# Колчанные многообразия, 6.

0) Напоминание/исправление.

1) $\Lambda(\underline{v},\underline{w}) \subset \mathcal{M}_0^\theta(\underline{v},\underline{w})$.

2) $\Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_e, \underline{w})$

3) Конструкция представления $L^{\underline{w}}_{\cdot}$

0) $\theta=(1,\dots,1)$ $(T^*R)^{\theta\text{-}ss} = \{(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \mid$ если $\underline{V}' \subset \underline{V}$ уст-д отн. $\underline{x},\underline{y}$ и $V'_k \subset \ker j_k$ $\forall k\in Q_0 \Longrightarrow \underline{V}'=\{0\}\}$

раньше это было упомянуто, как усл-е для $(-1,\dots,-1)$.

Во всех примерах колч. многооб-й, надо $\theta$ поменять на $-\theta$.

$\gamma: \mathbb{C}^\times \longrightarrow GL(\underline{V}) \rightsquigarrow$ градуировка $\underline{V} = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \underline{V}^\ell \rightsquigarrow$ убывающая фильтрация $\underline{V}^{\geq \ell}$.

$$\exists \lim_{t\to 0} \gamma(t)(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{все } \underline{V}^{\geq \ell} \text{ подпр-я отн. } \underline{x},\underline{y} \\ \operatorname{im} \underline{i} \subset \underline{V}^{\geq 0} \\ \ker \underline{j} \subset \underline{V}^{>0} \end{cases}$$

Этот предел равен $gr(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j})$

Следствие: $(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \in (T^*R)^{\theta\text{-}ss} \Longrightarrow \forall k\in Q_0$ выполн-я

$$\underbrace{V_k}_{\dim} \longrightarrow \underbrace{W_k \oplus \bigoplus_{a,\, t(a)=k} V_{h(a)} \oplus \bigoplus_{a,\, h(a)=k} V_{t(a)}}_{\dim},\ (j_k, x_a, y_a) - \text{инъективно}$$

$\dim \leq \dim$

Д-во: От противного: $V'_k := \ker$ этого отобр-я, $V'_\ell=\{0\}$, $\ell\neq k$.
Тогда: $\underline{V}'$ устойчив отн. $\underline{x},\underline{y}$ и лежит в $\ker \underline{j}$. Противоречие со стабильностью.

1) $\Lambda(\underline{v},\underline{w}) \subset \mathcal{M}_0^\theta(\underline{v},\underline{w})$

Есть проективный морфизм $\rho: \mathcal{M}_0^\theta(\underline{v},\underline{w}) \longrightarrow \mathcal{M}_0^0(\underline{v},\underline{w})$

Опр: $\Lambda(\underline{v},\underline{w}) := \rho^{-1}(0)$ (проективное многообр-е)

Т-ма (Накаджима '98) Если в $Q$ нет петель (что мы все время предполагаем), то все компоненты $\Lambda(\underline{v},\underline{w})$ имеют размерность $= \frac{1}{2}\dim \mathcal{M}_0^\theta(v,w) = \dim Rep(Q,\underline{v},\underline{w}) - \dim GL(\underline{v})$.

Замеч: $\Lambda(\underline{v},\underline{w})$ лагранжево.

Вопрос: Из каких $GL(\underline{v})(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j})$ состоит $\Lambda(\underline{v},\underline{w})$?

Напоминание: для $(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \in \mu^{-1}(0)^{\theta-ss}$, след. эквив.

(i) $GL(\underline{v})(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \in \rho^{-1}(0)$

(ii) $GL(\underline{v})(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j})$ лежит в прообразе $0$ при морфизме факторизации $\underline{\mu^{-1}(0) \longrightarrow \mu^{-1}(0)}/\!/G.(= \mathcal{M}_0^0)$.

(iii) $\overline{GL(\underline{v})(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j})} \ni 0$

(iv) (по теореме ГМ) $\exists\, \gamma: \mathbb{C}^\times \to GL(\underline{v}) \mid \lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)(\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) = 0$

То описание, к-ым мы будем пользоваться

(v) $\exists$ фильтрация $\underline{V}^{\geq \ell} \subset \underline{V}$ т.ч.

