Симплектическая геометрия 2.

0) Действия групп Ли

1) Симплектич. и гамильтоновы действия.

0) Группа Ли = группа G со стр-й C^∞-многообр. т.ч.

$$\left.\begin{array}{l}(g,h)\mapsto gh : G\times G\to G\\ g\mapsto g^{-1}: G\to G\end{array}\right\} - C^\infty\text{-отобр-я.}$$

Примеры: $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, $U(n)$ - унит. группа

Действие G на мн-и M - абстр. действие & $G\times M\to M$ C^∞-отобр-е.

Пример: $H\subset G$ замкн. подгруппа $\rightsquigarrow$ $G/H \curvearrowleft G$ - действие группы Ли.

Инфинитезимальное действие: $\mathfrak{g} = Lie(G) \longrightarrow Vect(M)$:

$\xi\in\mathfrak{g}$, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon)\to G$ т.ч. $\xi = \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=0}$; $m\in M \rightsquigarrow \gamma(t)m\in M$

$\rightsquigarrow \xi_{M,m} := \left.\frac{d(\gamma(t)m)}{dt}\right|_{t=0} \rightsquigarrow \xi_M\in Vect(M)$

Факт: $\xi\mapsto\xi_M$ - G-эквив. лин. отобр. $[\xi,\eta]_M = [\xi_M,\eta_M]$.

1.1) Симплект. действия: G группа Ли, (M,ω) симпл. мн-е.

Опр: $G\curvearrowright M$ <u>симплект-е</u>, если $G\omega=\omega \Longleftrightarrow \xi_M$ симплект. $\forall\xi\in\mathfrak{g}$.

для связной G.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\xi\mapsto\xi_M"] \arrow[dr, dashed] & Vect_{symp}(M) \\
 & C^\infty(M) \arrow[u, "f\mapsto v(f)"']
\end{tikzcd}$$

G-эквив. отобр.

1.2) Гамильтоновы действия.

Опр: Гамильт. д-е $G \curvearrowright M$ – симпл. действие вместе с отобр. $\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$, $\xi \mapsto H_\xi$, отобр. комоментов т.ч.

(1) $\xi \mapsto H_\xi$ линейно и G-эквив.

(2) $v(H_\xi) = \xi_M$ $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ $(\Leftrightarrow \{H_\xi, f\} = \xi_M f)$.

Замеч: пусть $\xi \mapsto H_\xi^1$, $\xi \mapsto H_\xi^2$ – отобр. комоментов. $\Rightarrow$

$v(H_\xi^1 - H_\xi^2) = 0 \Longleftrightarrow H_\xi^1 - H_\xi^2 \in \mathbb{R}$ (константа)

$g.\chi = \chi \Leftrightarrow \langle \chi, \xi \rangle = \langle \chi, g\xi \rangle$.

(1) $\Rightarrow \xi \mapsto H_\xi^1 - H_\xi^2 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ G-инвар. отобр.

Обратно, если $\xi \mapsto H_\xi$ отобр. комоментов, $\chi \in (\mathfrak{g}^*)^G$, то $\xi \mapsto H_\xi + \langle \chi, \xi \rangle$ отобр. комоментов.

Вывод: Если отобр. комоментов $\exists$, то оно опр. с точн. до эл-та из $(\mathfrak{g}^*)^G$. Например, H_ξ опр. однозн. для $\xi \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Опр: Отображение моментов $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$, $\langle \mu(m), \xi \rangle := H_\xi(m)$. G-эквив. отобр.

2.3) Примеры:

1) $M = T^*N$, $G \curvearrowright N \rightsquigarrow G \curvearrowright T^*N$ сохраняет 1-форму α и $\omega = d\alpha$. (симплект. действие).

Лемма: $G \curvearrowright T^*N$ гамильтоново, $H_\xi = \xi_N \in Vect(N) \subset C^\infty(T^*N)$

Д-во: $\cdot$ $\xi \mapsto \xi_N$ линейно и G-эквив.

$\cdot$ $v(\xi_N) = \tilde{\xi}_N = \xi_{T^*N}$. $\square$

2) $M = V$ симплект. вект. пр-во, $G = Sp(V) \curvearrowright V$ симплект. д-е. Это действие гамильтоново.

$\mathbb{R}[V]_2$ – однородные полиномы степени 2.

Упр: 1) $\mathbb{R}[V]_2 \subset C^\infty(V)$ подалг. Ли отн. $\{\cdot,\cdot\}$.

2) $\mathfrak{sp}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[V]_2$, $\xi \in \mathfrak{sp}(V) \mapsto H_\xi(v) = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$

3) $\xi \mapsto H_\xi$ отобр. комоментов.

3) G группа Ли, $\alpha \in \mathfrak{g}^* \rightsquigarrow G_\alpha \subset G$ его стабилизатор.

$M = G/G_\alpha = G\alpha$ — коприсоед. орбита., $G_\alpha = \{g \mid g\alpha = \alpha\}$, $\mathfrak{g}_\alpha = \{\xi \mid \xi.\alpha = 0\}$.

$T_\alpha M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_\alpha = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathfrak{g}\}$.

$\langle \xi.\alpha, \eta\rangle = -\langle \alpha, [\xi,\eta]\rangle$.

