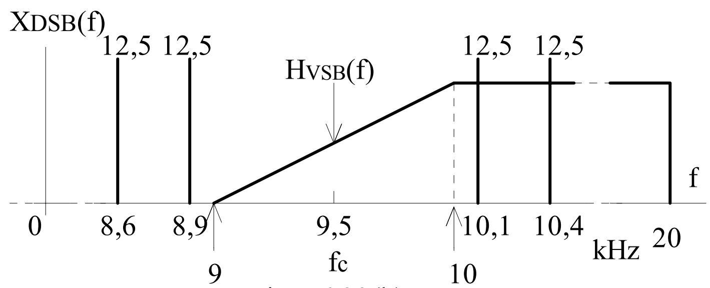


Fig. P6.32(b)

De la Fig. P6.32(b), se puede observar que la salida VSB es

$$x_{VSB}(t) = 25\cos(2\pi 10400t) + 25\cos(2\pi 10100t) = 50\cos(2\pi 150t)\cos(2\pi 10250t)$$

(c) Cálculo de las potencias de la señal VSB en el caso (b)

1. $x_{VSB}(t) = 25\cos(2\pi 10^4 t); \ < x^2_{VSB}(t) >= \frac{1}{2}(25)^2 = 312\text{W}$

2. $x_{VSB}(t) = 50\cos(2\pi 10300t) + 2{,}5\cos(2\pi 9100t) + 22{,}5\cos(2\pi 9900t)$

   $$< x^2_{VSB}(t) >= \frac{1}{2}(50)^2 + \frac{1}{2}(2{,}5)^2 + \frac{1}{2}(22{,}5)^2 = 1506{,}25\text{W}$$

3. $x_{VSB}(t) = 25\cos(2\pi 10400t) + 25\cos(2\pi 10100t)$

$$< x_{VSB}^2(t) >= 2\frac{1}{2}(25)^2 = 625W$$

(d)

(1) $\quad m(t) = 2x10^3 \operatorname{sinc}(2x10^3 t)$

$$M(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right) \quad y \quad H_{VSB}(f) = \begin{cases} 10^{-3}(f-9000) & \text{para } 9000 \le |f| \le 10000 \\ 1 & \text{para } 10000 < |f| \le 20000 \end{cases}$$

$$X_{DSB}(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+9500}{2000}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-9500}{2000}\right)$$

$$X_{VSB}(f) = H_{VSB}(f)X_{DSB}(f)$$

En la Fig. P6.32(c) se muestra el espectro $X_{VSB}(f)$.

(1) $\quad m(t) = 10^3 \operatorname{sinc}^2(10^3 t)$

$$M(f) = \Lambda\left(\frac{f}{10^3}\right)$$

$$X_{DSB}(f) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f+9500}{1000}\right) + \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f-9500}{1000}\right)$$

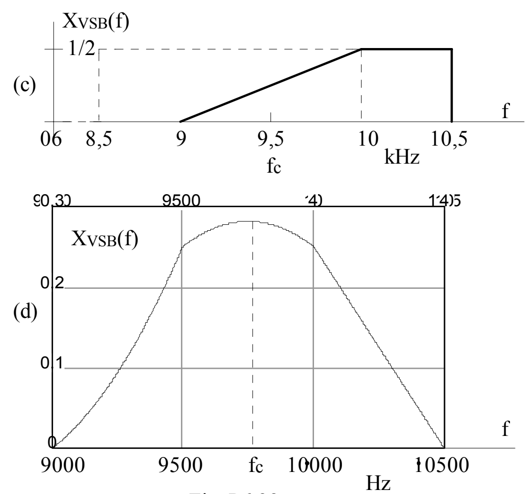


Fig. P6.32.

$$X_{VSB}(f) = H_{VSB}(f)X_{DSB}(f)$$

$$X_{VSB}(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x10^6}(f-8500)(f-9000) & \text{para} \quad 9000 \le |f| < 9500 \\ -\dfrac{1}{2x10^6}(f-10500)(f-9000) & \text{para} \quad 9500 \le |f| < 10000 \\ -\dfrac{1}{2x10^3}(f-10500) & \text{para} \quad 10000 \le |f| \le 10500 \end{cases}$$

El espectro $X_{VSB}(f)$ se muestra en la Fig. P6.32(d)

6.33. Se desea transmitir en VSB la señal del Problema de Aplicación 6.29 del Texto, pero con un período de 8 ms y amplitud $\pm 5V$. La función de transferencia del filtro VSB tiene la forma

$$H_{VSB}(f) = \begin{cases} 1+\text{sen}[2x10^{-3}\pi(f-10^4)] & \text{para } 9750 \le f < 10250 \\ 2 & \text{para } 10250 \le f \le 10600 \\ 1-\text{sen}[2x10^{-3}\pi(f+10^4)] & \text{para } -10250 \le f < -9750 \\ 2 & \text{para } -10600 \le f \le -10250 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El ruido a la entrada del receptor es blanco de densidad espectral 10^{-9} W/Hz. No se transmite portadora piloto y la detección es sincrónica; también $A_c = 1$.

(a) Dibuje la forma de $H_{VSB}(f)$ (frecuencias positivas solamente)

(b) Determine la frecuencia apropiada de la portadora y las características de los filtros del receptor

(c) Determine la señal $x_{VSB}(t)$ transmitida y dibuje su espectro

(d) Demuestre que la ganancia de conversión $\dfrac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1{,}213$

Solución:

(a) Sea la señal de la Fig. 6.72 del Texto, donde $T = 8x10^{-3}$; $f_o = 125\text{ Hz}$

$S_n(f) = 10^{-9}\text{ W/Hz}; \; A_c = 1$

$$H_{VSB}(f) = \begin{cases} 1+\text{sen}[2\pi x10^{-3}(f-10^4)] & \text{para } 9750 \le |f| < 10250 \\ 2 & \text{para } 10250 \le |f| \le 10600 \end{cases}$$

En la Fig. P6.33(a) se muestra la forma del filtro $H_{VSB}(f)$ (frecuencias positivas solamente.

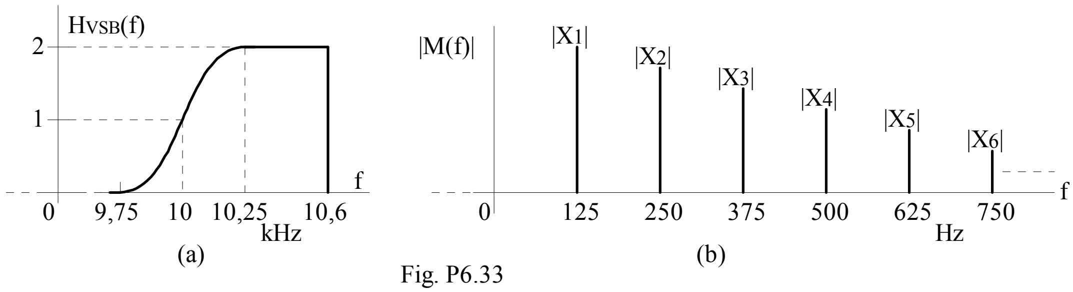


Fig. P6.33

(b) De la forma de $H_{VSB}(f)$, Fig. P6.33(a):

(b.1) La frecuencia apropiada de la portadora es de 10 kHz, es decir, $f_c = 10^4$ Hz.

(b.2) El filtro pasabanda de entrada al receptor deberá estar centrado en la frecuencia $f_h = \dfrac{9750 + 10600}{2} = 10175$ Hz y de ancho de banda $B = 10600 - 9750 = 850$ Hz.

(b.3) En cuanto al filtro pasabajo de salida, su ancho de banda dependerá del ancho de banda o número de componentes de la señal de entrada. En la parte (d) definiremos este ancho de banda.

(c) Para $A_m = 5V$ y $T = 8x10^{-3}$, y del Problema 6.29, el coeficiente de Fourier de m(t) es $X_n = j\dfrac{5(-1)^n}{n\pi}$; $|X_n| = \dfrac{5(-1)^n}{n\pi}$; $\phi_n = \dfrac{\pi}{2}$; $X_o = 0$; $f_o = 125\text{Hz}$

$$m(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\text{sen}(2\pi n f_o t); \quad \begin{array}{l}|X_1| = -1{,}592;\ |X_2| = 0{,}796;\ |X_3| = -0{,}531\\ |X_4| = 0{,}398;\ |X_5| = -0{,}318;\ |X_6| = 0{,}265\end{array}$$

El módulo del espectro M(f) de m(t) tiene la forma mostrada en la Fig. P6.33(b).

La señal DSB será $x_{DSB}(t) = m(t)\cos(\omega_c t)$. Igual que en el Problema 6.29, se tiene:

$$x_{DSB}(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\text{sen}(n\omega_o t)\cos(\omega_c t)$$

$$x_{DSB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}|X_n|\{\text{sen}[2\pi(f_c + nf_o)t] - \text{sen}[2\pi(f_c - nf_o)t]\}$$

En la Fig. P6.33(c) se muestra el módulo del espectro de $x_{DSB}(t)$ junto con el filtro $H_{VSB}(f)$.

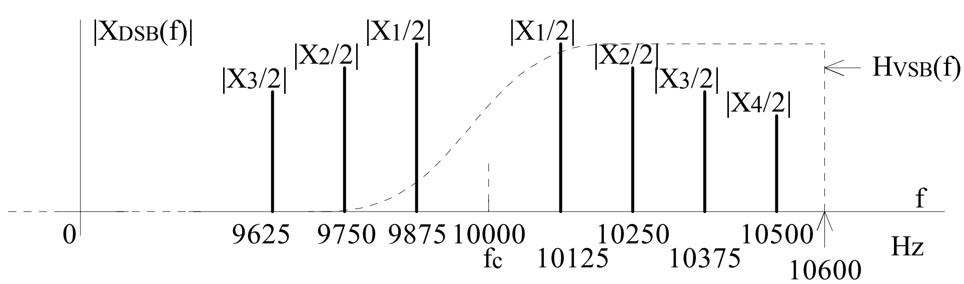


Fig. P6.33(c).

Nótese que algunas de las componentes que pasan están afectadas por la ganancia del filtro $H_{VSB}(f)$. Nótese también que el ancho de banda del filtro pasabajo de salida debe dejar pasar solamente cuatro componentes de m(t). El ancho de banda del filtro pasabajo puede dejarse en 600 Hz.

La señal VSB será, de la Fig. P6.33(c), :

$$x_{VSB}(t) = -H_{VSB}(9875)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 9875t) + H_{VSB}(10125)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 10125t) + \\ + 2|X_2|\mathrm{sen}(2\pi 10250t) + 2|X_3|\mathrm{sen}(2\pi 10375t) + 2|X_4|\mathrm{sen}(2\pi 10500t)$$

pero $H_{VSB}(9875) = 0{,}293;\ H_{VSB}(10125) = 1{,}707;\ H_{VSB}(9875) + H_{VSB}(10125) = 2$

La señal VSB transmitida será entonces,

$$x_{VSB}(t) = 0{,}466\,\mathrm{sen}(2\pi 9875t) - 2{,}717\,\mathrm{sen}(2\pi 10125t) + 1{,}592\,\mathrm{sen}(2\pi 10250t) - \\ - 1{,}061\,\mathrm{sen}(2\pi 10375t) + 0{,}796\,\mathrm{sen}(2\pi 10500t)$$

En el receptor esta señal aparece a la entrada del detector y su potencia será:

$$S_i =< x_{VSB}^2(t) >= \frac{1}{2}\left[(0{,}466)^2 + (2{,}717)^2 + (1{,}592)^2 + (1{,}061)^2 + (796)^2\right] = 5{,}946\,W$$

(d) Cálculo de la Potencia de Señal

En el receptor, a la entrada del filtro pasabajo,

$$y(t) = x_{VSB}(t) 2\cos(2\pi 10000t)$$

$$y(t) = 2H_{VSB}(10125)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 10125t)\cos(2\pi 10000t) - \\ - 2H_{VSB}(9875t)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 9875t)\cos(2\pi 10000t) + \\ + 4|X_2|\mathrm{sen}(2\pi 10250t)\cos(2\pi 10000t) + 4|X_3|\mathrm{sen}(2\pi 10375t)\cos(2\pi 10000t) + \\ + 4|X_4|\mathrm{sen}(2\pi 10500t)\cos(2\pi 10000t)$$

$$y(t) = H_{VSB}(10125)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 20125t) + H_{VSB}(10125)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 125t) - \\ - H_{VSB}(9875)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 19875t) + H_{VSB}(9875)|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 125t) + \\ + 2|X_2|\mathrm{sen}(2\pi 20250t) + 2|X_2|\mathrm{sen}(2\pi 250t) + \\ + 2|X_3|\mathrm{sen}(2\pi 20375t) + 2|X_3|\mathrm{sen}(2\pi 375t) + \\ + 2|X_4|\mathrm{sen}(2\pi 20500t) + 2|X_4|\mathrm{sen}(2\pi 500t)$$

El filtro pasabajo de salida elimina los términos de alta frecuencia, y como $H_{VSB}(9875) + H_{VSB}(10125) = 2$, la salida $y_d(t)$ será

$$y_d(t) = 2|X_1|\mathrm{sen}(2\pi 125t) + 2|X_2|\mathrm{sen}(2\pi 250t) + 2|X_3|\mathrm{sen}(2\pi 375t) + 2|X_4|\mathrm{sen}(2\pi 500t)$$

La correspondiente potencia de salida será:

$$S_o =< y_d^2(t) >= \frac{1}{2}4\left[|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2\right] = 7{,}212\,W$$

Cálculo de la Potencia de Ruido.

La densidad espectral a la salida del filtro de RF tiene la forma mostrada en la Fig. P6.33(d).

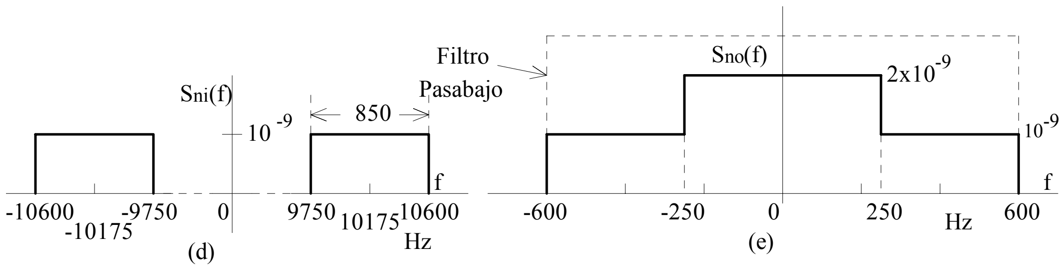


Fig. P6.33

$$S_{ni}(f) = 10^{-9}\left[\Pi(\frac{f+10175}{850}) + \Pi(\frac{f-10175}{850})\right]$$

La potencia correspondiente será

$$N_i = 2x850x10^{-9} = 1,7x10^{-6}\,W$$

A la salida del multiplicador, y de acuerdo con el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia,

$$S_{n1}(f) = 10^{-9}\left[S_{ni}(f+10000) + S_{ni}(f-10000)\right]$$

$$S_{n1}(f) = 10^{-9}\left[\Pi(\frac{f+20175}{850}) + \Pi(\frac{f-175}{850}) + \Pi(\frac{f+175}{850}) + \Pi(\frac{f-20175}{850})\right]$$

Al pasar por el filtro pasabajo de 600 Hz, la densidad espectral $S_{no}(f)$ de salida tiene la forma mostrada en la Fig. P6.33(e) y cuya potencia es

$$N_o = 1200x10^{-9} + 500x10^{-9} = 1,7x10^{-6}\,W$$

Obtuvimos también $S_i = 5,946$; $S_o = 7,212$; $N_i = 1,7x10^{-6}$

La ganancia de conversión será entonces

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 1,213$$

La ganancia de conversión se puede aumentar un poco si el ancho de banda del filtro pasabajo de salida se hace un poco más angosto para que deje pasar justo la componente de señal de 500 Hz. Si se toma el ancho de 500 Hz, el lector puede verificar que la ganancia de conversión ha aumentado a 1,375.