(a) $\underline{x},\underline{y}: \underline{V}^{\geq \ell} \longrightarrow \underline{V}^{\geq \ell+1}$ (при существ. фильтрации с такими св-вами, говорим, что $(\underline{x},\underline{y})$ нильпотентны).

(б) $\operatorname{im} \underline{i} \subset \underline{V}^{\geq 0}$.

(c) $\ker \underline{j} \supset \underline{V}^{\geq 0}$

$(v) + (\underline{x},\underline{y},\underline{i},\underline{j}) \in \mu^{-1}(0)^{\theta-ss} \Longrightarrow \underline{V}^{\geq 0} = \{0\}$.

$\underline{V}^{\geq 0}$ подпр-е отн. $\underline{x},\underline{y}$, к-ое лежит в $\ker \underline{j}$

$\Rightarrow \underline{i} = 0$.

$\overline{2|}$

Пример:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{W} \arrow[d, bend right, "i"'] & & & \\
\circ \arrow[u, "j"'] \arrow[r, bend left, "y_1"] & \cdots \arrow[l, "x_1"] \arrow[r, bend left, "y_{k-2}"] & \circ \arrow[l, "x_{k-2}"] \arrow[r, bend left, "y_{k-1}"] & \circ \arrow[l, "x_{k-1}"]
\end{tikzcd}$$

$(1,\dots 1)$-стабильность $\Rightarrow V_k \xhookrightarrow{x_{k-1}} V_{k-1} \xhookrightarrow{x_{k-2}} \dots \xhookrightarrow{x_1} V_1 \xhookrightarrow{j} W \quad (*)$

$C = ji \in End(W)$ и $i, y_1 \dots y_{k-1}$ восст. по $C$ и част. флагу $(*)$

$$y_l = C|_{V_l}$$

$(\underline{x}, y, i, j) \in \Lambda(\underline{v}, \underline{w}) \Rightarrow i = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y_1 \dots y_{k-1} = 0.$

Т.е. $\Lambda(\underline{v}, \underline{w}) \subset \mathcal{F}l(\underline{v}; w) \subset T^*\mathcal{F}l(\underline{v}; w) = \mathcal{M}_0^\theta(\underline{v}, w)$

Проверим, что $(\underline{x}, \underline{0}, 0, j)$ удовлетворяет $(v)$.

Положим, для $l = 1..k$: $V^{-l} := V_l$, по опр. $\ker j \supset \underline{V}^{\geq 0}$ и $\underline{x}: V^{\geq -l} \to V^{\geq -l+1}$. Т.е. $\mathcal{F}l(\underline{v}; w) \subset \Lambda(\underline{v}; w)$.

2) $\Lambda(\underline{v}, \underline{v} - \varepsilon_l, \underline{w})$, $l \in Q_0$. $(\varepsilon_l = (0, \dots \underset{l\text{-ое место}}{1}, \dots 0))$

$\Lambda(\underline{v}, \underline{w}) = \{ GL(\underline{v})(\underline{x}, y, \underline{0}, j) : \bullet\ (\underline{x}, y, 0, j) \in \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}}$
$\bullet\ (\underline{x}, y)$ нильпотентна $\}$

Опр: $\Lambda(\underline{v}, \underline{v} - \varepsilon_l, \underline{w}) = \{ GL(\underline{V}) [(\underline{x}, y, \underline{0}, j), V_l'] \}$, где

- $GL(\underline{V})(\underline{x}, y, \underline{0}, j) \in \Lambda(\underline{v}, \underline{w})$,
- $V_l' \subset V_l$ — подпр-во коразм. 1,

т.ч. набор $(V_l', V_m)_{m \neq l}$ — подпр-е отн. $\underline{x}, y$.

Упр: $(\underline{x}', y', 0, j')$ — ограничение $(\underline{x}, y, 0, j)$ на $\underline{V}' \subset \underline{V}$, определено с точн. до $GL(\underline{V}')$-сопр. Тогда

$Gl(\underline{V}')(\underline{x}', \underline{y}', \underline{0}, \underline{j}')$ задает точку в $\Lambda(\underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w})$.

