

Implementación do Método de Elementos Finitos

Iván Martínez Suárez

Resumo

Análise variacional da ecuación de Helmholtz, discretización do problema e presentación dos diferentes elementos finitos empregados na súa resolución, así como dos esquemas de cuadratura empregados no código, comparación dos erros cometidos e da súa evolución co tamaño característico da malla.

1. Análise variacional

1.1. Formulación variacional

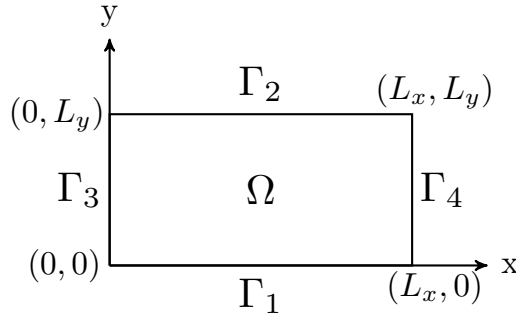


Figura 1: Dominio do problema.

Sexa $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \subset \mathbb{R}^2$ o dominio rectangular da figura 1, con fronteira $\partial\Omega \equiv \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$. Consideramos o problema consistente en atopar unha función $u(x, y)$ definida en $\bar{\Omega}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u(x, y) + u(x, y) = f(x, y) & \text{en } \Omega \\ u(x, y) = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right\}, \quad (1)$$

onde

$$f(x, y) = \left(1 + \frac{\pi^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2}{L_y^2}\right) u(x, y). \quad (2)$$

Pódese comprobar facilmente que a solución deste problema vén dada por

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right). \quad (3)$$

Para construír a formulación variacional do problema, comezamos multiplicando a ecuación diferencial en (1) por unha función test $v(x, y)$ e integramos ambos membros sobre o dominio Ω , de modo que

$$-\Delta u(x, y) v(x, y) + u(x, y) v(x, y) = f(x, y) v(x, y).$$

Para que as integrais existan, nun principio sería necesario que $u \in H^2(\Omega)$, de forma que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Ademais, necesariamente $v \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Aplicamos a fórmula de Green no primeiro membro de (1.1), esixindo $v \in H^1(\Omega)$ para que $\vec{\nabla} v \in (L^2(\Omega))^2$:

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dV = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV - \int_{\Gamma} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} v \, d\gamma.$$

Dado que $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, isto implica $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \in L^2(\Gamma)$ y $v|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ e garantiza a existencia das integrais anteriores. Escollemos que a nosa función test v sexa nula sobre a fronteira Dirichlet (toda a fronteira), de forma que $v \in H_0^1(\Omega)$ e a integral de fronteira anterior anúlase.

Vemos que, logo de aplicar a fórmula de Green e tendo en conta que u ha de anularse sobre a fronteira, basta con que $u \in H_0^1(\Omega)$, e podemos reordenar a ecuación:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dV}_{l(v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

É dicir, dada a función $f \in L^2(\Omega)$ (neste caso $f \in H_0^1(\Omega)$), trátase de atopar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4)$$

1.2. Existencia e unicidade

Para demostrar a existencia e unicidade da solución en $H_0^1(\Omega)$ da formulación variacional construída anteriormente empregaremos o teorema de Lax–Milgram. Dado que se comproba trivialmente que $a(u, v)$ é unha aplicación bilineal e $l(v)$ é lineal, vexamos se $a(u, v)$ é continua, é dicir, se $|a(u, v)| \leq C_a \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV \right| \leq \left| \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV \right| + \left| \int_{\Omega} u v \, dV \right| \leq \\ &\leq \left| \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v \rangle_{0,\Omega} \right| + |\langle u, v \rangle_{0,\Omega}| \leq \|\vec{\nabla} u\|_{0,\Omega} \|\vec{\nabla} v\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \\ &\leq \underbrace{2}_{C_a} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Acabamos de comprobar que $a(u, v)$ é continua, utilizando unha constante $C_a = 2$.

Veremos agora a continuidade de $l(v)$, de xeito que $|l(v)| \leq C_l \|v\|_{1,\Omega}$.

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dV \right| = |\langle f, v \rangle_{0,\Omega}| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \underbrace{\|f\|_{0,\Omega}}_{C_l} \|v\|_{1,\Omega}. \quad (6)$$

Polo tanto, $l(v)$ é continua con $C_l = \|f\|_{0,\Omega}$, que se pode calcular.

Resta por comprobar que $a(v, v)$ é coerciva, é dicir, $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2$, con $\alpha > 0$.

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \left(\vec{\nabla} v \right)^2 \, dV + \int_{\Omega} v^2 \, dV = \|v\|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2, \quad (7)$$

certo para calquera $\alpha < 1$.

