Симплект. геометрия 1.

0) Бэкграунд.

1) Симпл. многообразия

2) Гамильтоновы векторные поля

3) Скобка Пуассона.

4) Связь с классич. механикой.

0) M C^∞-многообр-е $\rightsquigarrow$ T_M касат. расслоение (сечения: вект. поля)

T^*_M кокасат. — · — · — (— · — · : 1-формы)

0.1) Вект. поля = дифференц. алгебры $C^\infty(M)$

$Vect(M)$ - алгебра Ли.

• Вект. поля $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ потоки.

$\xi \in Vect(M)$, $p \in M$ $\rightsquigarrow$ интегр. траектория $\varphi_\xi(t,p)$, $|t| < \varepsilon_p$.

Пример: $M = \{(x,y) \mid x<0\}$ $\xi = \partial_x$

$\rightsquigarrow$ $\varphi_\xi :$ (окр-ть $M\times\{0\}$ в $M\times\mathbb{R}$) $\longrightarrow M$

$\varphi_\xi(t=0) = id$, $\varphi_\xi(t_1+t_2) = \varphi_\xi(t_1)\circ\varphi_\xi(t_2)$

– т.е φ_ξ "однопарам. подгруппа локальных диффеоморфизмов." ← поток.

вект. поле $\rightsquigarrow$ поток; поток $\varphi(t) \xrightarrow[\text{дифф-е в } t=0]{}$ вект. поле

• Производная Ли: $\xi \in Vect(M)$, τ тенз. поле

$\xi \rightsquigarrow \varphi_\xi(t) \rightsquigarrow \varphi_\xi(t)\tau$

$L_\xi \tau = \frac{d}{dt}(\varphi_\xi(t)\tau)|_{t=0}$

Свойства: • $\tau = f \in C^\infty(M)$, $L_\xi f = \xi f$ – дифф-е по вект. полю.

• $\tau = \eta \in Vect(M)$ $L_\xi \eta = [\xi, \eta]$.

• L_ξ удовл. тож-ву Лейбница отн. сверток и тенз. произведений.

$\alpha \in$ 1-форма: $L_\xi \langle \alpha, \eta \rangle = \langle L_\xi \alpha, \eta \rangle + \langle \alpha, L_\xi \eta \rangle$

знаем.

0.2) Дифф. формы: i-форма = сечение $\Lambda^i T^*_M$.

$\Omega^i(M) = \{i\text{-формы на } M\}$.

Операции: умножение $\wedge: \Omega^i(M) \times \Omega^j(M) \longrightarrow \Omega^{i+j}(M)$

свертка: $\mathrm{Vect}(M) \times \Omega^i(M) \longrightarrow \Omega^{i-1}(M)$

$(\xi, \alpha) \mapsto i_\xi \alpha := \alpha(\xi, \cdot, \ldots, \cdot)$.

Дифференциал де Рама: $d: \Omega^i(M) \longrightarrow \Omega^{i+1}(M)$

$d(f_0\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_i) = df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_i$.

$d^2 = 0$.

1) Симплектические многообразия: M C^∞-многообр.

Опр: • Симплектич. форма на M — это $\omega \in \Omega^2(M)$ т.ч.

1) $d\omega = 0$

2) $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$ невырожд. $\forall p \in M$.

• Симплект. мн-е — пара (M, ω)

$\dim M \vdots 2$.

Примеры: 1) M век. пр-во $V = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega \in \Lambda^2 V^*$ невырожденная.

$\exists$ базис $x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n \in V^*$ т.ч. $\omega = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$.

2) Кокасательное расслоение: N C^∞-многообразие, $M = T^*N$

$M \ni (p, \beta)$, $p \in N$, $\beta \in T_p^* N$; $(x_1 \ldots x_n)$ — лок. коорд. на N

базис $T_p^* N$

$\rightsquigarrow$ лок. коорд. $(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)$ на M: $y_i(p, \beta) =$ коэфф. $\boxed{d_p x_i}$ в β.

$\rightsquigarrow$ канонич. 1-форма $\alpha = \sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i$

$\rightsquigarrow$ $\omega = d\alpha$ $\left(= \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i\right)$ — симплект. форма.

Бескоорд. описание α: $\pi: T^*N \to N$, $(p,\beta) \mapsto p$.

$\rightsquigarrow$ $d_{(p,\beta)}\pi: T_{(p,\beta)}(T^*N) \twoheadrightarrow T_p N$

$\rightsquigarrow$ $0 \to T_p^*N \longrightarrow T_{(p,\beta)}(T^*N) \xrightarrow{d\pi} T_p N \to 0$

Касат. пр-во к слою.

$\xi \in T_{(p,\beta)}(T^*N)$, $\langle \alpha, \xi \rangle = \langle \beta, d\pi(\xi) \rangle$.

2.1) Гамильтоновы векторные поля = "косо-градиент"

$$\begin{array}{ccc} \omega: & T_M & \xrightarrow{\sim} & T_M^* \\ & \xi & \longmapsto & \iota_\xi \omega \end{array}$$

Опр: $f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow$ гамильтоново вект. поле $v(f)$: $\iota_{v(f)}\omega = df$

$(\Leftrightarrow\ \omega(v(f), \xi) = \langle df, \xi \rangle = \xi.f)$.

