

## Projeto #5

### Projeto: Crescimento populacional

Costuma-se ouvir e ler que o crescimento populacional de um determinado país é, ou deixou de ser, exponencial. Nesta atividade, vamos investigar essa afirmação utilizando dados reais e ferramentas de modelagem matemática. O projeto envolve coleta de dados, modelagem por ajuste de curvas, interpretação estatística e produção de gráficos e análises comparativas.

**Objetivo:** Verificar a adequação do modelo exponencial para descrever o crescimento populacional de diferentes países.

#### Roteiro da atividade

##### 1. Coleta de dados:

- (a) Colete dados históricos de população (para um período de pelo menos 100 anos) para:
  - i. Brasil,
  - ii. Três outros países da América Latina,
  - iii. Três países de outro continente à sua escolha.
- (b) Tente escolher países com perfis semelhantes e diferentes de desenvolvimento (PIB, IDH), para investigar possíveis correlações com o crescimento populacional.

##### 2. Ajuste exponencial:

- (a) Para os dados de cada país, proponha um ajuste do tipo

$$P(T) = \alpha e^{\beta(T-1950)/100},$$

onde  $P(T)$  é a população (em milhões) no ano  $T$ , e  $\alpha, \beta$  são coeficientes a serem determinados por mínimos quadrados.

**Nota:** A função exponencial adotada é uma simplificação comum usada para modelar populações em crescimento. O objetivo do projeto é justamente verificar, com base em dados reais, se esse modelo continua sendo adequado ao longo de 100 anos de história em diferentes países. A validade do modelo deve ser analisada com base nos dados e nas métricas de ajuste.

- (b) Calcule a raiz do erro quadrático médio

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - P(T_i))^2},$$

e o coeficiente de determinação  $R^2$ ,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - P(T_i))^2}{\sum_{i=1}^n (p_i - \tilde{P})^2},$$

onde  $p_i$  são os valores observados,  $P(T_i)$  os valores previstos pelo modelo no tempo  $T_i$ ,  $\tilde{P}$  é a média dos valores observados, e  $n$  o número total de observações.

- (c) Exiba uma tabela com essas medidas para cada país.
- (d) Exiba um gráfico com os pontos coletados e a curva ajustada para cada país.

##### 3. Modelos alternativos:

- (a) Repita o ajuste com um modelo linear

$$P(T) = \alpha T + \beta.$$

- (b) Compare os valores de  $REQM$  e  $R^2$  entre os modelos. Qual descreve melhor os dados? Há diferenças entre os países?

#### 4. Taxa de crescimento populacional:

- (a) Derive a função ajustada  $P(T)$  analiticamente para obter a taxa de crescimento instantânea

$$\frac{dP}{dT} = \alpha \cdot \frac{\beta}{100} e^{\beta(T-1950)/100}.$$

- (b) Para cada país, exiba um gráfico da taxa de crescimento ao longo do tempo.  
(c) Comente os resultados: a taxa está crescendo, constante ou diminuindo? Em que período foi mais intensa?  
(d) Compare essa derivada com uma estimativa obtida via derivação numérica dos dados brutos. Há diferença significativa?

**5. Projeção populacional:**

- (a) Usando os modelos ajustados, estime a população de cada país em 2030, 2040 e 2050.  
(b) Compare com projeções oficiais (IBGE, ONU, etc), se disponíveis.

**6. Discussão crítica:**

- (a) Em quais países o modelo exponencial se mostrou adequado? Onde falhou?  
(b) A taxa de crescimento populacional está aumentando, constante ou diminuindo?  
(c) Há alguma relação aparente entre o tipo de crescimento populacional e o nível de desenvolvimento?  
(d) Países com características socioeconômicas semelhantes apresentaram curvas semelhantes?  
(e) O crescimento parece estar se estabilizando? Justifique.

**7. Código computacional:**

- (a) Implemente em Octave/Matlab/Python um programa que, dado os vetores de dados para cada país, execute automaticamente:
- o ajuste exponencial e linear,
  - o cálculo de  $\alpha, \beta, REQM, R^2$ ,
  - a derivada,
  - os gráficos das curvas ajustadas e da taxa de crescimento,
  - as projeções populacionais.