Mecánica Cuántica Avanzada: Examen 3

Iván Mauricio Burbano Aldana
201423205

10 de mayo de 2018

Problema 2

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger} =&\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}\big((\partial_\nu\phi^\dagger)(\partial^\nu\phi)\big)=\partial^\nu\phi\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}\big(\partial_\nu\phi^\dagger\big)=\partial^\nu\phi\delta^\mu_\nu=\partial^\mu\phi,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=&-m^2\phi.\end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange entregan la de Klein-Gordon

$$0=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=\partial_\mu\partial^\mu\phi+m^2\phi=(\Box+m^2)\phi. \tag{2}$$

(b) Bajo esta transformación $\phi\mapsto(e^{-iq\theta}\phi)^\dagger=e^{iq\theta}\phi^\dagger$ y el Lagrangiano es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-iq\theta}\phi,e^{iq\theta}\phi^\dagger)=&(\partial_\mu(e^{iq\theta}\phi^\dagger))(\partial^\mu(e^{-iq\theta}\phi))-m^2e^{iq\theta}\phi^\dagger e^{-iq\theta}\phi\\ =&(e^{iq\theta}\partial_\mu\phi^\dagger)(e^{-iq\theta}\partial^\mu\phi)-m^2\phi^\dagger\phi\\ =&(\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi)-m^2\phi^\dagger\phi=\mathcal{L}(\phi,\phi^\dagger).\end{aligned} \tag{3}$$

Se concluye que en efecto el Lagrangiano es invariante.

(c) Asumiendo $q\theta$ como pequeño se tiene $\phi\mapsto\phi-iq\theta\phi$ y $\phi^\dagger\mapsto\phi^\dagger+iq\theta\phi^\dagger$. Ya que el Lagrangiano es invariante, la corriente de Noether obtenida es particularmente sencilla

$$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(-iq\theta\phi)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}(iq\theta\phi^\dagger)=iq\theta\big(\phi^\dagger\partial^\mu\phi-\big(\partial^\mu\phi^\dagger\big)\phi\big). \tag{4}$$

El orden en el que se presentan los terminos es tal que uno es el complejo conjugado del otro. Esto nos va a ser util una vez cuanticemos el campo.

Ahora bien, a partir de la ecuación del enunciado

$$
\begin{aligned}
\phi^\dagger(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \big(a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x} + \hat{a}(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x}\big), \\
\partial^\mu \phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} ip^\mu \big(-a(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x}\big).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Entonces, en terminos de los operadores de creación y destrucción se obtiene

$$
\begin{aligned}
\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x) = &\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} iq^\mu \\
&\big(a^\dagger(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} + \hat{a}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}\big)\big(-a(\mathbf{q})e^{-iq\cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{iq\cdot x}\big) \\
= &\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} iq^\mu \\
&\Big(-a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{i(p-q)\cdot x} + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(q-p)\cdot x} \\
&+a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(p+q)\cdot x} - \hat{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{-i(p+q)\cdot x}\Big).
\end{aligned} \tag{6}
$$

El otro termino en la corriente se puede obtener mediante conjugación compleja. Esto consiste en agregar un signo negativo debido al termino iq^μ, cambiar el signo de cada exponencial, intercambiar los operadores en cada termino y reemplazar todos lo operadores de destrucción por operadores de creación y viceversa.

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu\phi^\dagger\phi = &\big(\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)\big)^\dagger \\
= &\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} iq^\mu \\
&\Big(a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{p})e^{-i(p-q)\cdot x} - \hat{a}(\mathbf{q})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{-i(q-p)\cdot x} \\
&-\hat{a}(\mathbf{q})a(\mathbf{p})e^{-i(p+q)\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{q})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{i(p+q)\cdot x}\Big).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Podems renombrar las etiquetas mudas $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$. De esta manera, aplicando el teorema de Fubini para cambiar los ordenes de integración, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu\phi^\dagger\phi = &\big(\phi^\dagger(x)\partial^\mu\phi(x)\big)^\dagger \\
= &\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}} ip^\mu \\
&\Big(a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{i(p-q)\cdot x} - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(q-p)\cdot x} \\
&-\hat{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{-i(p+q)\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(p+q)\cdot x}\Big).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Uno puede estar preocupado por renombrar q^0 por p^0. Sin embargo, esto es valido notanto que en esta notación $q^0 = E_\mathbf{q}$. No hay mucho más que se pueda hacer para el cálculo de j^μ. Incluimos la fórmula ya que se demanda en el enunciado aunque no dice mucho acerca de la física del problema

$$
\begin{aligned}
j^\mu =& q\theta \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_\mathbf{p} E_\mathbf{q}}} i p^\mu \\
& \Big(a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{q}) e^{i(p-q)\cdot x} - \hat{a}(\mathbf{p}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) e^{i(q-p)\cdot x} \\
& - \hat{a}(\mathbf{p}) a(\mathbf{q}) e^{-i(p+q)\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) e^{i(p+q)\cdot x} \Big)
\end{aligned}
\tag{9}
$$