Demostramos que $a(u, v)$ é unha aplicación bilineal e continua, $l(v)$ é unha aplicación lineal e continua, e ademais $a(v, v)$ é coerciva. Por tanto, en virtude do teorema de Lax–Milgram, a formulación variacional (4) ten solución única.

1.3. Recuperación da formulación forte

A continuación veremos que, se engadimos certa regularidade adicional sobre a solución do problema variacional, de forma que $u \in H^2(\Omega)$, entón u é solución do problema forte para case todos os puntos $x \in \overline{\Omega}$.

Lembramos que, dada a función $f \in L^2(\Omega)$ (neste caso $f \in H_0^1(\Omega)$), trátase de atopar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (8)$$

Supoñendo regularidade adicional, é dicir, $u \in H^2(\Omega)$, podemos desfacer a aplicación da fórmula de Green

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, en particular podemos escoller $v \in D(\Omega)$, e polo tanto con soporte compacto (anúlase sobre a fronteira), de forma que

$$\int_{\Omega} -\Delta u v \, dV + \int_{\Omega} u v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in D(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u) v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV \quad \forall v \in D(\Omega).$$

$$\langle -\Delta u + u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in D(\Omega).$$

É dicir, no sentido das distribucións verifícase

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } D'(\Omega).$$

Como supuxemos $u \in H^2(\Omega)$ temos que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, e como dato $f \in L^2(\Omega)$. Logo a igualdade é certa en $L^2(\Omega)$ e verifícase para case todos os puntos de Ω :

$$-\Delta u + u = f \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega. \quad (9)$$

Ademais, como na formulación variacional $u \in H_0^1(\Omega)$, tamén recuperamos a condición de contorno Dirichlet:

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (10)$$

2. Discretización do problema

A discretización da formulación variacional (4), utilizando un espazo de aproximación V_h (dimensión N), sabemos que equivale ao sistema lineal seguinte:

$$\mathbb{A} \mathbf{u} = \mathbf{B}, \quad (11)$$

con $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^N$ e $\mathbb{A} \in M_{N \times N}$, sendo

$$\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M},$$

a matriz de rixidez

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_i \, dV, \quad (12)$$

a matriz de masa

$$M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i \, dV, \quad (13)$$

e o vector de termos independentes

$$B_i = \int_{\Omega} f w_i \, dV. \quad (14)$$

Utilizaremos un mallado construído con triángulos, nos que as funcións de base $(w_j)_{j=1}^N$ han de satisfacer $w_j(M_i) = \delta_{ij}$ para todos os nodos $(M_j)_{j=1}^N$ da malla. De seguido veremos cales son estas funcións de base para cada un dos elementos finitos de tipo Lagrange empregados: P_1 , P_2 e P_3 . Como os cálculos van ser realizados no triángulo de referencia de lados unitarios, serán de utilidade as coordenadas baricéntricas asociadas a el:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) &= 1 - x - y \\ \lambda_2(x, y) &= x \\ \lambda_3(x, y) &= y \end{aligned}$$

Agárdase que a utilización de máis nodos por parte do elemento P_3 ralentice os cálculos, pero tamén se espera maior precisión nos mesmos, conxugados coa fórmula de cuadratura adecuada. Pretendemos resolver o mesmo problema cos tres tipos de elementos, para poder realizar comparacións do erro cometido e das solucións obtidas.

2.1. Elemento Lagrange P_1

Para o elemento P_1 , dado que os tres nodos que utiliza se corresponden cos vértices do triángulo, as funcións de base son trivialmente:

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= \lambda_1(x, y) \\ w_2(x, y) &= \lambda_2(x, y) \\ w_3(x, y) &= \lambda_3(x, y) \end{aligned}$$

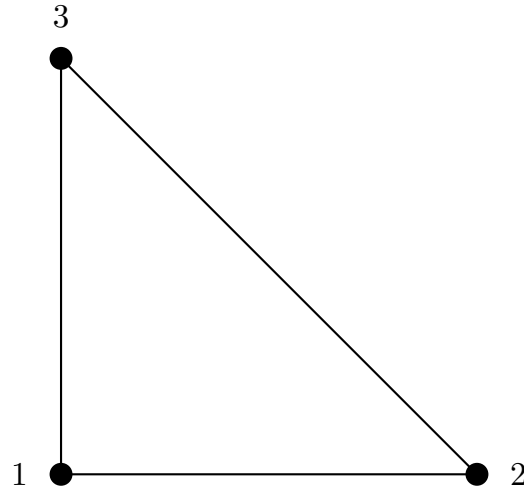


Figura 2: Nodos do elemento de referencia tipo Lagrange P_1 .