6.34. Demuestre que las señales VSB pueden también demodularse mediante reinserción de portadora y detección de envolvente. Sugerencia: utilice la expresión (6.53).

Solución:

Sea la expresión 6.53 del Texto, $x_{VSB(t)} = x_r(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t) + A_c m_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$ y el sistema mostrado en la Fig. 6.12(g) de demodulación por reinserción de portadora y detección de envolvente. Cuando se utiliza una portadora piloto de muy baja potencia, se tiene el método conocido como "detección homodina".

De la Fig. 6.12(g) del Texto, $v_i(t) = x_r(t) + K\cos(\omega_c t)$

$$v_i(t) = A_c m(t)\cos(\omega_c t) + K\cos(\omega_c t) + A_c m_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

$$v_i(t) = [A_c m(t) + K]\cos(\omega_c t) + A_c m_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$$

Expresando $v_i(t)$ en la forma polar $v_i(t) = E(t)\cos[\omega_c t - \Psi(t)]$, donde

$$E(t) = \sqrt{[A_c m(t) + K]^2 + A_c^2 m_s^2(t)} \quad \text{y} \quad \Psi(t) = \mathrm{arctg}\frac{A_c m_s(t)}{}.$$

Como la amplitud K de la portadora agregada es alta, se verifica que

$[A_c m(t) + K] >> A_c m_s(t)$, de donde $E(t) \approx A_c m(t) + K$ y $\Psi(t) \approx 0$

El filtro pasabajo elimina la componente continua K, quedando

$y_d(t) = A_c m(t)$ y se ha recuperado la señal mensaje.

El lector podrá verificar, siguiendo el mismo procedimiento, que la detección homodina permite también la demodulación de señales DSB. La circuitería del detector homodino es más sencilla que la del detector sincrónico; sin embargo, la condición indispensable es que se transmita una portadora piloto de baja potencia junto con las señales DSB, SSB y VSB.

6.35. Dos señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$, ambas de banda limitada f_m, se modulan en FDM con subportadoras $f_{c1} >> f_m$ y $f_{c2} = f_{c1} + 2f_m$, respectivamente, y se transmiten por un canal no lineal caracterizado mediante la expresión $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$.

(a) Si la modulación de subportadora es en DSB, demuestre que toda la diafonía (interferencia entre canales) a la salida es ininteligible y desaparece luego del filtrado pasabanda si $a_3 = 0$.

(b) Repetir para el caso de modulación AM y demuestre que en este caso aparecerá también inteligible de la forma $m_1(t)\cos(2\pi f_{c2} t)$.

Solución:

(a) Modulación DSB/FDM. Sea $x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_{c1} t) + m_2(t)\cos[2\pi(f_{c1} + 2f_m)t]$

Hagamos $f_{c1} = f_c$ y $f_{c2} = f_c + 2f_m$; entonces,

$$x(t) = m_1(t)\cos(\omega_c t) + m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t]$$

La señal transmitida por el canal no lineal es $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$.

Reemplazando x(t) y desarrollando,

$$\begin{aligned} y(t) = {} & a_1 m_1(t)\cos(\omega_c t) + a_1 m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + a_2 m_1^2(t)\cos^2(\omega_c t) + \\ & + 2a_2 m_1(t) m_2(t)\cos(\omega_c t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + a_2 m_2^2(t)\cos^2[(\omega_c + 2\omega_m)t] + \\ & + a_3 m_1^3(t)\cos^3(\omega_c t) + 3a_3 m_1^2(t) m_2(t)\cos^2(\omega_c t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + \\ & + 3a_3 m_1(t) m_2^2(t)\cos(\omega_c t)\cos^2[(\omega_c + 2\omega_m)t] + a_3 m_2^3(t)\cos^3[(\omega_c + 2\omega_m)t] \end{aligned}$$

La señal y(t) contiene muchos términos de distorsión (diafonía) que la hacen completamente ininteligible, pero veamos qué pasa cuando hacemos $a_3 = 0$.

Para $a_3 = 0$,

$$\begin{aligned} y(t) = {} & a_1 m_1(t)\cos(\omega_c t) + a_1 m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + a_2 m_1^2(t)\cos^2(\omega_c t) + \\ & + 2a_2 m_1(t) m_2(t)\cos(\omega_c t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + a_2 m_2^2(t)\cos^2[(\omega_c + 2\omega_m)t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & a_1 m_1(t)\cos(\omega_c t) + a_1 m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + \frac{a_2 m_1^2(t)}{2} + \\ & + \frac{a_2 m_1^2(t)}{2}\cos(2\omega_c t) + \frac{a_2 m_2^2(t)}{2} + \frac{a_2 m_2^2(t)}{2}\cos[2(\omega_c + 2\omega_m)t] + \\ & + 2a_2 m_1(t) m_2(t)\cos(\omega_c t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] \end{aligned}$$

Vemos que con excepción de los dos primeros términos, todos los otros términos está, fuera de banda y son eliminados por el filtro de RF. Por lo tanto, a la salida del filtro de RF,

$$v_i(t) = a_1 m_1(t)\cos(\omega_c t) + a_1 m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t]$$

Vemos que la diafonía desapareció después del filtrado pasabajo cuando $a_3 = 0$. Por lo tanto, si se hace $a_3 = 0$, desaparece toda la diafonía ininteligible presente en la banda de paso del filtro, y las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ se pueden transmitir por el canal no ideal.

(b) Si las señales se modulan en AM/FDM, entonces, para simplificar el desarrollo hagamos:

$$x_{c1}(t) = [A_1 + m_1(t)]\cos(\omega_c t) \quad \text{y} \quad x_{c2}(t) = [A_2 + m_2(t)]\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t]$$

$$x(t) = x_{c1}(t) + x_{c2}(t); \quad y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & a_1 x_{c1}(t) + a_1 x_{c2}(t) + a_2 x_{c1}^2(t) + 2a_2 x_{c1}(t) x_{c2}(t) + a_2 x_{c2}^2(t) + a_3 x_{c1}^3(t) + \\ & + 3a_3 x_{c1}^2(t) x_{c2}(t) + 3a_3 x_{c1}(t) x_{c2}^2(t) + a_3 x_{c2}^3(t) \end{aligned}$$

Examinemos el desarrollo de estos términos excepto los dos primeros que representan la señal deseada.

$$a_2 x_{c1}^2(t) = \frac{a_2}{2}[A_1 + m_1(t)]^2 + \frac{a_2}{2}[A_1 + m_1(t)]^2 \cos(2\omega_c t) \rightarrow \text{Términos fuera de banda}$$

$$2a_2 x_{c1}(t) x_{c2}(t) = a_2[A_1 + m_1(t)][A_2 + m_2(t)]\cos[(2\omega_c + 2\omega_m)t] + $$
$$+ a_2[A_1 + m_1(t)]\cos(2\omega_m t) \rightarrow \text{Términos fuera de banda}$$

$a_2 x_{c2}^2(t) \rightarrow$ Igual que $a_2 x_{c1}^2(t) \rightarrow$ Términos fuera de banda

$$a_3 x_{c1}^3(t) = \frac{3a_3 A_1}{2}[\frac{A_1}{2} + m_1(t)]\cos(\omega_c t) + \frac{3a_3}{4} m_1^2(t)\cos(\omega_c t) + \frac{a_3}{4}[A_1 + m_1(t)]^2 \cos(3\omega_c t)$$

$\rightarrow$ Hay un término deseado $[\frac{A_1}{2} + m_1(t)]\cos(\omega_c t)$ que puede estar sobremodulado, pero que a la vez está distorsionado por el término de diafonía ininteligible $m_1^2(t)\cos(\omega_c t)$; los demás términos están fuera de banda

$a_3 x_{c2}^3(t) \rightarrow$ igual que $a_3 x_{c1}^3(t)$

$$3a_3 x_{c1}^2(t) x_{c2}(t) = \frac{3a_3}{2}\left\{ A_1[\frac{A_2}{A_1} + m_2(t)]\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + A_2 m_1(t)\cos(\omega_c t) + \right.$$
$$\left. + m_1(t) m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] + [A_1 + m_1(t)]\cos(2\omega_c t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t] \right.$$

$\rightarrow$ Nótese que también aparece un término de diafonía inteligible de la forma

$m_2(t)\cos[(\omega_c + 2\omega_m)t]$; los demás términos están fuera de banda.

Finalmente, en el término $3a_3 x_{c1}(t) x_{c2}^2(t)$ aparecerá un término de diafonía inteligible de la forma $m_2(t)\cos(\omega_c t)$. Si hacemos $a_3 = 0$, todos los términos de diafonía desaparecen y las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ se pueden transmitir en AM/FDM.

6.36. Dibuje el espectro típico de una señal AM/AM FDM tanto en banda de base como en portadora principal. Diga una ventaje y una desventaja de este sistema.

Solución:

Vamos a representar las señales moduladas con la convención establecida en la Fig. 6.24 del Texto.

Como ejemplo vamos a tomar cuatro señales de banda limitada f_m. En la Fig. P6.36(a) y (b) se muestra los espectros en Banda de Base y en Portadora Principal (Espectro de la señal transmitida).

Ventaja principal: Demodulación muy sencilla con detección de envolvente

Desventajas: Potencia desperdiciada, ancho de banda muy grande.

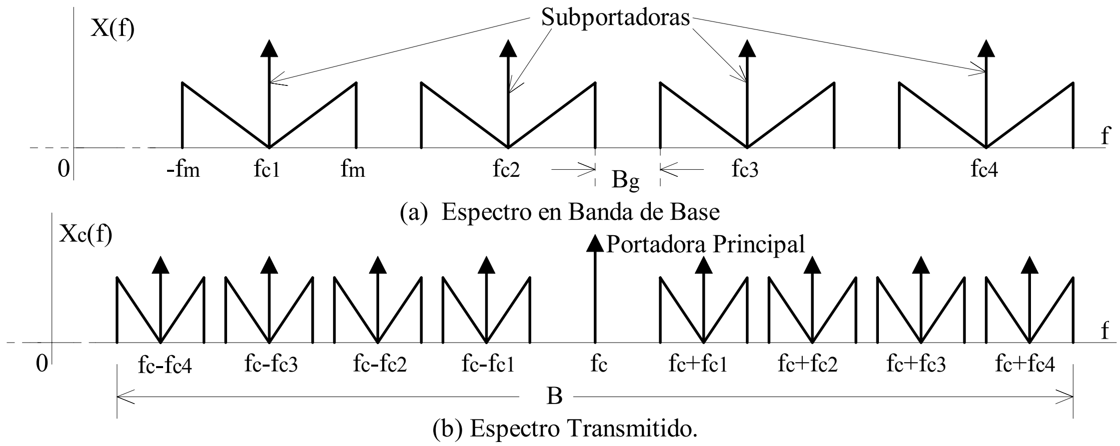


Fig. P6. 36.

6.37. Doce canales telefónicos, de 4 kHz cada uno, se multicanalizan en FDM dejando una banda de guarda de 1 kHz entre canales. La frecuencia más baja de subportadora es de 20 kHz y la frecuencia de la portadora de transmisión es de 150 kHz. Si la multicanalización se hace en DSB/DSB y en SSB/SSB, determine, en cada caso,

(a) Las frecuencias del resto de las subportadoras

(b) Representando los canales telefónicos como en la Fig. 6.24 del Texto, dibuje los espectros transmitidos indicando todas las frecuencias en juego. En SSB tome la banda lateral superior.

Solución:

1. DSB/DSB FDM.

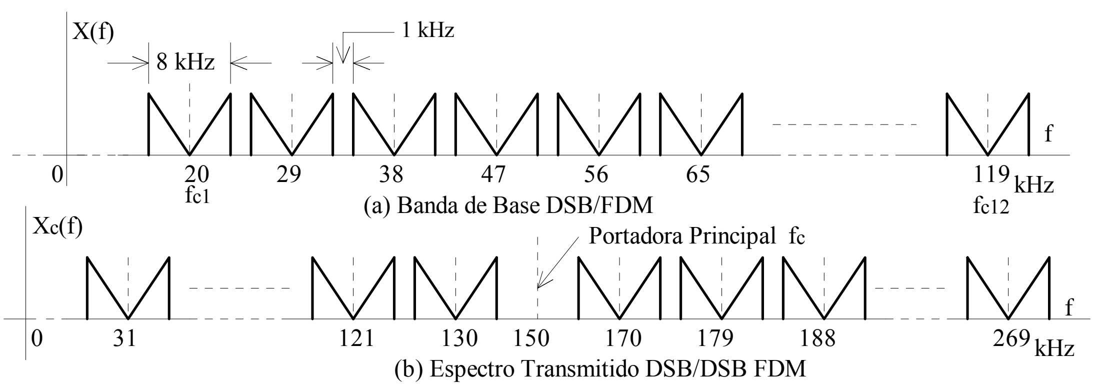


Fig. P6.36.

2. SSB/SSB FDM.

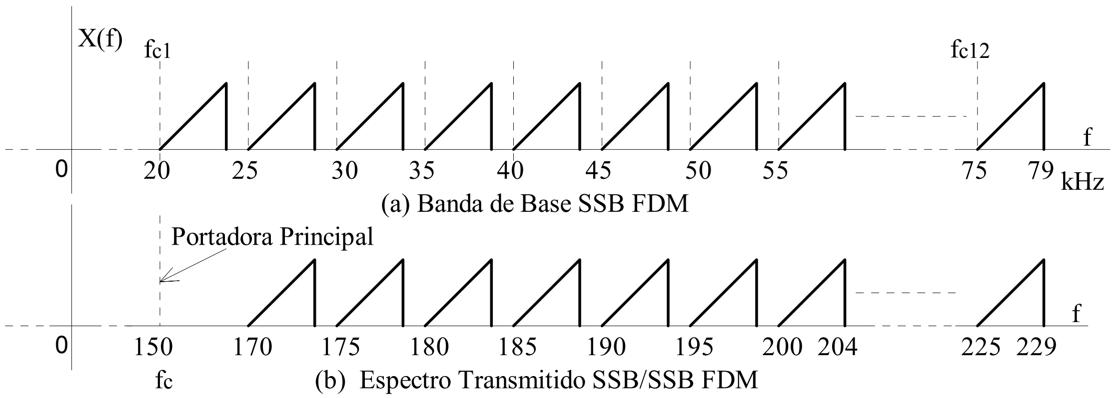


Fig. P6.37.

6.38. Un receptor superheterodino opera a una frecuencia de 1 MHz con el oscilador local a una frecuencia de 1,2 MHz. Un segundo receptor opera a la frecuencia imagen del primer receptor produciendole interferencias por efecto de imagen.

(a) Determine la frecuencia intermedia del primer receptor

(b) ¿Cuánto es el valor de la frecuencia de portadora del segundo receptor?

