Теория инвариантов, 2.

1) Категорные фактор.

2) GIT фактор.

1.1) Напоминание/продолжение.

Редукт. группа $G \curvearrowright X$ (афф. мн-е) $\Rightarrow \mathbb{C}[X]^G$ кон. порожд.

$\rightsquigarrow X/\!/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G$, $\quad \mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X] \longleftrightarrow \pi: X \to X/\!/G$.

· св-во универсальности для π:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X/\!/G \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}"'] & Y \end{tikzcd} \quad G\text{-инв.}$$

· Предложение: (i) π сюръект.

доказали [(ii) $\forall$ слой π содержит ровно одну замкн. орбиту.

Д-во (i): $\forall\, y \in X/\!/G \Rightarrow \pi^{-1}(y) \neq \varnothing$,

$\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[X]^G$ $\qquad \Leftrightarrow \mathbb{C}[X]\mathfrak{m} \neq \mathbb{C}[X] \quad (I)$

$\pi^{-1}(y) = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}[X]\mathfrak{m}\right)$

$av: \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X]^G$, $\quad av(ff') = av(f)f' \;\; \forall f \in \mathbb{C}[X], f' \in \mathbb{C}[X]^G$

$f' \in \mathfrak{m} \Rightarrow av(ff') \in \mathfrak{m}$. Т.е. $av(\mathbb{C}[X]\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m} \Rightarrow \mathbb{C}[X]\mathfrak{m} \neq \mathbb{C}[X]$

$\mathbb{C}[X]^G = av(\mathbb{C}[X])$ (≠ $\mathfrak{m}$) $\qquad \square$

Предл-е: $Y \subseteq X$ замкн. G-уст. подмн-е. Тогда $\pi(Y) \subseteq X/\!/G$ замкнут. и отожд. с $Y/\!/G$.

Д-во: замкн. $Y \hookrightarrow X \rightsquigarrow \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[Y] \Rightarrow$ (полн. привод. $G \curvearrowright \mathbb{C}[X]$)

$\mathbb{C}[X]^G \twoheadrightarrow \mathbb{C}[Y]^G \Leftrightarrow$ замкн. вложение $Y/\!/G \hookrightarrow X/\!/G$.

Есть коммут. диагр.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_Y"'] \arrow[dr, "(*)"] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ Y/\!/G \arrow[r, hook] & X/\!/G \end{tikzcd}$$

$(*)$ G-инв. отобр.

образ $Y/\!/G$ в $X/\!/G = \pi(Y)$. $\square$

1.2) Основная теорема теории инвариантов GL_n.

$G = GL_n \curvearrowright X = (\mathbb{C}^n)^{\oplus k} \oplus (\mathbb{C}^{n*})^{\oplus \ell}$.

Пример инвариантов: $f_{ij}(v_1, \ldots v_k, v^1, \ldots, v^\ell) = \langle v_i, v^j \rangle$, $i = 1, \ldots k$, $j = 1, \ldots \ell$.

Факт: f_{ij} порождают алгебру $\mathbb{C}[X]^G$.

Геометрический язык: вект. пр-ва U^1, U^2, U^3

$\dim = \quad k, \; n, \; \ell$

$X = \mathrm{Hom}(U^1, U^2) \oplus \mathrm{Hom}(U^2, U^3)$, $\quad G = GL(U^2)$,

$\quad (A, B) \in X \qquad g.(A,B) = (gA, Bg^{-1})$

$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(U^1, U^3)$, $(A, B) \longmapsto BA$

f_{ij} - матр. коэфф-ты φ.

$\mathrm{rk}\, \varphi(x) \leq n$, $\quad \mathrm{Hom}(U^1, U^3)_{\leq n} = \{ C \in \mathrm{Hom}(U^1, U^3) \mid \mathrm{rk}\, C \leq n \}$

$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(U^1, U^3)_{\leq n}$ $\;G$- инв. отобр.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X/\!/G \arrow[r, dashed, "\underline{\varphi}"'] & \mathrm{Hom}(U^1, U^3)_{\leq n} \end{tikzcd}$$

алгебра функций здесь пораж. матричн. коэфф-ами.

