Симплект. геометрия 3.

0) Напоминание
1) Гамильтонова редукция.
2) Аффинные многообразие.

0) $G \curvearrowright M$ — гамильтоново, если задано отобр.е $\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, $\xi \mapsto H_\xi$ т.ч: 1) линейное и G-эквив.

2) $v(H_\xi) = \xi_M$.

Следствие: $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]}$

Д-во: $\{H_\xi, H_\eta\} = v(H_\xi) H_\eta = [(2)] = \xi_M H_\eta = [(1)] = H_{[\xi,\eta]}$.

Отображение моментов $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$, $\langle \mu(m), \xi \rangle = H_\xi(m)$.

(1) $\underline{\langle d_m \mu(v), \xi \rangle = \omega_m(\xi_{M,m}, v)} \Rightarrow$

[μ субмерсия в $m \Longleftrightarrow G_m \subset G$ дискретна.] $\Rightarrow$ лемма внизу.

1) Гамильтонова редукция: процедура: $G \curvearrowright M$ гамильтоново $\rightsquigarrow$ новое симплект. мн-е $\mu^{-1}(0)/G$.

1.1) Факторы по действию групп:

M C^∞-мног-е, $G \curvearrowright M$ действие групп Ли $\rightsquigarrow$ множество орбит M/G.

Вопрос: При каких условиях M/G снабжается естеств. стр-ой многообразия.

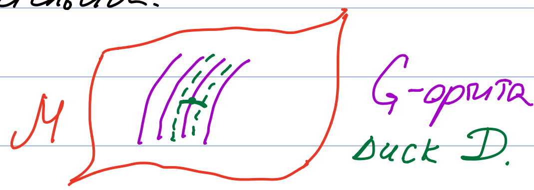
Частичный ответ: Да, если:

1) $G \curvearrowright M$ свободно ($G_m = \{1\}$ $\forall m \in M$)

2) G компактна.

Утв-е: если выполн. 1) и 2), то $\forall\, m \in M$ $\exists$ G-инвар. откр-ая окрестность $U \subset M$ т.ч. $U \xrightarrow[G]{\sim} G \times D$, D диск.

Вместо доказательства:



$M \longrightarrow M/G$, берем на M/G координатные окрестности D ($\hookrightarrow M/G$); M/G становится (хаусдорф.) C^∞-мн-ем, а $\pi: M \longrightarrow M/G$ C^∞-отобр-е, более того, оно главное G-расслоение.

Опр: Y C^∞-многообр, G группа Ли. Главное G-рассл-е на Y — пара (X, π), где:

- X C^∞-многообр. с действием G
- $\pi: X \longrightarrow Y$ G-инв. C^∞-отобр-е т.ч.

$\forall\, y \in Y$ $\exists$ откр. окр-ть D и G-эквив. изом-м

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(D) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & G \times D \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Пример: · $V \to Y$ вект. рассл-е $\Rightarrow$ расслоение базисов в V это главное $GL_n(\mathbb{R})$ рассл-е, $n = \operatorname{rk} V$.

· При выполн. 1) и 2), $M \longrightarrow M/G$ — главное G-рассл-е.

Вопрос: Как связаны i-формы на Y и на X ($X \to Y$ главн. G-рассл-е).

$\pi^*: \Omega^i(Y) \hookrightarrow \Omega^i(X)$, описать образ

1) эл-ты из образа удовл. $\iota_\xi \omega = 0$ $\forall \xi \in Vect(M)$ касат. к слоям, ω к-ые этому удовл. назовем горизонтальными, $\Omega^i_{hor}(X) \subset \Omega^i(X)$, G-устойчиво.

2) образ π^* состоит из G-инвар'х форм

Т.о. $im\,\pi^* \subset \Omega^i_{hor}(X)^G$.

Упр:♡ 1) $\pi^*: \Omega^i(Y) \xrightarrow{\sim} \Omega^i_{hor}(X)^G$.

2) $d(\Omega^i_{hor}(X)^G) \subset \Omega^i_{hor}(X)^G$ и $d\pi^* = \pi^* d$.

Пусть $G \curvearrowright M$ гамильтоново, т.ч. $G \curvearrowright M$ своб. и G компактна. Является M/G симпл. многообр'м?