(c) Demuestre que en la Banda de Radiodifusión Comercial de 535 a 1605 kHz, para que no haya problemas de frecuencia imagen, el valor de la frecuencia intermedia deberá ser menor o igual que 535 kHz. En la práctica el valor normalizado de la frecuencia intermedia se ha establecido en 455 kHz.

(d) Demuestre también que para la banda de 535 a 1605 kHz, la frecuencia del oscilador local debe ser $995\,\text{kHz} \le f_{OL} \le 2055\,\text{kHz}$.

(e) Demuestre que cuando se utiliza la frecuencia intermedia de 455 kHz, en la banda comprendida entre 690 kHz y 1450 kHz, jamás se producirá interferencias debido a las frecuencias imagen. ¿Cuánto es el valor del valor de la frecuencia de esta imagen?

Solución:

(a) $f_{c1} = 1\,\text{MHz}; \quad f_{OL1} = 1{,}2\,\text{MHz}$

La frecuencia imagen del receptor 1 es, de la expresión (6.72) del Texto,

$$f_{i1} = f_{c1} + 2f_{FI1} = f_{OL1} + f_{FI1} \therefore f_{FI1} = f_{OL1} - f_{c1} = 1{,}2\text{x}10^6 - 10^6 = 200\,\text{kHz}$$

La frecuencia intermedia del receptor 1 es de 200 kHz

(b) La frecuencia de portadora del receptor 2 es igual a la frecuencia imagen del receptor 1, entonces,

$f_{c2} = f_{i1} = f_{c1} + 2f_{FI1} = 1{,}4\ \text{MHz}$

La frecuencia de portadora del receptor 2 es de 1,4 MHz.

(c) Sea la Fig. 6.22(b) del Texto, en donde se muestra las relaciones entre f_{FI}, f_c, f_{OL} y f_{im}.

La banda de paso RF en Radiodifusión en Onda Media está entre 535 kHz y 1605 kHz y el ancho de banda de las señales AM es de 10 kHz. Para el caso extremo en el cual el borde inferior del espectro de la señal es igual a 535 kHz y se quiere que el borde inferior de la señal imagen esté a 1605 kHz, la banda de la señal imagen no caerá dentro de la banda de paso de RF. Esta situación extrema se muestra en la Fig. P6.38.

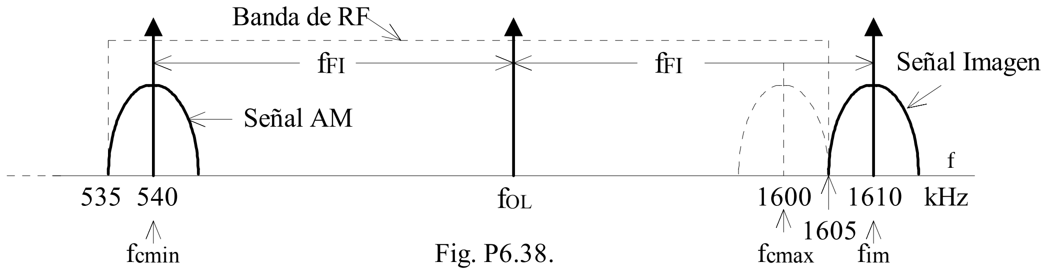


Fig. P6.38.

De la Fig. P6.38, $f_{im} = f_{cmin} + 2f_{FI} \therefore f_{FI} = \dfrac{f_{im} - f_{cmin}}{2} = \dfrac{1610 - 540}{2} = 535\text{kHz}$

El valor normalizado para la frecuencia intermedia en esta banda es de 455 kHz. Esto quiere decir que estaciones cuya frecuencia de portadora esté entre 540 kHz y 690 kHz, serán afectadas por imagen por estaciones que estén entre 1450 kHz y 1600 Khz. Pero esto es materia de la parte (e).

(d) La frecuencia del oscilador local debe ser tal, que la portadora más baja esté a 540 kHz y la más alta a 1600 kHz, como puede apreciarse en la Fig. P6.38.

Para $f_{cmin} = 540\ \text{kHz}$, $f_{OLmin} = f_{cmin} + f_{FI} = 540 + 455 = 995\ \text{kHz}$

Para $f_{cmax} = 1600\ \text{kHz}$, $f_{OLmax} = f_{cmax} + f_{FI} = 1600 + 455 = 2055\ \text{kHz}$. Entonces,

$995\ \text{kHz} \le f_{OL} \le 2055\ \text{kHz}$

(e) La menor frecuencia imagen permitida es aquella para la cual se verifica que $f_{cmin} + 2f_{FI} = 1450\ \text{kHz}$. Esto quiere decir que una estación a 1450 kHz será la imagen de la estación (la más baja en la banda de RF) de 540 kHz.

La otra frecuencia de interés es aquella para la cual el borde superior de la imagen queda justo al borde superior de la banda de RF, es decir, su portadora imagen está a 1600 kHz. La correspondiente frecuencia de portadora será

$f_c = 1600 - 2f_{FI} = 690\,\text{kHz}$. Por lo tanto, la portadora de 690 kHz tendrá su imagen a 1600 kHz. En consecuencia, estaciones entre 690 kHz y 1450 kHz, no serán perturbadas por efecto imagen. Por ejemplo, una estación de frecuencia 1500 kHz será la imagen de una estación cuya portadora es $f_c = 1500 - 910 = 590\,\text{kHz}$. Asimismo, una estación de 750 kHz tendrá su imagen a la frecuencia $f_{im} = 750 + 910 = 1660\,\text{kHz}$, frecuencia que cae fuera de la banda de RF y no será perturbada por efectos de imagen.

6.39. Un receptor superheterodino puede recibir 100 señales, de 5 kHz de ancho de banda cada una, moduladas en AM/AM FDM. El borde de la frecuencia inferior de la banda de radiofrecuencia (RF) está a 600 kHz.

Demuestre que la frecuencia intermedia máxima apropiada es de 500 kHz, y que la gama de sintonización del oscilador local es $1105\,\text{kHz} \le f_{OL} \le 2095\,\text{kHz}$.

Solución:

Sea la Fig. P6.39.

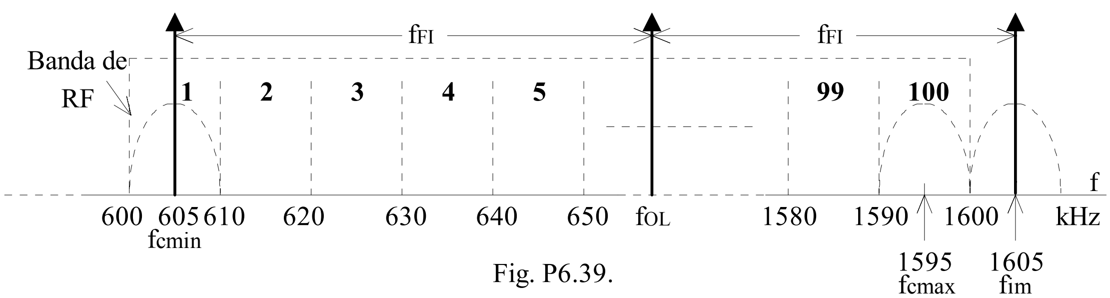


Fig. P6.39.

De la Fig. P6.39, $\quad f_{im} = f_{cmin} + 2f_{FI} \therefore f_{FI} = \dfrac{f_{im} - f_{cmin}}{2} = \dfrac{1605 - 605}{2} = 500\,\text{kHz}$

La frecuencia intermedia máxima apropiada es de 500 kHz

También, de la Fig. P6.39,

Para $f_{cmin} = 605\,\text{kHz}$, $f_{OLmin} = f_{cmin} + f_{FI} = 605 + 500 = 1105\,\text{kHz}$

Para $f_{cmax} = 1595\,\text{kHz}$, $f_{OLmax} = f_{cmax} + f_{FI} = 1595 + 500 = 2095\,\text{kHz}$

La sintonización del oscilador local estará dentro del rango

$1105\,\text{kHz} \le f_{OL} \le 2095\,\text{kHz}$

6.40. En la Fig. 6.75 del Texto se muestra un receptor superheterodino de doble conversión, cuyas frecuencias intermedias son f_{I1} y f_{I2}. Si $f_c > f_o > f_{I1} > f_{I2}$ y $f_{I1} > f_d$,

(a) Demuestre que el segundo oscilador local está sintonizado a la frecuencia fija $f_d = f_{I1} - f_{I2}$

(b) ¿Cuáles son los valores de las frecuencias imagen del segundo mezclador?

Solución:

(a) $x_{AM}(t) = [A_c + A_m m(t)]\cos(\omega_c t)$. Esta señal aparece también a la entrada del primer multiplicador.

A la salida del primer multiplicador,

$$v_1(t) = [A_c + A_m m(t)]\cos(\omega_c t)\cos(\omega_o t) = A_c\cos(\omega_c t)\cos(\omega_o t) + \\ + A_m m(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_o t)$$

$$v_1(t) = \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c + \omega_o)t] + \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c - \omega_o)t] + \\ + \frac{A_m}{2}m(t)\cos[(\omega_c + \omega_o)t] + \frac{A_m}{2}m(t)\cos[(\omega_c - \omega_o)t]$$

Sea $f_{I1} = f_c - f_o$. Entonces a la salida del filtro FI1, el cual estará centrado a la frecuencia f_{I1}, se tiene

$$v_2(t) = \frac{A_c}{2}\cos[(\omega_c - \omega_o)t] + \frac{A_m}{2}m(t)\cos[(\omega_c - \omega_o)t]$$

$$v_2(t) = \frac{A_c}{2}\cos(\omega_{I1}t) + \frac{A_m}{2}m(t)\cos(\omega_{I1}t)$$

Con el ajuste de f_o tal que para cualquiera f_c se verifique siempre $f_{I1} = f_c - f_o$, la señal $v_2(t)$ estará siempre centrada en f_{I1} y pudiera demodularse mediante detección de envolvente; pero como el receptor es de doble conversión, hay una nueva etapa de demodulación representada por el segundo oscilador local y el segundo filtro de frecuencia intermedia FI2.

A la salida del segundo multiplicador,

$$v_3(t) = v_2(t)\cos(\omega_d t) = \left[\frac{A_c}{2}\cos(\omega_{I1}t) + \frac{A_m}{2}m(t)\cos(\omega_{I1}t)\right]\cos(\omega_d t)$$

$$v_3(t) = \frac{A_c}{4}\cos[2\pi(f_{I1} + f_d)t] + \frac{A_c}{4}\cos[2\pi(f_{I1} - f_d)t] + \\ + \frac{A_m}{4}m(t)\cos[2\pi(f_{I1} + f_d)t] + \frac{A_m}{4}m(t)\cos[2\pi(f_{I1} - f_d)t]$$

Puesto que $f_{I1} > f_d$, donde ambas frecuencias son fijas, podemos definir la segunda frecuencia intermedia como $f_{I2} = f_{I1} - f_d$, o también $f_d = f_{I1} - f_{I2}$ que es fija también. Por lo tanto, el segundo oscilador estará sintonizado a la frecuencia fija f_d, lo cual simplifica el diseño. Por ejemplo, si $f_{I1} = 10\,\text{MHz}$ y $f_{I2} = 1\,\text{MHz}$, la frecuencia del segundo oscilador será de 9 MHz.

(b) En el segundo mezclador $f_d = f_{I1} - f_{I2}$.

De la expresión (6.71) del Texto, las frecuencias imagen vienen dadas por

$f_{im} = f_1 \pm 2f_2$. En nuestro caso, para el segundo mezclador se verifica que $f_1 = f_{I1}$ y $f_2 = f_{I2}$. Por lo tanto, las frecuencias imagen del segundo mezclador son $f_{im2} = f_{I1} \pm 2f_{I2}$.Por ejemplo, si $f_{I1} = 10\,\text{MHz}$ y $f_{I2} = 1\,\text{MHz}$, las frecuencias imagen del segundo mezclador serán de 12 MHz y 8 MHz.

6.41. El Canal 6 de Televisión Comercial tiene una portadora de video de 83,25 MHz, y la banda de audio está a 4,5 MHz por encima de ella. Un receptor superheterodino de TV tiene una frecuencia intermedia de 45,75 MHz y para el audio, de 41,25 MHz.

(a) Demuestre que la frecuencia del oscilador local de video para recibir el Canal 6 es de 129 MHz.

(b) Demuestre que las frecuencias imagen y del oscilador local en el canal de audio son de 169,75 MHz y de 128,5 MHz, respectivamente.

(c) Demuestre que el Canal 7 puede producir perturbaciones en el Canal 6 por efecto imagen (En el Apéndice B.3 se dan las frecuencias utilizadas en TV).

Solución:

Canal 6 de TV: $f_{cv} = 83{,}25\,\text{MHz}$; $f_{ca} = 87{,}75\,\text{MHz}$; $f_{Iv} = 45{,}75\,\text{MHz}$; $f_{Ia} = 41{,}25\,\text{MHz}$

(a) Canal 6, video, $f_{OLv} = f_{cv} + f_{Iv} = 129\,\text{MHz}$

(b) Canal 6, audio,

frecuencia imagen: $f_{ima} = f_{ca} + 2f_{Ia} = 87{,}75 + 2\text{x}41{,}25 = 170{,}25\,\text{MHz}$

Frecuencia del OL: $f_{OLa} = f_{ca} + f_{Ia} = 87{,}75 + 41{,}25 = 129\,\text{MHz}$

(c) La frecuencia imagen de video del Canal 6 es

$$f_{imv} = f_{cv} + 2f_{Iv} = 83{,}25 + 2\text{x}45{,}75 = 174{,}75\ \text{MHz}$$

pero observamos, Apéndice B.3 del Texto, que la banda de video del Canal 7 está entre 174 MHz y 180 MHz. Esto quiere decir que el Canal 7 puede producir perturbaciones por efecto imagen en el Canal 6. En la práctica estos canales están en localidades distantes una de la otra.

6.42. En la Fig. 6.76 del Texto se muestra el diagrama de bloques de un "Oscilador de Batido (Beat Frequency Oscilator, BFO)".

(a) Analice su operación, ¿Cuál es la ventaja del BFO sobre otros tipos de oscilador?

(b) Compare el cambio porcentual en la frecuencia de y(t) respecto a un cambio porcentual de f_1 cuando f_o es constante.

(c) Para $f_1 = 100\,\text{kHz}$ y $f_o = 99{,}99\,\text{kHz}$, encuentre el cambio porcentual en f_c debido a un cambio de 0,1% en la frecuencia f_1.

Solución:

(a) Sea el BFO mostrado en la Fig. 6.76 del Texto.

A la salida del multiplicador,

$$v_1(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_o t) = \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_1 + f_o)t] + \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_1 - f_o)t]$$

El filtro dejará pasar solamente la frecuencia inferior, de modo que

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_1 - f_o)t] = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t), \text{ donde } \quad f_c = f_1 - f_o$$

En los BFO los valores básicos de f_1 y f_o son ligeramente diferentes, pero siempre $f_1 \neq f_o$.

El BFO es un oscilador compuesto de frecuencia variable muy estable sobre una amplia gama de frecuencias. Esta gran variación se consigue con variaciones muy pequeñas de la frecuencia f_1. La estabilidad se mejora si el oscilador de f_o es un oscilador de cristal.

Una aplicación del BFO es en la demodulación de señales SSB.

(b) Si f_1 experimenta una variación $\pm\Delta f_1$, entonces f_c experimentará una variación $\pm\Delta f_c$. Entonces,

$f_c \pm \Delta f_c = f_1 \pm \Delta f_1 - f_o$, pero como $f_c = f_1 - f_o$, entonces $\pm\Delta f_c = \pm\Delta f_1$.

