Projeto #3

Projeto: Pêndulo simples

O pêndulo simples é um dos sistemas mais clássicos da mecânica, frequentemente utilizado como modelo introdutório na formulação de equações diferenciais. Apesar de sua estrutura aparentemente elementar, o sistema apresenta não linearidades que limitam a obtenção de soluções analíticas exatas, tornando indispensável o uso de métodos numéricos para uma análise mais precisa de sua dinâmica.

Tradicionalmente, o problema é tratado como um Problema de Valor Inicial (PVI). No entanto, também é possível formulá-lo como um Problema de Valor de Contorno (PVC), no qual são especificadas condições em instantes distintos do intervalo de análise. Essa abordagem requer técnicas numéricas específicas, pois os métodos de integração direta utilizados em PVIs não são aplicáveis de forma imediata.

O movimento de um pêndulo simples, de comprimento L, com massa concentrada em sua extremidade e sob a ação da gravidade, sujeito à gravidade g, é descrito pela equação diferencial não linear

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

com condições de contorno

$$\theta(0) = \alpha, \quad \theta(T) = \beta, \tag{2}$$

ou seja, os valores da solução são prescritos nos extremos do intervalo $[0, T]$. Como se trata de um PVC, sua resolução requer métodos numéricos apropriados, diferentes das abordagens usuais para PVIs.

Para resolver numericamente o problema, aplicamos o método de diferenças finitas, discretizando o intervalo $[0, T]$ com passo $h = T/(m+1)$, onde m representa o número de pontos internos. Seja $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^T$ o vetor que aproxima a solução nos pontos internos da malha, com $\theta_0 = \alpha$, $\theta_{m+1} = \beta$ fixados pelas condições de contorno.

A equação diferencial é então aproximada por um sistema não linear de equações:

$$G_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(\alpha - 2\theta_1 + \theta_2) + \dfrac{g}{L}\sin(\theta_1), & i = 1, \\ \dfrac{1}{h^2}(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + \dfrac{g}{L}\sin(\theta_i), & i = 2, \ldots, m-1, \\ \dfrac{1}{h^2}(\theta_{m-1} - 2\theta_m + \beta) + \dfrac{g}{L}\sin(\theta_m), & i = m, \end{cases} \tag{3}$$

que pode ser escrito de forma compacta como

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{0},$$

onde $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial composta pelos componentes G_i, e $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ representa a aproximação numérica da solução em cada ponto interno da malha.

Roteiro da atividade

1. Determine a matriz jacobiana

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

   e explicite sua estrutura tridiagonal.

2. Implemente um código em Matlab/Octave/Python que resolva o sistema não linear utilizando o método de Newton-Raphson, considerando duas aproximações iniciais:

   (a) $\boldsymbol{\theta}^0 = (0.7, 0.7, \ldots, 0.7)^T$;

   (b) $\boldsymbol{\theta}^0$ tal que $(\boldsymbol{\theta}^0)_i = 0.7 + \sin(t_i/2)$.

   Use os seguintes parâmetros: $T = 2\pi$ [s], $\alpha = \beta = 0.7$ [rad], $g = 9.8\,[\text{m/s}^2]$, $L = 1\,[\text{m}]$ e um valor de m suficientemente grande para garantir a suavidade da solução (por exemplo, $m = 100$ ou 1000 - verifique).

3. Produza representações gráficas para ambas as aproximações iniciais:

   (a) Plote o erro relativo

$$\epsilon_r = \frac{\|\boldsymbol{\theta}^{k+1} - \boldsymbol{\theta}^k\|_\infty}{\|\boldsymbol{\theta}^{k+1}\|_\infty}$$

   em função do número de iterações, utilizando escala logarítmica;

(b) Compare os resultados para as diferentes aproximações iniciais e discuta possíveis diferenças;

(c) Gere uma animação que represente o movimento do pêndulo ao longo do tempo no intervalo $[0, T]$, com base na solução numérica obtida para $\theta(t)$;

4. Discuta a sensibilidade da solução frente a variações nos parâmetros α, β, L e g. Como seria o movimento do pêndulo se ele estivesse em Mercúrio? Compare com o caso da Terra por meio das animações.

5. Compare a solução não linear com a obtida pela linearização $\sin(\theta) \approx \theta$, comentando as diferenças observadas no comportamento da solução.