Колчанные многообр. 4.

1) Клейновы особенности.

2) Их минимальные разрешения

3) Симплектические разрешения.

1) Напоминание: Q циклич. колчан с ℓ вершинами (a.k.a тип $\hat{A}_\ell$)

$\underline{v}=(1,\dots,1)$, $w=(1,0,\dots,0) \rightsquigarrow \mu:\ \underset{\mathbb{C}^{2\ell+2}}{\overset{\|}{T^*R}} \longrightarrow \underset{\mathbb{C}^{\ell}}{\overset{\|}{\mathfrak{g}}}$, $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$.

Вычислили $\mu^{-1}(0)/\!/G = \{(a,b,c) \mid a^\ell = bc\} = \mathbb{C}^2/\Gamma$, где

$a \leftarrow x_i y_i$, $b \leftarrow x_1\cdots x_\ell$, $c \leftarrow y_1\cdots y_\ell$. $\mid$ $\Gamma = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \mid \varepsilon^\ell = 1\}$.

Обобщается на все клейновы группы: конечн. подгр. в $SL_2(\mathbb{C})$.

1.1) Соответствие Маккея.

Конечн. подгруппа в $SL_2 \supset \Gamma \rightsquigarrow$ граф (неориент.)

Неприв. Γ-представления $V_0 = triv, V_1, \dots, V_r$; мн-во вершин $\{0,\dots,r\}$.

$\#\{i - j\} = \underbrace{\ }_{\dim} Hom_\Gamma(\mathbb{C}^2 \otimes V_i, V_j) = [\mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^*] = \dim Hom_\Gamma(\mathbb{C}^2 \otimes V_j, V_i)$.

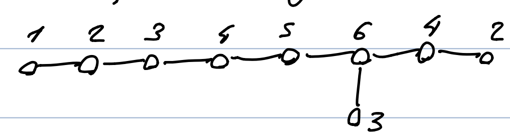
Факты: 1) Сопоставление $\Gamma \mapsto$ граф — это биекция между

- Кон. подгр. в SL_2 / SL_2-сопр.
- Аффинные графы Дынкина $(\hat{A}, \hat{D}, \hat{E})$.

2) Вершина 0 = добавленная вершина (к A, D, E графу).

3) $(\dim V_i)_{i=0..r}$ — неразложимый мнимый корень δ, например

$\hat{E}_8$



Q = граф Маккея для Γ с произв. ориентацией, $\underline{v} = \delta$,

w = 1-мд фрэйминг в вершине 0. $\rightsquigarrow \mu: T^*R \to \mathfrak{g}$, $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$.

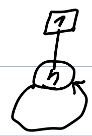
Т-ма: $\mu^{-1}(0)/\!/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2/\Gamma$.

Замечание: • $T^*R_0 /\!/ PGL(\underline{v})$ параметризует: вполне привод. предст-я алгебры $\underline{\mathbb{C}\langle u,v\rangle \# \Gamma}$, к-ые изом. $\mathbb{C}\Gamma$, как Γ-модуль.

• μ задает локус $uv=vu$ $\quad \mathbb{C}\langle u,v\rangle \otimes \mathbb{C}\Gamma$, $f_1 \otimes \gamma_1 \cdot f_2 \otimes \gamma_2 = f_1 \gamma_1(f_2) \otimes \gamma_1\gamma_2$

• $\mathbb{C}^2/\Gamma$ парам. вполне привод. предст. $\mathbb{C}[u,v]\#\Gamma$ $(\underset{\Gamma}{\simeq} \mathbb{C}\Gamma)$

Замечание: На прошлой и этой лекции мы видели

• $(Q, \underline{v}, \underline{w}) =$  $\rightsquigarrow \mathcal{M}_0^0 = (\mathbb{C}^2)^n/S_n \leftsquigarrow \Gamma = \{1\}$.