2.2. Elemento Lagrange P_2

As funcións de base locais, asociadas a cada nodo da figura 3, detállanse a continuación:

$$w_1(x, y) = 2\lambda_1 (\lambda_1 - 1/2)$$

$$w_2(x, y) = 2\lambda_2 (\lambda_2 - 1/2)$$

$$w_3(x, y) = 2\lambda_3 (\lambda_3 - 1/2)$$

$$w_4(x, y) = 4\lambda_1 \lambda_2$$

$$w_5(x, y) = 4\lambda_2 \lambda_3$$

$$w_6(x, y) = 4\lambda_3 \lambda_1$$

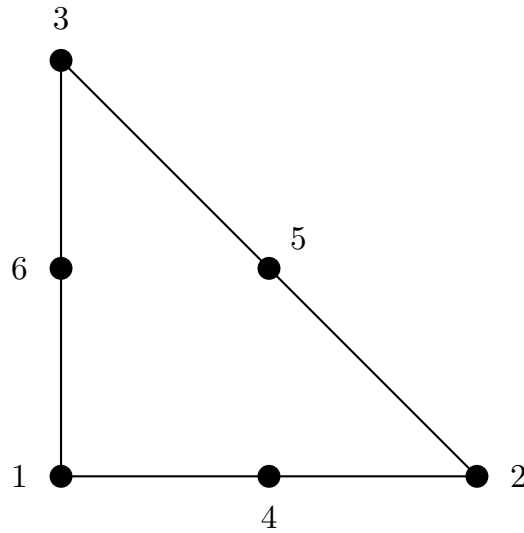


Figura 3: Nodos do elemento de referencia tipo Lagrange P_2 .

2.3. Elemento Lagrange P_3

As funcións de base locais, asociadas aos nodos da figura 4, detállanse a continuación:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= (9/2)\lambda_1 (\lambda_1 - 1/3) (\lambda_1 - 2/3) \\
 w_2(x, y) &= (9/2)\lambda_2 (\lambda_2 - 1/3) (\lambda_2 - 2/3) \\
 w_3(x, y) &= (9/2)\lambda_3 (\lambda_3 - 1/3) (\lambda_3 - 2/3) \\
 w_4(x, y) &= (27/2)\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - 1/3) \\
 w_5(x, y) &= (27/2)\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - 1/3) \\
 w_6(x, y) &= (27/2)\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - 1/3) \\
 w_7(x, y) &= (27/2)\lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - 1/3) \\
 w_8(x, y) &= (27/2)\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_3 - 1/3) \\
 w_9(x, y) &= (27/2)\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - 1/3) \\
 w_{10}(x, y) &= 27\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3
 \end{aligned}$$

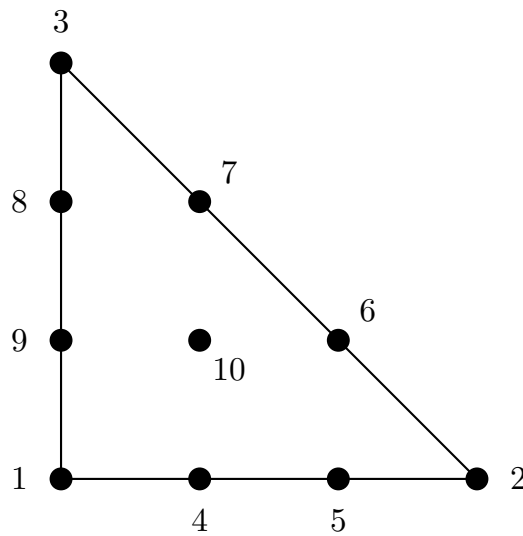


Figura 4: Nodos do elemento de referencia tipo Lagrange P_3 .

3. Esquemas de cuadratura

Na implementación do método de elementos finitos no código MATLAB, ademais das funcións de base asociadas a cada tipo de elemento, necesitamos empregar un esquema de integración (cuadratura) suficientemente preciso para cada caso. Para P_1 e P_2 utilizaremos os esquemas Hammer–Stroud e Hammer–Marlowe–Stroud da folla de fórmulas de cuadratura que se nos facilitou. No caso de P_3 , como detallaremos posteriormente, o esquema de cuadratura empregado será o de Taylor–Wingate–Bos publicado en [2].

3.1. Elemento Lagrange P_1

Para Lagrange P_1 utilízase un esquema de cuadratura exacto para polinomios de grao 2.

λ_1	λ_2	λ_3	Multiplicidade	Peso / meas(T)
1/2	1/2	0	3	1/3

Cadro 1: Nodos e pesos de cuadratura empregados para Lagrange P_3 . Neste caso a medida do triángulo é $\text{meas}(T) = 1/2$. Este esquema utiliza 3 nodos de cuadratura e integra exactamente polinomios de grado 2.

