Колчанные многообразия 1.

1) Приготовления.

2) Определение колчанных мног-й.

1.1) Q колчан, $Q=(Q_0, Q_1, t, h)$, $\underline{v}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \rightsquigarrow V_k,\ k\in Q_0$

$GL(\underline{v})\curvearrowright Rep(Q,\underline{v})$, $\theta: PGL(\underline{v})\longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\updownarrow$ $\underline{\theta}\in\mathbb{Z}^{Q_0}$, $\underline{\theta}\cdot\underline{v}=0$

Предложение: Для $x\in Rep(Q,\underline{v})$ следующие два утв-я эквив-ны:

1) $x\in Rep(Q,\underline{v})^{\theta\text{-}ss}$

2) $\forall$ подпр-в (отн. x) $V_k'\subset V_k$ $(k\in Q_0)\Rightarrow \underline{\theta}\cdot\underline{v}'\geq 0$.

Д-во: 1) $\Rightarrow$ 2): $x\in Rep(Q,\underline{v})^{\theta\text{-}ss}$. По предлож. из пред. лекции: если $\gamma:\mathbb{C}^\times\longrightarrow GL(\underline{v})$ т.ч. $\exists\lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)x$, то $\langle\gamma,\theta\rangle\leq 0$.

Противное: пусть есть подпр-е $\underline{V}'$ т.ч. $\underline{\theta}\cdot\underline{v}'<0$. Определим γ т.ч.: $\gamma=id$ на $\underline{V}'$ (т.е. $\forall V_k'$), а на дополнении к $\underline{V}'$ γ действует как t. Эта γ дает двучленную фильтрацию: $\underline{V}^{\leq 0}=\underline{V}'$, $\underline{V}^{\leq 1}=\underline{V}$.

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{t\to 0}\gamma(t)x$; $\langle\gamma,\theta\rangle=\left[\prod_k\det(\gamma_k(t))^{\theta_k}=t^{\langle\gamma,\theta\rangle}\right]=$

$=0(\underline{\theta}\cdot\underline{v}')+1(\underline{\theta}(\underline{v}-\underline{v}'))=[\underline{\theta}\cdot\underline{v}=0]=-\underline{\theta}\cdot\underline{v}'>0$ – противо-е с $\square$

1.2) Базированные (framed) представления колчанов.

$Q,\underline{v}$; вектор фрэйминга $\underline{w}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}\rightsquigarrow W_k:=\mathbb{C}^{w_k}$

$Rep(Q,\underline{v},\underline{w})=Rep(Q,\underline{v})\oplus\bigoplus\limits_{k\in Q_0}Hom(W_k,V_k)\curvearrowleft GL(\underline{v})$ (уже не пропускается через $PGL(\underline{v})$)

т.е. в каждом V_k выбрали w_k векторов.

$Rep(Q,\underline{v},\underline{w})$ – представления колчану Q_∞, к-ый получается из Q

прибавлением одной вершины, ∞, с w_k стрелками из ∞ в k ($\forall k\in Q_0$):

$Q=$  , $w=(2,1)$: $Q_\infty =$ 

$\underline{v}_\infty = (\underline{v}, 1)$

Тогда $Rep(Q,\underline{v},\underline{w}) = Rep(Q_\infty,\underline{v}_\infty)$, $GL(\underline{v}_\infty) = GL(\underline{v})\times\mathbb{C}^\times$

$$\begin{tikzcd} GL(\underline{v}) \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\text{изоморфизм}"'] & GL(\underline{v}_\infty) \arrow[r, two heads] & PGL(\underline{v}_\infty) \end{tikzcd}$$

действие $GL(\underline{v})$ на $Rep(Q,\underline{v},\underline{w})$ = действие $PGL(\underline{v}_\infty)$ на $Rep(Q_\infty,\underline{v}_\infty)$.

2) Определение колчанных многообразий.

$Q,\underline{v},\underline{w} \rightsquigarrow R = Rep(Q,\underline{v},\underline{w}) \curvearrowleft G = GL(\underline{v})$.

$T^*R = R\oplus R^* \curvearrowleft G$.

↑ есть симплект. форма ω: $\omega(r_1,r_2)=\omega(r_1^*,r_2^*)=0$, $\omega(r_1^*,r_1) = \langle r_1^*, r_1\rangle$ $\quad r_i\in R,\ r_i^*\in R^*$.

Действие гамильтоново с отобр. моментов: $\mu: R\oplus R^*\longrightarrow\mathfrak{g}^*$

$\langle\mu(r,r^*),\xi\rangle = H_\xi(r,r^*) = [H_\xi=\xi_R$, где $\xi_{R,r}=\xi r] = \langle r^*,\xi r\rangle$.