• $(Q, \underline{v}, \underline{w}) = (\hat{A}\hat{D}\hat{E},\ \delta,\ w$ – 1-мерный в $0) \rightsquigarrow \mathcal{M}_0^0 = \mathbb{C}^2/\Gamma$

Имеют общее обобщение:

$(Q, \underline{v}, \underline{w}) = (\hat{A}\hat{D}\hat{E},\ v = n\delta,\ w$ – · – · – · –$) \rightsquigarrow \mathcal{M}_0^0 = (\mathbb{C}^2/\Gamma)^n/S_n$.

2) Минимальные разрешения (особенностей)

Факт: I) Y неприв. алг. многообр, $\dim Y = 2$, имеет единств. минимальное разрешение особенностей, т.е морфизм $\rho: X \to Y$ т.ч.

• X гладко

• ρ собственно.

• ρ бирационально.

II) $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$, минимальное разрешение X однозн. характ-я тем, что $K_X = \Omega_X^2$ тривиально. ($\iff$ мн-е симплект.)

Предложение: Для $\theta = (1, \dots, 1)$ (или достаточно общего θ: $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}}$ свободно) мн-е $\mathcal{M}_0^\theta = \mu^{-1}(0)/\!/^\theta G$ – это мин. разрешение особенностей у $\mathbb{C}^2/\Gamma$ (это мин. разр-е обозн. $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$).

2

Д-во для $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Надо проверить:

- $\mathcal{M}_0^\theta$ гладкое и симплект. ✓
- $\rho: \mathcal{M}_0^\theta \longrightarrow \mathcal{M}_0^0$ проективный ✓
- ρ бирациональный. – это мы и проверим.

$b = x_0 x_1 \dots x_{\ell-1}$. Проверим над локусом $b \neq 0$, морфизм $\rho: \mu^{-1}(0)/\!/^\theta GL(\underline{v}) \longrightarrow \mu^{-1}(0)/\!/GL(\underline{v})$;

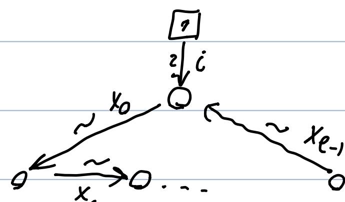
$(x_0 \dots x_{\ell-1}, y_0 \dots y_{\ell-1}, i, j) \in \mu^{-1}(0)^{\theta-ss} \iff$ следующим условиям

- в $\underline{V}$ нет подпр-в $\underline{V}'$ отн $x_\cdot$ и $y_\cdot$ т.ч. $V_0' \supset \operatorname{im} i$, и $\underline{V}' \neq \underline{V}$.

$\Rightarrow i \neq 0 \Rightarrow j = 0$

$ij = 0$.

$\underbrace{i \neq 0, \ x_0 \dots x_{\ell-1} \neq 0}$



$\Downarrow$

$(x_0 \dots x_{\ell-1}, y_0 \dots y_{\ell-1}, i, 0) \in \mu^{-1}(0)^{\theta-ss}$.

$\Rightarrow \mu^{-1}(0)_b /\!/^\theta G \xrightarrow{\sim} \mu^{-1}(0)_b /\!/ G$. □

Замеч: Над $c \neq 0$, $\rho: \mathcal{M}_0^\theta \longrightarrow \mathcal{M}_0^0$ тоже изоморфизм. Поэтому, ρ изоморфизм над $(\mathbb{C}^2/\Gamma) \setminus \{0\}$.

3) Симплектические разрешения.

3.1) Определение и примеры (к-ые мы уже видели).

Опр: Y непр. афф. мн-е (нормальное); тогда $\rho: X \longrightarrow Y$ – это симплект. разрешение, если:

- X алгебр-е симплект. многообр.
- ρ собственный и бирациональный.

Уже видели примеры этого:

1) $X = T^*Gr(v,w)$ — разреш-е особенностей для $\overline{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O} \subset \mathfrak{gl}(W)$ нильп. орбита с разбиением: кратность

$$\begin{cases} (2^v, 1^{w-2v}), & 2v \leq w \\ (2^{w-v}, 1^{2v-w}), & 2v \geq w. \end{cases}$$

1') $X = T^*\mathcal{F}l(v_k, v_{k-1}, \dots, v_1; w)$ — симплект. разрешение для замыкания некоторой нильпот. орбиты в $\mathfrak{gl}(W)$, для многообразия полных флагов $\mathcal{F}l$, $T^*\mathcal{F}l$ — это разрешение $Y = \{$нильп. матрицы $C \in \mathfrak{gl}(W)\} = \overline{\mathcal{O}_{(n)}}$.