$\dim M/G = \dim M - \dim G$.

1.2) Гамильт. редукция: Компакт. $G \curvearrowright M$ гамильтоново.

Предположим: $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ (G-устойчиво т.к. $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ G-эквив.) свободно.

Цель: Снабдить $\mu^{-1}(0)/G$ стр-ой симплект. многообр.

Лемма: $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ субмерсия $\forall m \in \mu^{-1}(0)$ ($\Rightarrow$

- $\mu^{-1}(0)$ гладкое мн-е
- $T_m \mu^{-1}(0) = \ker d_m\mu$.)
- $\dim \mu^{-1}(0) = \dim M - \dim G$.

Д-во: $d_m\mu$ сюръект. по напоминанию выше. □

$$\begin{tikzcd} \mu^{-1}(0) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & M \\ \mu^{-1}(0)/G & \end{tikzcd}$$

Теорема: $\exists!\ \underline{\omega} \in \Omega^2(\mu^{-1}(0)/G)$ т.ч. $\pi^*\underline{\omega} = \iota^*\omega$ ($\omega \in \Omega^2(M)$ симпл. форма). Форма $\underline{\omega}$ симплектич.

Д-во: • $\exists!$: по ♡ дост. д-ть, что $\iota^*\omega \in \Omega_{hor}(\mu^{-1}(0))^G$; G-инв-ть $\Leftarrow G\omega = \omega$. Надо $\iota^*\omega \in \Omega_{hor}(\mu^{-1}(0)) \Leftrightarrow$ $\iota^*\omega(\xi_M, \cdot) = 0 \Leftrightarrow \forall\, v \in T_m\mu^{-1}(0) = \ker d_m\mu$ верно $\omega_m(\xi_{M,m}, v) = 0$ $\quad \langle d_m\mu(v), \xi\rangle$ $\quad \overset{\shortparallel}{0}$ ← по выбору v. $\square$

• $d\underline{\omega} = 0 \Leftrightarrow \pi^* d\underline{\omega} = 0 \Leftarrow [♡] \Rightarrow d\pi^*\underline{\omega} = d\iota^*\omega = \iota^* d\omega = 0$. $\square$

• $\underline{\omega}_{\pi(m)}$ невыр. $\forall\, m \in \mu^{-1}(0)$: заметим

$$0 \to T_m Gm \to T_m\mu^{-1}(0) \xrightarrow{d_m\pi} T_{\pi(m)}(\mu^{-1}(0)/G) \to 0$$

$\Updownarrow$

$(\pi^*\underline{\omega})_m$ имеет ядром в точн. $T_m(Gm)$.

$\overset{\shortparallel}{(\iota^*\omega)_m}$. $\quad \ker(\iota^*\omega)_m = (T_m\mu^{-1}(0))^{\perp} = (\ker d_m\mu)^{\perp} = T_m(Gm)$. $\square$

$(1) \Rightarrow T_m(Gm) \subset (\ker d_m\mu)^{\perp}$

$\dim = \dim\mathfrak{g}$ $\qquad \dim = \dim\mathfrak{g}$ т.к. $d_m\mu: T_mM \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Замеч: релевантность для гамильт. механики:

$$H \in C^\infty(M)^G \rightsquigarrow H|_{\mu^{-1}(0)} \in C^\infty(\mu^{-1}(0))^G \xleftrightarrow{\sim} C^\infty(\mu^{-1}(0)/G) \ni \underline{H}$$

Вопрос: Как связаны интегральные траектории для H и $\underline{H}$?

Предл-е: $m \in \mu^{-1}(0)$, $m(t)$ – интегр. траектория т-ки m отн. $v(H)$.

Тогда: 1) $m(t) \in \mu^{-1}(0)$ $\forall t$ (ибо H_ξ – это закон сохр-я $\forall \xi \in \mathfrak{g}$).

2) $\pi(m(t))$ – это интегр. траект-я $\pi(m)$ отн. $v(\underline{H})$.

(огр-е $v(H)$ в $\mathrm{Vect}(\mu^{-1}(0)/G)$ корр. опр. и $= v(\underline{H})$).

Д-во: задача.

