Колчанные многообразия, 2.

0) Напоминание.

1) Пример: Дынкиновский колчан типа A.

0) $Q=(Q_0, Q_1, t, h)$ – колчан, $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0} \rightsquigarrow$

$$T^*R = \bigoplus_{a \in Q_1} \left(Hom(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \oplus Hom(V_{h(a)}, V_{t(a)}) \right) \oplus \bigoplus_{k \in Q_1} \left(Hom(W_k, V_k) \oplus Hom(V_k, W_k) \right)$$

$$\Downarrow$$
$$(x_a, y_a, i_k, j_k)$$

$G = GL(\underline{v}) \curvearrowright T^*R$ – гамильт.

$$\mu(x_a, y_a, i_k, j_k) = \Big(\sum_{a,\, h(a)=k} x_a y_a - \sum_{a,\, t(a)=k} y_a x_a + i_k j_k \Big)_{k \in Q_0}$$

$\underline{\theta} = (1, \dots, 1)$, то $(T^*R)^{\theta\text{-}ss} = \{ (x_a, y_a, i_k, j_k) \mid$
если $V_k' \subset V_k$ удовл-т: (i) $\operatorname{im} i_k \subset V_k'$
(ii) набор V_k' устойчив отн. x и y,
то $V_k' = V_k \}$

$\Rightarrow GL(\underline{v}) \curvearrowright (T^*R)^{\theta\text{-}ss}$ свободно.

Ещё один случай: $\underline{\theta} = (-1, \dots, -1)$

$(T^*R)^{\theta\text{-}ss} = \{ (x_a, y_a, i_k, j_k) \mid$
если $V_k' \subset V_k$ удовл-т: (i) $V_k' \subset \ker j_k$
(ii) как выше, то
$V_k' = \{0\} \ \forall\, k \in Q_0 \}$

Сл-е: $GL(\underline{v}) \curvearrowright (T^*R)^{\theta\text{-}ss}$ свободно.

Д-во: упражнение (перейти к двойственным пр-вам и отобр-ям).

Замечание: пары $\lambda \in (\mathfrak{g}^*)^G$, $\theta: G \to \mathbb{C}^\times$ т.ч. $GL(\underline{v}) \curvearrowright \mu^{-1}(\lambda)^{\theta\text{-}ss}$ свободно можно описать.

Опр: Колчанное многообр. Накадзимы

$$\mathcal{M}_\lambda^\theta = \mu^{-1}(\lambda) /\!/^\theta GL(\underline{v})$$

Если $GL(\underline{v}) \curvearrowright \mu^{-1}(\lambda)^{\theta\text{-}ss}$ свободно:

- $\mathcal{M}_\lambda^\theta$ гладкое симплект. многообр
- $\pi^\theta: \mu^{-1}(\lambda)^{\theta\text{-}ss} \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda^\theta$ главное $GL(\underline{v})$-расслоение.
- есть коммут. диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mu^{-1}(\lambda)^{\theta\text{-}ss} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mu^{-1}(\lambda) \arrow[d, two heads] \\ \mathcal{M}_\lambda^\theta \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{M}_\lambda^0 \end{tikzcd}$$

Эта диаграмма определяет ρ однозн., ρ проект. морфизм

Хотим примеры: с вычисл $\mathcal{M}_\lambda^\theta$, $\mathcal{M}_\lambda^0$ и ρ.

1.1) $Q = \bullet$ (тип A_1).

$v, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightsquigarrow V = \mathbb{C}^v$, $W = \mathbb{C}^w$, $T^*R = Hom(W,V) \oplus Hom(V,W) \ni (i,j)$

$$\begin{tikzcd} \textcircled{v} \arrow[d, bend left, "j"] \\ \boxed{w} \arrow[u, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

$\mu(i,j) = ij$, $G = GL(v)$

Три выбора $\theta = -1, 1, 0$.

$(i,j) \in (T^*R)^{-1\text{-}ss} \iff j$ инъект.

