Теория инвариантов, 4.

1) Теорема Гильберта-Мамфорда.
2) Факторы vs гамильтоновы редукции.
3) Представления колчанов.

1) Т-ма (ГМ): G редукт. группа, X афф. многообр-е, $G \curvearrowright X$, $x \in X$ и пусть $y \in X \mid Gy \subset \overline{Gx}$ замкнута. Тогда $\exists\ \gamma: \mathbb{C}^\times \to G \mid \exists \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)x$ и $\in Gy$.

Пример: $G = GL_n(\mathbb{C})$, $X = Mat_n(\mathbb{C})^{\oplus k}$, $g.(A_1 \dots A_k) = (gA_1g^{-1}, \dots, gA_kg^{-1})$
$X = \{$представления мн-ва $\{1,\dots k\}$ в $\mathbb{C}^n\}$. Можем говорить о:

- вполне привод-е предст-я
- фильтрации подпредставлениями
- фильтрации JH (Jordan-Hölder)

Увидим, что:

I) $Gx = \overline{Gx} \iff x$ вполне приводимо.

присоединенное градуированное.

II) Замкнутая орбита в $\overline{Gx}$ — это $G \cdot gr_{JH}(x)$

$A \in End(\mathbb{C}^n)$ $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)A\gamma(t)^{-1}$:

$\gamma \rightsquigarrow$ градуировка $\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}^n_j \rightsquigarrow$ фильтрация $\mathbb{C}^n_{\leq j} \subseteq \mathbb{C}^n$

$\exists \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)A\gamma(t)^{-1} \iff A(\mathbb{C}^n_{\leq j}) \subset \mathbb{C}^n_{\leq j}\ \forall j$, т.е. в базисе согласованном с фильтрацией, A записывается блочно-верхнетреуг. матрицей

Бэби-пример: $n=2$, $\gamma = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma(t)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\gamma(t)^{-1} = \begin{pmatrix} a & tb \\ t^{-1}c & d \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)A\gamma(t)^{-1} =$ соотв. блочно-диагональная матрица.

Т.о. $\exists \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)x \iff$ фильтрация $\mathbb{C}^n$, заданная γ, — это фильтрация представления, $\lim_{t\to 0} \gamma(t)x = gr_\gamma x$.

Д-во I: ГМ говорит, что Gx замкнута $\Leftrightarrow x \simeq gr\, x$ отн. $\forall$ фильтрации представления. $\Leftrightarrow x$ вполне приводимо.

II: $G\, gr_{JH}\, x$ замкнута по I), и $\exists\ \gamma$, к-ая реализует фильтрацию JH. $\square$

1.2) Критерий полустабильности орбит.

$\theta: G \longrightarrow \mathbb{C}^\times \rightsquigarrow$ откр. G-устойчивое подмн-е $X^{\theta-ss} \subset X$.

$k \geq 0 \rightsquigarrow \mathbb{C}[X]^{G,k\theta} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g^{-1}x) = \theta(g)^k f(x)\}$

$X^{\theta-ss} = \{x \in X \mid \exists\ k>0,\ f \in \mathbb{C}[X]^{G,k\theta} \mid f(x) \neq 0\}$

Предложение: Для $x_0 \in X$ следующие эквивалентны:

1) $x_0 \in X^{\theta-ss}$.

2) $\exists \lim_{t\to 0} \gamma(t)x_0 \Rightarrow \langle\gamma,\theta\rangle \leq 0$,

где

$\langle\gamma,\theta\rangle \in \mathbb{Z}$ т.ч. $\theta(\gamma(t)): \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ это $t^{\langle\gamma,\theta\rangle}$.

Пример: $G = GL_n \curvearrowright X = (\mathbb{C}^n)^{\oplus k}$, $\theta = \det^{-1}$.

$\exists \lim_{t\to 0} \gamma(t)(v_1, \ldots v_k) \Leftrightarrow v_1, \ldots v_k \in (\mathbb{C}^n)_{\geq 0}$

Предложение: • пусть $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots v_k) \subsetneq \mathbb{C}^n \Rightarrow \exists\ \gamma$ с $\det^{-1}(\gamma(t)) = t^{k}$

$\forall k>0: (\gamma = \mathrm{diag}(t, \ldots, t, t^{-?})) \Rightarrow (v_1, \ldots v_k) \notin X^{\theta-ss}$. $\langle\gamma,\theta\rangle$

• $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots v_k) = \mathbb{C}^n$ $\exists \lim_{t\to 0} \gamma(t).(v_1, \ldots v_k) \Rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n_{\geq 0}$

$\Rightarrow \langle\gamma,\theta\rangle \leq 0$. По предл-ю: $(v_1, \ldots v_k) \in X^{\theta-ss}$

Этот результат мы уже видели на прошлой лекции

Д-во предложения: $G \curvearrowright X \times \mathbb{C}$, $g.(x,a) = (gx, \theta(g)a)$.

$\mathbb{C}[X]^{G,k\theta} = \mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G_k$ ← степень по z, координата на $\mathbb{C}$.

Условие 3): $\overline{G(x_0, 1)} \cap X \times \{0\} = \emptyset$.