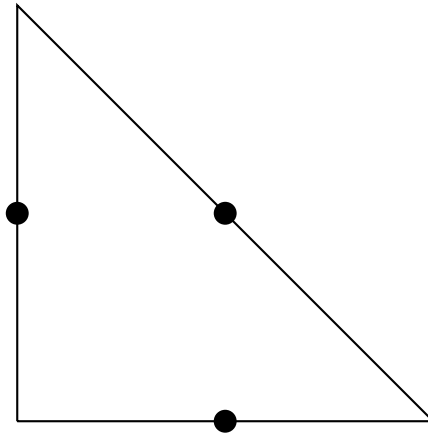


Figura 5: Nodos do esquema de cuadratura escollido para integrar elementos P_1 .

3.2. Elemento Lagrange P_2

Para Lagrange P_2 empregaremos un esquema de cuadratura que integra exactamente polinomios de grado 5, e polo tanto será exacto para P_2 . Definimos a_1 e a_2 como segue:

$$a_1 = \frac{6 - \sqrt{15}}{21}, \quad a_2 = \frac{6 + \sqrt{15}}{21}.$$

λ_1	λ_2	λ_3	Multiplicidade	Peso / meas(T)
a_1	a_1	$1 - 2a_1$	3	$(155 - \sqrt{15})/1200$
a_2	a_2	$1 - 2a_2$	3	$(155 + \sqrt{15})/1200$
$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	$9/40$

Cadro 2: Nodos e pesos de cuadratura empregados para Lagrange P_2 . Neste caso a medida do triángulo é $\text{meas}(T) = 1/2$. Este esquema utiliza 7 nodos de cuadratura e integra exactamente polinomios de grado 5.

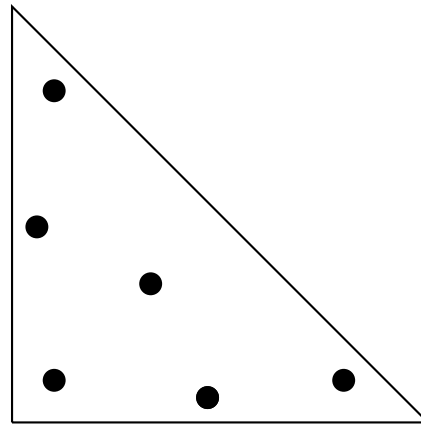


Figura 6: Nodos do esquema de cuadratura escollido para integrar elementos P_2 .

3.3. Elemento Lagrange P_3

Neste caso utilizaremos un esquema de cuadratura de 15 nodos e exacto para polinomios de grado 7, polo tanto tamén para P_3 . A obtención do esquema descríbese detalladamente en [2].

Coordenada x	Coordenada y	2 Peso / meas(T)
1,000000000000	0,000000000000	0,0102558174092
0,000000000000	0,000000000000	0,0102558174092
0,000000000000	1,000000000000	0,0102558174092
0,7839656651012	0,0421382841642	0,1116047046647
0,1738960507345	0,7839656651012	0,1116047046647
0,1738960507345	0,0421382841642	0,1116047046647
0,0421382841642	0,1738960507345	0,1116047046647
0,7839656651012	0,1738960507345	0,1116047046647
0,0421382841642	0,7839656651012	0,1116047046647
0,4743880861752	0,4743880861752	0,1679775595335
0,4743880861752	0,0512238276497	0,1679775595335
0,0512238276497	0,4743880861752	0,1679775595335
0,2385615300181	0,5228769399639	0,2652238803946
0,5228769399639	0,2385615300181	0,2652238803946
0,2385615300181	0,2385615300181	0,2652238803946

Cadro 3: Nodos e pesos de cuadratura empregados para Lagrange P_3 . Neste caso a medida do triángulo é $\text{meas}(T) = 1/2$. Este esquema utiliza 15 nodos de cuadratura e integra exactamente polinomios de grado 7.

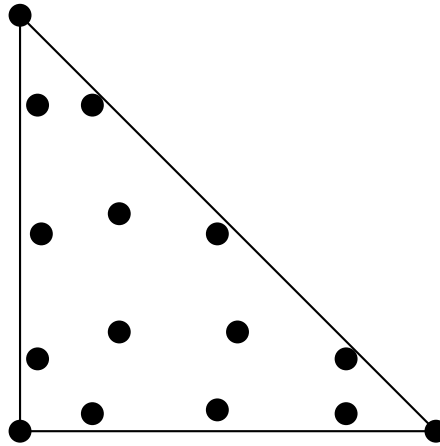


Figura 7: Nodos do esquema de cuadratura escollido para integrar elementos P_3 .