$(i,j) \in (T^*R)^{1\text{-}ss} \iff i$ сюръект.

$\lambda \in (\mathfrak{g}^*)^G \longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad (\mathfrak{g} \to \mathbb{C},\ \xi \mapsto \lambda\, tr(\xi))$.

$\lambda \neq 0$, $(i,j) \in \mu^{-1}(\lambda) \iff ij = \lambda\, Id_V \Rightarrow \begin{cases} i \text{ сюръект} \\ j \text{ инъект.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mu^{-1}(\lambda)^{-1\text{-}ss} = \mu^{-1}(\lambda)^{1\text{-}ss} = \mu^{-1}(\lambda)$ (все фактор совпадают).

Случай 1: $\lambda=0,\ \theta=-1$.

$\mu^{-1}(0)^{\theta-ss}=\{(i,j)\mid j:V\hookrightarrow W,\ i:W/\mathrm{im}\,j\to V\}$

При факторизации по $GL(V)$: j даёт точку, $[V]$, в $Gr(v,W)$.

$T_{[V]}Gr(v,W)=Hom(V,W/V)$, $T^*_{[V]}Gr(v,W)=Hom(W/V,V)\ni i$

Вывод: $\mu^{-1}(0)^{\theta-ss}/GL(V)=T^*Gr(v,W)$.

Более формально: $(T^*R)^{\theta-ss}=T^*(R^{\theta-ss})$, $GL(V)\curvearrowright R^{\theta-ss}$ свободно

$\Rightarrow \mu^{-1}(0)/\!/^{\theta}GL(v)\simeq T^*(\underbrace{R/\!/^{\theta}GL(V)}_{Gr(v,W)})$ — глад. симплект. многообр-е. (ср. задача 5 в листке 1)

Случай 2: $\lambda=0,\ \theta=1$.

Упр: $\mathcal{M}^1_0=T^*Gr(w-v,W)$ (подпр-во: $\ker i$).

Случай 3: $\lambda\neq 0$, θ любое

$\mu^{-1}(\lambda)=\{(i,j)\mid ij=\lambda\cdot Id_V\}$

$$\begin{tikzcd} T^*R/\!/GL(V) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \{C\in End(W)\mid rk\,C\le v\} \\ T^*R\ni(i,j) \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur] \arrow[r, mapsto] & ji \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

осн. т-ма теории инв-в для $GL(V)$

$\mu^{-1}(\lambda)\subset T^*R$ замкнутое G-устойчивое подмн-е $\Longrightarrow$

$\mu^{-1}(\lambda)/\!/GL(V)=\pi(\mu^{-1}(\lambda))$ — замкнутое подмн-е в $(T^*R)/\!/GL(V)$.

Т.е. хотим описать $\{ji\in End(W)\mid ij=\lambda\, Id_V\}$ (*)

$j:V\hookrightarrow W$, $i=\lambda\, pr_V$; $pr_V:W\twoheadrightarrow V$.

как прямое слагаемое.

$ji=\lambda\, pr_V$, где теперь $pr_V:W\to W$.

$(*)=GL(W)\,\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda,\dots,\lambda}_{v},\underbrace{0,\dots,0}_{w-v})$ — класс сопряженности.

Случай 4: $\lambda=\theta=0$.

$\mathcal{M}_0^0 = \{ji \mid ij=0\}$, $\operatorname{rk}(ji) \le v$ (без всякого огранич. на ij)

$$(ji)^2 = j(ij)i = [ij=0] = 0.$$

замкн.

$\mathcal{M}_0^0 \hookrightarrow \{C \in End(W) \mid \operatorname{rk} C \le v,\ C^2=0\}$ – кон. объед. нильп. орбит

Утв-е: На самом деле, имеем равенство!