Пример: 1) $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i$

$v(x_i) = \partial_{y_i}$, $v(y_i) = -\partial_{x_i}$, $v(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_{y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\partial_{x_i}\right)$

2) $M = T^*N$

$C^\infty(N) \xrightarrow{\sim} \{ f \in C^\infty(M) \mid$ постоянные на слоях $\} \subset C^\infty(M)$.

$f \in$, $f \rightsquigarrow v(f) = df$ — д-во Упражнение.

Замеч. $\gamma \in \Omega^1(N) \rightsquigarrow$ вект. поле на M постоянное на слоях:

$\gamma_{(p,\beta)} := \gamma_p \in T_p^*N \subset T_{(p,\beta)}(T^*N)$

$\mathrm{Vect}(N) \xrightarrow{\sim} \{ \xi \in C^\infty(M) \mid$ линейные на слоях $\} \subset C^\infty(M)$

$\xi \in Vect(N)$ $\quad \xi(p,\beta) := \langle \beta, \xi_p \rangle$

$v(\xi) = [\varphi_\xi(t)$ поток на N, диффеом'м N поднимается до диффеом-ма T^*N $\rightsquigarrow$ $\tilde{\varphi}_\xi(t)$ поток на $T^*N \rightsquigarrow \tilde{\xi} \in Vect(T^*N)] = \tilde{\xi}$

Упр: $v(\xi) = \tilde{\xi}$.

2.2) Симплект. векторные поля.

Отступление: волшебная формула Картана:

$\alpha \in \Omega^i(M)$, $L_\xi \alpha = (d\iota_\xi + \iota_\xi d)\alpha$.

Опр: (M,ω) симплект. многообразие, $\xi \in Vect(M)$. Говорим: ξ **симплектическое**: $L_\xi \omega = 0 \ (\Leftrightarrow \varphi_\xi(t)\omega = \omega)$.

$\quad \| \leftarrow$ волшебство!

$(d\iota_\xi + \iota_\xi d)\omega = d(\iota_\xi \omega)$ $\qquad$ $\iota_\xi\omega$ замкнута.

гамильтоново вект. поле $\Rightarrow$ симплектическое.

$$\frac{\{\text{симпл. вект. поля}\}}{\{\text{гамильтоновы}\}} \xrightarrow{\sim} \frac{\{\text{замкнутые 1-формы}\}}{\{\text{точные}\}} = H^1(M,\mathbb{R}).$$

$Vect(M) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(M)$, $\xi \mapsto \iota_\xi \omega$

Упр: $\xi, \eta \in Vect(M) \rightsquigarrow [\xi,\eta]$ гамильтоново отн функции $\omega(\xi,\eta)$.

3) Скобка Пуассона.

ω невырожд. форма на M

$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow v(f) \in Vect(M)$

Опр: $f,g \in C^\infty(M)$. Скобка $\{f,g\} = \omega(v(f), v(g)) \ (= v(f).g = -v(g).f)$.

$\{\cdot,\cdot\}$: кососимметр., дифференцирование по f и по g.

Упр: $d\omega = 0 \Leftrightarrow$ тождество Якоби $\Leftrightarrow v(\{f,g\}) = [v(f), v(g)]$.

$(M,\omega) \rightsquigarrow C^\infty(M)$ алгебра Ли, $C^\infty(M) \longrightarrow Vect(M)$
$f \mapsto v(f)$ - гомом-м алгебр Ли.

Примеры: 1) $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i$,
$$v(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_{y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\partial_{x_i}\right) \Rightarrow \{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

2) $M = T^*N$: $f,g \in C^\infty(N)$, $\xi,\eta \in Vect(N)$ $\hookrightarrow C^\infty(M)$.

$v(f) = df$, $v(\xi) = \tilde{\xi}$.

$\{f,g\} = \omega(df, dg) = 0$ $\left(\omega|_{T_p^*N} = 0\right)$ df, dg касательны к слоям.

$\{\xi, f\} = \tilde{\xi} f = \xi f \in C^\infty(N)$ $(\subset C^\infty(M))$.
$\{\xi,\eta\} = \tilde{\xi}\eta = L_\xi \eta = [\xi,\eta] \subset Vect(N)$
из опр $\tilde{\xi}$

4) Мотивация из классич. механики

Гамильтонова механич. система - тройка (M,ω,H), где ω симпл. форма, $H \in C^\infty(M)$ - гамильтониан (полная энергия)

Траектории системы = интегр. кривые $v(H)$.

Пример: $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - потенциальная энергия $\rightsquigarrow$
$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + V(x_1, \dots x_n).$$

Уравн. движения: $\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \end{cases} \Longleftrightarrow \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$

Легко определить законы сохранения = $F \in C^\infty(M)$ постоянная на всех траекториях $\Leftrightarrow v(H).F=0 \Leftrightarrow \{H,F\}=0$

Например, H - закон сохранения (энергии).

Лекции 2,3: Симметрии в симплект. геометрии.

Лекция 2: гамильтоновы действия и отобр. моментов - жизнь симметрий.

Лекция 3: гамильтонова редукция - смерть симметрий.