Колчанные многообразия, 5.

1) Пример конструкции Накаджимы.

2) Алгебры Каца-Муди.

3*) Конструктивные функции.

1) $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \geq 1$; $\underline{v} \in \mathbb{Z}^k$, $\underline{v} = (v_k, v_{k-1}, \dots v_1) \rightsquigarrow$

$\mathcal{F}\ell(\underline{v}; w) := \mathcal{F}\ell(v_k, v_{k-1}, \dots v_1; w)$

$L^w_{\underline{v}}$ = пр-во постоянных функций на $\mathcal{F}\ell(\underline{v}; w)$

$$L^w_{\underline{v}} = \begin{cases} \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}\ell(\underline{v}; w) \neq \emptyset \iff 0 \leq v_k \leq v_{k-1} \leq \dots \leq v_1 \leq w \\ \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{F}\ell(\underline{v}; w) = \emptyset. \end{cases}$$

Цель: определить отображения:

i-ая позиция

$$e_i : L^w_{\underline{v}} \rightleftarrows L^w_{\underline{v}-\varepsilon_i} : f_i, \quad \varepsilon_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$$

$v_0 := w.$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{F}\ell(v_k, \dots, v_{i+1}, v_i - 1, v_i, v_{i-1}, \dots v_k; w) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathcal{F}\ell(\underline{v}; w) & & \mathcal{F}\ell(\underline{v} - \varepsilon_i; w) \end{tikzcd}$$

⟵ забывающие

Если верхнее многообразие не пусто, то p, q — локально трив. рассл-я со слоями $F_p = \mathbb{P}^{v_i - v_{i+1} - 1}$ (для p), $F_q = \mathbb{P}^{v_{i-1} - v_i}$ (для q).

$L^w_{\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_i}$ — пр-во постоянных функций на $\mathcal{F}\ell(v_k, \dots v_i - 1, v_i, \dots v_k; w)$ ($\mathbb{C}$ или $\{0\}$).

Pullback: $p^* : L^w_{\underline{v}} \longrightarrow L^w_{\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_i}$, $1 \mapsto 1$.

$q^* : L^w_{\underline{v}-\varepsilon_i} \to L^w_{\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_i}$, $1 \mapsto 1$

Эйлера хар-ка

Pushforward: $p_! : L^w_{\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_i} \longrightarrow L^w_{\underline{v}}$, $1 \mapsto \chi(F_p) = (v_i - v_{i+1})$

$q_! : L^w_{\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_i} \to L^w_{\underline{v}-\varepsilon_i}$, $1 \mapsto \chi(F_q) = (v_{i-1} - (v_i - 1))$.

Pull-push: $e_{i,\underline{v}} = q_! p^*$, $f_{i,\underline{v}-\varepsilon_i} = p_! q^*$

$L^w := \bigoplus_{\underline{v}} L^w_{\underline{v}}$, $e_i = \bigoplus_{\underline{v}} e_{i,\underline{v}}$, $f_i = \bigoplus_{\underline{v}} f_{i,\underline{v}}$.

$\mathfrak{sl}_{k+1}$: с простыми корнями $\alpha_1, \dots \alpha_k$; представление $L^{w\pi_1}$ со старшим весом $w\pi_1$ ($\langle \pi_1, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{i1}$).

$L^{w\pi_1} = \mathbb{C}[x_0, \dots x_k]_w$ – однор. мн-н степени w.

$e_i(x_0^{m_0} x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}) = \left[e_i = x_{i-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\right] = m_i x_0^{m_0} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}+1} x_i^{m_i - 1} \dots x_k^{m_k}$.

$f_i(x_0^{m_0} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}+1} x_i^{m_i - 1} \dots x_k^{m_k}) = \left[f_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}\right] = (m_{i-1}+1) x_0^{m_0} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i} \dots x_k^{m_k}$.

Важное замечание: можем отождествить $\mathbb{C}[x_0, \dots x_k]_w \xrightarrow{\sim} L^w$

$x_0^{m_0} x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k} \mapsto 1 \in L^w_{\underline{v}}$, где $v_k = m_k$, $v_{k-1} = m_k + m_{k-1}$, ... $v_1 = m_k + \dots + m_1$

(а $w = m_k + \dots + m_0$). Это отождествление сплетает e_i с e_i, f_i с f_i

Замечание: $h_i \in \mathfrak{sl}_{k+1}$ действует на $L^w_{\underline{v}}$ скаляром:

$\langle w\pi_1 - \sum_{j=1}^k v_j \alpha_j, h_i \rangle$.