4. Estudo do erro en función da malla

Dada a solución exacta U_{ex} e a aproximada U_h , defínese o erro absoluto cometido como

$$e = U_{ex} - U_h, \quad (15)$$

entón o erro en norma H_1 , E , virá dado por

$$E^2 = \int_{\Omega} (e^2 + \nabla e \cdot \nabla e) \, d\Omega, \quad (16)$$

que pode ser calculado numericamente empregando as matrices de masa e rixidez como $E = \sqrt{\mathbf{e}^t (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{e}}$.

A malla, creada con *Gmesh* (<http://gmsh.info/>), será uniforme (creada por extrusión) e para un cadrado unitario, de forma que $L_x = L_y = 1$. As mallas empregadas terán $N \times N$ elementos, e utilizaremos varias para comprobar o cambio nos resultados (faremos referencia ao cambio de N , o número de divisións do lado).

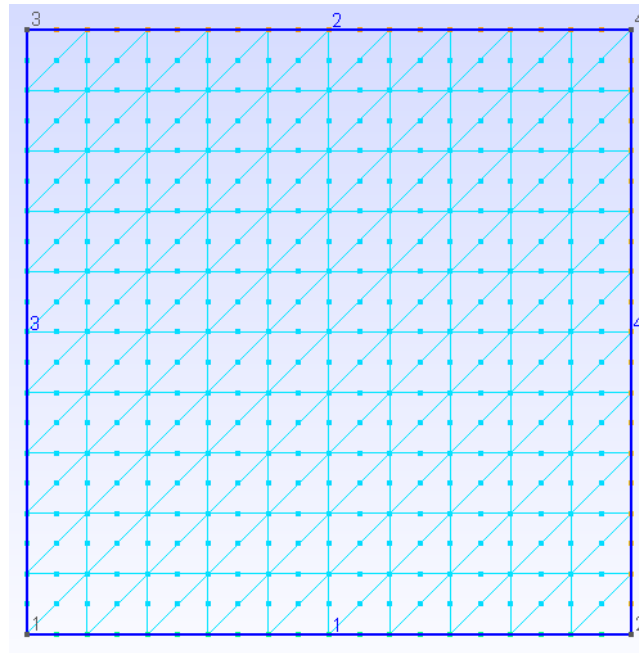


Figura 8: Prototipo de malla con $N = 10$ divisiones por lado, con elementos Lagrange P_2 .

Por outra banda, para un método de elementos finitos que utilice funcións de base Lagrange P_k , cabe agardar que o erro E se reduza co tamaño da malla conforme a k ; é dicir:

$$E(h) = Ah^k. \quad (17)$$

O parámetro h defínese como o radio da maior circunferencia exterior a un elemento da triangulación. Dado que a nosa malla é uniforme, sendo L o lado dun triángulo, o parámetro h será $\frac{\sqrt{2}}{2}L$. Ademais, L é claramente o inverso do número de divisiones de cada lado, que chamaremos N , polo que $L = 1/N$. Tendo isto en conta podemos expresar o erro E como función do número de divisiones:

$$E(N) = E_* N_*^k \frac{1}{N^k} = C \frac{1}{N^k}, \quad (18)$$

sendo E_* o erro asociado a unha malla de N_* divisiones (deste xeito fixamos a constante A). No que segue axustaremos os datos obtidos con cada tipo de elementos P_k a un modelo da forma $E(N) = CN^{-k}$, dando en cada caso o coeficiente R^2 da regresión.

4.1. Elemento Lagrange P_1

Para Lagrange P_1 ($k = 1$), resolvemos o problema con 10 mallas distintas, variando o número de divisiones de cada lado progresivamente. Os resultados obtidos foron os seguintes:

# divisiones	E
5	$2,82 \times 10^{-1}$
10	$1,24 \times 10^{-1}$
15	$7,98 \times 10^{-2}$
20	$5,92 \times 10^{-2}$
25	$4,70 \times 10^{-2}$
30	$3,91 \times 10^{-2}$
35	$3,34 \times 10^{-2}$
40	$2,92 \times 10^{-2}$
45	$2,59 \times 10^{-2}$
50	$2,33 \times 10^{-2}$

Cadro 4: Erros cometidos para diferentes mallas (P1).

Realizamos un axuste dos datos da forma $E(N) = CN^{-1}$, obténdose $C = 1,339$, e un coeficiente $R^2 = 0,989$.