Опр: Колчанное многообразие Накадзимы – это гамильт. редукция

$\mathcal{M}_\lambda^\theta \left(=\mathcal{M}_\lambda^\theta(Q,v,w)\right) = \mu^{-1}(\lambda)/\!/^\theta G$, где $\lambda\in(\mathfrak{g}^*)^G$, $\theta: G\to\mathbb{C}^\times$.

Замеч: такое опр-е имеет смысл для любой G и её предст-я R.

Оказывается что: • наши представления $G\curvearrowright R$ дают "более контролируемые" редукции – сегодня.

• это дает интересные примеры ← следующие 3 лекции

последующие лекции → это очень полезно для геометр. теор. представлений.

2.1) Матричная интерпретация для $\mathrm{Rep}(Q,\underline{v},\underline{w})$ и μ.

$$R\oplus R^* = \bigoplus_{a\in Q_1} \left(Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \oplus Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)})^*\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{k\in Q_0} \left(Hom(W_k, V_k) \oplus Hom(W_k, V_k)^*\right).$$

Ключевое замечание: если U, U' кон. мерные вект. пр-ва, то $Hom(U,U')^* \simeq Hom(U',U)$ посредством невыр. форми (tr-форма).

$$Hom(U,U')\times Hom(U',U) \to \mathbb{C}: (A,B)\mapsto tr(AB)\ (= tr(BA))$$

$$R\oplus R^* = \bigoplus_{a\in Q_1} \left(Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \oplus Hom(V_{h(a)}, V_{t(a)})\right) \oplus \bigoplus_{k\in Q_0}\left(Hom(W_k,V_k)\oplus Hom(V_k,W_k)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_a, y_a, i_k, j_k)_{a\in Q_1,\, k\in Q_0}.$$

$$\mathfrak{g}^* \underset{tr\text{-форма}}{\simeq} \mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in Q_0} End(V_k).$$

$$\mu: R\oplus R^* \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Предложение: $\mu(x_a, y_a, i_k, j_k) = \Big(\underbrace{\sum_{a,\,h(a)=k} x_a y_a - \sum_{a,\,t(a)=k} y_a x_a + i_k j_k}_{\in End(V_k)}\Big)_{k\in Q_0}$

Примеры: 1) $Q\ \bullet$: $R = Hom(W,V)$, $T^*R = Hom(W,V)\oplus Hom(V,W)$

$\mu(i,j) = ij \in End(V)$

2) $Q = \bullet\!\circlearrowleft$, $R = End(V)\oplus Hom(W,V)$,

$T^*R = End(V)^{\oplus 2} \oplus Hom(W,V)\oplus Hom(V,W)$

$\mu(x,y,i,j) = [x,y] + ij.$

3) $Q = \underset{1}{\bullet} \longleftarrow \underset{2}{\bullet}$, $R = Hom(V_1, V_2) \oplus Hom(W_1, V_1)$

$T^*R = Hom(V_1,V_2)\oplus Hom(V_2,V_1)\oplus Hom(W_1,V_1)\oplus Hom(V_1,W_1)$

$\mu(x,y,i,j) = (xy+ij, -yx)$

Д-во предложения: Напомним, что:

I) X_1, X_2 многообр. с гамильт. действиями G и отобр. моментов $\mu_i : X_i \to \mathfrak{g}^*$ $(i=1,2)$. Тогда $G \curvearrowright X_1 \times X_2$ гамильт. с $\mu : X_1 \times X_2 \to \mathfrak{g}^*$
$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) + \mu_2(x_2)$.

Это позволяет свести д-во к аналог. формуле для действия $GL(\underline{V}) \curvearrowright T^*R$, где $R = Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)})$ или $Hom(W_k, V_k)$.

II) $G \curvearrowright X$ гамильт., $\Phi : H \to G$ $(\rightsquigarrow \varphi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g})$ то $H \curvearrowright X$ гамильт. и $\mu_H = \varphi^* \circ \mu_G$.

Это позволяет заменить $\underset{G}{\underset{\shortparallel}{GL(\underline{V})}}$ на $\underset{H}{\underset{\shortparallel}{GL(V_k)}}$.

Это оставляет три случая:

a) $GL(V_1) \curvearrowright Hom(V_2, V_1)$, $\mu(A,B) = AB$ $(A \in Hom(V_2,V_1), B \in Hom(V_1,V_2))$.

b) $GL(V_2) \curvearrowright Hom(V_2, V_1)$, $\mu(A,B) = -BA$

c) $GL(V_1) \curvearrowright End(V_1)$, $\mu(A,B) = [A,B]$

a: $(A,B) \in T^*R = Hom(V_2,V_1) \oplus Hom(V_1,V_2)$; $\xi \in End(V_1)$:

$$\underset{tr(\mu(A,B)\xi)}{\underset{\shortparallel}{\langle \mu(A,B), \xi \rangle}} = \langle B, \xi A \rangle = tr(B\xi A) = tr(AB\xi)$$

$\Downarrow$ tr-форма невырожд.

