

Ecuacións lineais da acústica

Ampliación de Volumes Finitos

Iván Martínez Suárez

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

1 Sistema hiperbólico de leis de conservación

2 Problema de Riemann

- Solución exacta
- Método de Godunov
- Exemplo

3 Problema de Cauchy

- Solución exacta
- Exemplo
- Análise de precisión
- Estabilidade numérica

Sistema hiperbólico de leis de conservación (I)

Ecuacións lineais da acústica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

- $u(x, t)$ velocidade do medio perturbado
- $p(x, t)$ presión do medio perturbado
- ρ_0 densidade do medio en repouso
- c_0 compresibilidade do medio en repouso

Sistema hiperbólico de leis de conservación (II)

Variables conservativas

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ p(x, t) \end{pmatrix}$$

Fluxo físico

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} p(x, t) \\ \rho_0 c_0^2 u(x, t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{w}$$

Matriz jacobiana do fluxo físico

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema hiperbólico de leis de conservación

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{A} \mathbf{w}_x = \mathbf{0}.$$

Estudo da hiperbolicidade estrita (I)

Autovalores de \mathbf{A}

$$\begin{cases} \lambda_1 = -c_0 \\ \lambda_2 = c_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}$$

Autovectores de \mathbf{A}

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho_0 c_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho_0 c_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho_0 c_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_0 c_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho_0 c_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\rho_0 c_0 & \rho_0 c_0 \end{pmatrix}$$

Estudo da hiperbolicidade estrita (II)

Sistema de leis de conservación estritamente hiperbólico

- Autovalores de \mathbf{A} reais e distintos:

$$c_0 \neq -c_0 \Leftrightarrow c_0 \neq 0$$

- Autovectores de \mathbf{A} linealmente independentes:

$$\det(\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \rho_0 c_0 \neq 0$$

O sistema de leis de conservación será estritamente hiperbólico se, e soamente se, $c_0 \neq 0$ e $\rho_0 \neq 0$.

Solución exacta (I)

Condición inicial

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{w}_L = (u_L, p_L)^T & \text{se } x < 0, \\ \mathbf{w}_R = (u_R, p_R)^T & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Solución exacta

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{se } x - \lambda_1 t < 0, \\ \alpha_1^R \mathbf{e}_1 + \alpha_2^L \mathbf{e}_2 & \text{se } (x - \lambda_1 t)(x - \lambda_2 t) < 0, \\ \mathbf{w}_R & \text{se } x - \lambda_2 t > 0. \end{cases}$$

Solución exacta (II)

Coeficientes

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^L \\ \alpha_2^L \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_L \\ p_L \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1 + (\rho_0 c_0)^2}}{2\rho_0 c_0} \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 u_L - p_L \\ \rho_0 c_0 u_L + p_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^R \\ \alpha_2^R \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_R \\ p_R \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1 + (\rho_0 c_0)^2}}{2\rho_0 c_0} \begin{pmatrix} \rho_0 c_0 u_R - p_R \\ \rho_0 c_0 u_R + p_R \end{pmatrix}$$

Solución exacta (III)

Solución exacta (componentes)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{se } x + c_0 t < 0, \\ \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2\rho_0 c_0}(p_L - p_R) & \text{se } (x + c_0 t)(x - c_0 t) < 0, \\ u_R & \text{se } x - c_0 t > 0. \end{cases}$$

$$p(x, t) = \begin{cases} p_L & \text{se } x + c_0 t < 0, \\ \frac{1}{2}\rho_0 c_0(u_L - u_R) + \frac{1}{2}(p_L + p_R) & \text{se } (x + c_0 t)(x - c_0 t) < 0, \\ p_R & \text{se } x - c_0 t > 0. \end{cases}$$

Método de Godunov (I)

Esquema de Godunov

$$\mathbf{w}_i^{n+1} = \mathbf{w}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

Fluxo numérico de Godunov

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{w}_i^n) + \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i+1}^n)] - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n)$$

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{P} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{P}^{-1} = |c_0| \mathbf{I}$$

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_0} (p_i^n + p_{i+1}^n) - |c_0| (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ \rho_0 c_0^2 (u_i^n + u_{i+1}^n) - |c_0| (p_{i+1}^n - p_i^n) \end{bmatrix}$$

Método de Godunov (II)

Método de Godunov (componentes)

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\frac{1}{\rho_0} (p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) - |c_0| (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right] \\ p_i^{n+1} = p_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\rho_0 c_0^2 (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - |c_0| (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n) \right] \end{cases}$$

- Condición inicial: u_i^0 e p_i^0 coñecidos $\forall i$
- Condicións de contorno: solución exacta nos nodos extremos

Condición inicial

Condición inicial

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{w}_L = (u_L, p_L)^T = (1, 5)^T & \text{se } x < 0 \\ \mathbf{w}_R = (u_R, p_R)^T = (0, 10)^T & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

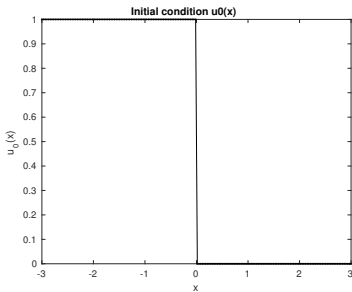


Figura: $(u_L, u_R)^T = (1, 0)^T$.

