Колчанные многообразия 3.

1) $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$

2) Клейновы особенности.

1.1) $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$ как мн-во.

Опр: $Hilb_n(\mathbb{C}^2) = \{\text{идеалы } I \subset \mathbb{C}[X,Y] \mid \operatorname{codim} I = n\}$

Хотим: снабдить $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$ стр-ой алг. многообр.

Предл: $$Hilb_n(\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} \{(x,y,i) \in End(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^n \mid [x,y]=0, \\ \mathbb{C}[x,y]i = \mathbb{C}^n\} / GL_n(\mathbb{C}).$$

Д-во: • $I \mapsto GL_n(x,y,i)$: $V = \mathbb{C}[X,Y]/I \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$, x = умн-е на X, y = умн-е на Y, $i = 1+I$, (x,y,i) удовл. обоим условиям и опр. с точн. до действия GL_n.

• $GL_n(x,y,i) \mapsto I$: для $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ след. усл-я эквив $f(x,y)=0 \Longleftrightarrow f(x,y)i=0$ ($\Rightarrow$ тавтология, $\Leftarrow$ следует из $\mathbb{C}[x,y]i = \mathbb{C}^n$).

$I = \{f \in \mathbb{C}[X,Y] \mid \underset{I \text{ идеал}}{f(x,y)=0} \Leftrightarrow \underset{\operatorname{codim} I = n}{f(x,y)i=0}\}$.

Упр: Эти два отобр. взаимно обратны $\square$

1.2) $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$, как колчанное мног-е.

Колчан Q: $\circlearrowleft$, $v=n$, $w=1$, $\lambda=0$, $\theta=1$

$G = GL_n \curvearrowright T^*R = \{(x,y,i,j) \in End(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n*}\}$

$\mu(x,y,i,j) = [x,y] + ij$, $(T^*R)^{\theta-ss} = \{(x,y,i,j) \mid \underbrace{\mathbb{C}\langle x,y\rangle}_{\text{некоммут. полиномы}} i = \mathbb{C}^n\}$

$$\mathcal{M}_0^1 = \mu^{-1}(0) /\!\!/^1 G = \underbrace{\{(x,y,i,j) \mid [x,y]+ij=0,\ \mathbb{C}\langle x,y\rangle i = \mathbb{C}^n\}}_{GL_n \text{ действует здесь свободно.}} / GL_n(\mathbb{C}).$$

Т-ма: $Hilb_n(\mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{M}_0^1$.

Д-во следует из леммы:

Лемма: $(x,y,i,j) \in \mu^{-1}(0)^{1-ss} \Rightarrow j=0$.

Важный факт: $x,y \in End(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2}$, $rk[x,y] \leq 1$, то $\exists$ базис, в к-ом x и y верхнетреугольны.

Д-во леммы: $rk\, ij \leq 1 \Rightarrow rk[x,y] \leq 1 \Rightarrow$ можем считать, что x,y верхнетреуг. $\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) \text{ верхнетреуг. } \forall f \in \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \\ [x,y] \underline{\text{строго}} \text{ верхнетреуг.} \end{cases}$

$$\Rightarrow tr(f(x,y)[x,y])=0 \underset{ij=-[x,y]}{\Rightarrow} \underbrace{tr((f(x,y)i)j)}=0$$

$$\mathbb{C}^n = Span(f(x,y)i) \qquad \| \qquad \langle \underbrace{f(x,y)i}_{\in\mathbb{C}^n}, \underbrace{j}_{\in(\mathbb{C}^n)^*} \rangle = 0$$

$$\langle \mathbb{C}^n, j\rangle = 0 \Rightarrow j=0 \qquad \square$$

Упр: $\mathcal{M}_0^{-1} \simeq Hilb_n(\mathbb{C}^2)$.

1.3) Описание $\mathcal{M}_0^0 = \mu^{-1}(0)/\!/G$.

