

Колчаные многообразия, листок 1

Иван Лосев

10 мая 2020 г.

Задача 1

Пусть (M, ω) симплектическое многообразие, и ξ, η – симплектические векторные поля. Докажите, что $[\xi, \eta]$ гамильтоново векторное поле для функции $\omega(\xi, \eta)$.

Задача 2

Здесь мы обсудим связь между комплексными и симплектическими структурами. Пусть V конечномерное комплексное векторное пространство, и пусть (\cdot, \cdot) эрмитово скалярное произведение на V .

а) Докажите, что $\omega := 2\operatorname{Im}(\cdot, \cdot)$ это вещественная невырожденная кососимметрическая форма.

б) Пусть X комплексно-аналитическое подмногообразие в V . Докажите, что ограничение формы ω на X невырождено. Таким образом, X становится вещественным симплектическим многообразием.

с) Докажите аналог б) для $\mathbb{P}(V)$ и формы Фубини-Штуди на этом многообразии.

Задача 3

Эта задача обсуждает отображения моментов для линейных действий.

Пусть V симплектическое векторное пространство над \mathbb{R} . Рассмотрим группу $\operatorname{Sp}(V)$ с ее естественным действием на V .

а) Докажите, что подпространство $\mathbb{R}[V]_2$ однородных полиномов степени 2 является подалгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Далее, докажите, что отображение $\xi \mapsto \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$ задает изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{sp}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[V]_2$.

б) Пусть G группа Ли, действующая на V через гомоморфизм $G \rightarrow \operatorname{Sp}(V)$. Докажите, что это действие гамильтоново с $H_\xi(v) = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v)$.

с) Пусть теперь V комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением (\cdot, \cdot) . Группа Ли G действует на V посредством гомоморфизма в унитарную группу $U(V)$. Докажите, что это действие гамильтоново с

$$H_\xi(v) = -i(\xi v, v).$$

d) В частности, пусть $V = \mathbb{C}^n$ со стандартным эрмитовым скалярным произведением. Пусть $G = \mathbb{S}^1$ (мы отождествляем эту группу с $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$) действует на \mathbb{C}^n посредством

$$t.(z_1, \dots, z_n) = (t^{a_1} z_1, \dots, t^{a_n} z_n)$$

для целых чисел a_1, \dots, a_n . Докажите, что отображение моментов $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n a_i |z_i|^2.$$

Задача 4

Пусть G гамильтоново действует на M . Докажите, что

$$\text{im } d_m \mu = \{\alpha \in \mathfrak{g}^* \mid \langle \alpha, \mathfrak{g}_m \rangle = 0\}.$$

Задача 5

Пусть G группа Ли, и $X \rightarrow Y$ главное G -расслоение. Рассмотрим отображение моментов $\mu : T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Постройте естественный изоморфизм $\mu^{-1}(0)/G \cong T^*Y$.

Задача 6

Напомним, что отображение моментов для действия G на M определено однозначно с точностью до прибавления элемента $\chi \in (\mathfrak{g}^*)^G$. Таким образом, если G действует свободно на $\mu^{-1}(\chi)$, то $\mu^{-1}(\chi)/G$.

Пусть теперь $G = \mathbb{S}^1$, $M = V$, и G действует как описано в d) задачи 3 с $a_1 = \dots = a_n = 1$. Опишите гамильтонову редукцию $\mu^{-1}(1)/G$ и идентифицируйте симплектическую форму (можно с точностью до пропорциональности).

Задача 7

Пусть M симплектическое многообразие с гамильтоновым действием компактной группы G . Предположим, что действие G на $\mu^{-1}(0)$ свободно. Пусть $H \in C^\infty(M)^G$ и пусть $\underline{H} \in C^\infty(\mu^{-1}(0)/G)$ соответствующая функция. Наконец, пусть π обозначает проекцию $\mu^{-1}(0) \rightarrow \mu^{-1}(0)/G$. Выберем точку $m \in \mu^{-1}(0)$ и пусть $m(t)$ ее траектория для гамильтоновой системы, заданной H . Докажите, что $\pi(m(t))$ – это интегральная траектория для \underline{H} .