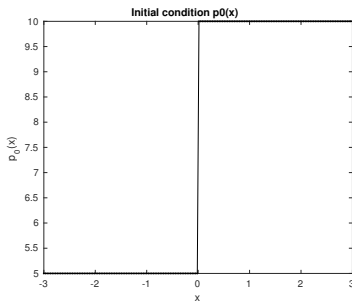


Figura: $(p_L, p_R)^T = (5, 10)^T$.

Exemplo

Solución numérica (I)

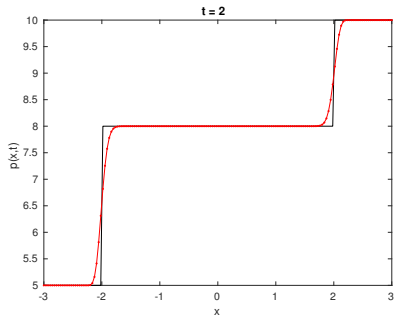
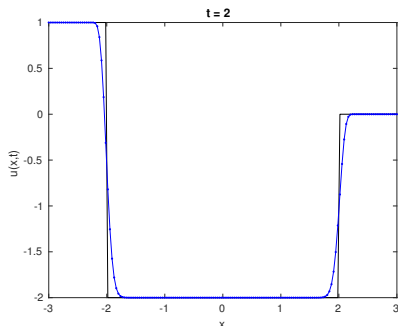


Figura: Solución do problema de Riemann, en $t = 2$, con número de Courant $\mu = 0,9$, $\Delta x = 0,036$, $\Delta t \approx 0,033$, con 166 nodos espaciais, $\rho_0 = c_0 = 1$.

Solución numérica (II)

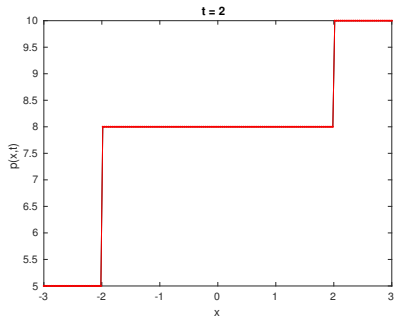
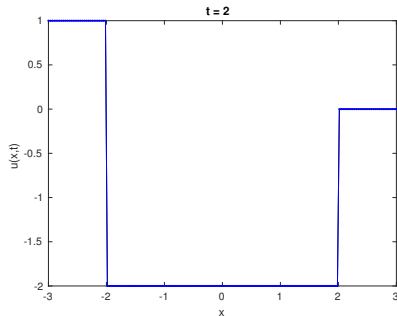


Figura: Solución do problema de Riemann, en $t = 2$, con número de Courant $\mu = 1$, $\Delta x = \Delta t \approx 0,033$, con 184 nodos espaciais, $\rho_0 = c_0 = 1$.

Solución exacta

Condición inicial

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x) = (u^0(x), p^0(x))^T$$

Solución exacta (componentes)

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2\rho_0 c_0} \left\{ \rho_0 c_0 \left[u^0(x + c_0 t) + u^0(x - c_0 t) \right] + p^0(x - c_0 t) - p^0(x + c_0 t) \right\} \\ p(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 c_0 \left[u^0(x - c_0 t) - u^0(x + c_0 t) \right] + p^0(x + c_0 t) + p^0(x - c_0 t) \right\} \end{cases}$$

Exemplo

Exemplo

Condición inicial ($\rho_0 = c_0 = 1$)

$$\begin{cases} u_0(x) = \sin(x), & x \in [-3, 3] \\ p_0(x) = 3 + x, & x \in [-3, 3] \end{cases}$$

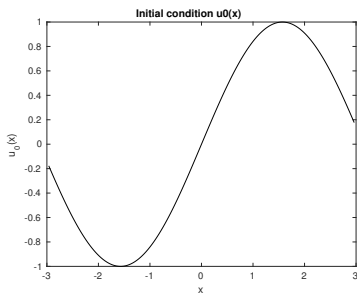


Figura: $u_0(x) = \sin(x)$.