$O_v := \{C \in End(W) \mid C^2=0,\ \operatorname{rk} C = (\text{макс. возм.}) = \min(v, \lfloor w/2 \rfloor)\}$

Упр: $O_v \subset \mathcal{M}_0^0$ (т.е $\forall\, C \in O_v\ \exists\, j,i \mid C=ji,\ ij=0$)

$\{C \in End(W) \mid \operatorname{rk} C \le v,\ C^2=0\} = \overline{O_v}$. $\Rightarrow \mathcal{M}_0^0 = \overline{O_v}$.

Замеч: Если $v>w$, то в первых трех случаях $\mathcal{M}_1^\theta=\emptyset$, а $\mathcal{M}_0^0 \ne \emptyset$ и с ростом v оно стабилизируется.

Описание $\rho: \mathcal{M}_0^\theta \to \mathcal{M}_0^0$, $\theta=-1$.

Альт. описание $\mathcal{M}_0^\theta = T^*Gr(v,W)$.

Задать $GL(v)(i,j) \longleftrightarrow$ задать $V \subset W$ и оператор $C: W \to W$ т.ч. $im\, C \subset V$, $C|_V = 0$ ($\Rightarrow C^2=0$):

$(i,j) \mapsto (V,C)$: $V := im\, j$, $C = ji$

$(V,C) \mapsto (i,j)$: $j: V \hookrightarrow W$, $i = C$, рассм. как отобр-е $W \to V$.

Из диаграммы:

$$\begin{tikzcd} (i,j) \arrow[r, phantom, "\in"] \arrow[d, mapsto] & \mu^{-1}(0)^{\theta-ss} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mu^{-1}(0) \arrow[r, phantom, "\ni"] \arrow[d] & (i,j) \arrow[d, mapsto] \\ (V,C) \arrow[r, phantom, "\in"] & \mu^{-1}(0)/\!/^{\theta} G \arrow[r, "\rho"] & \mu^{-1}(0)/\!/G \arrow[r, phantom, "\ni"] & C \end{tikzcd}$$

$\rho(V,C) = C$.

Важный вывод: ρ сюрьект. $\Leftrightarrow 2v \le w$, и в этом случае

$$\rho: \rho^{-1}(O_v) \xrightarrow{\sim} O_v \quad (V = im\, C)$$

Т.о. ρ является разрешением особенностей: $T^*Gr(v,W) \to \overline{O_v}$

В ту же цену $T^*Gr(w-v,W) \to \overline{O_v}$.

1.2) $\begin{tikzcd} \boxed{w} \arrow[d, dash] \\ \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} & \cdots \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \underset{k}{\circ} \end{tikzcd}$ (тип A_k), $\theta = (-1, \dots, -1)$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, bend left, "i"] \\ V_1 \arrow[u, bend left, "j"] \arrow[r, bend left, "x_1"] & \circ \arrow[l, bend left, "y_1"] \arrow[r, bend left, "x_2"] & \circ \arrow[l, bend left, "y_2"] & \cdots & \circ \arrow[r, bend left, "x_{k-1}"] & V_k \arrow[l, bend left, "y_{k-1}"] \end{tikzcd}$$

Утв: $(x_\ell, y_\ell, i, j) \in (T^*R)^{\theta-ss}$: все отобр. $j, y_1, \dots, y_{k-1}$ инъект.

$\rightsquigarrow V_k \hookrightarrow V_{k-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow W$

$\mu^{-1}(0)$ задается уравнениями:
$$\begin{cases} ij = y_1 x_1 \\ x_1 y_1 = y_2 x_2 \\ \vdots \\ x_{k-2} y_{k-2} = y_{k-1} x_{k-1} \\ x_{k-1} y_{k-1} = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$C = ji \in End(W)$, $V_0 := W$

$(**) \Rightarrow C(V_\ell) \subset V_{\ell+1} \ \forall \ \ell = 0, .., k-2$ $(\heartsuit)$ (например:

$C(V_0) = im\, ji \subset im\, j = V_1$, $C(V_1) = jij(V_1) = [ij = y_1 x_1] =$
$= j y_1 x_1 (V_1) \subset im\, j y_1 = V_2$ и т.д.