Теорема: $\underline{\varphi}$ изоморфизм.

Ниже увидим: $\underline{\varphi}$ биекция. Для д-ва того, что $\underline{\varphi}$ изоморфизм дост. д-ть, что $\mathrm{Hom}(U^1, U^3)_{\leq n}$ "нормальное".

1.3) Факторы свободных действий на гладких многообразиях.

Опр: Морфизм $\varphi: \underbrace{Y_2 \to Y_1}_{\text{гладкие многообразия}}$ эталный, если $\forall y \in Y_2 \Rightarrow$
$d_y\varphi: T_y Y_2 \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(y)} Y_1$.

Пример: $Y_2 \hookrightarrow Y_1$ открытое вложения

Замеч: эталный $\Longleftrightarrow$ локальный изом'м в компл. топологии

Опр (главное G-расслоение): Y гладкое алгебр. многообр, G алгебр. группа.
<u>Главное G-расслоение</u> на Y — пара (X, π), где:

- X гладкое многообр. с $G \curvearrowright X$
- $\pi: X \to Y$ G-инв. морфизм

т.ч. $\exists$ гладкое $\tilde{Y}$ и сюръект. эталный морфизм $\tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$,
к-рый делает диагр. коммут-й:

рассл. произв.
$\{(\tilde{y}, x) \mid$ образы в Y совпадают$\}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \times_Y X \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & G \times \tilde{Y} \arrow[dl] \\
& \tilde{Y} &
\end{tikzcd}$$

(G-экв. изом-м).

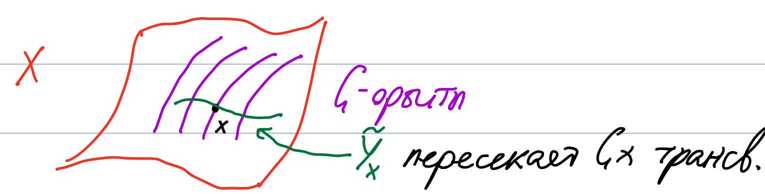
Пример: $G = GL_n(\mathbb{C})$. Задать главное G-рассл-е $\longleftrightarrow$ задать вект. рассл-е ранга n. В этом случае $\forall$ главное G-рассл-е лок. трив. в топологии Зарисского. Это уже не так для PGL_n.

Пусть теперь G редукт. группа, X гладкое афф. мн-е, $G \curvearrowright X$ свободно $\Rightarrow$ все орбиты замкнуты $\Rightarrow$ $X/\!/G$ параметризует орбиты.

Теорема: $X/\!/G$ гладкое и $\pi: X \to X/\!/G$ главное G-расслоение

Д-во: не будет.

Как строить $\tilde{Y}$.



Мы можем уменьшить $\tilde{Y}_x$ так что, если $\tilde{Y}_x$ пересекает орбиту, то пересекает трансв-о; $\tilde{Y}$ = $\underbrace{\text{конечн. обвед.}}_{\text{несвязное}}$ $\tilde{Y}_x$.

1.4) Где мы сейчас находимся.

1.3) Позволяет брать гамильт. редукцию, если $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ свободно $\rightsquigarrow \mu^{-1}(0)/\!/G$ симплект. многообр.

линейное действие.

Хотим: $G \curvearrowright R$ вект. пр-во, $X = T^*R = R \oplus R^*$.

$\mu: T^*R \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, $\langle \mu(r, r^*), \xi \rangle = \langle r^*, \xi r \rangle$ – одноp. квадр. отобр-е. $\rightsquigarrow$ $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ не свободно, т.к. точка 0 имеет стабилизатор равный G.

Можно сделать:

1) Напомним что отобр. моментов определено с точн. до слагаемого $\in (\mathfrak{g}^*)^G$. Можно наделить, что для <u>общего</u> эл-та $\lambda \in (\mathfrak{g}^*)^G$ $G \curvearrowright \mu^{-1}(\lambda)$ свободна

2) категорный фактор $\mu^{-1}(0)/\!/G \rightsquigarrow$ GIT фактор $\mu^{-1}(0)/\!/^{\theta}G$. – основной подход.

