

Projeto #5

Projeto: Crescimento populacional

Costuma-se ouvir e ler que o crescimento populacional de um determinado país é, ou deixou de ser, exponencial. Nesta atividade, vamos investigar essa afirmação utilizando dados reais e ferramentas de modelagem matemática. O projeto envolve coleta de dados, modelagem por ajuste de curvas, interpretação estatística e produção de gráficos e análises comparativas.

Objetivo: Verificar a adequação do modelo exponencial para descrever o crescimento populacional de diferentes países.

Roteiro da atividade

1. Coleta de dados:

- (a) Colete dados históricos de população (para um período de pelo menos 100 anos) para:
 - i. Brasil,
 - ii. Três outros países da América Latina,
 - iii. Três países de outro continente à sua escolha.
- (b) Tente escolher países com perfis semelhantes e diferentes de desenvolvimento (PIB, IDH), para investigar possíveis correlações com o crescimento populacional.

2. Ajuste exponencial:

- (a) Para os dados de cada país, proponha um ajuste do tipo

$$P(T) = \alpha e^{\beta(T-1950)/100},$$

onde $P(T)$ é a população (em milhões) no ano T , e α, β são coeficientes a serem determinados por mínimos quadrados.

Nota: A função exponencial adotada é uma simplificação comum usada para modelar populações em crescimento. O objetivo do projeto é justamente verificar, com base em dados reais, se esse modelo continua sendo adequado ao longo de 100 anos de história em diferentes países. A validade do modelo deve ser analisada com base nos dados e nas métricas de ajuste.

- (b) Calcule a raiz do erro quadrático médio

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - P(T_i))^2},$$

e o coeficiente de determinação R^2 ,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - P(T_i))^2}{\sum_{i=1}^n (p_i - \bar{P})^2},$$

onde p_i são os valores observados, $P(T_i)$ os valores previstos pelo modelo no tempo T_i , \bar{P} é a média dos valores observados, e n o número total de observações.

- (c) Exiba uma tabela com essas medidas para cada país.
- (d) Exiba um gráfico com os pontos coletados e a curva ajustada para cada país.

3. Modelos alternativos:

- (a) Repita o ajuste com um modelo linear

$$P(T) = \alpha T + \beta.$$

- (b) Compare os valores de $REQM$ e R^2 entre os modelos. Qual descreve melhor os dados? Há diferenças entre os países?

4. Taxa de crescimento populacional:

- (a) Derive a função ajustada $P(T)$ analiticamente para obter a taxa de crescimento instantânea

$$\frac{dP}{dT} = \alpha \cdot \frac{\beta}{100} e^{\beta(T-1950)/100}.$$

- (b) Para cada país, exiba um gráfico da taxa de crescimento ao longo do tempo.
(c) Comente os resultados: a taxa está crescendo, constante ou diminuindo? Em que período foi mais intensa?
(d) Compare essa derivada com uma estimativa obtida via derivação numérica dos dados brutos. Há diferença significativa?

5. **Projeção populacional:**

- (a) Usando os modelos ajustados, estime a população de cada país em 2030, 2040 e 2050.
(b) Compare com projeções oficiais (IBGE, ONU, etc), se disponíveis.

6. **Discussão crítica:**

- (a) Em quais países o modelo exponencial se mostrou adequado? Onde falhou?
(b) A taxa de crescimento populacional está aumentando, constante ou diminuindo?
(c) Há alguma relação aparente entre o tipo de crescimento populacional e o nível de desenvolvimento?
(d) Países com características socioeconômicas semelhantes apresentaram curvas semelhantes?
(e) O crescimento parece estar se estabilizando? Justifique.

7. **Código computacional:**

- (a) Implemente em Octave/Matlab/Python um programa que, dado os vetores de dados para cada país, execute automaticamente:
- o ajuste exponencial e linear,
 - o cálculo de $\alpha, \beta, REQM, R^2$,
 - a derivada,
 - os gráficos das curvas ajustadas e da taxa de crescimento,
 - as projeções populacionais.