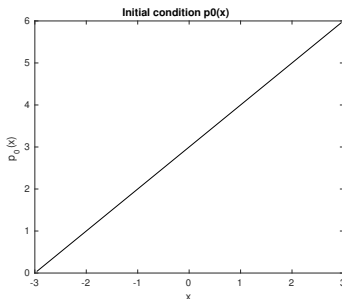


Figura: $p_0(x) = 3 + x$.

Exemplo

Solución numérica (I)

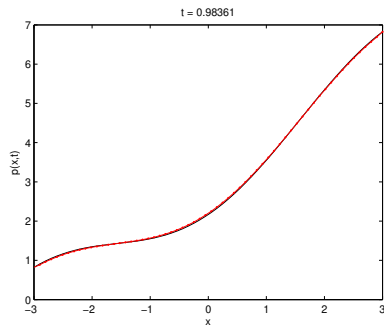
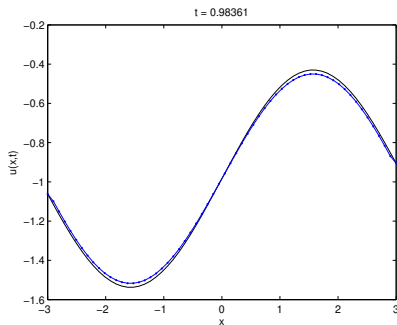


Figura: Solución do problema de Cauchy para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, no intervalo $[-3, 3]$ e con condicións iniciais $u_0(x)$ e $p_0(x)$. Cálculo para $t = 1$, $\mu = 0,2$ con 60 nodos.

Exemplo

Solución numérica (II)

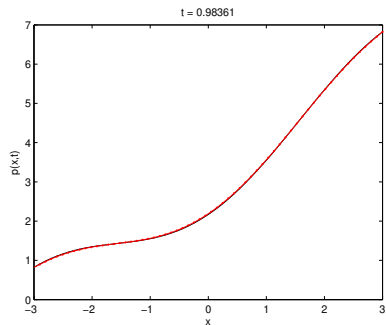
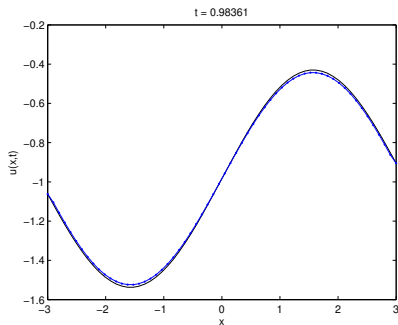


Figura: Solución do problema de Cauchy para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, xunto cos erros asociados, no intervalo $[-3, 3]$ e con condicións iniciais $u_0(x)$ e $p_0(x)$. Cálculo para $t = 1$, $\mu = 0,5$ con 60 nodos.

Exemplo

Solución numérica (III)

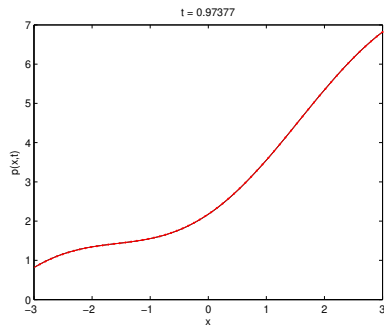
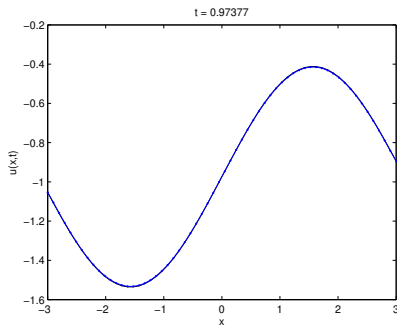


Figura: Solución do problema de Cauchy para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, xunto cos erros asociados, no intervalo $[-3, 3]$ e con condicións iniciais $u_0(x)$ e $p_0(x)$. Cálculo para $t = 1$, $\mu = 0,9$ con 60 nodos.