2) $X = Hilb_n(\mathbb{C}^2)$ — симплект. разр-е $(\mathbb{C}^2)^n/S_n$.

3) $X = \widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$, $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$.

Во всех этих примерах, X — это колчанное многообр $\mathcal{M}_0^\theta$ с общим θ ($GL(\underline{v}) \curvearrowright \mu^{-1}(0)^{\theta-ss}$ свободно).

Теорема: $\forall Q, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$, если $GL(\underline{v}) \curvearrowright \mu^{-1}(0)^{\theta-ss}$ свободно, то $\mathcal{M}_0^\theta$ — симплект. разрешение подходящего афф. многообр. Y.

Иногда: · $Y = \mathcal{M}_0^0(\underline{v}, \underline{w})$

· Q конечн. или аффинный, то всегда $Y = \mathcal{M}_0^0(\underline{v}', \underline{w})$.

· В общ. случае:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_0^\theta \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathcal{M}_0 = Y \arrow[dl, dashed] \\ \mathcal{M}_0^0 & \end{tikzcd}$$

— разложение Штейна

3.2) Какие ещё бывают примеры?

Симплект. разрешения — редкие звездочки! Зачем: хотим, чтобы $\mathbb{C}[Y]$ было положит. градуировано.

Семейства: (I) Колчанные многообр $\mathcal{M}_0^\theta$

(II) G полупр. алг. группа $\rightsquigarrow$ параболич. многообр-я Слодови, X.

$\mathfrak{g} = Lie(G)$, $Y = \{$нильп. элементы в $\mathfrak{g}\}$, $B \subset G$ борелевская подгруппа, $X = T^*(G/B) \longrightarrow Y$ отображение Спрингера,

$$\begin{tikzcd} X = T^*(G/B) \arrow[r] & Y \\ G\times^B \mathfrak{n} \arrow[u, equal] \arrow[ur] & {[g,x]\mapsto Ad(g)x.} \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{n}\subset\mathfrak{b}$ макс. нильп. подалгебра

Это симплект. разрешение.

Обобщение: • $B \rightsquigarrow$ произв. параболическая подгруппа, P

$\rightsquigarrow T^*(G/P) =: X.$

• Вместо $T^*(G/P)$ можем рассм. прообраз трансверс. слайса к нильп. орбите в $\mathfrak{g}$. (параболическое мн-е Слоуди)

Замечание: В типе A, семейства (I) и (II) совпадают.

III) Гипертороические многообразия = GIT гамильт. редукции для действия торов на симплект. вект. пр-вах (самый простой и комбинаторный класс).

IV) Разрешения некоторых трансверсальных слайсов в аффинных грассманнианах.

3.3) А зачем, вообще, интересоваться симплект. разрешениями:

ответ: очень хорошая алгебр. геометрия.

ОТВЕТ: симплект. разрешения очень(!) важны для геометр. теории представлений (в осн., это касается (I), (II)).

Геометр. теория представлений изучает:

(1) Геометрические конструкции, и изучение представлений в гомологиях/K-теории топол. пр-в.

(2) Представления алгебр "геометрической природы".

(1), (2) тесно связаны. ((2) дает "категорификацию" (1)).

(2) мы обсуждать не будем, немного обсудим (1).

Семейство (II), в частн. $T^*(G/B)$. Многообр. родственные $T^*(G/B)$ играют важную роль в геометр. построении представлений группы Вейля W (и её старших сестер, аффинной алгебры Гекке и её вырожденного аналога). См. Chriss-Ginzburg.

Семейство (I): реализуем представления алгебр Каца-Муди и их старших сестер (квантовые алгебры петель/янгианов).

Следующие 2 лекции: простейшая версия этой конструкции, Накаджима '94.