Si multiplicamos ambos miembros de la expresión anterior por $\frac{100}{f_c}$, entonces,

$\frac{\pm\Delta f_c}{f_c}100 = \frac{\pm\Delta f_1}{f_c}100.$ Pero $\frac{\pm\Delta_c}{f_c}100$ es la variación porcentual de f_c, que representaremos como $V_c\%$, y con $f_c = f_1 - f_o$, entonces,

$$V_c\% = \frac{\pm\Delta f_1}{f_1 - f_o}100 \quad \text{con} \quad f_1 \neq f_o$$

Δf_1 es la variación de f_1 que puede ser un incremento (signo positivo) o un decremento (signo negativo).

(c) Sea $f_1 = 100\,\text{kHz};\quad f_o = 99{,}99\,\text{kHz};\quad \Delta f_1 = \frac{0{,}1}{100} f_1 = 100\,\text{Hz}$

$$f_c = 100000 - 99990 = 10\,\text{Hz}$$

$$\text{Si } \Delta f_1 = 100\,\text{Hz, entonces} \quad V_c\% = \frac{100\text{x}100}{(100 - 99{,}99)10^3} = 1000\%$$

Vemos que si f_1 aumenta en 0,1% (100 Hz), la frecuencia de salida f_c pasa de 10 Hz a 110 Hz, lo que representa una variación del 1000%. Si f_c' es la nueva frecuencia de salida del BFO, podemos establecer que

$$f_c' = f_1 \pm \Delta f_1 - f_o = f_1 - f_o \pm \Delta f_1$$

6.43. Una señal sinusoidal de frecuencia f_m y amplitud unitaria modula una portadora en AM y FM. La potencia de la portadora no modulada es la misma en ambos sistemas. Cuando se modula, la desviación máxima en FM es cuatro veces el ancho de banda en AM. La amplitud de las componentes separadas en $\pm f_m$ es la misma en ambos sistemas.

Demuestre que el índice de modulación en FM es 8 y en AM es de 47%.

Solución:

$m(t) = \cos(\omega_m t)$; A_c es la misma en ambos sistemas.

$$\text{En AM:} \quad x_{AM}(t) = [A_c + m(t)]\cos(\omega_c t) = A_c[1 + \frac{1}{A_c}m(t)]\cos(\omega_c t); \quad a\% = \frac{1}{A_c}100$$

$$\text{En FM:} \quad x_{FM}(t) = A_c\cos[\omega_c t + \frac{f_d}{f_m}\text{sen}(\omega_m t)]; \quad \beta = \frac{f_d}{f_m}$$

$$\text{De los datos:} \quad \Delta f = f_d = 4\text{x}2f_m = 8f_m \therefore \beta = \frac{f_d}{f_m} = 8$$

$$\text{En AM:} \quad x_{AM}(t) = A_c\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{1}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

La amplitud de las bandas laterales en AM es igual a $\frac{1}{2}$.

En FM: En la Fig. P6.43 se muestra la portadora y las dos primeras bandas laterales de la señal FM. Como la magnitud de las componentes separadas en $\pm f_m$ de la portadora es igual en ambos sistemas, entonces

$$J_1(8)A_c = \frac{1}{2} \therefore A_c = \frac{1}{2J_1(8)} = \frac{1}{2x0,235} = 2,13$$

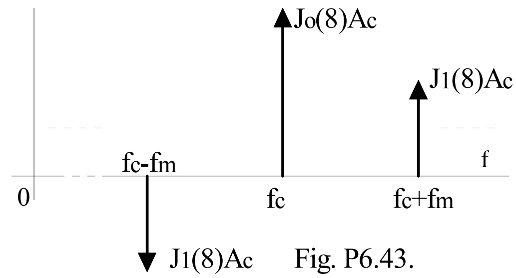


Fig. P6.43.

El índice de modulación en AM será $a\% = \frac{1}{A_c}100 = \frac{1}{2,13}100 = 47\%$

6.44. La señal $m(t) = 5\text{sinc}^2(5x10^3 t)$ se aplica a un modulador FM de banda angosta. La potencia de la portadora sin modular es de 50 W, la constante de desviación de frecuencia es 10^3 y la frecuencia de portadora es de 10 kHz.

Calcule y dibuje el espectro de la señal modulada FM en banda angosta.

Solución:

$$\frac{1}{2}A_c^2 = 50 \therefore A_c = 10; \quad f_d = 10^3; \quad f_c = 10^4$$

De la expresión (6.92) del Texto, en FM de banda angosta,

$$X_{FM}(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)\right] - \frac{A_c f_d}{2}\left[\frac{M(f+f_c)}{f+f_c} - \frac{M(f-f_c)}{f-f_c}\right]$$

$$X_{FM}(f) = 5\left[\delta(f+10^4) + \delta(f-10^4)\right] - 5x10^3\left[\frac{M(f+10^4)}{f+10^4} - \frac{M(f-10^4)}{f-10^4}\right]$$

pero $M(f) = 10^{-3}\Lambda(\frac{f}{5x10^3})$, de donde,

$$X_{FM}(f) = 5\left[\delta(f+10^4) + \delta(f-10^4)\right] - 5\left[\frac{\Lambda(\frac{f+10^4}{5x10^3})}{f+10^4} - \frac{\Lambda(\frac{f-10^4}{5x10^3})}{f-10^4}\right]$$

Para dibujar este espectro, el lector puede demostrar que para f > 0, $X_{FM}(f)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$X_{FM}(f) = \begin{cases} 5\delta(f-10^4) & \text{para } f = 10^4 \\ 10^{-3}\dfrac{f-5x10^3}{f-10^4} & \text{para } 5x10^3 \le f < 10^4 \\ -10^{-3}\dfrac{f-15x10^3}{f-10^4} & \text{para } 10^4 < f \le 15x10^3 \end{cases}$$

que se muestra en la Fig. P6.44.

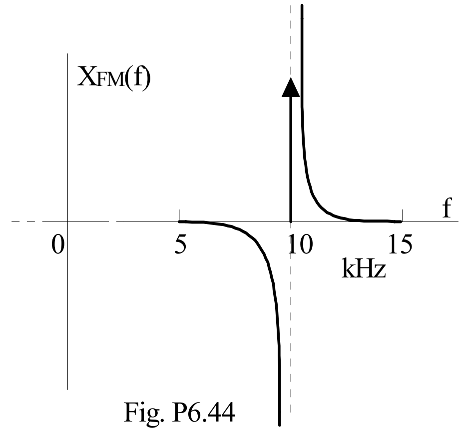


Fig. P6.44

6.45. Sea el sistema FM de la Fig. 6.77 del Texto donde $m(t) = 20\,\text{sen}^2(10^4\pi t)$.

La señal modulada $x_c(t)$ tiene una potencia de 50 W y un índice de modulación de 10. El filtro de salida tiene ganancia unitaria, ancho de banda de 70 kHz y está centrado en el espectro transmitido.

(a) Demuestre que: $A_c = 10;\ f_d = 10^4\,\text{Hz/V}$ y $< x_{CT}^2(t) >= 10{,}05\text{W}$

(b) Dibuje el espectro de la señal transmitida indicando los valores de amplitud y frecuencia.

Solución:

Sea la Fig. 6.77 del Texto. $m(t) = 10 - 10\cos(2\pi 10^4 t)$; $\dfrac{1}{2}A_c^2 = 50 \therefore A_c = 10$

$\beta = 10;\ f_c = 100\,\text{kHz};\ B = 70\,\text{kHz}$

(a) $x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_d \int_0^t [10 - 10\cos(2\pi 10^4 \tau) d\tau\right]$

pero $\int_0^t \left[10 - 10\cos(2\pi 10^5 \tau)\right] d\tau = 10t - \dfrac{10}{2\pi 10^4}\text{sen}(2\pi 10^4 t)$

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + 20\pi f_d t - \frac{20\pi f_d}{2\pi 10^4}\text{sen}(2\pi 10^4 t) = 2\pi(f_c + 10 f_d) - 10^{-3} fd\,\text{sen}(2\pi 10^4 t)$$

de donde, $f_c' = f_c + 10 f_d = 200\,\text{kHz};\ A_c = 10;\ \beta = 10 = \dfrac{f_d}{10^3} \therefore f_d = 10^4\,\text{Hz/V}$

$f_m' = 10^4 = 10\,\text{kHz}$

(b) El espectro FM correspondiente se muestra en la Fig. P6.45.

Nótese que el espectro transmitido está centrado en 200 kHz y no en 100 kHz; esto es debido al efecto de la componente continua de m(t).

De la Fig. P6.45, la potencia de salida del filtro es

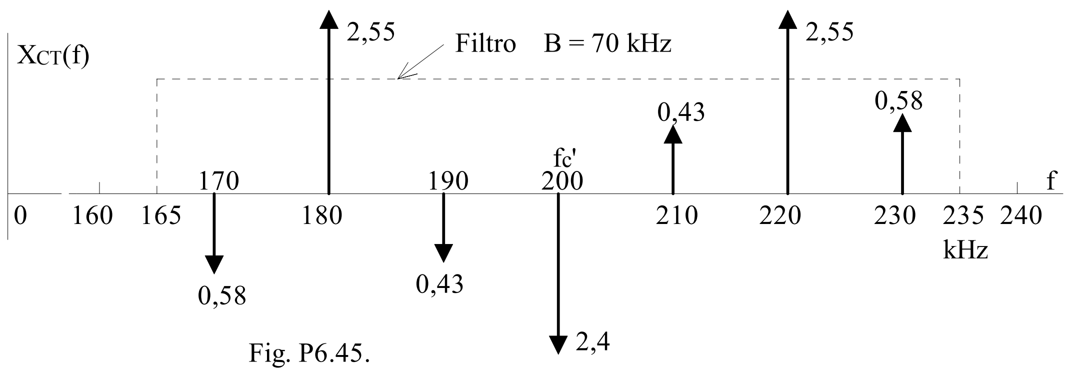


Fig. P6.45.

$$<x_{CT}^2(t)>=\frac{1}{2}(2{,}46)^2+2\left[\frac{1}{2}(0{,}43)^2+\frac{1}{2}(2{,}55)^2+\frac{1}{2}(0{,}58)^2\right]=10{,}05\text{W}$$

6.46. Demuestre que en modulación PM $\Delta\phi = k_p|m(t)|_{max}$ y $\Delta f = \frac{k_p}{2\pi}\left|\frac{d}{dt}m(t)\right|_{max}$, y si la modulación es sinusoidal con $m(t) = A_m \operatorname{sen}(2\pi f_m t)$, entonces,

$\beta_p = k_p A_m = \Delta\phi$ y $\Delta f = k_p f_m A_m$

Solución:

Modulación PM.

$x_{PM}(t) = A_c\cos[\omega_c t + k_p m(t)]; \quad \theta(t) = \omega_c t + \phi(t)$

$$\phi(t) = k_p m(t); \qquad f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\phi(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t)$$

$$\Delta f(t) = \frac{k_p}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t); \quad \Delta\phi = |\phi(t)|_{max} = k_p|m(t)|_{max} \text{ desviación máxima de fase}$$

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi}\left|\frac{d}{dt}m(t)\right|_{max}$$

Sea $m(t) = A_m\operatorname{sen}(2\pi f_m t); \quad x_{PM}(t) = A_c\cos\left[\omega_c t + k_p A_m \operatorname{sen}(\omega_m t)\right]$

$$\phi(t) = k_p A_m \operatorname{sen}(2\pi f_m t); \quad \Delta\phi = k_p A_m = \beta$$

$$\Delta f = \frac{k_p}{2\pi}\left|A_m 2\pi f_m \cos(2\pi f_m t)\right|_{max} = \frac{k_p}{2\pi}A_m 2\pi f_m = k_p A_m f_m$$

6.47. La señal $m(t) = 10\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-2n)$ se aplica a un modulador FM, donde $A_c = 10$; $f_c = 10\text{kHz}$ y $f_d = 10^3\,\text{Hz/V}$

(a) Dibuje la forma de onda de la señal modulada FM, indicando los valores exactos de las amplitudes y frecuencias.

(b) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal FM, de acuerdo con la expresión (6.111) del Texto, es de 10 kHz.

Solución:

Modulación FM. $A_c 10$; $f_c = 10\,\text{kHz}$; $f_d = 10^3\,\text{Hz/V}$

m(t) es una señal periódica triangular de período 2 y amplitud 10

$$x_{FM}(t) = A_c\cos[\omega_c t + 2\pi f_d\int^t m(\tau)d\tau];\quad \theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi f_d\int^t m(\tau)d\tau$$

$$f_i(t) = f_c + f_d m(t)$$

Como m(t) es periódica vamos a tomar el período (-1, +1) que corresponde a un triángulo de la forma $10\Lambda(t)$; entonces,

$$m(t) = 10\Lambda(t) = \begin{cases} 10(t+1) & \text{para } -1 \le t < 0 \\ -10(t-1) & \text{para } 0 \le t \le 1 \end{cases}, \text{ de donde}$$

$$f_i(t) = \begin{cases} f_c + 10f_d(t+1) & \text{para } -1 \le t < 0 \\ f_c - 10f_d(t-1) & \text{para } 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Por integración de $f_i(t)$, la fase $\theta(t)$ será

$$\theta(t) = \begin{cases} 2\pi\int[f_c + 10f_d(t+1)]dt = 2\pi(f_c + 10f_d)t + 10\pi f_d t^2 & \text{para } -1 \le t < 0 \\ 2\pi\int[f_c - 10f_d(t-1)]dt = 2\pi(f_c + 10f_d)t - 10\pi f_d t^2 & \text{para } 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Durante el período (-1, +1) la señal FM será entonces,

$$x_{FM}(t) = \begin{cases} A_c\cos[2\pi(f_c + 10f_d)t + 10\pi f_d t^2] & \text{para } -1 \le t < 0 \\ A_c\cos[2\pi(f_c + 10f_d)t + 10\pi f_d t^2] & \text{para } 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Esta señal se muestra en la Fig. P6.47 junto con la señal m(t) durante el período $(-1, +1)$. Para los otros períodos de m(t), la señal FM tiene la misma forma.

