SME0306 - Métodos Numéricos e Computacionais II
2° semestre de 2025, ICMC-USP

Projeto #4

Projeto: Pêndulos

Pêndulos são sistemas físicos clássicos que apresentam movimento oscilatório sob a ação da gravidade. Neste projeto, estudamos dois modelos: o pêndulo simples e o pêndulo duplo, ambos com equações diferenciais que descrevem seu comportamento dinâmico ao longo do tempo.

Pêndulo simples

O pêndulo simples consiste em uma partícula de massa m presa a uma haste rígida de comprimento L e massa desprezível. Esse sistema oscila em um plano vertical sob a influência da gravidade g, e seu movimento é descrito pelo ângulo θ em relação à vertical, no tempo t.

Ao aplicar a Segunda Lei de Newton, desconsiderando forças dissipativas como o atrito e adotando a normalização ($m = L = g = 1$), obtém-se a equação diferencial não linear que rege o movimento do pêndulo

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0, \quad 0 < t \leq T. \tag{1}$$

onde $[0, T]$ é o intervalo de tempo analisado.

Essa equação de segunda ordem pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem por meio da substituição $\theta'(t) = \omega(t)$, resultando em

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\sin(\theta(t)) \end{cases}, \quad 0 < t \leq T. \tag{2}$$

Adicionalmente, adotamos as condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{e} \quad \omega(0) = \omega_0,$$

onde θ_0 e ω_0 representam, respectivamente, o ângulo inicial e a velocidade angular inicial do movimento.

Pêndulo duplo

O pêndulo duplo é uma extensão do pêndulo simples composta por dois pêndulos acoplados: o primeiro está preso a um ponto fixo, enquanto o segundo está preso à extremidade do primeiro. Como o movimento de um influencia o outro, o sistema apresenta uma dinâmica acoplada e não linear, frequentemente associada a comportamentos caóticos.

Neste sistema, ilustrado na Figura 1, o estado de cada pêndulo é descrito pelos ângulos θ_1 e θ_2, que medem a inclinação das hastes em relação à vertical. Assumindo que ambas as hastes têm comprimento unitário ($L = 1$), as posições cartesianas das massas podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin(\theta_1) & y_1 &= -\cos(\theta_1), \\ x_2 &= x_1 + \sin(\theta_2) & y_2 &= y_1 - \cos(\theta_2) \end{aligned} \tag{3}$$

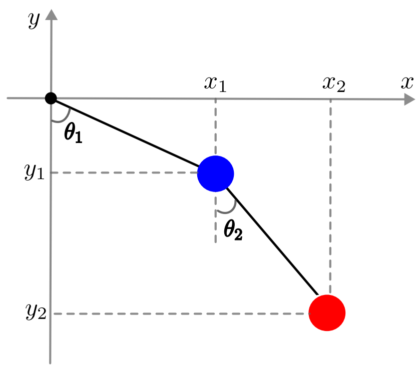

Figure 1: Representação geométrica de um pêndulo duplo.

As equações de movimento do pêndulo duplo formam um sistema acoplado e não linear. Utilizando unidades normalizadas ($m = L = g = 1$), o sistema pode ser descrito por meio do Hamiltoniano H, que representa a energia total expressa em função dos ângulos θ_1 e θ_2 e momentos conjugados correspondentes p_1 e p_2 [1]:

$$H = \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\left[1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right]} - 2\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2).$$

A evolução temporal do sistema é então descrita pelas equações de Hamilton

$$\theta_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p_i'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i \in \{1, 2\}. \tag{4}$$

Roteiro da atividade

1. Considere o modelo do pêndulo simples escrito como um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem, como dado na Eq. (2). Escolha condições iniciais θ_0 e ω_0 não simultaneamente nulas no instante $t = 0$. Nesta etapa, você deverá:
   (a) Implementar dois métodos numéricos: o método de Euler explícito e o método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem;
   (b) Resolver numericamente o sistema com ambos os métodos, utilizando o mesmo conjunto de condições iniciais;
   (c) Construa representações visuais do movimento do pêndulo. Considere, pelo menos,
      i. Uma representação geométrica (animação ou trajetória da massa);
      ii. Uma representação funcional (gráfico de $\theta(t)$ ao longo do tempo). Escolha um tempo final suficiente para visualizar ao menos dois períodos completos do movimento oscilatório;
   (d) Plotar o retrato de fase ($\omega(t)$ vs. $\theta(t)$) para as soluções obtidas por cada método. Experimente diferentes valores de passo de tempo Δt e comente, com base na análise visual, qual método apresentou maior precisão. Como referência, utilize o retrato de fase obtido a partir da solução analítica fornecida na Figura 2.