Т.о. имеем диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & \Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \Lambda(\underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w}) & & \Lambda(\underline{v}, \underline{w}) \end{tikzcd}$$

Пример:

$$\begin{tikzcd} \square & & & \\ \circ \arrow[u] & \circ \arrow[l] & \dots \arrow[l] & \circ \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w}) = \{ V_k \xhookrightarrow[x_k]{} V_{k-1} \xhookrightarrow[x_{k-1}]{} \dots \hookrightarrow V_{\ell+1} \xhookrightarrow[x_{\ell+1}]{} V_\ell \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W;\ V_\ell' \underset{\text{codim } 1}{\subset} V_\ell \}$$

Усл-е подпр-я $\iff$

$$x_{\ell+1}(V_{\ell+1}) \subset V_\ell' \iff V_{\ell+1} \subset V_\ell' \subset V_\ell$$

Т.е. $\Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w}) = \mathcal{F}\ell(v_k, \dots, v_{\ell+1}, v_\ell - 1, v_\ell, \dots; w)$

Замеч: В общем случае, $\Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w})$ – проект. многообр-е с $p, q$ морфизмами: $V_\ell \rightsquigarrow$ вект. расслоение $\mathcal{V}_\ell$ на $\mathcal{M}_0^\theta(\underline{v}, \underline{w})$.
$\rightsquigarrow \mathcal{V}_\ell^* \rightsquigarrow \mathbb{P}(\mathcal{V}_\ell^*)$ – проект. рассл. на $\mathcal{M}_0^\theta(\underline{v}, \underline{w})$. Задать $V_\ell'$ – задать точку в $\mathbb{P}(\mathcal{V}_\ell^*)$. Далее $\Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w})$ – замкнуто по Зарискому в $\mathbb{P}(\mathcal{V}_\ell^*)$.

## 3) Конструкция представления.

$$\begin{tikzcd} & \Lambda(\underline{v}, \underline{v}-\varepsilon_\ell, \underline{w}) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \Lambda(\underline{v}-\varepsilon_\ell, w) & & \Lambda(\underline{v}, \underline{w}) \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}_{\underline{v}}^{\underline{w}} = Fun_c(\Lambda(\underline{v}, \underline{w}), \mathbb{C})$ – пр-во конструктивных функций.

$e_{\ell,\underline{v}} := p_! q^* : \mathcal{F}_{\underline{v}}^{\underline{w}} \rightleftarrows \mathcal{F}_{\underline{v}-\varepsilon_\ell}^{\underline{w}} : q_! p^* =: f_{\ell, \underline{v}-\varepsilon_\ell}$

$$\mathcal{F}^{\underline{w}} = \bigoplus_{\underline{v}} \mathcal{F}_{\underline{v}}^{\underline{w}}, \quad e_\ell = \bigoplus_{\underline{v}} e_{\ell,\underline{v}}, \quad f_\ell = \bigoplus_{\underline{v}} f_{\ell,\underline{v}}.$$

$$h\in\tilde{\mathfrak h} \rightsquigarrow h|_{\mathcal F_{\underline v}^{\underline w}} = \langle \sum_k w_k \pi_k - \sum_k v_k\alpha_k ,\, h\rangle \cdot id_{\mathcal F_{\underline v}^{\underline w}}.$$

Теорема (Накаджима '94) $h, e_\ell, f_\ell$ задают интегрируемое предст-е $\tilde{\mathfrak g}(Q)$ в $\mathcal F^{\underline w}$.

Набросок д-ва: (I) $e_\ell, f_\ell$ действуют лок. нильп. операторами.
Фиксируем $\underline v \Longrightarrow \exists\, k_1(\underline v)<k_2(\underline v)\in\mathbb Z \mid \mathcal M_0^\theta(v+k\varepsilon_\ell, \underline w)=\varnothing$
если $k\le \underbrace{k_1(\underline v)}_{-(v_\ell''+1)}$, или $\underbrace{k\ge k_2(v)}$, ⟵ Следствие в п.0).

