Колчанные многообразия, листок 2

Иван Лосев

20 мая 2020 г.

Задача 1

Пусть $\mathbb{F}$ – это алгебраически замкнутое поле (произвольной характеристики). Докажите, что любое (конечномерное) рациональное представление алгебраической группы $\mathbb{F}^\times$ вполне приводимо, неприводимые представления одномерны и нумеруются целыми числами: здесь числу $\ell \in \mathbb{Z}$ соответствует представление $t \mapsto t^\ell$.

Задача 2

Пусть U^1, U^2, U^3 векторные пространства размерностей k, n, ℓ, соответственно. Положим $G = \mathrm{GL}(U^2), X := \mathrm{Hom}(U^1, U^2) \oplus \mathrm{Hom}(U^2, U^3)$, это пространство приходит с естественным действием группы G. Докажите, что

1) Для $(A, B) \in X$, имеем $0 \in \overline{G(A, B)} \Leftrightarrow BA = 0$.

2) Орбита $G(A, B)$ замкнута $\Leftrightarrow \operatorname{im} A \oplus \ker B = U^2$.

3) Докажите, что каждый слой непустой слой отображения $(A, B) \mapsto BA$ содержит единственную замкнутую орбиту.

Задача 3

Пусть X аффинное многообразие с действием редуктивной группы G, а $Y \subset X$ замкнутое G-устойчивое подмногообразие. Далее, пусть θ – это характер группы G.

a) Докажите, что $Y^{\theta-ss} = Y \cap X^{\theta-ss}$.

b) пусть π^θ – это морфизм факторизации $X^{\theta-ss} \twoheadrightarrow X//^\theta G$. Докажите, что $\pi^\theta(Y)$ – это замкнутое подмногообразие, которое отождествляется с $Y//^\theta G$.