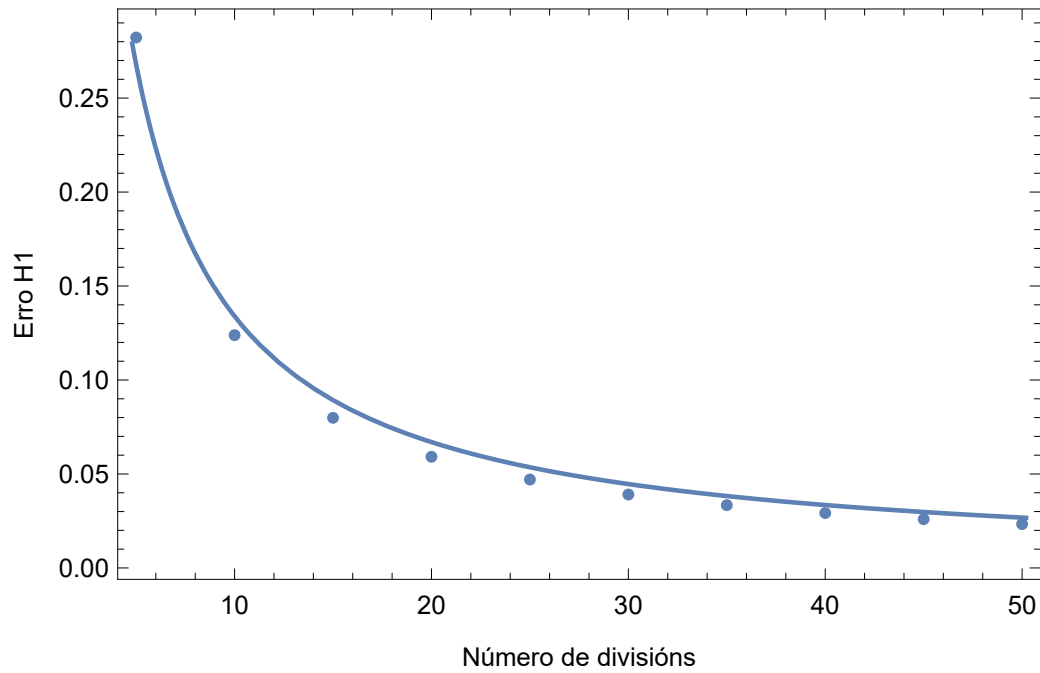


Figura 9: Evolución do erro en norma H_1 co número de divisións (N) de cada lado da malla. Os puntos representan os valores obtidos na resolución e a liña continua é o axuste realizado para P1.

4.2. Elemento Lagrange P_2

Para Lagrange P_2 ($k = 2$), resolvemos o problema con 10 mallas distintas, variando o número de divisións de cada lado progresivamente. Os resultados obtidos foron os seguintes:

# divisións	E
5	$1,04 \times 10^{-2}$
10	$1,82 \times 10^{-3}$
15	$5,52 \times 10^{-4}$
20	$2,35 \times 10^{-4}$
25	$1,21 \times 10^{-4}$
30	$7,04 \times 10^{-5}$
35	$4,44 \times 10^{-5}$
40	$2,98 \times 10^{-5}$
45	$2,10 \times 10^{-5}$
50	$1,53 \times 10^{-5}$

Cadro 5: Erros cometidos para diferentes mallas (P2).

Seguimos un procedemento análogo ao caso P1, e realizamos un axuste dos datos da forma $E(N) = CN^{-2}$, obténdose $C = 0,282$ e $R^2 = 0,987$.

