Теория инвариантов, 1.

1) Действия алгебраических групп.

2) Факторы.

1) Алг. группа к алг. многообразию = группа Ли к C^∞-мн-ю.

Примеры: $G = GL_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ и т.д.

Для нас все алгебраические группы аффинны.

Можно рассм. действия алг. групп на аффинных мн-х:

Пример 1: Линейное действие $G \curvearrowright V$ = представл-е алг. группы = гомом. алг. групп $G \to GL(V)$ (такие предст-я рациональными).

1.5: $X \subset V$ G-устойчивое замкн-е подмн-е $\rightsquigarrow$ алгебр. действие $G \curvearrowright X$;

Вопрос: что задание действия $G \curvearrowright X$ означает на уровне $\mathbb{C}[X]$.

$G \curvearrowright X$ – действие автоморфизмами $\longleftrightarrow$ $G \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ автом. алгебры.

Опр: V вект. пр-во (возм. $\dim V = \infty$), есть предст-е G в V.

Оно называется рациональным, если: $(g.f)(x) = f(g^{-1}x)$.

$\forall v \in V$ $\exists$ $V_0 \subseteq V$, $\dim V_0 < \infty$, $v \in V_0$, устойчивое отн. G т.ч. предст-е G в V_0 рациональное.

Предложение: задать действие $G \curvearrowright X \overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ задать рациональное представление G в $\mathbb{C}[X]$ автоморфизмами алгебры

Д-во: нету... (подсказка: $G \times X \to X \leftarrow - \rightarrow \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[G]$)

Пример: $G = \mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ отн. умножения. Любое рацион. предст. вполне приводимо, все неприв. одномерны и парам-ся $\mathbb{Z}$:

$i \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow t \mapsto t^i$ (упр.)

Пусть V рац. предст-е $\mathbb{C}^\times \rightsquigarrow V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, $V_i = \{v \in V \mid t.v = t^i v\}$

$\mathbb{Z}$-градуировка

$\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ автом. алгебры $\Longleftrightarrow \mathbb{C}[X] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[X]_i$ градуировка алгебры. Т.о. $\mathbb{C}^\times \curvearrowright X \longleftrightarrow$ задать $\mathbb{Z}$-градуировку на $\mathbb{C}[X]$.

Следствие предл-я: $G \curvearrowright X \Rightarrow \exists$ замкн. G-эквив. вложение $X \hookrightarrow V$ (рац. предст-е, $\dim V < \infty$).

Предложение $\rightsquigarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Der}(\mathbb{C}[X])$.

$G \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ рац. представление, продифференц., получаем предст-е $\mathfrak{g}$ в $\mathbb{C}[X]$; $G \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ действие автом-ми алгебры $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g} \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ дифференцированиями алгебры.

Это позволяет перенести содержимое лекции 2 на алгебр. ситуацию.

2) Факторы в алгебр. геометрии:

Колчанные многообразия = гамильт. редукции для действий G на симплект. вект. пр-вах; нужны факторы.

Изучением факторов занимается теория инвариантов.

$G \curvearrowright X$ действие на афф. многообр.

Хотим: параметр'ть орбиты точками аффинного алгебр. многообр, $Y \rightsquigarrow \pi: X \twoheadrightarrow Y$, хотим, чтобы π морфизм многообр'й.

$\pi^*: \mathbb{C}[Y] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$, π G-инвариантно

$\mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$ — вложение

Откуда морально следует, что $\pi^*: \mathbb{C}[Y] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X]^G$.

Первое затруднение: $\mathbb{C}[X]^G$ не обязательно кон. порождена.

2.1) Редуктивные алгебр. группы: алгебр. аналог компактных групп Ли.

Опр: Алг. группа G редуктивна, если $\forall$ рац. представление вполне приводимо. (конечном) $\Leftrightarrow$ (бесконечномерное).

Примеры: • конечные группы.

• $\mathbb{C}^\times$

Предложение: $GL_n(\mathbb{C})$ редуктивна.

Набросок д-ва (унитарный трюк): унитарная группа $U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$,

• плотна по Зарискому ($\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ - веществ. форм $\Rightarrow \overline{U_n} = GL_n(\mathbb{C})$)

• Для $V_0 \subseteq V$ быть устойчивым отн. $GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow$ отн. U_n

($\{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid gV_0 \subset V_0\}$ замкн. по Зарискому).

• кон. мерные предст-я U_n вп. приводимы $\square$

Замеч: $\prod_{i=1}^{k} GL_{n_i}(\mathbb{C})$ редуктивная группа.

Теорема (Гильберт) G редукт. алг. группа, $G \curvearrowright X$. Тогда алгебра $\mathbb{C}[X]^G$ кон. порождена.

Идея д-ва: $G \curvearrowright \mathbb{C}[X]$ вполне привод $\rightsquigarrow$

$av: \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X]^G$, $\mathbb{C}[X]^G$-линейное, $av|_{\mathbb{C}[X]^G} = id$.

2.2) Морфизм факторизации.