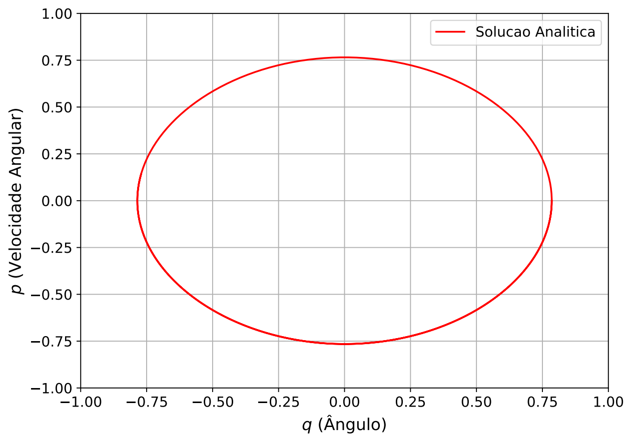

Figure 2: Retrato de fase construído a partir da solução de referência fornecida.

2. Resolva numericamente o sistema de equações que descreve o pêndulo duplo, conforme apresentado em (4), e observe o comportamento dinâmico do sistema, que pode incluir trajetórias caóticas.
   (a) Aplique o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para obter uma solução numérica. Utilize condições iniciais no instante $t = 0$ que não correspondam a uma posição de equilíbrio;
   (b) Apresente a trajetória da segunda massa do sistema, cuja posição angular é descrita por $\theta_2(t)$. Para isso:
      i. Simule o sistema em um intervalo de tempo suficientemente longo (por exemplo, de 0 a 60 segundos), com um passo de tempo pequeno o bastante para garantir suavidade na representação gráfica;
      ii. Converta os ângulos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ em coordenadas cartesianas $x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)$, como na Eq. (3);
      iii. Apresente o gráfico da trajetória da segunda massa no plano xy, ou seja, a curva $(x_2(t), y_2(t))$. Um exemplo do tipo de visualização esperada é mostrado na Figura 3;
   (c) Realize os dois experimentos descritos a seguir e discuta os resultados observados:
      i. **Experimento 1:** Utilize condições iniciais próximas do equilíbrio. Por exemplo, valores pequenos para θ_1, θ_2, p_1 e p_2. Atenção: não basta que apenas os ângulos sejam pequenos, os momentos conjugados também devem ser pequenos para que o sistema esteja, de fato, próximo de uma configuração de equilíbrio. Observe e descreva o comportamento das trajetórias neste caso.

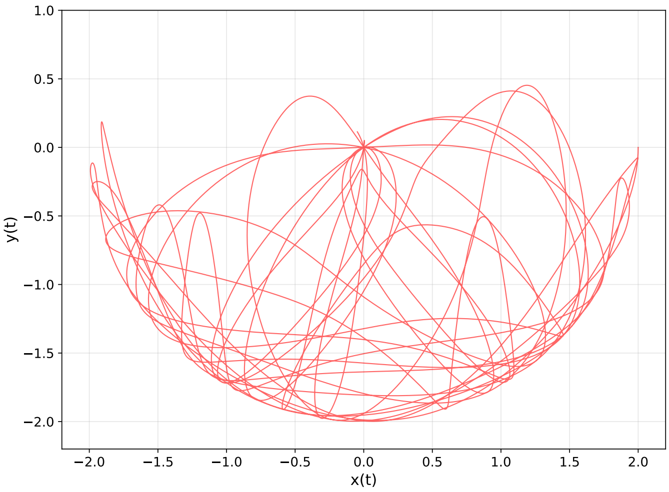

Figure 3: Exemplo de apresentação das trajetórias de um pêndulo.

ii. **Experimento 2:** Escolha condições iniciais que levem a um regime dinâmico caótico. Em seguida, aplique uma pequena perturbação (por exemplo, adicione 10^{-2} a um dos valores iniciais) e compare as trajetórias obtidas. Comente sobre a sensibilidade às condições iniciais, ou seja, como pequenas diferenças podem levar a grandes desvios nas trajetórias. Uma animação pode servir como ilustração desse fenômeno.

References

[1] S. R. Oliveira. Deterministic chaos: A pedagogical review of the double pendulum case. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, 46, 2024.