Análise de precisión (I)

Erro espacial norma 1

$$\varepsilon_{\Delta x}^1(t^f) = \Delta x \sum_{j=1}^M \|w(x_j, t^f) - w_j^N\|$$

Erro espacial norma ∞

$$\varepsilon_{\Delta x}^\infty(t^f) = \max_j \|w(x_j, t^f) - w_j^N\|$$

Orde de precisión do método (p)

$$\log \varepsilon = C + p \Delta x$$

Orde de precisión p_k

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta x_{k+1}} = 2$$

$$p_k := \frac{\log(\mathcal{K}_k)}{\log(2)}$$

$$\mathcal{K}_k = \frac{\varepsilon_{\Delta x_k}(t^f)}{\varepsilon_{\Delta x_{k+1}}(t^f)}$$

Análise de precisão (II)

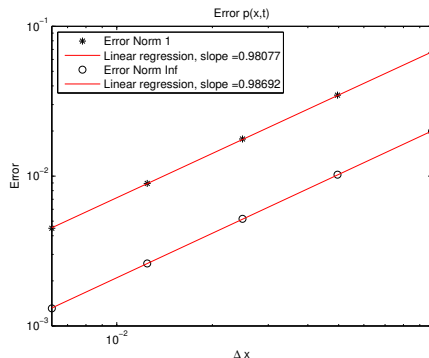
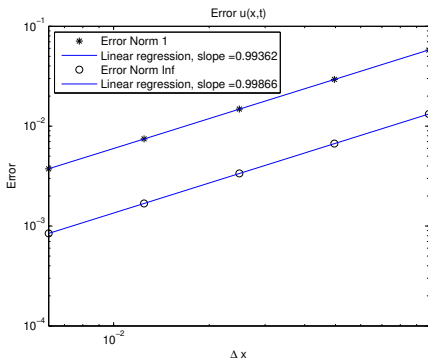


Figura: Estudo da orde de precisão espacial a partir da regresião lineal para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, com $\mu = 0,5$.

Análise de precisión (III)

Nodos	Erro norma 1	p_k	Erro norma ∞	p_k
60	0,0577	0,974	0,0132	0,984
120	0,0294	0,987	0,00669	0,993
240	0,0148	0,993	0,00336	0,996
480	0,00745	0,997	0,00168	0,998
960	0,00373	—	0,000843	—

Táboa: Orde de precisión do método para $u(x, t)$, con $\mu = 0,5$.

Nodos	Erro norma 1	p_k	Erro norma ∞	p_k
60	0,0669	0,946	0,0199	0,959
120	0,0347	0,972	0,0102	0,980
240	0,0177	0,986	0,00518	0,990
480	0,00893	0,993	0,00261	0,995
960	0,00448	—	0,00131	—

Táboa: Orde de precisión do método para $p(x, t)$, con $\mu = 0,5$.

Estabilidade numérica (I)

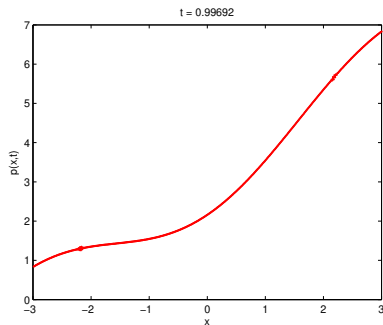
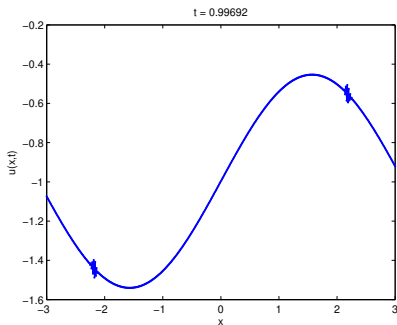


Figura: Solución do problema de Cauchy para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, no intervalo $[-3, 3]$ e con condicións iniciais $u_0(x)$ e $p_0(x)$. Cálculo para $t = 1$, $\mu = 1,1$, $\Delta x = 0,012$, $\Delta t \approx 0,014$, con 480 nodos espaciais.

Estabilidade numérica (II)

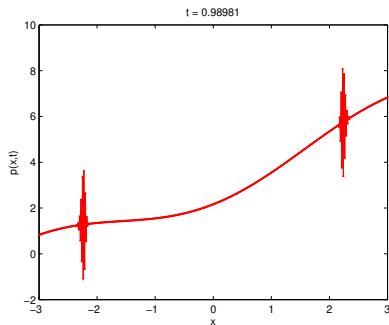
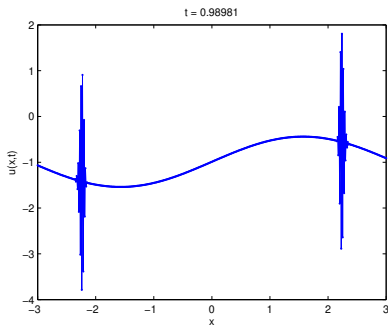


Figura: Solución do problema de Cauchy para $u(x, t)$ e $p(x, t)$, no intervalo $[-3, 3]$ e con condicións iniciais $u_0(x)$ e $p_0(x)$. Cálculo para $t = 1$, $\mu = 1,15$, $\Delta x = 0,012$, $\Delta t \approx 0,014$, con 480 nodos espaciais.