Утвер-е: 1) $\Longleftrightarrow$ 3) и 2) $\Longleftrightarrow$ 3).

1 $\Leftrightarrow$ 3): $x_0 \in X^{\theta\text{-ss}} \Longleftrightarrow \exists\, f \in \mathbb{C}[X]^{G,k\theta}$ с $k>0$ т.ч. $f(x_0)\neq 0$;

$F(x,z) = f(x)z^k \in \mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G_k$ $\qquad F(x_0,1)\neq 0$

Т.о. $\overline{G(x_0,1)} \cap X\times\{0\} = \varnothing$ т.ч. $F|_{\overline{G(x_0,1)}} = F(x_0,1) \neq 0$, но $F|_{X\times\{0\}} = 0$. (доказывает 1 $\Rightarrow$ 3)

Пусть теперь $\overline{G(x_0,1)} \cap X\times\{0\} = \varnothing \Rightarrow F' \in \mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G$ т.ч. $F'|_{X\times\{0\}} = 0$, но $F'|_{\overline{G(x_0,1)}} = F'(x_0,1)\neq 0$.

$$\Downarrow\; F'(x,z) = \sum_{k>0} f_k(x) z^k$$

$F'(x_0,1)\neq 0 \Rightarrow \exists\, k$ т.ч. $f_k(x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0 \in X^{\theta\text{-ss}}$. (д-во 3) $\Rightarrow$ 1)).

2 $\Leftrightarrow$ 3: $\begin{cases} \exists \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)x_0 \\ \langle \gamma,\theta\rangle > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to0} \underbrace{\gamma(t)(x_0,1)}_{=(\gamma(t)x_0,\, t^{\langle\gamma,\theta\rangle})}$ существ-т и $\in X\times\{0\}$.

следует из ГМ:

3) $\Rightarrow$ невозможно $\lim\limits_{t\to0}\gamma(t)(x_0,1)$ лежал в $X\times\{0\}$. $\left(\in \overline{G(x_0,1)}\right)$.

2) по теореме ГМ, если $\tilde{y}\in X\times\mathbb{C}$ лежит в замкн. орбите внутри $\overline{G(x_0,1)} \Rightarrow \exists\,\gamma \mid \lim\limits_{t\to0}\gamma(t)(x_0,1)\in G\tilde{y}$; 2) $\Rightarrow G\tilde{y}\not\subset X\times\{0\}$

$\Rightarrow \overline{G(x_0,1)}\cap X\times\{0\} = \varnothing$. (д-во 2) $\Rightarrow$ 3)) $\square$

2*) Факторы vs гамильтоновы редукции.

G редукт. группа, $K\subset G$ макс. компактная подгруппа ($G = GL_n(\mathbb{C})$, $K = U_n$). В общем случае, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{k}$.

$G \curvearrowright V$ линейное действие, $(\cdot,\cdot)$ K-инвар. эрмитова скалярн. произведение $\rightsquigarrow$ $|\cdot|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, в любом замкнутом (по Зарискому) подмн-ве есть элемент мин. длины.

$Gv \subset V$ замкнутая орбита, v_0 — вектор в Gv мин. длины.

$\xi \in i\mathfrak{k}$ — эрмитов оператор на V эрмитов оператор

$$f(t) := (\exp(t\xi)v_0, \exp(t\xi)v_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\overset{\shortparallel}{(\exp(2t\xi)v_0, v_0)}; \quad t=0 \text{ — минимум этой функции.}$$

$$\Rightarrow (\xi v_0, v_0) = 0$$

$K \curvearrowright V$ гамильтоново с отображением моментов $\mu: V \to \mathfrak{k}^*$

$\langle \mu(v), \xi \rangle = (\text{скаляр}) (\xi v, v)$. Т.е. $\mu(v_0) = 0$.

Вывод: Gv замкнутая орбита $\Rightarrow \underbrace{Gv \cap \mu^{-1}(0)}_{} \neq \emptyset$

K-устойчивое

Теорема (Кемпфа-Несс): $\mu^{-1}(0) \cap Gv \neq \emptyset \Leftrightarrow Gv$ замкнута, в этом случае $\mu^{-1}(0) \cap Gv$ — одна K-орбита.

Сл-е: $\mu^{-1}(0)/K \overset{\sim}{\longleftrightarrow} V/\!/G$ (биекция множеств).

$\theta: G \to \mathbb{C}^\times \rightsquigarrow \theta: \mathfrak{g} \to \mathbb{C} \rightsquigarrow \theta|_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \to i\mathbb{R}$.

Тогда: $\underbrace{\mu^{-1}(i\theta)/K}_{} \xrightarrow{\sim} V/\!/^{\theta} G$. (биекция)

если $K \curvearrowright \mu^{-1}(i\theta)$ свободно, то это симпл. C^∞-мн-е, и наша биекция — это изоморфизм симпл. многообразий.

3) Представления колчанов.

- Колчан = ориент. граф (с кон. кол-вом вершин и стрелок, разрешаем кратные стрелки, петли).