$$\mu(A,B) = AB.$$

b: упр.

c: Отобр. моментов для $GL(V_1) \times GL(V_1) \curvearrowright End(V_1) = Hom(V_1, V_1)$

$$\underset{\mu(A,B)}{\overset{}{}}\!\!\overset{\shortparallel}{} = [(\mathrm{II})] = (AB, -BA).$$

(II) для диаг. вложения $GL(V_1) \hookrightarrow GL(V_1) \times GL(V_1) \rightsquigarrow \mu(A,B) = AB - BA$. $\square$

Замеч: μ не зависит от выбора ориентации: пусть заменили стрелку a на противоположную: $T^*R \circlearrowleft$ $x_a \mapsto y_a$, $y_a \mapsto -x_a$, все остальные комп-ты на месте. Этот автом. $GL(\underline{v})$-эквив. и сплетает отображения моментов.

2.2) Специальные выборы $\underline{\theta} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ ($\rightsquigarrow \theta: GL(\underline{v}) \to \mathbb{C}^\times$)

$\underline{\theta} = (1,\dots,1)$ $\quad \theta(g_k)_{k\in Q_0} = \prod_{k\in Q_0} \det(g_k)$ (все $\theta_k>0$, результат тот же самый).

Предложение: $(x_a, y_a, i_k, j_k) \in (T^*R)^{\theta-ss} \iff$

• если $V'^k \subset V^k$ набор подпр-в с

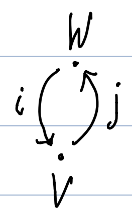
(i) $V'^k \supset \operatorname{im} i_k$

(ii) $\underline{V}'$ устойчиво отн. x и y ($x_a V'_{t(a)} \subset V'_{h(a)}$, $y_a V'_{h(a)} \subset V'_{t(a)}$)

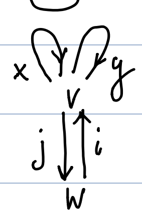
то $V'^k = V^k$ $\forall k \in Q_0$.

Пример:

1) $Q = \bullet$, $\quad T^*R = (i,j)$; $(i,j) \in (T^*R)^{\theta-ss} \iff i: W \twoheadrightarrow V$.

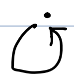
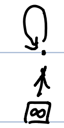
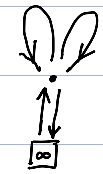


2) $Q =$  $\quad T^*R = (x,y,i,j)$, $(x,y,i,j) \in (T^*R)^{\theta-ss} \iff \mathbb{C}\langle x,y\rangle \operatorname{im}(i) = V$.



Д-во: T^*R — это тоже пр-во представлений колчана.

$Q \rightsquigarrow Q_\infty \rightsquigarrow$ удвоенный колчан $\bar{Q}_\infty$ (к каждой стрелке мы добавляем противоположную.

(Q , $w=1 \rightsquigarrow Q_\infty$  $\bar{Q}_\infty$ 

$T^*R = Rep(\bar{Q}_\infty, v_\infty)$, $\underline{\theta} \rightsquigarrow \underline{\theta}_\infty$ (характер $PGL(\underline{v}_\infty)$),
$\underline{\theta}_\infty = (1,\dots,1, -\sum_{k\in Q_0} v_k)$.

Пользуемся предложением в начале лекции: если $(\underline{V}', V'_\infty)$ – подпр-е в $(\underline{V}, V_\infty)$, то $\sum_{k\in Q_0} v'_k - v'_\infty \sum_{k\in Q_0} v_k \geq 0$. (1)

$v'_\infty = 0$ или 1 ($v_\infty = 1$)

Для $v'_\infty = 0$ (1) выполняется всегда.

$v'_\infty = 1$: (1) $\Longleftrightarrow v'_k = v_k \ \forall k$.

Т.е. $(x_a, y_a, i_k, j_k) \in (T^*R)^{\theta-ss} \Longleftrightarrow$ условиям (i) и (ii) в предложении. □

Следствие: Для $\theta = (1,\dots 1)$, действие G на $\mu^{-1}(\lambda)^{\theta-ss}$ свободно. $\forall \lambda \in (\mathfrak{g}^*)^G$
($\Rightarrow \mathcal{M}_0^\theta$ симплект.)

Д-во: $(g_k).(x_a, y_a, i_k, j_k) = (x_a, y_a, i_k, j_k)$
$\Uparrow$
$$\begin{cases} g_{h(a)} x_a = x_a g_{t(a)} \\ g_{t(a)} y_a = y_a g_{h(a)} \\ g_k i_k = i_k \Longrightarrow g_k = id \text{ на } im\, i_k \\ j_k g_k = j_k \end{cases}$$

g тождественный на любом векторе, к-ый получается из $im\, i_k$ применением x, y.

$(x_a, y_a, i_k, j_k) \in (T^*R)^{\theta-ss} \Longrightarrow g = id$ □