II) Соотн-я $[h,h']=0$, $\overbrace{[h,e_\ell]=\langle\alpha_\ell,h\rangle e_\ell}^{e_\ell:\ v_\ell\rightsquigarrow v_\ell-1}$, $[h,f_\ell]=-\langle\alpha_\ell,h\rangle f_\ell$

III) Оставшиеся соотношения (на $e_\ell$-и и $f_\ell$-и) — для проверки мы должны уметь вычислять композиции pull-push'ей — тоже pull-push

Топологический факт:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & Z = Y_1\times_{X_2} Y_2 \arrow[dl, "\tilde p"'] \arrow[dr, "\tilde q"] & & \\
 & Y_1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "q_1"] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
X_1 & & X_2 & & X_3
\end{tikzcd}$$

$p_2^* q_{1!} = \tilde q_! \tilde p^*$ + функториальность для $\bullet^*, \bullet_! \Longrightarrow$

$$(q_{2!}p_2^*)\circ(q_{1!}p_1^*) = (q_2\circ\tilde q)_!\circ(p_1\circ\tilde p)^*.$$

Соотношения к-ые надо проверить:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{III}.1) & [e_k, f_\ell] = \delta_{k\ell} h_k \\ (\mathrm{III}.2) & \mathrm{ad}(e_k)^{1-a_{\ell k}} e_\ell = 0 = \mathrm{ad}(f_k)^{1-a_{\ell k}} f_\ell = 0\end{array}\right]$$ чсп. топол. факт.

Замеч: $(\mathrm{I}) + (\mathrm{III}.1) \Longrightarrow (\mathrm{III}.2)$ $\square$

## Конструкция неприв. представления $L^{\underline{w}}$ (со ст. весом $\sum w_k \pi_k$)

$\Lambda(\underline{0}, \underline{w}) \subset \mathcal{M}_0^\theta(\underline{0}, \underline{w}) = pt. \rightsquigarrow \mathcal{F}_{\underline{0}}^{\underline{w}} = \mathbb{C}.$

$L^{\underline{w}} := \tilde{\mathfrak{g}}(Q)$-подмодуль в $\mathcal{F}^{\underline{w}}$, к-ый порожд. $\mathcal{F}_0^{\underline{w}}$.

Теорема: $L^{\underline{w}}$ – интегр. модуль со ст. весом $\sum w_k \pi_k$.

Д-во: Образующая в $L^{\underline{w}}$: $\mathbb{1} \in \mathcal{F}_0^{\underline{w}}$

– имеет правильный вес для $\tilde{\mathfrak{h}}$.

– $e_k \mathbb{1} = f_k^{w_k+1} \mathbb{1} = 0$ : это функции на пустых многообр-х:

$\Lambda(-\varepsilon_k, \underline{0}),\ \Lambda((w_k+1)\varepsilon_k, \underline{0})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| \leftarrow$ следствие из пункта 0.

$\qquad\qquad\qquad\qquad \emptyset$

$\square$

## 3.1) Вариант конструкции (Накаджима, 98)

$H_{top}(\Lambda(\underline{v}, \underline{w}), \mathbb{C}),\quad top = \dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\underline{v}, \underline{w}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_0^\theta(\underline{v}, \underline{w})$

Факт (Chriss-Ginzburg, 2.6) $H_{top}(\Lambda(\underline{v}, \underline{w}), \mathbb{C})$ имеет базис, к-й индексирован неприв. компонентами мн-я $\Lambda(\underline{v}, \underline{w})$.

Накаджима: • $\tilde{\mathfrak{g}}(Q) \curvearrowright \bigoplus_{\underline{v}} H_{top}(\Lambda(\underline{v}, \underline{w}), \mathbb{C})$ – использует "конволюцию в гомологиях Бореля-Мура, см. Chriss-Ginzburg, 2.7).

• $\bigoplus_{\underline{v}} H_{top}(\Lambda(\underline{v}, \underline{w}), \mathbb{C}) \simeq L^{\underline{w}}$.