Опр: • $X/\!/G = Spec(\mathbb{C}[X]^G)$ - алг. многообр, к-ое соотв. $\mathbb{C}[X]^G$: <u>категорный фактор.</u>

• $\pi: X \to X/\!/G$ - морфизм, соотв. $\mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$, <u>морфизм факторизации</u> (пара $(X/\!/G, \pi)$ обладает унив. свойством:

$\varphi: X \to Y$ G-инв. морфизм афф. многообразий. Тогда $\exists!$
$\bar\varphi: X/\!/G \longrightarrow Y$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X/\!/G \arrow[r, dashed, "\bar\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

– Упр.

Предложение A: $\pi: X \longrightarrow X/\!/G$ сюръективно и каждый слой содержит в точности одну замкнутую орбиту.

Т.о. $X/\!/G$ параметризует замкнутые орбиты G в X.

Примеры:

1) V вект. пр-во, $\mathbb{C}^\times \curvearrowright V$, $t.v = t^{-1}v$. Соотв. градуировка $\mathbb{C}[V]$ стандартн. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-градуировка по степени многочлена. $\mathbb{C}[V]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[V]_0$, $V/\!/\mathbb{C}^\times = pt$. Единств. замкн. орбита: $\{0\}$

2) $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^2$: $t.(x,y) = (tx, t^{-1}y)$, в соотв. градуировке: $\deg x = -1$, $\deg y = 1$. $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[xy]$: $\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times = \mathbb{A}^1$

$\pi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto xy$:

Орбиты: • для $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\{(x,y) \mid xy = a\}$ – замкнута, равна $\pi^{-1}(a)$.

• $\pi^{-1}(0) = \{(x,y) \mid xy = 0\}$ состоит из 3 орбит:

$\{(0,0)\}$, $\{(x,0) \mid x \neq 0\}$, $\{(0,y) \mid y \neq 0\}$

единств. замкн. орбита в $\pi^{-1}(0)$.

3) $G = GL_n(\mathbb{C})$, $X = Mat_n(\mathbb{C})$, $g.x = gxg^{-1}$.

Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[X]^G$:

Упр: Ограничение на подпр-во диагональных матриц дает изоморфизм

между $\mathbb{C}[X]^G$ и алгеброй симметр. полиномов $\mathbb{C}[x_1,..x_n]^{S_n} =$
$= \mathbb{C}[\sigma_1,...\sigma_n]$ (σ_i - элемент. симметр. полином)

F_i - коэфф-т хар. многочлена: $\det(x-\lambda E) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} F_1(x) + (-\lambda)^{n-2} F_2(x) + ... + F_n(x)$

$F_1(x) = tr(x)$, $F_n(x) = \det(x)$

Тогда $F_i \mapsto \sigma_i$.

Вывод: $\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}[F_1,..F_n]$, $X/\!\!/G = \mathbb{A}^n$

$\pi: X \to \mathbb{A}^n$, $\pi(x) = (F_1(x),.., F_n(x))$ сюръекц.

Орбиты для $G \curvearrowright X$ - из теоремы о ЖНФ.

Упр: Замкнутые орбиты состоят из диагонализуемых матриц.

Каждый слой π содержит единств. замкнутую орбиту.

Д-во: предложения А:

• Утв-е: пусть $Y_1, Y_2 \subseteq X$ замкн. G-устойчивые подмн-а. Если $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \implies \pi(Y_1) \cap \pi(Y_2) = \emptyset$.

(применим к Y_1, Y_2 двум замкнутым орбитам, увидим что они в разных слоях; с другой стороны каждый слой π содержит хотя бы замкн. орбиту: т.к. слой замкнут и берем в нем орбиту мин. размерности:

замеч: любая орбита - локально замкн. подмн-е;

Д-во: утв-я: $V = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f|_{Y_1 \sqcup Y_2} = 0\}$

$\cap$

$\tilde{V} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f|_{Y_1} = 0, f|_{Y_2} = const\}$

$\cap$

$\mathbb{C}[X]$

V, $\tilde{V}$ — G-устойчивые подпр-ва.

$Y_1 \sqcup Y_2 \subset X$ замкн.
$\Downarrow$
$\mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[Y_1 \sqcup Y_2]$
$\Downarrow$

$\operatorname{codim}_{\tilde{V}} V = 1$, G действует на $\tilde{V}/V$ тривиально.

Полная приводимость: $\underline{\tilde V = V \oplus V' \text{ — } G\text{-подпредставл-я}}$, $V' \simeq \tilde V / V$.

V' трив. предст-е; $F \in V'$, $F \neq 0 \Rightarrow F \in \mathbb{C}[X]^G$; $F|_{Y_1} = 0$, $F|_{Y_2} = \mathrm{const} \neq 0$.

$$\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}[X/\!/G]$$

$$\Downarrow$$

$$F|_{\pi(Y_1)} = 0,\quad F|_{\pi(Y_2)} \neq 0.$$

$\Rightarrow \pi(Y_1) \cap \pi(Y_2) = \emptyset$

$\square$ утв-я.