Колчанные многообразия, листок 1

Иван Лосев

14 мая 2020 г.

Задача 1

Пусть (M, ω) симплектическое многообразие, и ξ, η – симплектические векторные поля. Докажите, что $[\xi, \eta]$ гамильтоново векторное поле для функции $\omega(\xi, \eta)$.

Задача 2

Здесь мы обсудим связь между комплексными и симплектическими структурами. Пусть V конечномерное комплексное векторное пространство, и пусть $(\cdot, \cdot)$ эрмитово скалярное произведение на V.

a) Докажите, что $\omega := 2\mathrm{im}(\cdot, \cdot)$ это вещественная невырожденная кососимметрическая форма.

b) Пусть X комплексно-аналитическое подмногообразие в V. Докажите, что ограничение формы ω на X невырождено. Таким образом, X становится вещественным симплектическим многообразием.

c) Докажите аналог b) для $\mathbb{P}(V)$ и формы Фубини-Штуди на этом многообразии.

Задача 3

Эта задача обсуждает отображения моментов для линейных действий.

Пусть V симплектическое векторное пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим группу $\mathrm{Sp}(V)$ с ее естественным действием на V.

a) Докажите, что подпространство $\mathbb{R}[V]_2$ однородных полиномов степени 2 является подалгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Далее, докажите, что отображение $\xi \mapsto \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$ задает изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{sp}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[V]_2$.

b) Пусть G группа Ли, действующая на V через гомоморфизм $G \to \mathrm{Sp}(V)$. Докажите, что это действие гамильтоново с $H_\xi(v) = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$.

c) Пусть теперь V комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Группа Ли G действует на V посредством гомоморфизма в унитарную группу $U(V)$. Докажите, что это действие гамильтоново с

$$H_\xi(v) = -i(\xi v, v).$$

d) В частности, пусть $V = \mathbb{C}^n$ со стандартным эрмитовым скалярным произведением. Пусть $G = \mathbb{S}^1$ (мы отождествляем эту группу с $\{t \in \mathbb{C} | |t| = 1\}$) действует на $\mathbb{C}^n$ посредством

$$t.(z_1, \ldots, z_n) = (t^{a_1} z_1, \ldots, t^{a_n} z_n)$$

для целых чисел $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что отображение моментов $\mu : V \to \mathbb{R}$ задается формулой

$$\mu(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i |z_i|^2.$$

Задача 4

Пусть G гамильтоново действует на M. Докажите, что

$$\operatorname{im} d_m \mu = \{\alpha \in \mathfrak{g}^* | \langle \alpha, \mathfrak{g}_m \rangle = 0\}.$$

Задача 5

Пусть G группа Ли, и $X \to Y$ главное G-расслоение. Рассмотрим отображение моментов $\mu : T^*X \to \mathfrak{g}^*$. Постройте ественный изоморфизм $\mu^{-1}(0)/G \cong T^*Y$.

Задача 6

Напомним, что отображение моментов для действия G на M определено однозначно с точностью до прибавления элемента $\chi \in (\mathfrak{g}^*)^G$. Таким образом, если G действует свободно на $\mu^{-1}(\chi)$, то $\mu^{-1}(\chi)/G$ является симплектическим многообразием.

Пусть теперь $G = \mathbb{S}^1$, $M = V$, и G действует как описано в d) задачи 3 с $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Опишите гамильтонову редукцию $\mu^{-1}(1)/G$ и идентифицируйте симплектическую форму (можно с точностью до пропорциональности).

Задача 7

Пусть M симплектическое многообразие с гамильтоновым действием компактной группы G. Предположим, что действие G на $\mu^{-1}(0)$ свободно. Пусть $H \in C^\infty(M)^G$ и пусть $\underline{H} \in C^\infty(\mu^{-1}(0)/G)$ соответствующая функция. Наконец, пусть π обозначает проекцию $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$. Выберем точку $m \in \mu^{-1}(0)$ и пусть $m(t)$ ее траектория для гамильтоновой системы, заданной H. Докажите, что $\pi(m(t))$ – это интегральная траектория для $\underline{H}$.