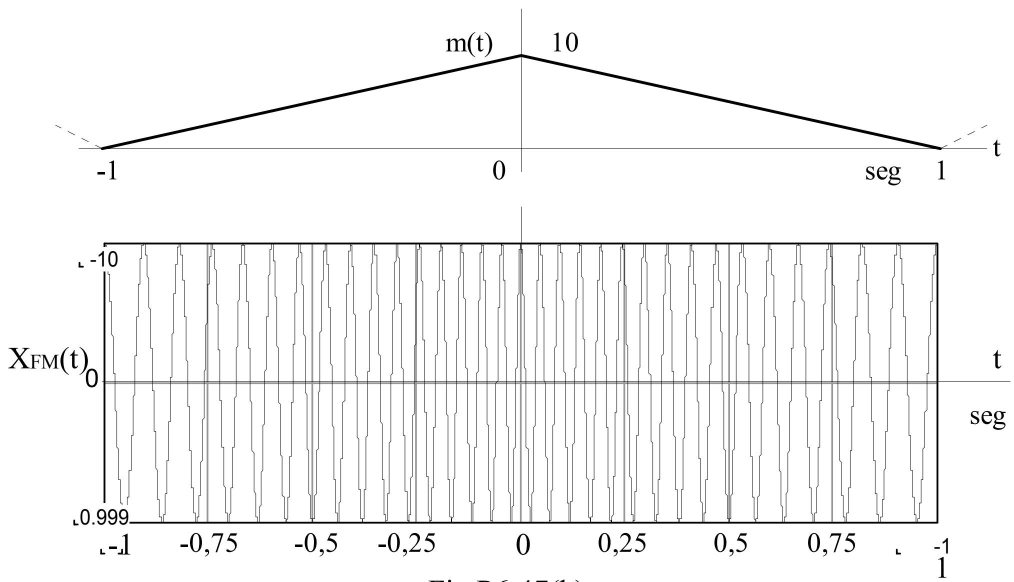


Fig.P6.47(b)

Algunos valores instantáneos de frecuencia son:

$$\text{Para}\quad \begin{array}{ll} t = 0, & f_i = 2x10^4\,\text{Hz} \\ t = \pm 0,25, & f_i = 1,75x10^4\,\text{Hz} \\ t = \pm 0,5, & f_i = 1,5x10^4\,\text{Hz} \\ t = \pm 1, & f_i = 10^4\,\text{Hz} \end{array}$$

(c) La envolvente de $x_{FM}(t)$ es constante e igual a 10. Nótese que

$$f_{max} = 2x10^4\,\text{Hz} \quad \text{y} \quad f_{min} = 10^4\,\text{Hz}, \text{ de donde}$$

$$B \approx 2\Delta f = f_{max} - f_{min} = 2x10^4 - 10^4 = 10^4\,\text{Hz} = 10\,\text{kHz}$$

4.48. Consideremos el modulador del problema anterior como la etapa de banda angosta de un modulador Armstrong para Radiodifusión Comercial, Fig. 6.38 del Texto. La portadora de transmisión es de 100 MHz y el ancho de banda máximo es de 200 kHz. Si la frecuencia máxima de m(t) es de 10 kHz, y su amplitud máxima de 10, demuestre, utilizando la Regla de Carson,

(a) Que el factor de multiplicación del multiplicador de frecuencia es n = 9.

(b) Que la frecuencia del mezclador $f_{OL} = 99,91\,\text{MHz}$ y la relación de desviación de la señal transmitida es $\Delta = 9$.

Solución:

En la Fig. P6.48 se muestra la primera etapa de un modulador Armstrong.

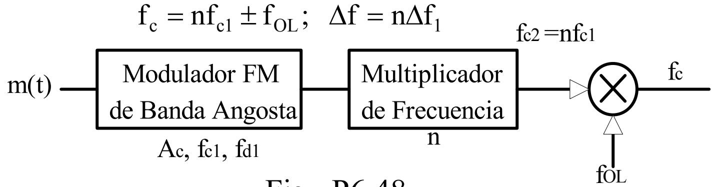


Fig. P6.48.

De la Fig. P6.48,

$f_c = nf_{c1} \pm f_{OL}$; $\Delta f = n\Delta f_1$ y la Regla de Carson: $B_T = 2(\Delta + 1)B_m$

$$B_T = 2\left[\frac{f_d}{B_m}|m(t)|_{max} + 1\right]B_m$$

$B_T = 2\left[f_d|m(t)|_{max} + B_m\right]$. Despejando f_d,

$$f_d = \frac{\frac{B_T}{2} - B_m}{|m(t)|_{max}} = \frac{10^5 - 10^4}{10} = 9x10^3\,Hz/V; \quad \text{pero} \quad f_d = nf_{d1} \therefore n = \frac{f_d}{f_{d1}} = \frac{9x10^3}{10^3} = 9$$

(c) Tomemos $f_c = nf_{c1} + f_{OL} \therefore f_{OL} = f_c - nf_{c1} = 100x10^6 - 9x10^4 = 99{,}91MHz$

$$\Delta = \frac{f_d}{B_m}|m(t)|_{max} = \frac{9x10^3}{10^4}10 = 9$$

4.49. A un modulador PM se le aplica la señal m(t) de la Fig. 6.78 del Texto. La constante de desviación de fase es 6π y la frecuencia de la portadora de 10 kHz.

(a) Dibujar la frecuencia instantánea en función del tiempo

(b) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal PM es $B = f_{max} - f_{min} = 2kHz$.

Solución:

(a)

Modulación PM. Sea la señal m(t) mostrada en la Fig. 6.78 del Texto.

$k_p = 6\pi$; $f_c = 10$ kHz y hagamos $A_c = 10$

$$x_{PM}(t) = A_c\cos[\omega_c t + k_p m(t)]; \qquad \theta(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{d}{dt}m(t) = 10^4 + 3m'(t)$$

donde m'(t), la derivada de m(t), tiene la forma mostrada en la Fig. P6.49(a). Por lo tanto, la frecuencia instantánea será:

$$f_i(t) = \begin{cases} 10\,\text{kHz} \quad \text{para} & t < 998\,\text{ms} \;\; \text{y} \;\; 1006\,\text{ms} < t \\ 11{,}5\,\text{kHz} \;\; \text{para} & 998\,\text{ms} \le t < 1000\,\text{ms} \\ 9{,}5\,\text{kHz} \quad \text{para} & 1000\,\text{ms} \le t \le 1006\,\text{ms} \end{cases}$$

$f_i(t)$ tiene la forma mostrada en la Fig. P6.49(b).

En la Fig. P6.49(c), se muestra la forma de la señal modulada PM, indicándose las frecuencias en los diferentes intervalos de m(t).

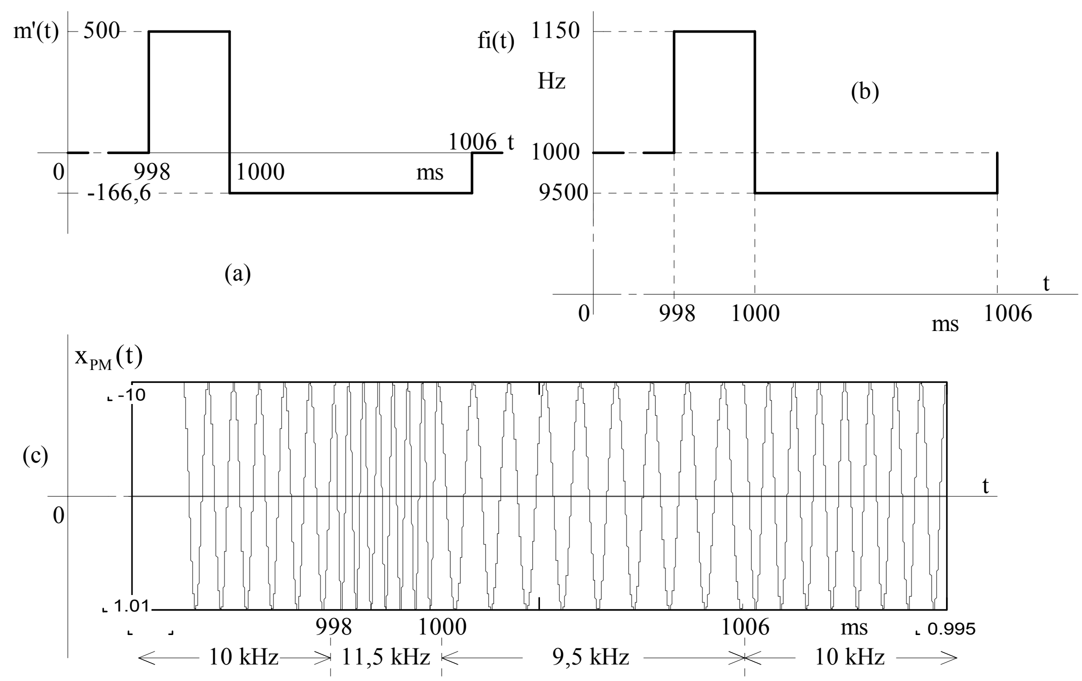


Fig. P6.49.

(c) Nótese que, de la Fig. P6.49(b), $f_{max} = 11{,}5\,\text{kHz}$ y $f_{min} = 9{,}5\,\text{kHz}$; por lo tanto, el ancho de banda aproximado de la señal PM es

$$B = f_{max} - f_{min} = 11{,}5 - 9{,}5 = 2\,\text{kHz}.$$

6.50. En un sistema FM demuestre que si la señal moduladora se integra antes de aplicarla al modulador, la desviación de fase instantánea sale multiplicada por t. Demuestre también que en este caso la señal moduladora m(t) no podrá recuperarse de la señal modulada FM.

Solución:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + 2\pi f_d \int_0^t m_i(\tau)d\tau]$$

Sea $\phi_i(t) = 2\pi f_d \int_0^t m_i(\tau)d\tau$ la desviación instantánea de fase. Pero si $m_i(t) = \int_0^t m(\lambda)d\lambda$,
entonces $\phi_i(t) = 2\pi f_d \int_0^t [\int_0^t m(\lambda)d\lambda]d\tau = 2\pi f_d \int_0^t d\lambda \int_0^t m(\lambda)d\lambda = 2\pi f_d t \int_0^t m(\lambda)d\lambda$.

En condiciones normales la desviación de fase es $\phi(t) = 2\pi f_d \int_0^t m(\lambda)d\tau$; por lo tanto,

$\phi_i(t) = t\phi(t)$ y $x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + t\phi(t)]$. Vemos que la desviación de fase instantánea, en el caso de integración previa de m(t), sale multiplicada por t.

Veamos ahora el caso de la recuperación de m(t). La frecuencia instantánea es

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\omega_c t + 2\pi f_d t \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\omega_c + 2\pi f_d \int_0^t m(\tau)d\tau + 2\pi f_d t m(t)\right] = f_c + f_d t m(t) + f_d \int_0^t m(\tau)d\tau = f_c + \Delta f(t)$$, donde

$$\Delta f(t) = f_d t m(t) + f_d \int_0^t m(\tau)d\tau$$

Vemos que la desviación instantánea de frecuencia varía en forma muy complicada en función de t y m(t), que es imposible extraer m(t) de $f_i(t)$ o $\Delta f(t)$.

6.51. En un transmisor FM la potencia de la portadora sin modular es de 50 W y su frecuencia de 100 kHz. El mensaje es sinusoidal de frecuencia 4 kHz y la desviación de frecuencia máxima de 40 kHz. El filtro de transmisión tiene ganancia unitaria.

(a) Demuestre que el ancho de banda del filtro de transmisión, a fin de que la potencia de la señal transmitida sea aproximadamente el 50% de la potencia de la señal modulada, es $56\,\text{kHz} \le B < 64\,\text{kHz}$.

(b) Dibuje el espectro de la señal transmitida indicando los valores de amplitud y frecuencia.

Solución:

Modulación FM. $f_c = 100\,\text{kHz};\ \frac{A_c^2}{2} = 50\,\text{W} \therefore A_c = 10;\ f_m = 4\,\text{kHz};\ \Delta f = f_d A_m = 40\,\text{kHz}$

(a) Supongamos que $A_m = 1$; $\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = 10$. El ancho de banda del filtro de transmisión debe ser tal que $< x_{CT}^2(t) > \approx 25\,\text{W}$. De acuerdo con las expresiones (6.112) y (6.113) del Texto, debe verificarse que

$P_k = \left[J_o^2(10) + 2\sum_{n=1}^{k} J_n^2(10)\right] \approx \frac{1}{2}$. Vamos a ver qué valor de k verifica esta expresión. El ancho de banda del filtro de salida será $B_T = 2kf_m$.

De la Tabla 6-2 obtenemos que para $k = 7$; $P_7 = 0{,}502$ y para $k = 8$, $P_8 = 0{,}704$. El ancho de banda estará entonces entre $k = 7$ y $k = 8$, es decir,

$2x7x4x10^3 \le B_T < 2x8x4x10^3$ o $56\,\text{kHz} \le B_T < 64\,\text{kHz}.$

(b) El correspondiente de espectro de $x_{CT}(t)$ se muestra en la Fig. P4.51 para $A_c = 10;\ \beta = 10;\ f_c = 100\,\text{kHz}$ y $f_m = 4\text{kHz}$.

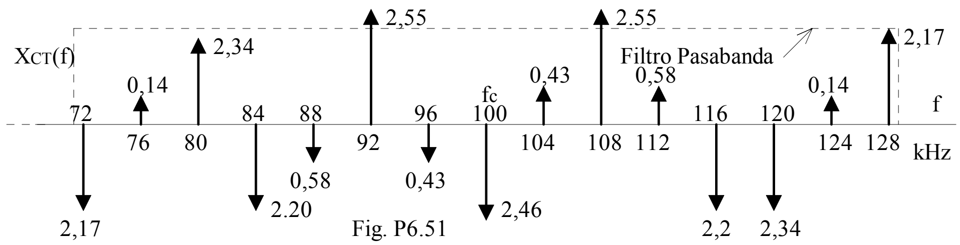


Fig. P6.51

6.52. La señal m(t) de la Fig. 6.79 del Texto se aplica a un modulador FM donde $f_c = 1\,\text{kHz}$ y $f_d = 200\,\text{Hz/V}$.

(a) Determine el valor pico a pico de la desviación de frecuencia.

(b) Dibuje en forma aproximada la señal modulada pero mostrando las características de la señal e indicando los valores de interés.

Solución:

Modulación FM; $f_c = 1\,\text{kHz};\ f_d = 200\,\text{Hz/V}$

(a) $x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau)d\tau\right];\quad f_i(t) = f_c + f_d m(t) = 1000 + 200m(t)$

De la Fig. 6.79 del Texto, $|m(t)|_{max} = 3$ y $|m(t)|_{min} = -1$; de donde

$$f_{max} = f_c + f_d|m(t)|_{max} = 1000 + 200x3 = 1600\,\text{Hz}$$

$$f_{min} = f_c - f_d|m(t)|_{min} = 1000 - 200x1 = 800\ \text{Hz}$$

El valor pico a pico de la desviación de frecuencia es

$$|\Delta f(t)|_{PP} = f_{max} - f_{min} = 800\,\text{Hz}$$

Nótese que este valor es una aproximación del ancho de banda de la señal FM.

(b) Para graficar la forma de la señal modulada, vamos a tomar el intervalo (-4, +4) de m(t). En este intervalo,

$$m(t) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -4 \le t < -2 \\ \frac{3}{2}(t + \frac{4}{3}) & \text{para} \quad -2 \le t < 0 \\ -\frac{3}{2}(t - \frac{4}{3}) & \text{para} \quad 0 \le t < 2 \\ -1 & \text{para} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Por lo tanto, la frecuencia instantánea es

$$f_i(t) = \begin{cases} f_c - f_d = 1000 - 200 = 800\text{ Hz} & \text{para} \quad -4 \le t < -2 \\ f_c + \frac{3}{2} f_d (t + \frac{4}{3}) = 1000 + \frac{600}{2}(t + \frac{4}{3}) = 1400 + 300t & \text{para} \quad -2 \le t < 0 \\ f_c - \frac{3f_d}{2}(t - \frac{4}{3}) = 1000 - 300(t - \frac{4}{3}) = 1400 - 300t & \text{para} \quad 0 \le t < 2 \\ f_c - f_d = 800\text{ Hz} & \text{para} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Mediante integración de $f_i(t)$ la correspondiente fase será

$$\theta(t) = \begin{cases} 2\pi\int_0^t 800 d\tau = 1600\pi t & \text{para} \quad -4 \le t < -2 \\ 2\pi\int_0^t [1400 + 300\tau] d\tau = 2\pi[1400t + 150t^2] & \text{para} \quad -2 \le t < 0 \\ 2\pi\int_0^t [1400 - 300\tau] d\tau = 2\pi[1400t - 150t^2] & \text{para} \quad 0 \le t < 2 \\ 2\pi\int_0^t 800 d\tau = 1600\pi t & \text{para} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

La correspondiente señal $x_{FM}(t)$ en el intervalo (-4, +4) será

$$x_{FM}(t) = \begin{cases} A_c \cos(1600\pi t) & \text{para} \quad -4 \le t < -2 \\ A_c \cos(2800\pi t + 300\pi t^2) & \text{para} \quad -2 \le t < 0 \\ A_c \cos(2800\pi t - 300\pi t^2) & \text{para} \quad 0 \le t < 2 \\ A_c \cos(1600\pi t) & \text{para} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Esta señal tiene la forma mostrada en la Fig.P6.52.