Пафос: Этот пример обобщается на произвольную (симметрическую) алгебру Каца-Муди и произвольный вес $\underline{w}$.

2) Алгебры (Ли) Каца-Муди.

2.1) Определение. Q колчан без петель $\rightsquigarrow$ матрица Картана $A = (a_{ij})_{i,j \in Q_0}$: $a_{ii} = 2$, $i \neq j \rightsquigarrow a_{ij} = -\#\{$стрелки между i, j без учета ориентации$\}$

Пример: $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \rightsquigarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow} \bullet \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A \rightsquigarrow$ алгебра Ли $\mathfrak{g}(Q)$ с образующими e_i, h_i, f_i, $i \in Q_0$, и соотн.

$$\begin{cases} [h_i, h_j] = 0 \\ [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \ [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \\ ad(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \ ad(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

Пример: 1) Q типа $ADE \Rightarrow \mathfrak{g}(Q)$ - кон. мерная простая алгебра Ли соотв. типа ADE.

2) Q типа $\hat{A}, \hat{D}, \hat{E}$ (афф. колчан) то $\mathfrak{g}(Q)$ - аффинная алгебра Ли: $\mathfrak{g}$ как в примере 1 $\rightsquigarrow \mathfrak{g}[t^{\pm 1}]$ (алгебра Ли), к-ая имеет единств. нетрив. центр. расширение:

$$0 \to \mathbb{C}c \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \longrightarrow 0$$

$\mathfrak{g}(Q) = \hat{\mathfrak{g}}$.

2.2) Структурная теория для $\mathfrak{g}(Q)$.

• Треугольное разложение: $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(h_i)$, $\mathfrak{n}^+ :=$ подалг. в $\mathfrak{g}(Q)$, к-ая порожд. e_i, $i \in Q_0$, $\mathfrak{n}^- :=$ подалг. в $\mathfrak{g}(Q)$, порожд. f_i.

Тогда: 1) h_i, $i \in Q_0$, - базис в $\mathfrak{h}$

2) $\mathfrak{g}(Q) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ (как вект. пр-во).

· Корни: простые корни $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ т.ч. $\langle \alpha_i, h_j \rangle = a_{ij}$ однозн. задает $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ по 1).

Проблема: $\alpha_i, i \in Q_0$, образуют базис в $\mathfrak{h}^* \Longleftrightarrow A$ невырожд. (например, когда Q конечн. типа), неверно для аффинного типа.

Техническое решение: расширить $\mathfrak{h}$ добавив мин. кол-во базисн. эл-в так что α_i можно продолжить до лин. незав. функций на расширении, $\tilde{\mathfrak{h}}$.

Пример: Аффинный тип: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ — Картановские подалгебры, $h_1, \dots h_k \in \mathfrak{h}$ базис в $\mathfrak{h}$, $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c$, $h_1, \dots h_k, h_0$ — базис в $\hat{\mathfrak{h}}$ т.ч. $c = h_0 + \sum_{i=1}^{k} ? h_i$.

Тогда $\tilde{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$ с $\langle \alpha_i, d \rangle = \delta_{i0}$. Т.о. $\alpha_0, \dots \alpha_k \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ лин. независимы.

$$\tilde{\mathfrak{g}}(Q) = n^- \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus n^+, \text{ где } \tilde{\mathfrak{h}} \text{ коммут. и для } x \in \tilde{\mathfrak{h}} \text{ и}$$
$$[x, e_i] = \langle \alpha_i, x \rangle e_i, \; [x, f_i] = -\langle \alpha_i, x \rangle f_i.$$

Упр: $\mathfrak{g}(Q) = [\tilde{\mathfrak{g}}(Q), \tilde{\mathfrak{g}}(Q)]$

Пример: $\mathfrak{g}(Q)$ — это $\hat{\mathfrak{g}}$: $0 \to \mathbb{C}c \to \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \to 0$
$$[d, c] = 0, \; [d, x(t)] = t \frac{d}{dt} x(t).$$

2.3) Интегрируемые представления со старшим весом.

Факт: $\mathfrak{g}$ кон. мерн. полупр. алгебра Ли; неприв. кон. мерные предст-я алгебры $\mathfrak{g}$ $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ доминантные веса.

Это можно обобщить на $\mathfrak{g}(Q)$, где "конечномерное" $\rightsquigarrow$ "интегрируемое со старшим весом".

Опр: Представление V алгебры $\mathfrak{g}(Q)$ называется <u>интег-м</u>, если e_i, f_i действуют лок. нильпотентно $\Leftrightarrow$ V интегрируется до представления подходящей группы.

Пример: • присоединенное представление интегрируемо.