$(\mathbb{C}^2)^n \curvearrowleft S_n$ (перестановки пар) $\rightsquigarrow (\mathbb{C}^2)^n/S_n$ – многообр. $\underline{\text{неупоряд.}}$ n-ок точек в $\mathbb{C}^2$.

Т-ма: $\mathcal{M}_0^0 \simeq (\mathbb{C}^2)^n/S_n$.

Д-во: $Z := \{(x,y) \in End(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \mid rk[x,y] \leq 1\}$

$$\begin{array}{ccc} T^*R & \longrightarrow & End(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2}, \quad (x,y,i,j) \mapsto (x,y). \\ \cup & & \cup \\ \mu^{-1}(0) & \longrightarrow & Z \end{array}$$

$\mathbb{C}^\times = \{z \cdot Id \mid z \in \mathbb{C}^\times\} \subset GL_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mu^{-1}(0)$, $z.(x,y,i,j) = (x,y,zi,z^{-1}j)$.

Утв-е 1: Отображение $\mu^{-1}(0) \to Z$ – это морфизм факторизации для д-я $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mu^{-1}(0)$.

Д-во утв-я 1: $(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n*})/\!/\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)_{\leq 1}$ (простой частный случай осн. т-мы теории инв-в для GL_n, с $n=1$).

$\Rightarrow T^*R/\!/\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \times \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)_{\leq 1}$.

$\mu^{-1}(0)/\!/\mathbb{C}^\times$ – образ $\mu^{-1}(0)$ в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\oplus 2} \times \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)_{\leq 1} =$

$= \{(x, y, C) \mid C = -[x,y]\} \xrightarrow{\sim} Z$. □

$\mu^{-1}(0)/\!/GL_n = (\mu^{-1}(0)/\!/\mathbb{C}^\times)/\!/PGL_n = [\text{утв 1}] = Z/\!/PGL_n$.

Утв-е 2: $Z/\!/PGL_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^2)^n/S_n$.

Д-во: Вложим $\mathbb{C}^{2n} \hookrightarrow Z$: $(x_i, y_i)_{i=1,..n} \mapsto (\mathrm{diag}(x_1, .. x_n), \mathrm{diag}(y_1, .. y_n))$, S_n-эквив., где $S_n \curvearrowright Z$ через $S_n \hookrightarrow GL_n$ (матрицы перестановки).

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^2)^n \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, "S_n\text{-инвариантное}"] & Z \arrow[d] \\
(\mathbb{C}^2)^n/S_n \arrow[r, "\exists!\,\iota"] & Z/\!/PGL_n
\end{tikzcd}$$

Хотим: ι изоморфизм

Подутв-е 2.1: ι сюръект.

Д-во: $Z/\!/PGL_n$ параметр-т замкнутые орбиты; ι сюръекция $\Longleftrightarrow$ [$\forall$ замкн. орбита в Z пересекает локус диаг. матриц.]

$\Uparrow$ (по Гильберту-Мамфорду): $\gamma: \mathbb{C}^\times \to GL_n$: $\gamma(t) = (t^n, t^{n-1}, \dots, 1)$

Тогда $\lim_{t \to 0} \gamma(t).(x,y) =$ [коэфф. над диаг. умножаются на $t^{>0}$]

$=$ пара диаг. матриц.

□ подутв-я 2.1.

Подутв-е 2.2: $\iota: (\mathbb{C}^2)^n/S_n \longrightarrow Z /\!/ PGL_n$ замкнутое вложение ($\Leftrightarrow \iota^*: \mathbb{C}[Z]^{PGL_n} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[(\mathbb{C}^2)^n]^{S_n}$).

Д-во: $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^2)^n]^{S_n}$ порождается эл-тами $\sum_{i=1}^n x_i^k y_i^\ell$ $(k,\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ (т-ма Вейля) $\sum_{i=1}^n x_i^k y_i^\ell = \iota^*(tr(x^k y^\ell))$

x, y можно считать верхнетреуг.! $\square$

утв-я 2 и т-мы.