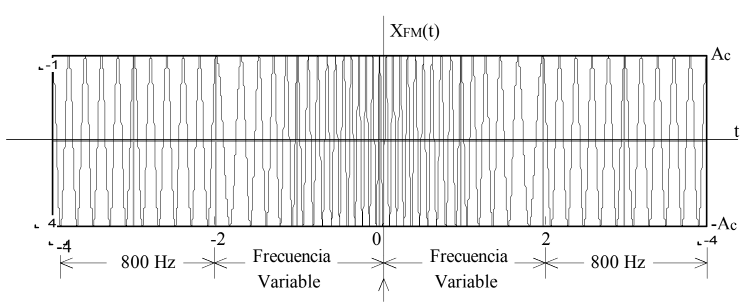


Fig. P6.52

6.53. En un receptor FM se ha recibido la señal

$$x_{cr}(t) = \cos\left[2\pi 10^6 t + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t - 2x10^{-2}n}{10^{-2}})\right]$$

La función de autocorrelación del ruido en antena es $R(\tau) = 2x10^{-4}\mathrm{sinc}^2(2x10^6\tau)$.

El amplificador de RF tiene una ganancia de tensión de 10, siendo la constante del discriminador $k_D = \pi$. La constante de desviación de frecuencia del transmisor es de 100 Hz/V.

(a) Demuestre que $m(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(100\pi nt)}{n\pi}$ para n impar

(b) Demuestre que el ancho de banda del amplificador de RF es de 200 Hz y que la potencia de ruido a su salida es de –26,99 dBm.

(c) Suponiendo que el ancho de banda del amplificador de RF es de 200 Hz, demuestre que $\frac{S_o}{N_o} = 61{,}31\,\mathrm{dB}$.

Solución:

Modulación FM. $x_{cr}(t) = \cos\left[2\pi 10^6 t + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t - 2x10^{-2}n}{10^{-2}})\right]; \quad A_r = 1$

$$R_n(\tau) = 2x10^{-4}\mathrm{sinc}^2(2x10^6\tau) \Leftrightarrow S_n(f) = 10^{-10}\Lambda(\frac{f}{2x10^6});\ G_v = 10;\ k_D = \pi;\ f_d = 100\,\mathrm{Hz/V}$$

(a) De la forma de $x_{cr}(t)$, vemos que

$\phi(t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t - 2x10^{-2}n}{10^{-2}}) = 2\pi f_d \int m(\tau)d\tau.$ Tomando la derivada, obtenemos

$10^{-2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t - 2x10^{-2}n}{10^{-2}})\right] = m(t)$. En la Fig.P6.53(a) se muestra $\frac{\phi(t)}{2\pi}$ y su

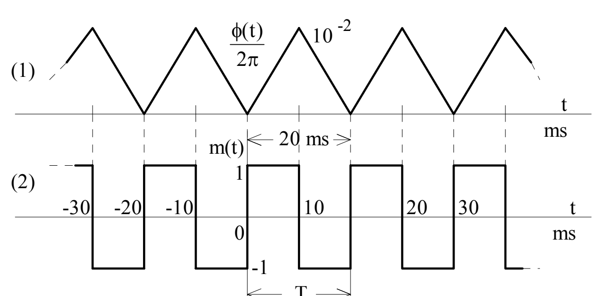


Fig. P6.53(a).

correspondiente derivada que es m(t).

Nótese que m(t) es una señal periódica rectangular de período $T = 20\,\text{ms}$; $f_o = 50\,\text{Hz}$ y amplitud unitaria cuyo coeficiente de Fourier es

$$X_n = -j\frac{2}{20\text{x}10^{-3}}\int_0^{10\text{x}10^{-3}}\text{sen}(100\pi nt)dt = \begin{cases} -j\dfrac{2}{n\pi} & \text{para}\quad \text{n impar} \\ 0 & \text{para}\quad \text{n par}\end{cases};\qquad \phi_n = \frac{\pi}{2};\;\; X_o = 0$$

La señal m(t) será entonces $\quad m(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(100\pi nt)}{n\pi}$, n impar, con $f_o = 50\,\text{Hz}$

(b) $f_i(t) = f_c + f_d m(t) = 10^6 + 100m(t)$; y de m(t) de la Fig. P6.53(a),

$$f_{max} = 10^6 + 100;\;\; f_{min} = 10^6 - 100;\;\; \text{de donde}\;\; B \approx f_{max} - f_{min} = 200\,\text{Hz}.$$

El ancho de banda del amplificador es de 200 Hz y su ganancia de potencia será $G_p = G_v^2 = 100$. La densidad espectral de ruido a la entrada del discriminador tendrá la forma mostrada en la Fig. P6.53(b).

De la Fig. 64.53(b), la potencia de ruido será:

$N_i = 200\text{x}10^{-8} = 2\,\mu\text{W} = \text{-26,99 dBm}$

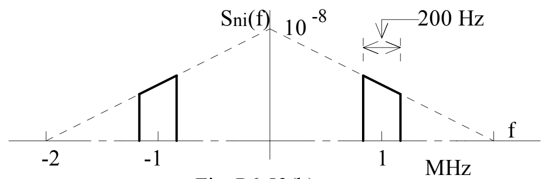


Fig. P6.53(b)

(c) Cálculo del ruido de salida.

De la expresión (4.154) del Texto, la densidad de ruido a la salida del filtro pasabajo es

$$S_{no}(f) = (\frac{k_D}{A_r})^2 f^2 [S_{ni}(f+f_c) + S_{ni}(f-f_c)] \quad \text{para} \quad |f| \le f_m = 100\,\text{Hz}$$

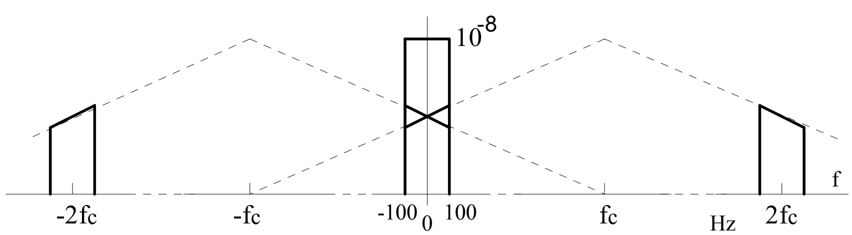


Fig. P6.53(c)

$[S_{ni}(f+f_c) + S_{ni}(f-f_c)]$ tiene la forma mostrada en la Fig. P6.53(c).

Para $|f| \le 100\,\text{Hz}$, $\quad S_{no}(f) = (\frac{k_D}{A_r})^2 f^2 10^{-8}\Pi(\frac{f}{200}) = 10^{-8}\pi^2 f^2 \Pi(\frac{f}{200})$

La potencia de ruido de salida será

$N_o = 10^{-8}\pi^2 \cdot 2\int_0^{100} f^2 df = 6{,}58x10^{-2}$

Cálculo de la potencia de señal

De la expresión (6.145) del Texto, $S_o = k_D^2 f_d^2 < m^2(t) >$, pero esta potencia S_o debe ser la potencia de m(t) en un ancho de banda de 200 Hz. Puesto que f_o=50 Hz, entonces solamente se tomará en cuenta las componentes para $n = 1$ y $n = 3$. Por lo tanto, de la parte (a): $|X_1| = \frac{2}{\pi}$ y $|X_3| = \frac{2}{3\pi}$. La potencia de m(t) será entonces

$< m^2(t) >= 2\left[|X_1|^2 + |X_3|^2\right] = 0{,}901W$

$S_o = \pi^2 10^4 x0{,}901 = 8{,}893x10^4$, de donde

$\frac{S_o}{N_o} = \frac{8{,}893x10^4}{6{,}58x10^{-2}} = 1{,}352x10^6 = 61{,}31\,dB$

6.54. La señal $m(t) = 2\cos(2\pi 10^3 t) + 3\cos(6\pi 10^3 t) + \mathrm{sen}(2\pi 10^3 t)\mathrm{sen}(10^4 \pi t)$ se aplica a un modulador FM cuya constante de desviación de frecuencia es igual a 10^4 Hz/V.

Demuestre que el ancho de banda de la señal modulada, de acuerdo con la Regla de Carson, es de 112 kHz.

Solución:

Modulación FM. $m(t) = 2\cos(2\pi 10^3 t) + 3\cos(6\pi 10^3 t) + \frac{1}{2}\cos(8\pi 10^3 t) - \frac{1}{2}\cos(12\pi 10^3 t)$

$f_d = 10^4$ Hz/V .

Como las componentes de m(t) son todas armónicas de la frecuencia $f_o = 1000\,\text{Hz}$, el valor máximo de m(t) ocurrirá cuando $2\pi 10^3 t_o = 2\pi \therefore t_o = 10^{-3}$. Entonces,

$|m(t)|_{max} = m(t)|_{t=10^{-3}} = 2\cos(2\pi) + 3\cos(6\pi) + \frac{1}{2}\cos(8\pi) + \frac{1}{2}\cos(12\pi) = 5$

El ancho de banda B_m de m(t) es su frecuencia máxima. Entonces, $B_m = 6\,kHz$.

Y de la Regla de Carson, $B = 2\left[f_d |m(t)|_{max} + B_m\right] = 2\left[10^4 x5 + 6x10^3\right] = 112\,kHz$

6.55. La señal $m(t) = 5\left[\Pi(\frac{t-1}{2}) - \Pi(\frac{t-3}{2})\right]$ se aplica a un modulador FM cuya constante de desviación de frecuencia es de 10 Hz/V. La potencia de la señal modulada FM es de 800 W.

(a) Determine la amplitud de la portadora

(b) Demuestre que la desviación de fase es $\phi(t) = 200\pi\Lambda(\frac{t-2}{2})$

(c) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal es de 100 Hz

Solución:

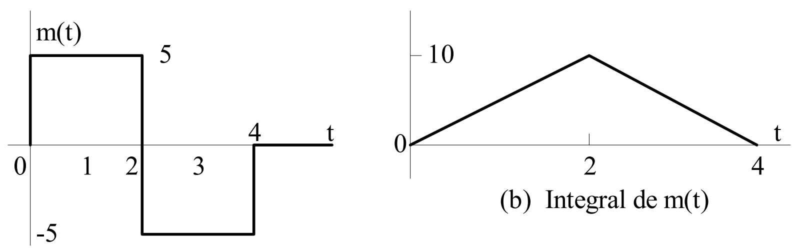
$$m(t) = 5\left[\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) - \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)\right]; \quad f_d = 10\,\text{Hz/V}; \; <x_{FM}^2(t)> = 800\,\text{W}$$

(a) $<x_{FM}^2(t)> = 800 = \frac{A_c^2}{2} \therefore A_c = 40$

(b) m(t) tiene la forma dada en la Fig. P6.55(a).

$\phi(t) = 2\pi f_d \int^t m(\tau)d\tau$; la integral de m(t) se puede escribir en la forma

$$\int_0^t m(\tau)d\tau = 5\left[\int_0^t d\tau\right]\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) - 5\left[\int_2^t d\tau\right]\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) = 5t\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) - 5(t-2)\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$$



(a) Fig. P6.55.

$\int_0^t m(\tau)d\tau = 10\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$ que tiene la forma mostrada en la Fig. P6.55(b).

Entonces, $\phi(t) = 200\pi\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$

(c) $f_i(t) = f_c + f_d m(t)$; $f_{max} = f_c + 50$; $f_{min} = f_c - 50$. El ancho de banda aproximado será

$B = f_{max} - f_{min} = f_c + 50 - f_c + 50 = 100\,\text{Hz}$

6.56. Para cuantificar el efecto de las redes de preénfasis y deénfasis consideremos, por ejemplo, el sistema de la Fig. 6.80 del Texto, donde

$x(t) = 6\cos(6x10^3\pi t) + 4\cos(12x10^3\pi t) + 2\cos(2x10^4\pi t)$ y

$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-6}\exp(10^4|f|)$ W/Hz

El sistema es pasabajo de ancho de banda B = 10 kHz. La respuesta de frecuencia del filtro $H_{DE}(f)$ se diseña para aplanar la densidad espectral a su entrada, dentro de la banda de paso del sistema, de manera que la densidad espectral a su salida sea $S_{no}(f) = 10^{-6}$ W/Hz. Este tipo de filtro se denomina "filtro de blanqueo".

(a) Demuestre que las funciones de transferencia de los dos filtros son, respectivamente,

$$H_{PE}(f) = \exp(5x10^{-5}|f|)\Pi(\frac{f}{2x10^4}) \text{ y } H_{DE}(f) = \exp(-5x10^{-5}|f|)\Pi(\frac{f}{2x10^4})$$

(b) Demuestre que $\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{dB} = 32{,}851\,dB$ y $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{dB} = 31{,}46\,dB$

Nótese que esta técnica produce, en el presente ejemplo, un desmejoramiento de 1,39 dB.

Solución:

$$x(t) = 6\cos(6x10^3\pi t) + 4\cos(12x10^3\pi t) + 2\cos(2x10^4\pi t)$$

(a) Sea y(t) la salida del filtro $H_{DE}(f)$. Su espectro Y(f) será entonces, sin considerar el ruido,

$Y(f) = X(f)H_{PE}(f)H_{DE}(f)$, pero para que no haya distorsión debe verificarse que

$Y(f) = X(f)$, en cuyo caso $H_{PE}(f)H_{DE}(f) = 1$ ó también $H_{DE}(f) = \frac{1}{H_{PE}(f)}$

En cuanto al ruido, a la entrada del filtro $H_{DE}(f)$ se tiene

$$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-6}\exp(10^4|f|) \quad \text{para} \quad |f| \le 10\,kHz$$

La salida del filtro de deénfasis será

$$S_{no}(f) = |H_{DE}(f)|^2 S_n(f) = |H_{DE}(f)|^2 10^{-6}\exp(10^{-4}|f|) = 10^{-6}$$

de donde $H_{DE}(f) = \exp(-5x10^{-5}|f|)\Pi(\frac{f}{2x10^4})$

Por lo tanto, $H_{PE}(f) = \exp(5x10^{-5}|f|)\Pi(\frac{f}{2x10^4})$

(b) Cálculo de las potencias de señal

A la salida del filtro $H_{PE}(f)$ la señal es

$$x_1(t) = 6\cos[2\pi(3x10^3)t]H_{PE}(3x10^3) + 4\cos[2\pi(6x10^3)t]H_{PE}(6x10^3) + $$
$$+ 2\cos[2\pi(10^4)t]H_{PE}(10^4)$$
$$x_1(t) = 6{,}091\cos[2\pi(3x10^3)t] + 5{,}399\cos[2\pi(6x10^3)t] + 3{,}927\cos[2\pi(10^4)t]$$

cuya potencia es $S_i = \frac{1}{2}\left[6{,}091^2 + 5{,}399^2 + 3{,}927^2\right] = 38{,}56 \text{ W}$

La potencia de salida S_o es igual a la potencia de entrada $< x^2(t) >$ pues el efecto de los filtros se cancela. Por lo tanto,

$$S_o = \frac{1}{2}(36 + 16 + 4) = 28 \text{ W}$$

Cálculo de las potencias de ruido

La potencia disponible a la entrada del filtro de salida $H_{DE}(f)$ es

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{PE}(f)|^2 S_n(f)df = 10^{-6} x 2\int_0^{10^4} \exp(10^{-4} f)\exp(10^4 f)df = 10^{-6} x 2x10^4 = 2x10^{-2} \text{ W}$$

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{38{,}56}{2x10^{-2}} = 1{,}928x10^3 = 32{,}851 \text{ dB}$$

A la salida del filtro $H_{DE}(f)$ la densidad espectral de potencia es constante e igual $S_{no}(f) = 10^{-6}$ W/Hz. Por lo tanto, la potencia de salida para $|f| \le 10$ kHz será

$$N_o = 2x10^4 x10^{-6} = 2x10^{-2} \text{ W}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{28}{2x10^{-2}} = 1{,}4x10^3 = 31{,}46 \text{ dB}$$

Nótese que el precio que hay que pagar en el proceso de blanqueo es una reducción en la relación S/N de salida de 1,39 dB.

