SME0306 - Métodos Numéricos e Computacionais II
2° semestre de 2025, ICMC-USP

Projeto #6

Projeto: Trabalho em trajetos

A integração numérica é uma ferramenta fundamental para estimar grandezas físicas quando conhecemos apenas valores discretos de uma função. Neste projeto, aplicaremos técnicas de integração para calcular o trabalho necessário para percorrer trajetos reais, com variação de altitude, sob ação da gravidade.

Contexto físico

Considere um ciclista de massa m, que percorre um trajeto com comprimento horizontal D, sobre uma superfície com variação de altitude $h(x)$, onde $x \in [0, D]$ é a distância horizontal percorrida, e $h(x)$ é a altitude no ponto x, conforme ilustrado na Figura 1.

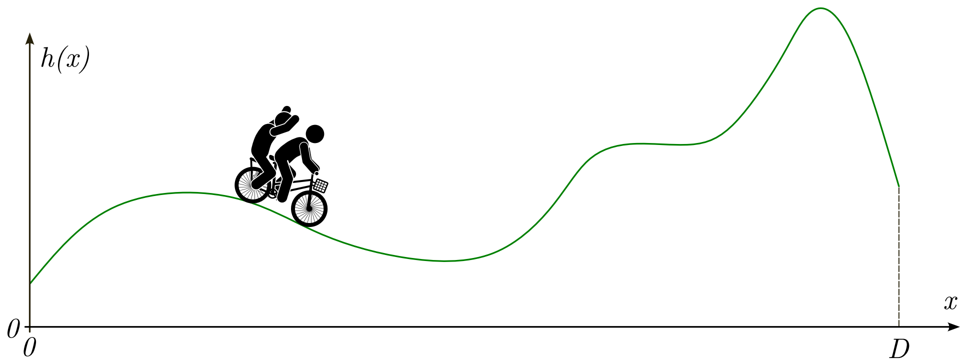

Figure 1: Trajeto do ciclista.

Assumindo que o movimento ocorre com velocidade constante e sem aceleração (apenas contra a gravidade), o trabalho realizado para vencer a força peso ocorre somente nas subidas, ou seja, quando a inclinação é positiva. Portanto, o trabalho realizado nas subidas, W_+, é dado pela integral ao longo do comprimento real da trajetória L, considerando apenas inclinações positivas, isto é

$$\begin{aligned} W_+ &= mg \int_0^L \max\{0, \sin(\theta(s))\}\, \mathrm{d}s \\ &= mg \int_0^D \max\{0, \sin(\theta(x))\} \sqrt{1 + \big(h'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\theta(x)$ é o ângulo de inclinação da rampa no ponto x, dado por

$$\sin(\theta(x)) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + \big(h'(x)\big)^2}}.$$

Nota: Se considerarmos o trabalho líquido contra a gravidade ao longo do trajeto inteiro, sem distinguir subidas e descidas, a integral se simplifica para

$$W = mg \int_0^D h'(x)\, dx = mg\big[h(D) - h(0)\big].$$

Ou seja, o trabalho líquido depende apenas da diferença total de altitude entre o início e o fim do trajeto, independentemente do caminho percorrido.

Roteiro da atividade

1. **Coleta de dados:**
   (a) Escolha um percurso real e obtenha dados de altitude ao longo da distância horizontal (por exemplo, de 0 a 5 km), com pelo menos 30 pontos. Sugestões: Use aplicativos como Strava ou Google Earth;
   (b) Apresente os dados em forma de tabela (x_i, h_i), onde x_i é a distância horizontal e h_i a altitude.

2. **Interpolação e análise do perfil do trajeto:**
   (a) Use interpolação (polinomial, spline cúbica, etc.) para obter uma função contínua $h(x)$ que represente a altitude ao longo do percurso.
   (b) Use a função interpolante para calcular numericamente a derivada $h'(x)$ em cada ponto x_i, por exemplo, usando diferenças finitas centradas e derivada complexa.
   (c) Calcule $\sin(\theta(x_i))$ em cada ponto x_i usando:
   $$\sin(\theta(x_i)) = \frac{h'(x_i)}{\sqrt{1 + (h'(x_i))^2}}.$$
   (d) Plote a curva $h(x)$, a derivada $h'(x)$ e discuta o perfil do trajeto, destacando as subidas (onde $h'(x) > 0$) e descidas (onde $h'(x) < 0$).

3. **Cálculo do trabalho nas subidas:**
   (a) Calcule o integrando que representa a contribuição ao trabalho nas subidas:
   $$f(x_i) = \max\{0, \sin(\theta(x_i))\} \sqrt{1 + (h'(x_i))^2}.$$
   (b) Considere a massa $m = 70\,\text{kg}$ e aceleração da gravidade $g = 9.8\,\text{m/s}^2$. Aplique métodos de integração numérica para estimar o trabalho realizado nas subidas:
   $$W_+ = mg \int_0^D f(x)\,dx.$$
   (c) Utilize os seguintes métodos para comparar a eficiência e precisão da integração:
      i. Regra dos Trapézios;
      ii. Regra de Simpson 1/3;
      iii. Quadratura Gaussiana (experimente diferentes números de pontos para analisar a convergência).
   (d) Estime os erros cometidos em cada aproximação por meio das estimativas de erro conhecidas para Trapézio e Simpson.

4. **Cálculo do trabalho líquido total:**
   (a) Calcule o trabalho líquido total contra a força peso (analiticamente e numericamente), que leva em conta subidas e descidas, isto é,
   $$W = mg \int_0^D h'(x)\,dx = mg\big[h(D) - h(0)\big].$$
   (b) Compare os valores de W com W_+ obtido no item anterior.

5. **Implementação computacional:** Implemente um código em Python, Octave ou Matlab que:
   (a) Leia os dados do trajeto;
   (b) Calcule $h'(x)$, $\sin(\theta(x))$ e o integrando $f(x)$;
   (c) Aplique os métodos de integração numérica para estimar W_+;
   (d) Exiba gráficos dos resultados e faça comparações;
   (e) Avalie a precisão dos métodos numéricos utilizados e possíveis fontes de erro.