Замечание: $\mu^{-1}(0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2)^n/S_n$

$(x,y,i,j) \longmapsto$ совместный спектр (x,y).

Задача: $\lambda \neq 0 \Rightarrow \mu^{-1}(\lambda) \curvearrowleft GL_n$ свободно $\Rightarrow$

- $\mu^{-1}(\lambda) = \mu^{-1}(\lambda)^{\theta\text{-}ss}$
- $\underbrace{\mathcal{M}_\lambda^0}_{\text{пр-во Калоджеро-Мозера.}}$ гладкое симплектич.

1.4) Отображение $\mathcal{M}_0^1 \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}_0^0$

$\mathcal{M}_0^1 = Hilb_n(\mathbb{C}^2)$, $\mathcal{M}_0^0 = (\mathbb{C}^2)^n/S_n$.

По замечанию: $\rho: GL_n(x,y,i,j) \longmapsto$ совм. спектр x, y.

$$\begin{array}{ccc} GL_n(x,y,i,j) & \longmapsto & \text{совм. спектр } x,y \\ \updownarrow\wr & & \updownarrow\wr \\ I \subset \mathbb{C}[X,Y] & \longmapsto & \text{носитель с кратностями} \in (\mathbb{C}^2)^n/S_n \end{array}$$

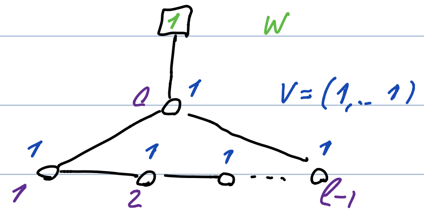
отображение Гильберта-Чжоу.

Следствие: ρ биективно над локусом n различных точек в $(\mathbb{C}^2)^n/S_n$.

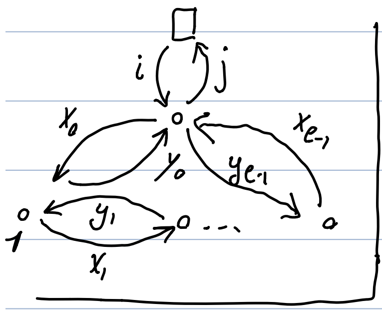
В частности, ρ – это морфизм разрешения особенностей, т.е проективный и бирациональный морфизм из гладкого многообразия.

2) Клейновы особенности: Пример: Q типа $\hat{A}_\ell$, $\underline{v} = (1, \dots, 1)$,

$w=(1,0,\dots 0)$:



$$T^*R = \mathbb{C}^{2\ell+2} = \{(x_0, x_1,\dots x_{\ell-1}, y_0,\dots y_{\ell-1}, i, j)\} \curvearrowleft GL(\underline{v}) = (\mathbb{C}^\times)^\ell$$



$(z_0\dots z_{\ell-1})(x_0,y_0,x_1,y_1,\dots,i,j) =$
$= (z_0x_0z_1^{-1}, z_1y_0z_0^{-1}, z_1x_1z_2^{-1}, z_2y_1z_1^{-1},\dots, z_0 i, j z_0^{-1})$

$$\mu: (x_0,y_0,x_1,y_1,\dots, x_{\ell-1},y_{\ell-1},i,j) \mapsto (x_{\ell-1}y_{\ell-1}-x_0y_0+ij,\ x_0y_0-x_1y_1,\dots).$$

Хотим вычислить: $\mu^{-1}(0)/\!/GL(\underline{v})$

$(\underline{x},\underline{y},i,j)\in\mu^{-1}(0) \Rightarrow ij=0 \rightsquigarrow \mu^{-1}(0)/\!/GL(\underline v) \xrightarrow{\sim} \mu_0^{-1}(0)/\!/PGL(\underline v)$,
где $T^*R_0 = \mathbb{C}^{2\ell} = \{(\underline x,\underline y)\}$, $\mu_0: T^*R_0 \to \{(z_0\dots z_{\ell-1}) \mid z_0+\dots+z_{\ell-1}=0\}$