6.57. En un sistema DSB es necesario que la relación S/N de postdetección sea de 20 dB. El mensaje es sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia 2 kHz, y la densidad espectral de ruido blanco es de 10^{-4}W/Hz.

(a) Demuestre que la amplitud de la portadora es $A_r = 12{,}65\text{V}$

(b) Si la transmisión es en AM con un índice de modulación del 80%, demuestre que la relación entre las potencias S_{iAM} y S_{iDSB} para producir la misma relación S/N de postdetección es $S_{iAM} = 4{,}125 S_{iDSB}$.

Solución:

(a) Modulación DSB. $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{dB} = 20 \text{ dB}; \ \frac{S_o}{N_o} = 1000; \ m(t) = \cos[2\pi(2x10^3)t]$

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} = 10^{-4} \text{ W / Hz}$$

De la expresión (6.181) del Texto, $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB} = \frac{A_{rDSB}^2 < m^2(t) >}{2\eta f_m}$, donde

$<m^2(t)>=\frac{1}{2};\ f_m = 2x10^3;\ \ \eta = 2x10^{-4}\ W/Hz$

$A_{rDSB} = \sqrt{\frac{200\eta f_m}{<m^2(t)>}} = 12{,}65$

(b) Modulación AM. Sea $A_m = 1$ y $A_{rDSB} = 1$

De la expresión (6.27) del Texto, $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM} = \frac{<m^2(t)}{2\eta f_m}$

Si $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM} = \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB}$, entonces,

$x_{AM}(t) = [A_{rAM} + \cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = A_{rAM}[1 + \frac{1}{A_{rAM}}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t);\ a = \frac{1}{A_{rAM}}$ pero

como $a = 0{,}8 = \frac{1}{A_{rAM}} \therefore A_{rAM} = 1{,}25$

De la expresión (6.22) del Texto, $S_{iAM} = \frac{1}{2}[A_{rAM}^2 + <m^2(t)>] = 1{,}031$

De la expresión (2.159) del Texto, $S_{iDSB} = \frac{1}{2}A_{rDSB}^2 <m^2(t)> = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$\frac{S_{iAM}}{S_{iDSB}} = \frac{1{,}031}{0{,}25} = 4{,}125 \therefore S_{iAM} = 4{,}125 S_{iDSB}$

6.58. Se recibe la señal DSB $x_{DSB}(t) = A_r m(t)\cos(\omega_c t + \phi_c)$ junto con ruido blanco pasabanda de la forma $n(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t + \phi_c) - n_s(t)\operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_c)$. El mensaje m(t) es de banda limitada f_m y la densidad espectral de ruido es $\eta/2$ W/Hz. La combinación $[x_{DSB}(t) + n(t)]$ se aplica a un detector coherente cuyo oscilador produce la señal $2\cos(\omega_c t + \phi_o)$.

Demuestre que la relación S/N de postdetección es $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{\Delta\phi} = \cos^2(\Delta\phi)\left[\frac{S_o}{N_o}\right]$ donde $\Delta\phi = \phi_c - \phi_o$ es el error total de fase y $[S_o/N_o]$ es la relación S/N de postdetección en caso de detección sincrónica perfecta, expresión (6.181) del Texto.

Solución:

Consideremos el sistema DSB mostrado en la Fig. P6.58.

$x_{DSB}(t) = A_r m(t)\cos(\omega_c t + \phi_c)$

$n(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t + \phi_c) - n_s(t)\operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_c)$

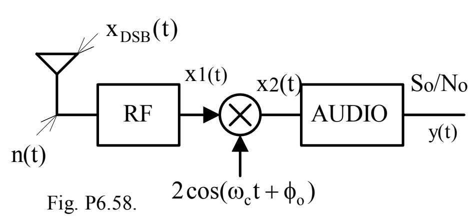


Fig. P6.58.

Estas señales pasan directamente por el filtro de RF; entonces, a la entrada del multiplicador, $x_1(t) = x_{DSB}(t) + n(t) = [A_r m(t) + n_c(t)]\cos(\omega_c t + \phi_c) - n_s(t)\operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_c)$

Hagamos $K = [A_r m(t) + n_c(t)]$; entonces, a la salida del multiplicador,

$$x_2(t) = x_1(t) 2\cos(\omega_c t + \phi_o) = 2K\cos(\omega_c t + \phi_c)\cos(\omega_c t + \phi_o) - 2n_s(t)\cos(\omega_c t + \phi_o)\operatorname{sen}(\omega_c t + \phi_c)$$

$$x_2(t) = K\cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi_o) + K\cos(\phi_c - \phi_o) - n_s(t)\operatorname{sen}(2\omega_c t + \phi_c + \phi_o) - n_s(t)\operatorname{sen}(\phi_c - \phi_o)$$

El filtro de audio elimina las componentes de alta frecuencia, quedando

$$y(t) = A_r m(t)\cos(\phi_c - \phi_n) + [n_c(t)\cos(\phi_c - \phi_o) - n_s(t)\operatorname{sen}(\phi_c - \phi_o)]$$

El primer término de y(t) es la señal mientras que el segundo es el ruido.

Las potencias de salida serán:

Potencia de señal: $S_o = \frac{1}{2}A_r^2\cos^2(\phi_c - \phi_o) < m^2(t) >$

Potencia de ruido: $N_o = \frac{1}{2}\cos^2(\phi_c - \phi_n) < n_c^2(t) > + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\phi_c - \phi_o) < n_s^2(t) >$

pero $< n^2(t) > = < n_c^2(t) > = < n_s^2(t) > = N_i = 2\eta f_m$

$$N_o = \frac{1}{2}2\eta f_m\left[\cos^2(\phi_c - \phi_o) + \operatorname{sen}^2(\phi_c - \phi_o)\right] = \eta f_m$$

Hagamos $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{\Delta\phi} = \frac{\frac{1}{2}A_r^2\cos^2(\phi_c - \phi_o) < m^2(t) >}{\eta f_m} = \cos^2(\phi_c - \phi_o)\frac{A_r^2 < m^2(t) >}{2\eta f_m}$

Pero de la expresión (6.181) del Texto, $\frac{S_o}{N_o} = \frac{A_r^2 < m^2(t) >}{2\eta f_m}$, y si $\Delta\phi = \phi_c - \phi_o$,

$$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{\Delta\phi} = \cos^2(\Delta\phi)\left[\frac{S_o}{N_o}\right]$$

6.59. Una portadora de frecuencia f_c y amplitud 8 es modulada en AM por un tono de 1 kHz y amplitud A_m siendo el índice de modulación del 25%. El ruido blanco pasabanda tiene una densidad espectral de 2×10^{-9} W/Hz. La demodulación es coherente, pero antes de la demodulación, la señal AM y el ruido se pasan por un filtro cuya función de transferencia se muestra en la Fig. 6.81 del Texto.

Demuestre que $S_o = 26{,}99\,\text{dBm}$ y $N_o = -22{,}476\,\text{dBm}$

Solución: Sea el circuito mostrado en la Fig. P6.59(a).

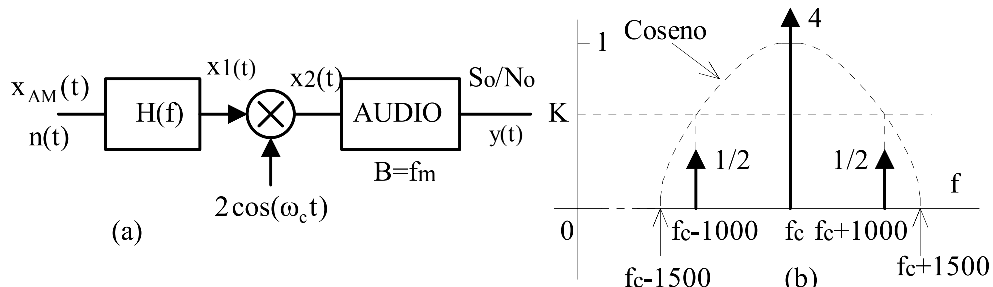


Fig. P6.59.

$A_c = 8;\ f_m = 1\,\text{kHz};\ a = 0{,}25;\ S_n(f) = 2x10^{-9}$ W/Hz;

$$H(f) = \cos\left[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f+f_c)\right]\Pi\left(\frac{f+f_c}{2x10^3}\right) + \cos\left[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f-f_c)\right]\Pi\left(\frac{f-f_c}{2x10^3}\right)$$

$$x_{AM}(t) = [A_c + A_m\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = A_c[1+\frac{A_m}{A_c}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$$

$$a = \frac{A_m}{A_c} = \frac{1}{4}\ \therefore A_m = \frac{A_c}{4} = 2;\quad x_{AM}(t) = 8[1+0{,}25\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$$

$x_{AM}(t) = 8\cos(\omega_c t) + \cos[2\pi(f_c+10^3)t] + \cos[2\pi(f_c-10^3)t]$ que se muestra en la Fig. P6.59(b)

A la salida del filtro H(f) la señal será

$x_1(t) = 8\cos(\omega_c t) + K\cos[2\pi(f_c+10^3)t] + K\cos[2\pi(f_c-10^3)t]$, donde K es la ganancia del filtro a las frecuencias $f_c \pm 10^3$. Podemos calcular K a partir de la relación $K = \cos[\frac{10^{-3}\pi}{3}(10^3)] = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$x_1(t) = 8\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c+10^3)t] + \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c-10^3)t]$$

A la salida del multiplicador, $x_2(t) = x_1(t)2\cos(\omega_c t)$

$$x_2(t) = 16\cos^2(\omega_c t) + \cos[2\pi(f_c+10^3)t]\cos(2\pi f_c t) + \cos[2\pi(f_c-10^3)t]\cos(2\pi f_c t)$$

$$x_2(t) = 8 + 8\cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos[2\pi(2f_c+10^3)t] + \frac{1}{2}\cos[2\pi(10^3)t] +$$
$$+\frac{1}{2}\cos[2\pi(2f_c-10^3)t] + \frac{1}{2}\cos[2\pi(10^3)t]$$

El filtro de audio elimina la componente continua y las de alta frecuencia, de donde

$y(t) = \cos(2\pi 10^3 t)$, cuya potencia es $S_o = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 26{,}99\ \text{dBm}$.

Cálculo de la Potencia de Ruido

A la entrada del filtro H(f) la densidad espectral es $S_n(f) = 2x10^{-9}$ W/Hz. A la salida del filtro la densidad espectral será entonces

$S_{n1}(f) = |H(f)|^2 S_n(f)$, que podemos escribir en la forma

$$S_{n1}(f) = \left\{\cos^2[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f+f_c)]\Pi(\frac{f+f_c}{2x10^3}) + \cos^2[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f-f_c)]\Pi(\frac{f-f_c}{2x10^3})\right\}S_n(f)$$

A la salida del multiplicador la densidad espectral será, de acuerdo con el Teorema para Señales de Potencia,

$S_{n2}(f) = S_{n1}(f+f_c) + S_{n1}(f-f_c)$. Asimismo, como $S_n(f)$ es constante para todo f, se verifica que $S_n(f) = S_n(f+f_c) = S_n(f-f_c) = 2x10^{-9}$ W/Hz. Entonces, se tiene

$$S_{n2}(f) = \left\{\cos^2[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f+2f_c)]\Pi(\frac{f+2f_c}{2x10^3}) + \cos^2[\frac{10^{-3}\pi}{3}(f-2f_c)]\Pi(\frac{f-2f_c}{2x10^3})\right\}S_n(f) +$$
$$+ 2\cos^2(\frac{10^{-3}\pi}{3}f)\Pi(\frac{f}{2x10^3})S_n(f)$$

El filtro de audio elimina las componentes de ruido de alta frecuencia, quedando a la salida,

$$S_{no}(f) = 4x10^{-9}\cos^2(\frac{10^{-3}\pi}{3}f) \quad \text{para} \quad |f| \le f_m = 1000\ \text{Hz.}$$

La potencia de ruido a la salida será entonces,

$$N_o = 8x10^{-9}\int_0^{1000}\cos^2(\frac{10^{-3}\pi}{3}f)df = 5{,}654x10^{-6} = -22{,}476\ \text{dBm}$$

La relación S/N a la salida será $\frac{S_o}{N_o} = \frac{0{,}5}{5{,}654x10^{-6}} = 8{,}843x10^4 = 49{,}466\ \text{dB}$

6.60. Demuestre que para que las relaciones S/N de postdetección sean iguales en FM y en PM, debe verificarse que $\beta_{FM} = \frac{\beta_{PM}}{\sqrt{3}}$.

Solución:

En FM, de la expresión (6.157) del Texto, $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{FM} = \frac{3}{2}\frac{A_r^2 f_d^2}{\eta f_m^3} < m^2(t) >$

En PM, de la expresión (6.174) del Texto, $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{PM} = \frac{1}{2}\frac{A_r^2 k_p^2}{\eta f_m} < m^2(t) >$

A la primera expresión la podemos escribir en la siguiente forma

$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{FM} = \frac{3f_d^2}{k_p^2 f_m^2}\left[\frac{1}{2}\frac{A_r^2 k_p^2}{\eta f_m} < m^2(t) >\right]$, pero vemos que el término dentro de los corchetes es igual $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{PM}$, por lo tanto $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{FM} = \frac{3f_d^2}{k_p^2 f_m^2}\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{PM}$.

Para que $\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{FM} = \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{PM}$ debe verificarse entonces que $\frac{3f_d^2}{k_p^2 f_m^2} = 1$. Por lo tanto,

$3(\frac{f_d}{f_m})^2 = k_p^2$, o también $3(\frac{f_d A_m}{f_m})^2 = (k_p A_m)^2$. Pero $\beta_{FM} = \frac{f_d A_m}{f_m}$ y $\beta_{PM} = k_p A_m$

de donde, $3\beta_{FM}^2 = \beta_{PM}^2$. En consecuencia, $\beta_{FM} = \frac{\beta_{PM}}{\sqrt{3}}$

6.61. En recepción AM se requiere que la relación S/N sea de 30 dB. La señal modulante es un tono de amplitud unitaria y frecuencia f_m. El índice de modulación es del 80% y la densidad espectral de ruido blanco es de 10^{-8} W/Hz.