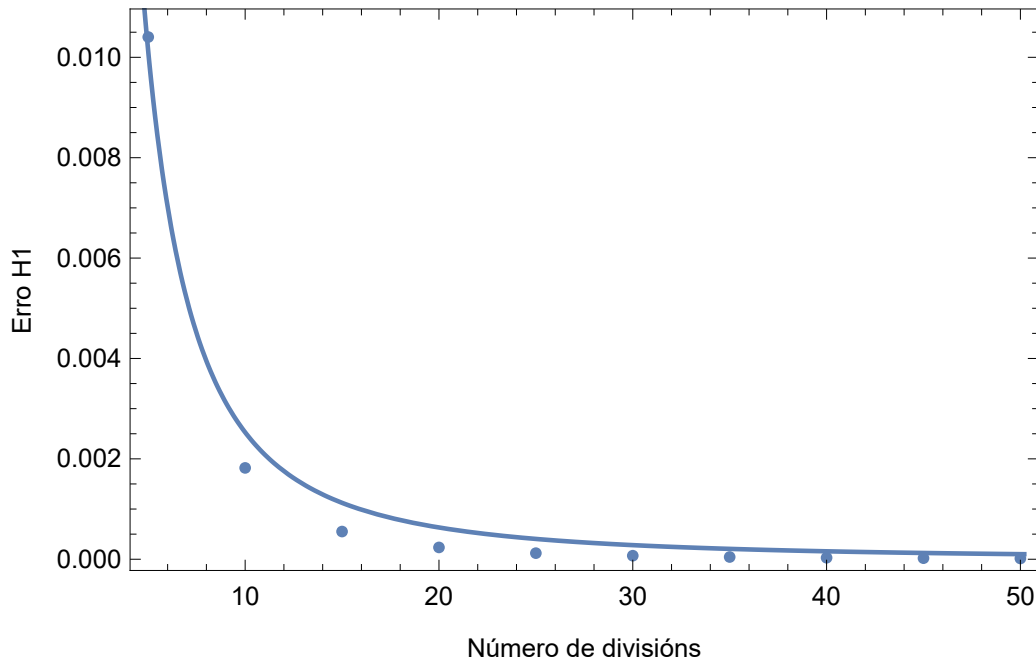


Figura 10: Evolución do erro en norma H_1 co número de divisións (N) de cada lado da malla. Os puntos representan os valores obtidos na resolución e a liña continua é o axuste realizado para P_2 .

4.3. Elemento Lagrange P_3

No caso de elementos P_3 ($k = 3$), resolvemos o problema con 10 mallas distintas, variando o número de divisións de cada lado progresivamente. Os resultados obtidos foron os seguintes:

# divisións	E
5	$3,87 \times 10^{-3}$
10	$5,08 \times 10^{-4}$
15	$1,53 \times 10^{-4}$
20	$6,49 \times 10^{-5}$
25	$3,33 \times 10^{-5}$
30	$1,93 \times 10^{-5}$
35	$1,22 \times 10^{-5}$
40	$8,18 \times 10^{-6}$
45	$5,75 \times 10^{-6}$
50	$4,20 \times 10^{-6}$

Cadro 6: Erros cometidos para diferentes mallas (P_3).

Neste caso cabería agardar un comportamento similar a (18) con $k = 3$, polo que realizamos un axuste da forma $E(N) = CN^{-3}$ (C a determinar) dos datos para comprobalo. Do axuste obtemos $C = 0,4135$ e un coeficiente de determinación $R^2 = 0,999$.

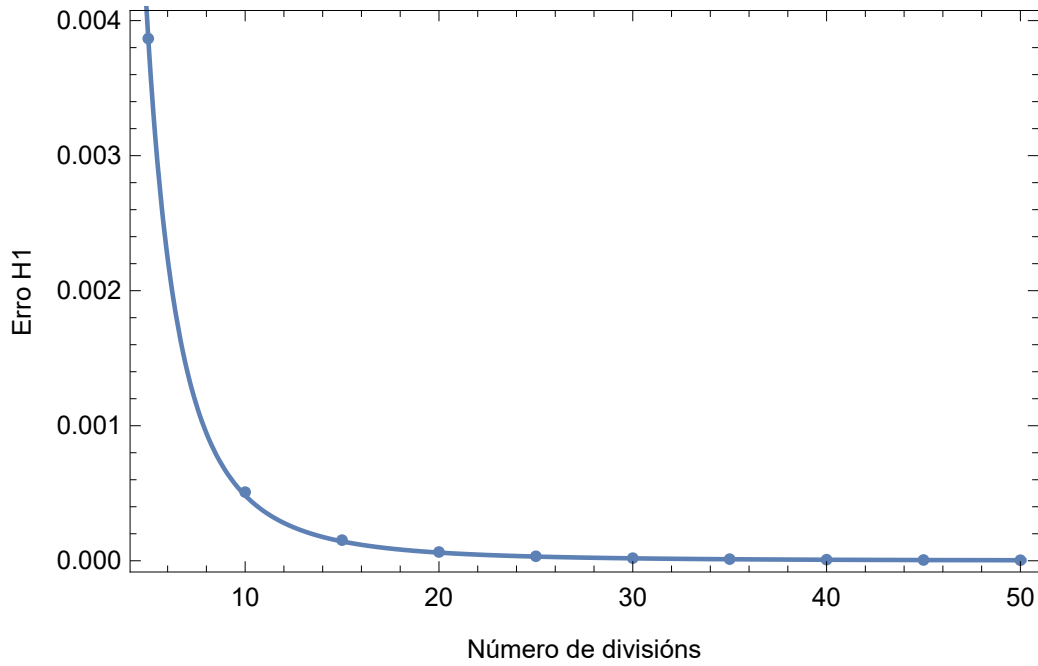


Figura 11: Evolución do erro en norma H_1 co número de divisións (N) de cada lado da malla. Os puntos representan os valores obtidos na resolución e a liña continua é o axuste realizado para P_3 .