Аналогично 1.1) задать точку $GL(\underline{v})(x_\ell, y_\ell, i, j) \in \mu^{-1}(0)^{\theta-ss}/GL(\underline{v})$ — то же самое, что задать пару $F = (V_k \subset V_{k-1} \subset \dots \subset V_1 \subset W)$, C удовл. $(\heartsuit)$

Утв-е: $\{C$ удовл. $(\heartsuit)\} = T^*_F \mathcal{F}l(v_k, \dots v_1; w)$.

Д-во: $\mathcal{F}l(v_k, \dots v_1; w) = GL(w)/P$, P - параболич. подгруппа блочно верхнетреуг. матриц, $\mathfrak{p} = Lie(P)$, $T^*_F(GL(w)/P) = (\mathfrak{gl}(w)/\mathfrak{p})^*$ $\xrightarrow[\text{tr-форма}]{\sim}$ $\mathfrak{p}^\perp = \{$пр-во блочно строго верхнетр. матриц$\} =$
$= \{C$ удовл. $(\heartsuit)\}$ $\square$

Вывод: $\mu^{-1}(0)/\!/^{\theta} GL(\underline{v}) = T^*\mathcal{F}l(v_k, v_{k-1},\dots v_1; w)$

Упр: Что изменится если $\theta = (1,\dots 1)$?

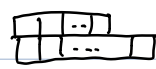
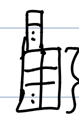
Случай: $\theta = 0$, $\lambda = 0$ Проще всего описать $\mathcal{M}_0^0$ при следующем условии:

(1) $w - v_1 \geq v_1 - v_2 \geq v_2 - v_3 \geq \dots \geq v_k$ (ср. усл-ем $w - v \geq v$ для $k=1$)

Ответ в этом случае (Крафт-Прочези, 80):

$\tau = (w - v_1, v_1 - v_2, \dots, v_k)$ – это разбиение числа w. (диагр. Юнга)

↳ τ^T транспонированное ⇝ $\mathcal{O}_{\tau^T} \subset \mathfrak{gl}(W)$ нильп. орбита с Жорд. типом τ^T

Пример: $k=1$, $\tau = (w-v, v)$: , $\tau^T =$  v

Т-ма: Если верно (1), то $\mu^{-1}(0)/\!/GL(\underline{v}) = \overline{\mathcal{O}_{\tau^T}}$.

В этом случае $T^*\mathcal{F}l(v_k,\dots v_1; w) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_{\tau^T}}$ – разрешение особенностей (упр.) (параболическое разр. Спрингера).

• произв. λ: при выполн. (1), $\mathcal{M}_\lambda^0$ замыкание не обл. нильп. орбиты, $\mathcal{M}_\lambda^\theta$ $(\theta = (1,..1))$ – его симплект. разрешение

• Произв. фрэйминг $(w_1, \dots w_k)$

$$\begin{tikzcd} \square W_1 \arrow[d, dash] & \square W_2 \arrow[d, dash] & \square W_3 \arrow[d, dash] & & \square W_k \arrow[d, dash] \\ \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \circ \\ V_1 & V_2 & V_3 & & V_k \end{tikzcd}$$

$\lambda = 0$, θ общее (напр. $(1,\dots 1)$)

$\mathcal{M}_0^\theta$ – параболическое мн-е Слодови:

$\mathcal{O} \subset \mathfrak{gl}(W)$ ⇝ трансв. слайс $S \subset \mathfrak{gl}(W)$ (слайс Слодови)

Парабол. мн-е Слодови: прообраз S в $T^*\underbrace{\mathcal{F}l}$,

частичн. многообр. флагов

Q Дынкин колчан типов D и E: явное альт. описание $\mathcal{M}_0^\theta$

я не знаю ☹

Хорошая новость: для аффинных колчанов, все M_0^θ имеют геометр. интерпретацию: это предмет следующей лекции.