Теория инвариантов, 3.

1) GIT-факторы
2) Теорема Гильберта-Мамфорда.

1) G редукт. группа, X афф. многообр., $G \curvearrowright X$
Хотим: GIT фактор $G \curvearrowright X$.
Он зависит от гомоморфизма $\theta: G \to \mathbb{C}^\times$ (характер)
Пример: $G = GL_n(\mathbb{C})$, $\theta(g) = \det(g)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Аддитивная нотация для характеров, например $\theta = 0 : g \mapsto 1$.
1.1) Конструкция: $G \curvearrowright X \times \mathbb{C}$, $g.(x,a) = (gx, \theta(g)a)$
$\rightsquigarrow \mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-градуирована по степени $z :=$ коорд. на $\mathbb{C}$.
$G \curvearrowright \mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]$ сохраняет градуировку $\rightsquigarrow \mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]^G \subset \mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]$ градуир. подалгебра.
Опр: GIT-фактор $X /\!/^\theta G := \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]^G)$.
Пример 0: $\theta = 0 \Rightarrow \mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]^G = \mathbb{C}[X]^G \otimes \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\mathrm{Proj}} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}) = X/\!/G.$; то же самое для θ конечного порядка.

$k \geq 0$: $\mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]^G_k = \{ f(x) z^k \mid g.(f(x)z^k) = f(x) z^k \Leftrightarrow g.f = \theta(g)^k f \}$.

$$g.(f(x)z^k) = (g.f(x)) \cdot (g.z)^k = (g.f) \cdot (\theta(g)^{-1} z)^k$$

Пр-во полуинвариантов $\mathbb{C}[X]^{G,k\theta} = \{ f \in \mathbb{C}[X] \mid g.f = \theta(g)^k f \}$
Т.о. $\mathbb{C}[X \times \mathbb{C}]^G = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,k\theta}$. (1)

Пример 1: $\mathbb{C}[X]$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-градуирована, $G = \mathbb{C}^\times \curvearrowright X$ согласно градуировке.
характеры $\leftrightarrows \mathbb{Z}$: $\theta = 0$ $X /\!/^0 G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^{\mathbb{C}^\times}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]_0)$.
$\boxed{1}$ $[t \mapsto t^\ell] \longleftrightarrow \ell$

$\theta > 0$: $(1) \overset{\theta=1}{\Rightarrow} \mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G = \mathbb{C}[X]$; $X/\!/^{\theta} G = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[X])$

не меняется при умнож. θ на полож. число

$\theta < 0$: $\mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G = \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,k\theta} = \mathbb{C}[X]_0$, $\mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[X]_0) = \varnothing$

$X/\!/^{\theta} G = \varnothing$. $\quad k<0$: $\mathbb{C}[X]_k = \{0\}$.

Пример 2: $G = GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright X = (\mathbb{C}^n)^{\oplus k}$, $\theta(g) = \det(g)$.

$\mathbb{C}[X]^{G,\theta} = \{ f(v_1,\dots v_k) \mid f(gv_1,\dots gv_k) = \det(g)\, f(v_1,\dots v_k) \}$.

$\ni \det_I$, где I пробегает n-элемент. подмн-ва в $\{1,\dots k\}$

$I = \{i_1 < \dots < i_n\}$ $\det_I(v_1,\dots v_k) = \det(v_{i_1},\dots,v_{i_n})$.

Факты: • Эти эл-ты $\det_I$ порождают $\bigoplus_{\ell\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\ell\theta}$

• Соотношения порождаются соотн. Плюккера

Основная теорема теории инвариантов для SL_n.

$X/\!/^{\theta} G = \mathrm{Proj}\,(\bigoplus_{\ell\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\ell\theta}) = Gr(n,k)$.

1.2) θ-полустабильные точки.: $X/\!/^{\theta} G$ - "фактор". Какие орбиты он параметризует?

θ бесконечного порядка $\Rightarrow \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,k\theta} \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$ - вложение алгебр, домин. морфизм

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] & (X\times\mathbb{C})/\!/G & \\
\text{откр. } X^{\theta\text{-ss}} & X^{\theta\text{-ss}} \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & \left[(X\times\mathbb{C})/\!/G\right]^{\times} \arrow[u, hook, "\text{откр. вложение}"'] \arrow[r] & X/\!/^{\theta} G
\end{tikzcd}$$

Опр: Мн-во θ-полустабильных точек $X^{\theta\text{-ss}} = \{ x\in X \mid \exists\, k>0,\ f\in\mathbb{C}[X]^{G,k\theta} \mid$

$f(x)\neq 0\}$

$$X^{\theta\text{-}ss} = \bigcup_f X_f$$ ← пробегает $\mathbb{C}[X]^{G,k\theta}$ с $k>0$.

$$\mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G) = \bigcup_f \mathrm{Spec}\Big[\underbrace{\Big(\big(\bigoplus_k \mathbb{C}[X]^{G,k\theta}\big)[f^{-1}]\Big)_0}\Big] \cong (\mathbb{C}[X][f^{-1}])^G.$$

$$\mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G[f^{-1}] = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\big(\bigoplus_\ell \mathbb{C}[X]^{G,\ell\theta}\big)[f^{-1}]\Big)_j$$