$PGL(\underline v)$-инвариантное

$$\begin{tikzcd}
T^*R_0 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\mu_0"] & \\
T^*R_0/\!/PGL(\underline v) \arrow[r, "\underline{\mu}_0"'] & \mathfrak{pgl}(\underline v)
\end{tikzcd}$$

$\underline{\mu}_0$ задается инвар. полиномами $(x_{\ell-1}y_{\ell-1}-x_0y_0,\dots\ x_{\ell-2}y_{\ell-2}-x_{\ell-1}y_{\ell-1})$.

Вывод: $\mu_0^{-1}(0)/\!/PGL(\underline v)$ – это локус в $\underbrace{T^*R_0/\!/PGL(\underline v)}_{\text{опишем вот это.}}$, к-ый задается $x_0y_0=x_1y_1=\dots=x_{\ell-1}y_{\ell-1}$.

Лемма: $\mathbb{C}[T^*R_0]^{PGL(\underline{v})} = \mathbb{C}[a_0, \dots a_{\ell-1}, b, c] / (bc = a_0 \dots a_{\ell-1})$, где $a_i = x_i y_i$, $b = x_0 \dots x_{\ell-1}$, $c = y_0 \dots y_{\ell-1}$.

Д-во: Общая ситуация: $T = (\mathbb{C}^\times)^n \curvearrowright V$ (векл. пр-во). Выберем собств. базис $x_1 \dots x_n$ в V^* с собств. зн-ями $\chi_1 \dots \chi_n$: $T \to \mathbb{C}^\times$; $t.(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) = (\chi_1^{\alpha_1} \dots \chi_n^{\alpha_n})(t) \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\mathbb{C}[V]^T =$
$= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}$ (инвар-е мономы).

Вернемся к $T^*R_0 \curvearrowright GL(\underline{v}) = (\mathbb{C}^\times)^\ell$ | $e_0 \dots e_{\ell-1}$ станд. базис в $\mathbb{Z}^\ell$

$x_0^{\alpha_0} \dots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} y_0^{\beta_0} \dots y_{\ell-1}^{\beta_{\ell-1}} \in \mathbb{C}[T^*R_0]^{GL(\underline{v})} \Leftrightarrow (\alpha_0 - \beta_0)(e_0 - e_1) + (\alpha_1 - \beta_1)(e_1 - e_2) + \dots + (\alpha_{\ell-1} - \beta_{\ell-1})(e_{\ell-1} - e_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 - \beta_0 = \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_{\ell-1} - \beta_{\ell-1}$.

Комбинаторика $\Longrightarrow$ д-во леммы (упр.) $\square$

Следствие: $\mathbb{C}[\mu_0^{-1}(0)]^{PGL(\underline{v})} = \mathbb{C}[a_0, \dots a_{\ell-1}, b, c] / (a_0 \dots a_{\ell-1} = bc,\ a_0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1})$
$= \mathbb{C}[a, b, c] / (a^\ell = bc)$

клейнова особенность типа A.

Опр: Клейнова особенность: $\mathbb{C}^2/\Gamma$, $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ кон. подгруппа.

Пример: $\Gamma = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \mid \varepsilon^\ell = 1\} \curvearrowright \mathbb{C}[u, v]$
$\mathbb{C}[u,v]^\Gamma = \mathbb{C}[a, b, c] / (a^\ell - bc)$, где $a = uv$, $b = u^\ell$, $c = v^\ell$.

Вывод: $\mu^{-1}(0) /\!/ GL(\underline{v}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2/\Gamma$ для $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Следующий раз:

- Соответствие Маккея и колч. многообразия $\}$ примеры
- мин. разрешения клейновых особенностей
- Симплектические разрешения $\}$ "важность"