$\omega_\alpha(\xi + \mathfrak{g}_\alpha, \eta + \mathfrak{g}_\alpha) = \langle \alpha, [\xi,\eta]\rangle$ — корректно опр., невырожд.

G_α-инвариантна $\rightsquigarrow$

G-разнесение ω на M.

Упр: 1) ω замкнута $\Rightarrow$ симплект.

2) $G \curvearrowright M$ гамильтоново, $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ — вложение.

3.5) Частный случай. $G = U(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ — косоэрм. матрицы

$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ отн. tr-спаривания, $\alpha = \mathrm{diag}(i, 0, \ldots 0)$.

$G_\alpha = U(1) \times U(n-1) \subset U(n)$

$\left\{\begin{pmatrix} * & \overset{"}{0} \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad G\alpha = G/G_\alpha \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$

стабил'р прямой в $\mathbb{C}^n$.

Соотв. форма на $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ — форма Фубини-Штуди.

Не-примеры гамильт. действий.

4) $M = V$ — симпл. вект. пр-во, $G = V$ действие сдвигами ($g.m = m + g$)

$H^1(V, \mathbb{R}) = \{0\} \Rightarrow \xi_M$ гамильт. вект. поле.

$G \curvearrowright C^\infty(M)$: $(g.f)(m) = f(g^{-1}m)$.

Почему не выполн. 1): $\xi \mapsto H_\xi$ G-эквив.:

$G \curvearrowright \mathfrak{g}$ трив. $\Leftarrow$ G коммут. $\rightsquigarrow$ H_ξ G-инвар. $\Rightarrow$ $H_\xi = const$ $\bowtie$.

5) $M = (\mathbb{S}^1)^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = G$ действие сдвигами

ξ_M не гамильтоновы.

Упр: Пусть G связная полупростая. Тогда любое симплект. действие гамильтоново.

Дополн. к 4: $\xi \in V \rightsquigarrow H_\xi = \omega(\xi, \cdot)$ $(v(H_\xi) = \xi)$.

$\xi \mapsto H_\xi$ не G-эквив.

2.5) Свойства отобр. моментов.

Упр (на размножение отобр-й моментов)

1) $G \curvearrowright M$ гамильтоново с отобр. моментов $\mu_G : M \to \mathfrak{g}^*$.
$\Phi : H \to G$ гомоморфизм групп Ли $\rightsquigarrow \varphi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ гомом. алг. Ли.
Действие $H \curvearrowright M$ гамильт. с $\mu_H := \varphi^* \circ \mu_G : M \to \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$.

2) $G \curvearrowright M_1$, $G \curvearrowright M_2$ гамильт. действия с $\mu_i : M_i \to \mathfrak{g}^*$.
$M_1 \times M_2$ – симпл. мн-е с формой $\omega = p_1^* \omega_1 + p_2^* \omega_2$; $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i$.
$G \curvearrowright M_1 \times M_2$. Это действие гамильтоново с отобр. моментов
$\mu(m_1, m_2) = \mu_1(m_1) + \mu_2(m_2)$.

Лемма (про $d\mu$): 1) $m \in M$, $v \in T_m M$, $\xi \in \mathfrak{g}$

$$d_m \mu(v) \in \mathfrak{g}^* : \langle d_m \mu(v), \xi \rangle = \omega_m(\xi_{M,m}, v).$$

2) $\ker d_m \mu = (T_m\, Gm)^{\angle} \left(= \{ v \in T_m M \mid \omega_m(\xi_{M,m}, v) = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g} \} \right)$

3) $d_m \mu$ сюръект. $\Leftrightarrow$ G_m дискретная группа ($\Leftrightarrow \mathfrak{g}_m = \{0\}$).

Д-во: 1) $\langle d_m \mu(v), \xi \rangle = [d_m \langle \mu, \xi \rangle](v) = [\langle \mu, \xi \rangle = H_\xi]$

$= d_m H_\xi(v) = \omega_m(v(H_\xi)_m, v) = [v(H_\xi) = \xi_M] = \omega_m(\xi_{M,m}, v).$

2) $\Leftarrow$ 1).

3): $d_m\mu$ сюръект. $\Leftrightarrow \dim \mathfrak{g} = \dim M - \dim \ker d_m\mu = [(2)]$

$= \dim M - \dim (T_m Gm)^\perp = \dim Gm \Leftrightarrow G_m$ дискр. подгруппа $\square$

$\dim Gm = \dim G - \dim G_m.$

Упр: $\operatorname{im} d_m\mu \ (\subset \mathfrak{g}^*)$

$\shortparallel$

$\{\alpha \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha(\mathfrak{g}_m) = 0\}.$

Замеч. Какое значение H_ξ в классич. механике:

$H \in C^\infty(M)^G$, $G \curvearrowright M$ гамильт.;

$\Downarrow$

$\xi_M H = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g}$, $\xi_M H = \{H_\xi, H\} \Rightarrow H_\xi$ закон сохранения.

(принцип Нётер: симметрии = законы сохранения).

Следующая лекция: • гамильтонова редукция

• обзор аффинных алгебр. многообразий — как переносить содержимое Лекции 1 в алгебр. ситуацию