(a) Demuestre que $A_r = 1{,}25\ \text{V}$ y $f_m = 12{,}5\ \text{kHz}$

(b) Demuestre también que la ganancia de conversión es de 0,4848 y que el rendimiento es del 24,24%

Solución:

Modulación AM. $\frac{S_o}{N_o} = 30\ \text{dB} = 1000;\ m(t) = \cos(\omega_m t);\ < m^2(t) >= \frac{1}{2};\ a = 0{,}8;\ S_n(f) = 10^{-8}$

(a) $x_{AM}(t) = [A_r + \cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = A_r[1 + \frac{1}{A_r}\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t)$

$$a = \frac{1}{A_r} = 0{,}8 \therefore A_r = 1{,}25$$

De la expresión (6.27) del Texto, con $N_i = 2\eta f_m$

$$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM} = \frac{< m^2(t) >}{2\eta f_m} = 1000 \therefore f_m = \frac{< m^2(t) >}{2000\eta} = 12{,}5\text{x}10^3 = 12{,}5\ \text{kHz}$$

(b) De la expresión (6.23) del Texto,

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{AM} = \frac{A_r^2 + < m^2(t) >}{2N_i} = \frac{(1{,}25)^2 + 0{,}5}{8\text{x}10^{-8}\text{x}12{,}5\text{x}10^3} = 20{,}63\text{x}10^3 = 33{,}145\ \text{dB}$$

La ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1000}{20{,}63 x 10^3} = 0{,}4848$$

Veamos ahora el rendimiento de transmisión.

$$x_{AM}(t) = [1{,}25 + \cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t) = 1{,}25\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{1}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

Potencia Total: $P_t = \frac{1}{2}(1{,}25)^2 + 2[\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2] = 0{,}7813 + 0{,}25 = 1{,}0313$

Potencia en la bandas laterales: $P_B = 0{,}25$

Rendimiento de Transmisión: $E\% = \frac{P_B}{P_t}100 = \frac{0{,}25}{1{,}031} = 0{,}2424\%$

6.62. En receptor FM se recibe una señal FM donde $f_c = 100\,\text{Hz};\ f_d = 2\,\text{Hz/V};\ A_r = 8\,\text{V}$

$$k_d = 1\,\text{rad/Hz}; \quad m(t) = 8\left[\Pi(t - \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{3}{2})\right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - 2n)$$

El ruido a la entrada está caracterizado por su función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = 8\,\text{sinc}^2(20\tau)\cos(200\pi\tau)$$

(a) Demuestre (analíticamente o gráficamente) que la desviación instantánea de fase es

$$\phi(t) = 32\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t - n)$$

(b) Demuestre, utilizando el Criterio de Carson, que si la máxima frecuencia significativa de m(t) es de 4 Hz, el ancho de banda de la señal modulada FM es de 40 Hz

(c) Grafique la densidad espectral de ruido $S_{no}(f)$ a la salida del sistema

(d) Demuestre que las potencias de señal y de ruido a la salida del receptor son, respectivamente, $S_o = 243{,}1\,\text{W}$ y $N_o = 0{,}2267\,\text{W}$

Solución:

(a) m(t) es una señal periódica de la forma mostrada en la Fig. P6.62(a)

En FM, $\phi(t) = 2\pi f_d \int^t m(\tau)d\tau$; pero, tomando el intervalo (0, +2), Fig. P4.62(a),

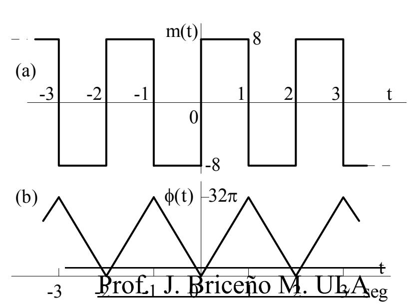


Fig. P6.62.

$$\int^{t} m(\tau)d\tau = \left[\int_0^t 8d\tau\right]\Pi(t-\frac{1}{2}) + \left[\int_t^2 -8d\tau\right]\Pi(t-\frac{3}{2})$$

$\int^{t} m(\tau)d\tau = 8t\Pi(t-\frac{1}{2}) + 8(t-2)\Pi(t-\frac{3}{2})$ que repre-senta a un triángulo de la forma $8\Lambda(t-1)$. Por lo tanto, la fase instantánea será, en el intervalo (0, +2), $\phi_1(t) = 32\pi\Lambda(t-1)$ que representa la señal generatriz de $\phi(t)$ en t = 1, entonces

$\phi(t) = 32\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda(t-n)$ para n impar y $n \neq 0$, que se muestra en la Fig. P4.62(b).

(b) B_m = 4 Hz. De la Regla de Carson, $B = 2\left[f_d |m(t)|_{max} + B_m\right]$

$B = 2(2x8+4) = 40\text{ Hz}$

(c) A la entrada del discriminador la función de autocorrelación del ruido es

$R_n(\tau) = 8\text{sinc}^2(20\tau)\cos(200\pi\tau)$; $8\text{sinc}^2(20\tau) \Leftrightarrow 0{,}4\Lambda(\frac{f}{20})$ y por Transformada de Fourier, $S_{ni}(f) = 0{,}2\Lambda(\frac{f+100}{20}) + 0{,}2\Lambda(\frac{f-100}{20})$ cuya forma se muestra en la Fig. P6.62(c).

De la expresión (6.153) del Texto,

$S_{nb}(f) = (\frac{k_D}{A_r})^2 f^2\left[S_{ni}(f+100) + S_{ni}(f-100)\right]$ para $|f \leq 20\text{ Hz}|$

$(\frac{k_d}{A_r})^2 = \frac{1}{64}$. La expresión $\left[S_{ni}(f+100) + S_{ni}(f-100)\right]$ tiene la forma mostrada en la Fig. P6.62(d), cuyo triángulo centrado en el origen es de la forma $0{,}4\Lambda(\frac{f}{20})$. Por lo tanto, en el intervalo (-20, +20) la densidad espectral $S_{nb}(f)$ será

$$S_{nb}(f) = \frac{0{,}4}{64}f^2\Lambda(\frac{f}{20})$$

La densidad espectral de ruido a la salida será entonces

$$S_{no}(f) = S_{nb}(f)\Pi(\frac{f}{8}) = \frac{f^2}{160}[1-\frac{|f|}{20}]\Pi(\frac{f}{8})$$

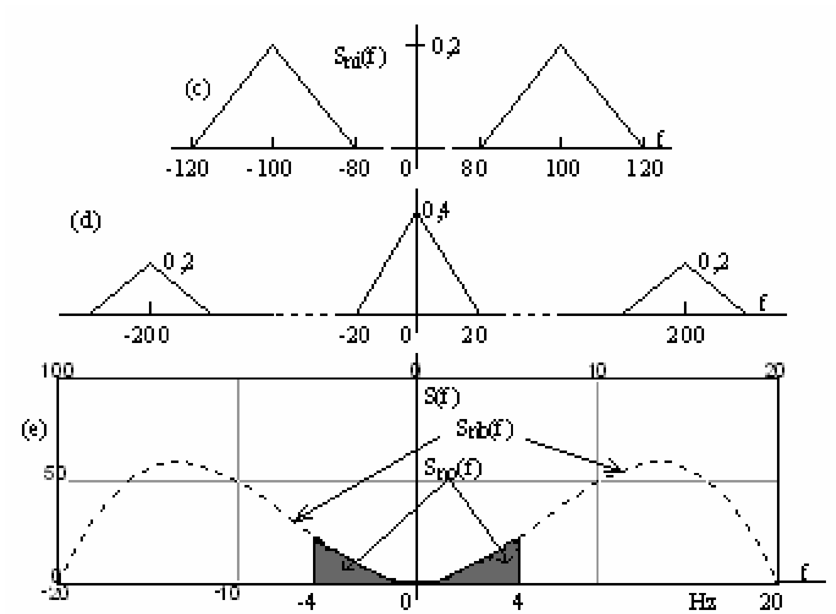


Fig. P6.62.

En la Fig. P6.62(e) se muestra $S_{nb}(f)$ y $S_{no}(f)$, respectivamente.

(d) Cálculo de la Potencia de Ruido.

La potencia de ruido a la salida viene dada por $N_o = 2\int_0^4 S_{no}(f)df$

$$N_o = \frac{1}{80}\int_0^4 f^2(1-\frac{f}{20})df = 0{,}2267 = 23{,}56\ \text{dBm}$$

Cálculo de la Potencia de Señal.

De la expresión (6.145) del Texto, $S_o = k_d^2 f_d^2 < m^2(t) >= 4 < m^2(t) >$. Pero del Problema (6.53), $|X_n| = \dfrac{16}{n\pi}$ para n impar, f_o = 0,5 Hz. Dentro de la gama de 4 kHz el espectro de m(t) tiene la forma mostrada en la Fig. P6.62(f).

La potencia de salida $< m^2(t) >$ es la potencia contenida dentro del filtro pasabajo de 4 Hz, Fig. P.62(f).

$$< m^2(t) >= 2(\frac{16}{\pi})^2[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}]$$

$$< m^2(t) >= 60{,}774\ \text{W}$$

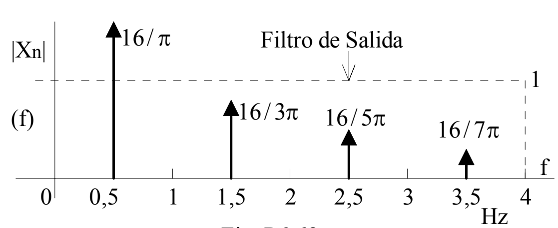


Fig. P6.62.

De donde $S_o = 4 < m^2(t) >= 243{,}10 \text{ W} = 53{,}585 \text{ dBm}$

6.63. Sea el receptor AM de la Fig. 6.82 del Texto. T_{FC} es la temperatura física del cable coaxial y L_c su constante de pérdidas. Las otras temperaturas son temperaturas efectivas. El ruido exterior n(t) es blanco de densidad espectral $\eta/2$. El mezclador se considera como una red atenuadora de pérdidas L_m y temperatura efectiva T_{em}.

Demuestre que a la entrada del detector las potencias de ruido y de señal son, respectivamente,

$$N_i = \frac{G_{p1}G_{p2}}{L_cL_m}k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + (L_c - 1)T_{FC} + L_cT_{e1} + \frac{L_c}{G_{p1}}(T_{em} + L_mT_{e2})\right]B \quad \text{y} \quad S_i = \frac{G_{p1}G_{p2}}{L_cL_m} < x_r^2(t) >$$

Solución:

Sea el sistema AM mostrado en la Fig. P6.63.

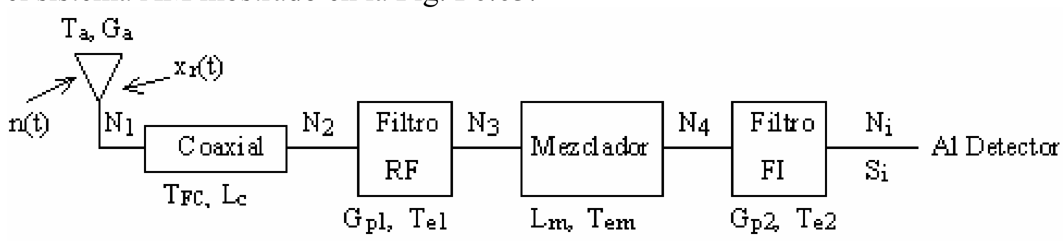


Fig. P6.63.

$n(t) \Rightarrow S_n(f) = \frac{\eta}{2}$ W/Hz. Ancho de Banda del Sistema = B

Sea N_n la potencia de ruido en antena producida por n(t). La potencia disponible en la antena, debida a n(t), es, de la expresión (2.148) del Texto, $N_n = kT_nB$, donde T_n es la temperatura de ruido de n(t). Pero también $N_n = 2B\frac{\eta}{2} = \eta B$, de donde $T_n = \frac{\eta}{k}$.

Igualmente, de la expresión (2.188), $T_{eL} = (L_c - 1)T_{FC}$, donde T_{eL} es la temperatura efectiva del cable coaxial.

Para simplificar la escritura, hagamos $G_{pL} = \frac{1}{L_c}$ y $G_{pm} = \frac{1}{L_m}$.

La antena misma es una fuente de ruido de potencia $N_a = G_akT_aB$, donde T_a es su temperatura efectiva de ruido y G_a su ganancia de potencia. Nótese que en el Texto se supone que $G_a = 1$.

La potencia disponible total a la entrada de la línea de transmisión (cable coaxial) será

$$N_1 = G_aN_n + G_akT_aB = G_a(N_n + kT_aB) = G_a(\eta B + kT_aB) = G_ak(T_a + \frac{\eta}{k})B$$

A la salida de la línea de transmisión, $N_2 = G_{pL}N_1 + G_{pL}k(L_c - 1)T_{FC}B$. Reemplazando N_1,

$$N_2 = G_a G_{pL} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{1}{G_a}(L_c - 1)T_{FC}\right]B$$

A la salida del filtro de RF, $N_3 = G_{p1}N_2 + G_{p1}kT_{e1}B$. Reemplazado N_2,

$$N_3 = G_a G_{pL} G_{p1} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{1}{G_a}(L_c - 1)T_{FC} + \frac{1}{G_a G_{pL}}T_{e1}\right]B$$

A la salida del mezclador, $N_4 = G_{pm}N_3 + G_{pm}kT_{em}B$. Reemplazando N_3,

$$N_4 = G_a G_{pL} G_{p1} G_{pm} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{(L_c - 1)}{G_a}T_{FC} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}} + \frac{T_{em}}{G_a G_{pL} G_{p1}}\right]B$$

A la salida del filtro de FI, $N_i = G_{p2}N_4 + G_{p2}kT_{e2}B$. Reemplazando N_4,

$$N_i = G_a G_{pL} G_{p1} G_{pm} G_{p2} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{(L_c - 1)}{G_a}T_{FC} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}} + \frac{T_{em}}{G_a G_{pL} G_{p1}} + \frac{T_{e2}}{G_a G_{pL} G_{p1} G_{pm}}\right]B$$

$$N_i = G_a G_{pL} G_{p1} G_{pm} G_{p2} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{(L_c - 1)}{G_a}T_{FC} + \frac{T_{e1}}{G_a G_{pL}} + \frac{1}{G_a G_{pL} G_{p1}}(T_{em} + \frac{T_{e2}}{G_{pm}})\right]B$$

$$N_i = \frac{G_a G_{p1} G_{p2}}{L_c L_m} k\left[T_a + \frac{\eta}{k} + \frac{(L_c - 1)}{G_a}T_{FC} + \frac{L_c}{G_a}T_{e1} + \frac{L_c}{G_a G_{p1}}(T_{em} + L_m T_{e2})\right]B$$

Nótese la influencia de la antena: cuanto más alta es su ganancia, más baja será la temperatura efectiva de todo el sistema. En la práctica se trata de lograr la ganancia G_a más alta y la temperatura T_a más baja.

En cuanto a la señal, si $< x_r^2(t) >$ es la potencia de entrada, entonces, por inspección, la potencia de salida a la entrada del detector es $S_i = \frac{G_a G_{p1} G_{p2}}{L_c L_m} < x_r^2(t) >$.

Para $G_a = 1$, se obtiene las ecuaciones dadas como respuesta en el Texto.