SME0306 - Métodos Numéricos e Computacionais II
2° semestre de 2025, ICMC-USP

Projeto #2

Projeto: Sistema mecânico

Considere o sistema mecânico formado pelas quatro barras rígidas $\boldsymbol{a}_i, i = 1, \ldots, 4$, conforme ilustrado na Figura 1.

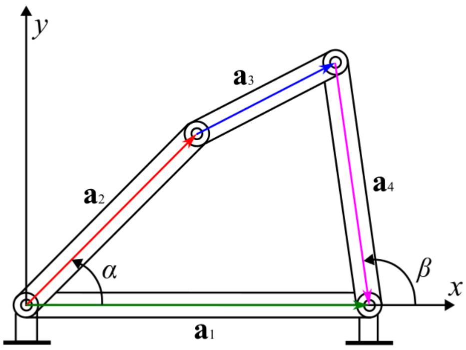

Figure 1: Sistema mecânico formado pelas quatro barras rígidas.

Para qualquer valor admissível do ângulo β, devemos determinar o valor do ângulo correspondente α formado pelas barras $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$. Partindo da identidade vetorial

$$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

e observando que a barra $\boldsymbol{a}_1$ está sempre alinhada com o eixo x, obtemos a relação entre os ângulos α e β:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}\cos(\beta) - \frac{\ell_1}{\ell_4}\cos(\alpha) - \cos(\beta - \alpha) = -\frac{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2 + \ell_4^2}{2\ell_2\ell_4}. \tag{2}$$

sendo ℓ_i o comprimento da i-ésima barra. Essa igualdade é denominada equação de Freudenstein e pode ser escrita como $f(\alpha) = 0$, com

$$f(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}\cos(\beta) - \frac{\ell_1}{\ell_4}\cos(x) - \cos(\beta - x) + \frac{\ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2 + \ell_4^2}{2\ell_2\ell_4}. \tag{3}$$

Somente para valores especiais de β existe uma expressão explícita da solução. Ainda, a solução pode não existir ou não ser única. A fim de resolver essa equação para qualquer valor admissível de β, devemos recorrer a métodos numéricos.

Roteiro da atividade

1. Derive a equação de Freudenstein (Eq. (2)) a partir da identidade vetorial (Eq. (1)), seguindo o procedimento de Freudenstein [2,3]: utilize a relação $(B - A) \cdot (B - A) = \ell_3^2$, onde $\boldsymbol{a}_3 = B - A$, com $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ representando os extremos da barra $\boldsymbol{a}_3$, os quais devem ser determinados;

2. Aplique o método de Newton-Raphson para resolver $f(\alpha) = 0$, considerando $\beta \in [0, 2\pi/3]$ e tolerância para o erro relativo de 10^{-6}. Suponha que os comprimentos das barras são $\ell_1 = 10$cm, $\ell_2 = 13$cm, $\ell_3 = 8$cm e $\ell_4 = 10$cm. Obtenha α para pelo menos 60 valores de β uniformemente distribuídos no intervalo;

   (a) Elabore um relatório sobre eventuais falhas de convergência para dois valores iniciais distintos ($x_0 = -0.1$ e $x_0 = 2\pi/3$). Apresente uma tabela e/ou gráficos contendo as raízes obtidas;

   (b) Discuta a existência e multiplicidade de soluções. Analise em que situações há 0, 1 ou 2 soluções para um dado valor de β, e relacione com a cinemática do mecanismo;

3. Construa uma função $\alpha(\beta)$ interpolando os dados obtidos no item anterior. Siga as recomendações abaixo:

   (a) Utilize spline cúbica interpolante para cada ramo de soluções, caso surjam;

   (b) Utilize interpolação polinomial global e compare com a spline cúbica. Faça uma análise do erro da interpolação.

(c) Plote a curva $\alpha(\beta)$ para todas as ramificações existentes e discuta fisicamente a continuidade, suavidade e possíveis descontinuidades no movimento do mecanismo;

4. Simule o mecanismo animando $\alpha(\beta)$ para todos os ramos obtidos. Identifique pontos de descontinuidade ou transição entre soluções múltiplas.

5. Escreva um relatório detalhado sobre a resolução dos itens anteriores, comentando a aplicação do método de Newton-Raphson, convergência, múltiplas soluções, interpolação e interpretação física. Utilize gráficos sempre que possível para ilustrar os resultados.

Problema adaptado de [1].

References

[1] Quarteroni, A; Saleri, F *Cálculo Científico com Matlab e Octave.* Springer, 2007.

[2] Freudenstein, F *Design of four-link mechanisms.* PhD thesis, Columbia University, USA, 1954.

[3] Freudenstein, F *Approximate synthesis of four-bar Linkages.* ASME Trans. 77(8), 1955.