эл-ты на к-х G действует через $k\theta$

Т.о. $\mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[X\times\mathbb{C}]^G) = \bigcup_f X_f/\!/G.$ (замеч. $f\in\mathbb{C}[X]^{G,k\theta} \Rightarrow X_f\subset X$ G-устойчиво)

Исходная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X^{\theta\text{-}ss} \arrow[r, "\pi^\theta"] & X/\!/^\theta G \\ X_f \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_{X_f}"] & X_f/\!/G \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

– коммут. диагр.

$$\begin{tikzcd} X_f \arrow[r, "\pi_{X_f}"] \arrow[d, hook] & X_f/\!/G \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\pi_X"] & X/\!/G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^{\theta\text{-}ss} \arrow[r, two heads, "\pi^\theta"] \arrow[d, hook] & X/\!/^\theta G \arrow[d] \\ X \arrow[r, two heads, "\pi_X"] & X/\!/G \end{tikzcd}$$

естеств. – проективный морфизм, к-ый приходит из опр. Proj.

Пример: $G = GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright X = (\mathbb{C}^n)^{\oplus k}$

$$X^{\theta\text{-}ss} = \{(v_1,\dots v_k) \mid \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(v_1,\dots v_k) = \mathbb{C}^n\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, I \mid \det_I(v_1,\dots v_k)\neq 0\}$$

Замеч: $\pi^\theta: X^{\theta\text{-}ss} \to X/\!/^\theta G = Gr(n,k)$ – это естеств. главное GL_n-расслоение на $Gr(n,k)$.

2) Теорема Гильберта-Мамфорда (о выходе на границу с помощью однопараметрической подгруппы).

· Как определить единственную замкнутую орбиту в замыкании данной орбиты Gx ($\overline{Gx} \subset \pi^{-1}(\pi(x))$ — содержит единств. замкн. орбиту).

· Как описать θ-полустабильные точки.

2.1) Предел. X афф. многообр., $\mathbb{C}^\times \curvearrowright X$; $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$

$x \in X \rightsquigarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow X$, $t \mapsto t.x$.

Опр: Если $\mathbb{C}^\times \longrightarrow X$ продолжается до $\mathbb{C} \longrightarrow X$, (автомат. единств. образом) то говорим, что $\exists \lim\limits_{t \to 0} t.x$ = значение в 0

Пример: Для линейного действия $\mathbb{C}^\times \curvearrowright V \rightsquigarrow V = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} V_i$,

$v = \sum\limits_i v_i \Rightarrow t.v = \sum\limits_i t^i v_i$.

$\exists \lim\limits_{t \to 0} t.v \Leftrightarrow$ здесь нет отриц. степеней $\Leftrightarrow v_i = 0 \ \forall i < 0$

$= v_0$

Замеч: В общем случае $X \hookrightarrow$ некоторое V.

2.2) Основной результат.

Теорема (Гильберт-Мамфорд) G редукт. группа, X афф. многообр. $x \in X$, $G \curvearrowright X$. ($\Rightarrow \exists!$ замкн. орбита $Gy \subset \overline{Gx}$). Тогда $\exists$ $\gamma : \mathbb{C}^\times \longrightarrow G$ т.ч. $\exists \lim\limits_{t \to 0} \gamma(t).x \in Gy$.

Объяснение: знаем $\exists g_i \in G$ т.ч. $\lim\limits_{i \to \infty} g_i x \in Gy$. Т-ма ГМ: эти g_i можно выбрать очень специальным образом

Д-во: нет...

Пример: U^1, U^2, U^3 кон. мерн. пр-ва, $G = GL(U^2)$, $X = Hom(U^1,U^2)\oplus Hom(U^2,U^3)$, $G \curvearrowright X$. $(A: U^1\to U^2,\ B: U^2\to U^3)$.

Вопросы: · Как устроены орбиты, к-ые в замыкании содержат 0?

· Как устроены замкнутые орбиты?

$\gamma: \mathbb{C}^\times \longrightarrow GL(U^2) \rightsquigarrow U^2 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} U_i^2 \rightsquigarrow U^2_{>0} = \bigoplus_{i>0} U_i^2;\ U^2_{\geq 0}$

проекция $\pi_0: U^2 \twoheadrightarrow U^2_0$.

набор векторов в U^2

Когда $\exists \lim\limits_{t\to 0}\gamma(t).(A,B) \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)A \iff \operatorname{im} A \subset U^2_{\geq 0} \\ \qquad\qquad = \pi_0\circ A \\ \exists \lim\limits_{t\to 0} B\gamma(t)^{-1} \iff U^2_{>0}\subset \ker B \\ \qquad\qquad = B\circ\pi_0. \end{cases}$

Коммент. $\gamma(t)v = \sum t^i v_i$

Набор ковекторов

Задача: Воспользуйтесь теоремой ГМ, чтобы доказать:

1) $0\in\overline{G(A,B)} \iff BA = 0$. ($\iff \operatorname{im} A\subset\ker B$).

2) $G.(A,B)$ замкнута $\iff \operatorname{im} A\oplus\ker B = U^2$.

3) Каждый слой отобр. $\varphi: X\longrightarrow Hom(U^1,U^3)_{\leq n}$, $(A,B)\mapsto BA$, содержит единств. замкнутую орбиту.

Замеч: Из прошлой лекции:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X/\!/G \arrow[r, "\bar\varphi"'] & Hom(U^1,U^3)_{\leq n} \end{tikzcd}$$

3) $\iff \bar\varphi$ биекция.