5. Solución obtida

Sexan dúas funcións $p_h(x, y)$ e $q_h(x, y)$, aproximacións de $p(x, y)$ e $q(x, y)$ no espazo discretizado. Sexan $(w_i(x, y))_{i=1}^N$ as funcións de base locais, \mathbf{p} e \mathbf{q} os vectores que conteñen os coeficientes de $p_h(x, y)$ e $q_h(x, y)$ nesa base, de forma que

$$p_h(x, y) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{p})_j w_j(x, y)$$

$$q_h(x, y) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{q})_j w_j(x, y).$$

Entón, como vimos na clase, temos as aproximacións

$$\int_{\Omega} p_h q_h dV \approx \mathbf{p}^t \mathbf{M} \mathbf{q}$$

$$\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla q_h dV \approx \mathbf{p}^t \mathbf{K} \mathbf{q},$$

que nos permitiron calcular o erro en norma $H_1(\Omega)$.

É interesante notar que estas expresións son moi útiles á hora de comprobar o correcto funcionamento do programa de elementos finitos, ademais de servir para calcular o erro.

Para unha malla de $N = 50$ e con elementos P_3 , a solución que obtemos é a seguinte:

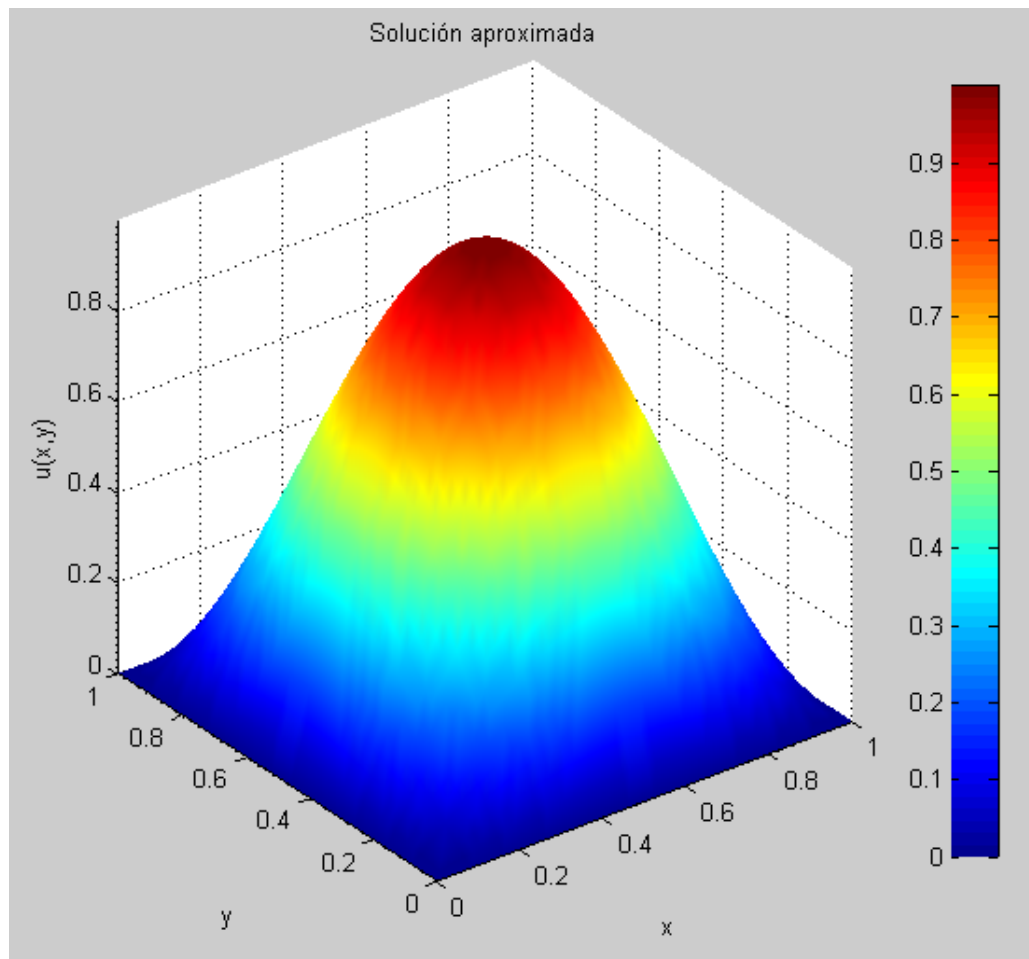


Figura 12: Solución obtida con elementos P_3 e unha malla de 50×50 elementos.

Conforme aumentamos o número de elementos da malla, a solución aproximada é cada vez mellor e máis próxima á exacta, para calquera dos elementos finitos empregados.

Referencias

- [1] Gmsh reference manual. <http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html>.
- [2] Mark A. Taylor, Beth A. Wingate, and Len P. Bos. Several new quadrature formulas for polynomial integration in the triangle. 2005.