Мы будем пользоваться алгебро-геометр. аналогами утв-й лекций 1-3. Многообразия Накаджимы = алгебро-геометрические гамильт. редукции. Сегодня: начнем переносить содержимое лекции 1.

2) Аффинные алгебр. многообразия.

Опр: • аффинное алгебр. многообр., X.

• $X \leftrightarrow$ алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[X]$.

• $\varphi: X \to Y$ морфизм $\leftrightarrow$ $\varphi^*: \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$

$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathbb{C}[Y] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}[y_1 \dots y_m] & \dashrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \dots x_n] \end{array}$$
$\rightsquigarrow$ полин. отобр. $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ ограничение до $X \to Y$.

• $X_1, X_2 \rightsquigarrow X_1 \times X_2$, $\mathbb{C}[X_1 \times X_2] = \mathbb{C}[X_1] \otimes \mathbb{C}[X_2]$.

• точки в $X \xleftrightarrow{\sim}$ макс. идеалы в $\mathbb{C}[X]$. $(x \mapsto m_x)$

• $X \rightsquigarrow \dim X \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

• $x \in X \rightsquigarrow T_x^* X := m_x / m_x^2 \rightsquigarrow T_x X = (m_x/m_x^2)^*$.

Опр: Неприв. мн-е X гладкое, если $\forall x \in X \Rightarrow \dim m_x/m_x^2 = \dim X$.

Произв. афф. мн-е гладкое, если $X = \coprod$ гладких неприв.

Пример: • $X = \mathbb{A}^n$.

• $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ морфизм, $p \in \mathbb{A}^m$ регулярное значение.

$\Rightarrow f^{-1}(p)$ гладкое многообр, все непр. компоненты разм-и $n-m$.

X гладкое аффинное мн-е $\rightsquigarrow TX, T^*X$, вект. поля и 1-формы; $\mathrm{Vect}(X) = \{$дифференцирования $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]\}$

$\rightsquigarrow [\cdot, \cdot]$ на $\mathrm{Vect}(X)$.

i-формы $\Omega^i(X)$ со всеми теми же операциями: ι_ξ, L_ξ ($L_\xi \alpha$ вычисляется с помощью коммутаторов), d.

Т.о. можем говорить о симплект. формах, гамильт. вект. полях, скобки Пуассона ($\{\cdot,\cdot\}: \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$).

Пример: 1) $V \simeq \mathbb{C}^{2n}$ с коорд. $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n \in V^* \rightsquigarrow$ симпл. форма $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$.

2) Y гладкое афф. мн-е, $X = T^*Y$ - афф. многообр. $\mathrm{Vect}(Y)$ - модуль над $\mathbb{C}[Y]$, локально свободный т.к. Y гладко. $\mathbb{C}[T^*Y] = S_{\mathbb{C}[Y]}(\mathrm{Vect}(Y))$, $T^*Y \longrightarrow Y$ (локально трив.) векторное расслоение.

Симплект. форма на T^*Y, есть канон. 1-форма $\alpha \in \Omega^1(T^*Y)$ (см. бескоорд. опр. в лекции 1), $\omega = d\alpha$.

Вывод: конструкции лекции 1 переносятся дословно на случай афф. алгебр. многообразий.

- Подъем с $\mathrm{Vect}(Y)$ до $\mathrm{Vect}(T^*Y)$, $\xi \mapsto \tilde{\xi}$

Как опр. $\tilde{\xi}$: 1) $\tilde{\xi} f = \xi f \quad \forall f \in \mathbb{C}[Y]$ ($\subset \mathbb{C}[T^*Y]$).

2) $\tilde{\xi}\eta = [\xi, \eta] \quad \forall \eta \in \mathrm{Vect}(Y)$ ($\subset \mathbb{C}[T^*Y]$).

Эти условия задают эл-т $\mathrm{Vect}(T^*Y)$, эти формулы задают дифференцирования $\mathbb{C}[T^*Y]$.

- Тотальные пр-ва вект. рассл-й: V на Y - вект. расслоение

Тот. пр-во $S_{\mathbb{C}[Y]}(V^\vee)$.

След. лекция: пн. 6 вечера.

План: перенести содержимое

лекции 2 - легко

Лекция 3 – теория инвариантов

На алгебр. ситуацию (дифф. многообр.)