

# Колчанные многообразия, листок 1

Иван Лосев

10 мая 2020 г.

## Задача 1

Пусть  $(M, \omega)$  симплектическое многообразие, и  $\xi, \eta$  – симплектические векторные поля. Докажите, что  $[\xi, \eta]$  гамильтоново векторное поле для функции  $\omega(\xi, \eta)$ .

## Задача 2

Здесь мы обсудим связь между комплексными и симплектическими структурами. Пусть  $V$  конечномерное комплексное векторное пространство, и пусть  $(\cdot, \cdot)$  эрмитово скалярное произведение на  $V$ .

- Докажите, что  $\omega := 2i\text{im}(\cdot, \cdot)$  это вещественная невырожденная косо-симметрическая форма.
- Пусть  $X$  комплексно-аналитическое подмногообразие в  $V$ . Докажите, что ограничение формы  $\omega$  на  $X$  невырождено. Таким образом,  $X$  становится вещественным симплектическим многообразием.
- Докажите аналог б) для  $\mathbb{P}(V)$  и формы Фубини-Штуди на этом многообразии.

## Задача 3

Эта задача обсуждает отображения моментов для линейных действий.

Пусть  $V$  симплектическое векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим группу  $\text{Sp}(V)$  с ее естественным действием на  $V$ .

- Докажите, что подпространство  $\mathbb{R}[V]_2$  однородных полиномов степени 2 является подалгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Далее, докажите, что отображение  $\xi \mapsto \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$  задает изоморфизм алгебр Ли  $\mathfrak{sp}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[V]_2$ .
- Пусть  $G$  группа Ли, действующая на  $V$  через гомоморфизм  $G \rightarrow \text{Sp}(V)$ . Докажите, что это действие гамильтоново с  $H_\xi(v) = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$ .
- Пусть теперь  $V$  комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . Группа Ли  $G$  действует на  $V$  посредством гомоморфизма в унитарную группу  $U(V)$ . Докажите, что это действие гамильтоново с

$$H_\xi(v) = -i(\xi v, v).$$

d) В частности, пусть  $V = \mathbb{C}^n$  со стандартным эрмитовым скалярным произведением. Пусть  $G = \mathbb{S}^1$  (мы отождествляем эту группу с  $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ ) действует на  $\mathbb{C}^n$  посредством

$$t.(z_1, \dots, z_n) = (t^{a_1} z_1, \dots, t^{a_n} z_n)$$

для целых чисел  $a_1, \dots, a_n$ . Докажите, что отображение моментов  $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  задается формулой

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n a_i |z_i|^2.$$

#### Задача 4

Пусть  $G$  гамильтоново действует на  $M$ . Докажите, что

$$\text{im } d_m \mu = \{\alpha \in \mathfrak{g}^* \mid \langle \alpha, \mathfrak{g}_m \rangle = 0\}.$$

#### Задача 5

Пусть  $G$  группа Ли, и  $X \rightarrow Y$  главное  $G$ -расслоение. Рассмотрим отображение моментов  $\mu : T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Постройте естественный изоморфизм  $\mu^{-1}(0)/G \cong T^*Y$ .

#### Задача 6

Напомним, что отображение моментов для действия  $G$  на  $M$  определено однозначно с точностью до прибавления элемента  $\chi \in (\mathfrak{g}^*)^G$ . Таким образом, если  $G$  действует свободно на  $\mu^{-1}(\chi)$ , то  $\mu^{-1}(\chi)/G$ .

Пусть теперь  $G = \mathbb{S}^1$ ,  $M = V$ , и  $G$  действует как описано в д) задачи 3 с  $a_1 = \dots = a_n = 1$ . Опишите гамильтонову редукцию  $\mu^{-1}(1)/G$  и идентифицируйте симплектическую форму (можно с точностью до пропорциональности).

#### Задача 7

Пусть  $M$  симплектическое многообразие с гамильтоновым действием компактной группы  $G$ . Предположим, что действие  $G$  на  $\mu^{-1}(0)$  свободно. Пусть  $H \in C^\infty(M)^G$  и пусть  $\underline{H} \in C^\infty(\mu^{-1}(0)/G)$  соответствующая функция. Наконец, пусть  $\pi$  обозначает проекцию  $\mu^{-1}(0) \rightarrow \mu^{-1}(0)/G$ . Выберем точку  $m \in \mu^{-1}(0)$  и пусть  $m(t)$  ее траектория для гамильтоновой системы, заданной  $H$ . Докажите, что  $\pi(m(t))$  – это интегральная траектория для  $\underline{H}$ .