Формально: колчан — это (Q_0, Q_1, t, h), где:

Q_0 - мн-во вершин, Q_1 - мн-во ребер, $t, h : Q_1 \to Q_0$:

$$\overset{\bullet}{t(a)} \xrightarrow{a} \overset{\bullet}{h(a)} \qquad\qquad t \text{ — tail}, \quad h \text{ — head}$$

• Представление колчана $Q=(Q_0, Q_1, t, h)$ - это набор $(\underline{V}, \underline{x})$, где $\underline{V} = (V_k)_{k \in Q_0}$, $\underline{x} = (x_a)_{a \in Q_1}$, $x_a \in Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)})$

$\underline{V} \cong \bigoplus_{k \in Q_0} V_k$, $\dim \underline{V} = (\dim V_k)_{k \in Q_0}$.

• Гомоморфизм представлений $\varphi : (\underline{V}, \underline{x}) \longrightarrow (\underline{V}', \underline{x}')$ - это набор $\varphi_k : V_k \to V_k'$ (лин. отобр.) т.ч. $\forall a \in Q_1$ следующая диагр. коммутативна:

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "x_a"] \arrow[d, "\varphi_{t(a)}"] & V_{h(a)} \arrow[d, "\varphi_{h(a)}"] \\ V'_{t(a)} \arrow[r, "x'_a"] & V'_{h(a)} \end{tikzcd}$$

Можем говорить о: изоморфизмах, под- и фактор-представлениях, вполне привод. представлениях, фильтрациях представлений и т.п.

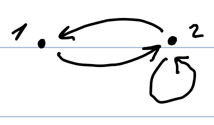
$(\underline{V}^{\le j}) = (V_k^{\le j})$ - подпредст-е.

• Пр-во $Rep(Q, \underline{v})$ и группа $GL(\underline{v})$. Фиксируем конечном. пр-ва V_k. Представления $(\underline{V}, \underline{x})$ образуют вект. пр-во:

$$Rep(Q, \underline{v}) = \bigoplus_{a \in Q_1} Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \curvearrowleft GL(\underline{v}) = \prod_{k \in Q_0} GL(V_k)$$

$\underline{v} := \dim \underline{V} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{Q_0}$.

Пример:



$Rep(Q, \underline{v}) = Hom(V_1, V_2) \oplus Hom(V_2, V_1) \oplus End(V_2) \ni (A_1, A_2, A_3)$

$GL(\underline{v}) = GL(V_1) \times GL(V_2) \ni (g_1, g_2)$

$(g_1, g_2).(A_1, A_2, A_3) = (g_2 A_1 g_1^{-1}, g_1 A_2 g_2^{-1}, g_2 A_3 g_2^{-1})$.

Общ. формула: $(g_k).(x_a) = (g_{h(a)} x_a g_{t(a)}^{-1})$.

Замечание: $GL(\underline{v}) \curvearrowright Rep(Q,\underline{v})$ не эффективное: $(z\cdot id_{V_k} \mid z\in\mathbb{C}^\times)$ действуют тривиально. Положим $PGL(\underline{v}) = GL(\underline{v})/\{(z\cdot id_{V_k})\}$ $\overset{\text{IS}}{\mathbb{C}^\times}$

$$\not\cong \prod PGL(V_k).$$

$PGL(\underline{v}) \curvearrowright Rep(Q,v)$.

3.1) Замкнутые и стабильные орбиты.

$\gamma: \mathbb{C}^\times \longrightarrow GL(\underline{v}) \rightsquigarrow$ разложение $\underline{V} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \underline{V}^j$ $(\Leftrightarrow V_k = \bigoplus V_k^j$ $\forall k\in Q_0) \rightsquigarrow$ фильтрация $\underline{V}^{\leq j}$

Упр: Для $x\in Rep(Q,v)$: $\exists \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)x \Longleftrightarrow$ фильтрация $\underline{V}^{\leq j}$ – это фильтрация подпредставлениями; если $\exists \lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)x$, то он равен $gr_\gamma x$.

Следствие: орбита Gx замкнута $\Leftrightarrow$ x вполне приводимо.

Полустабильные орбиты:

$$\{GL(\underline{V}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times\} \xleftrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{Q_0}$$

$$(\theta_k)_{k\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0} \mapsto \theta: (g_k) \mapsto \prod_{k\in Q_0} \det(g_k)^{\theta_k}.$$

θ факторизуется через $PGL(\underline{v}) \Leftrightarrow \underline{\theta}\cdot\underline{v}\ (= \sum_k \theta_k v_k) = 0$

Предложение: $\theta: PGL(\underline{v}) \to \mathbb{C}^\times$, $x\in Rep(Q,v)$. Тогда след. утверждения эквивалентны:

1) $x\in Rep(Q,v)^{\theta-ss}$

2) Для подпредст-я $\underline{V}'\subset\underline{V}$ имеем $\underline{\theta}\cdot\underline{v}'\geq 0$.

для x: $x_a(V'_{t(a)}) \subset V'_{h(a)}$ $\forall a\in Q_1$.

Анонс лекции 8:
- предложение будет доказано.
- перейдем к колчанным многообразиям Накаджимы.