2.1) Proj:

$$\begin{array}{ccc} \text{категорный фактор} & & \text{Proj} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{GIT фактор} & \end{array}$$ – генеалог. древо.

Базовая конструкция: $A = \mathbb{C}[x_1, \dots x_n]$ градуир. алгебра $\rightsquigarrow$

$\mathrm{Proj}(A) = \mathbb{P}^{n-1}$.

$\mathrm{Spec}(A) = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ главное $\mathbb{C}^\times$-расслоение

$\mathbb{C}^n/\!/\mathbb{C}^\times = \{pt\}$

Proj можно построить по $\forall$ <u>конечн.</u> порожд. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-градуир. алгебры

$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$

• Спец. случай: A порождена A_1 как A_0-алгебра, выберем кон. мерн. подпр-во $V \subset A_1$, к-ое порожд. A как A_0-алгебру ($V\ \exists$ т.к. A_1 кон. порожд. A_0-модуль): $\mathrm{Proj}(A) \subset \mathrm{Spec}(A_0) \times \mathbb{P}(V^*)$ – замкн. подмн-е.

• Общий случай: $\exists\, d>0$ т.ч. $A_{(d)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_{di}$ порожд. компонентой A_d как A_0-алгебра, $\mathrm{Proj}(A) := \mathrm{Proj}(A_{(d)})$.

Морфизмы: · проект. морфизм

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(A_0)\times\mathbb{P}(V^*) \arrow[d] \\ \mathrm{Proj}(A) \arrow[r] \arrow[ur] & \mathrm{Spec}(A_0) \end{tikzcd}$$

· как насчет $\mathrm{Proj}(A)$ и $\mathrm{Spec}(A)$?

открытое подмн-е $\mathrm{Spec}(A)^{\times} = \mathrm{Spec}(A) \setminus \{$нули идеала $A_{>0}\}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(A)^{\times} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "(\heartsuit)"] \\ & \mathrm{Proj}(A). \end{tikzcd}$$

Пример: $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$

$\mathrm{Spec}(A)^{\times} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Чтобы построить $(\heartsuit)$ нам надо понять как покрывать $\mathrm{Spec}(A)^{\times}$ и $\mathrm{Proj}(A)$ открытыми аффинными подмн-ями.

$$\mathrm{Spec}(A)^{\times} = \bigcup_f \mathrm{Spec}(A_f), \quad A_f := A[f^{-1}].$$

f ← однор. мн-ы полож. степени

A_f $\mathbb{Z}$-градуир. алгебра $\rightsquigarrow A_{f,0} \subset A_f$ комп-та $\deg = 0$.

$$\mathrm{Proj}(A) = \bigcup_f \mathrm{Spec}(A_{f,0}).$$

Как пересекаются $\mathrm{Spec}(A_{f,0})$ и $\mathrm{Spec}(A_{g,0})$ в $\mathrm{Proj}(A)$:

$f \in A_i,\ g \in A_j$: $\mathrm{Spec}(A_{f,0}) \cap \mathrm{Spec}(A_{g,0}) = \mathrm{Spec}(A_{fg,0})$

главное откр. подмн-во в обоих, т.к.

$f^j/g^i \in A_{g,0}$, $\mathrm{Spec}(A_{fg,0}) = \mathrm{Spec}(A_{g,0}[(f^j/g^i)^{-1}])$.

Теперь построим: $\underset{\cup}{\mathrm{Spec}(A)^{\times}} \longrightarrow \underset{\cup}{\mathrm{Proj}(A)}$

$\mathrm{Spec}(A_f) \xrightarrow{/\mathbb{C}^{\times}} \mathrm{Spec}(A_{f,0})$ – корректно определен. (важное упражнение).

морфизм факторизации (π)

Следующая лекция: • GIT факторы, к-ые будут пытаться параметризовать "полустабильные" орбиты.

• критерии замкнутости и полустабильности орбит (теорема Гильберта-Мамфорда).