Определим фундаментальные веса π_i, $i \in Q_0$, как эл-ты в $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ т.ч. $\langle \pi_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$. ($\det A = 0 \Rightarrow \pi_i$ не определены однозн.)

Опр: Представление V алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(Q)$ – <u>со старшим весом</u>, если:

(i) $\tilde{\mathfrak{h}} \curvearrowright V$ диагонализуемо.

(ii) собств. пр-ва конечномерны.

(iii) $\exists\ \underline{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$ т.ч. любое собств. значение $\tilde{\mathfrak{h}}$ в V имеет вид $\sum\limits_{i \in Q_0} w_i \pi_i - \sum\limits_{i \in Q_0} v_i \alpha_i$ с $\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$

Пример: • $\dim \mathfrak{g}(Q) < \infty$: "интегр. со старшим весом" $\Leftrightarrow$ "кон. мерно."

• $\dim \mathfrak{g}(Q) = \infty$: присоединенное предст-е – это не предст. со старшим весом ((i), (ii) выполн., а (iii) нет.)

Теорема: • Неприв. интегр. предст-я со старшим весом $\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$ $\underline{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$, представление $\longmapsto$ старший вес $\sum\limits_{i \in Q_0} w_i \pi_i$

• Неприв. предст-е $L^{\underline{w}}$ со ст. весом $\sum w_i \pi_i$ имеет одну образующую $x_{\underline{w}}$ (вектор старшего веса) и соотн.

• $e_i x_{\underline{w}} = 0 \qquad \forall\ i \in Q_0$

• $y x_{\underline{w}} = \langle \sum\limits_j w_j \pi_j, y \rangle x_{\underline{w}} \quad \forall\ y \in \tilde{\mathfrak{h}}$

• $f_i^{w_i+1} x_{\underline{w}} = 0 \qquad \forall\ i \in Q_0$

Замеч: В правильном определении интегр. преобр-я со ст. весом
покупрост.

2.4) Цель: геометр. конструкция $L^{\underline{w}}$

Ингредиенты (см первоначальной конструкции Накадзимы)

I) Пр-ва конструктивных функций и отображения pullback и pushforward.

II) Подмногообр. $\Lambda(\underline{v},\underline{w})\subset\mathcal{M}^{\theta}(\underline{v},\underline{w})$ $(\theta=(1,..1)$ или $(-1,..,-1))$ у к-рых все неприв. комп-ы имеют половинную размерность

– например $\mathcal{F}l(\underline{v};w)\subset T^*\mathcal{F}l(\underline{v};w)$

III) Вспомогательные многообр-я $\Lambda(\underline{v},\underline{v}-\varepsilon_i,\underline{w})$ и отобр.

$$\begin{tikzcd} & \Lambda(\underline{v},\underline{v}-\varepsilon_i,\underline{w}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \Lambda(\underline{v},w) & & \Lambda(\underline{v}-\varepsilon_i,w) \end{tikzcd}$$

3) Конструктивные функции:

X алгебр. многообр-е $\rightsquigarrow$ $Fun(X,\mathbb{C})$ – алгебра всех-всех функций $X\to\mathbb{C}$

в топ. Зариского

Пример: $Y\subset X$ лок. замкн. подмн-е $\rightsquigarrow$ $\delta_Y: X\to\mathbb{C}$

$$\delta_Y(x)=\begin{cases}1, & x\in Y\\ 0, & x\notin Y\end{cases}$$

Опр: Подалгебра <u>конструктивных</u> функций $Fun_c(X)\subset Fun(X)$

$Fun_c(X):=Span_{\mathbb{C}}(\delta_Y \mid Y\subset X$ лок. замкн.$)$

Замечание: $f\in Fun_c(X)\Rightarrow |f(X)|<\infty$ и $\forall a\in f(X)\Rightarrow f^{-1}(a)$ конструкт. подмн-во.

Морфизм $\varphi : X \to Y$

Опр: $g \in Fun_c(Y) \rightsquigarrow \varphi^* g : x \mapsto g(\varphi(x))$ — конструкт. функция.

Опр: $f \in Fun_c(X) \rightsquigarrow \varphi_! f \in Fun(Y)$

$\neq \emptyset$ только для кон. числа a.

$$(\varphi_! f)(y) = \sum_{a \in \mathbb{C}} \chi_c(\varphi^{-1}(y) \cap f^{-1}(a))\, a$$

имеет смысл т.к. это конечн. сумма

Эйлерова хар-ка для когомологий с комп. носителем

констр. мн-во, так что χ_c имеет смысл

Факт: $\varphi_! f \in Fun_c(Y)$.