

Mecánica Cuántica Avanzada:

Examen 3

Iván Mauricio Burbano Aldana

Código: 201423205

Maestría en Física

11 de mayo de 2018

Problema 1

Vamos a asumir que la transición es entre un punto x_i a x_f en un tiempo T . Entonces la amplitud es

$$U(x_i, x_f, T) = \int \mathcal{D}x e^{iS(x)}. \quad (1)$$

En vez de sumar sobre los caminos x podemos sumar sobre desviaciones del camino clásico x_c . Entonces

$$U(x_i, x_f, T) = \int \mathcal{D}y e^{iS(x_c+y)}. \quad (2)$$

donde la suma se toma sobre caminos que satisfacen $y(0) = y(T) = 0$. Note que en vista de esta condición de frontera y de que las soluciones clásicas satisfacen la ecuación del oscilador armónico $m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$

$$\begin{aligned} S(x_c + y) &= \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}_c(t) + \dot{y}(t))^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x_c(t) + y(t))^2 \right) \\ &= \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_c(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x_c(t)^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y(t)^2 \right. \\ &\quad \left. + m \dot{x}_c(t) \dot{y}(t) - m \omega^2 x_c(t) y(t) \right) \\ &= S(x_c) + S(y) + \int_0^T dt (m \dot{x}_c(t) \dot{y}(t) - m \omega^2 x_c(t) y(t)) \\ &= S(x_c) + S(y) + \int_0^T dt (-m \ddot{x}_c(t) y(t) - m \omega^2 x_c(t) y(t)) \\ &\quad + m \dot{x}_c(T) y(T) - m \dot{x}_c(0) y(0) \\ &= S(x_c) + S(y) - \int_0^T dt (m \ddot{x}_c(t) + m \omega^2 x_c(t)) y(t) \\ &= S(x_c) + S(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, nuestra amplitud queda

$$U(x_i, x_f, T) = \int \mathcal{D}y e^{iS(x_c) + iS(y)} = e^{iS(x_c)} \int \mathcal{D}y e^{iS(y)}. \quad (4)$$

En esta amplitud, toda la dependencia sobre los puntos iniciales se encuentra en el termino $e^{iS(x_c)}$. Ahora bien, esta integral se puede ver como una gaussiana pues integrando por partes

$$\begin{aligned} S(y) &= \int_0^T dT \left(\frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y(t)^2 \right) \\ &= \int_0^T dT \left(-\frac{1}{2} m \ddot{y}(t) y(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 y(t)^2 \right) + \frac{1}{2} m (\dot{y}(T) y(T) - \dot{y}(0) y(0)) \\ &= -\frac{1}{2} m \int_0^T dT (\ddot{y}(t) y(t) + \omega^2 y(t)^2) \\ &= -\frac{1}{2} m \int_0^T dT (\partial^2 y(t) y(t) + \omega^2 y(t)^2) \\ &= -\frac{1}{2} m \int_0^T dT (y(\partial^2 + \omega^2) y)(t). \end{aligned} \quad (5)$$

En efecto, la amplitud queda de forma gaussiana

$$\begin{aligned} U(x_i, x_f, T) &= \int \mathcal{D}y e^{iS(x_c) + iS(y)} \\ &= e^{iS(x_c)} \int \mathcal{D}y \exp \left(-\frac{1}{2} i m \int_0^T dT (y(\partial^2 + \omega^2) y)(t) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Extendiendo el resultado de matrices

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t A \mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \quad (7)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} U(x_i, x_f, T) &= e^{iS(x_c)} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{n/2} (\det(im(\partial^2 + \omega^2)))^{-1/2} \\ &= e^{iS(x_c)} B (\det(\partial^2 + \omega^2))^{-1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

donde B es una constante que no depende de ω . Note que las soluciones a la ecuación de valores propios

$$(\partial^2 + \omega^2) y = \lambda y, \quad (9)$$

es decir, la ecuación del oscilador

$$\ddot{y} + (\omega^2 - \lambda) y = 0 \quad (10)$$

de frecuencia $\omega_\lambda = \sqrt{(\omega^2 - \lambda)}$ que satisfacen $y(0) = y(T) = 0$ y son no triviales son de la forma

$$y(t) \propto \sin(\omega_\lambda t) \quad (11)$$

con las condiciones $\omega^2 - \lambda > 0$ para asegurar que en efecto la solución sea oscilatoria y

$$\frac{\omega_\lambda T}{\pi} \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (12)$$

que garantizan las condiciones de frontera. Estas condiciones determinan la familia de valores propios $\{\lambda_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ con

$$\lambda_n := \omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2}. \quad (13)$$

Note que las restricciones en los caminos que estamos considerando debidas a que son desviaciones hacen que el operador $\partial^2 + \omega^2$ sea compacto y su espectro discreto. Entonces

$$U(x_i, x_f, T) = e^{iS(x_c)} B \prod_{n=1}^{\infty} \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right)^{-1/2}. \quad (14)$$

Para terminar este cálculo, recuerde que como se muestra [1] la solución para una partícula libre con condiciones de frontera periódicas es

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi iT}} \quad (15)$$

. Por otra parte, uno debería poder recuperar esta solución considerando $\omega = 0$. Entonces, multiplicando por 1 se tiene

$$\begin{aligned} U(x_i, x_f, T) &= e^{iS(x_c)} B \prod_{n=1}^{\infty} \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right)^{-1/2} \frac{\sqrt{\frac{m}{2\pi iT}}}{B \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right)^{-1/2}} \\ &= e^{iS(x_c)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2} \right)^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{2\pi iT}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora podemos utilizar la famosa fórmula de Euler

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (17)$$

para concluir que

$$U(x_i, x_f, T) = e^{iS(x_c)} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega T)}}. \quad (18)$$

Para terminar el cálculo es necesario calcular la acción clásica. Para esto recuerde la segunda linea de (5) y aplíquela al camino clásico $m\ddot{x}_c = -m\omega^2 x_c$. Es claro entonces que la integral se anula y

$$S(x_c) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_c(T)x_c(T) - \dot{x}_c(0)x_c(0)). \quad (19)$$

Esto se puede calcular explícitamente ya que las soluciones bien comportadas de la segunda ley de Newton están completamente determinadas por dos condiciones iniciales. Sin embargo, hacerlo con completa generalidad es puramente algebraico y no dice mucho.

Problema 2

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} &= \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} ((\partial_\nu \phi^\dagger)(\partial^\nu \phi)) = \partial^\nu \phi \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} (\partial_\nu \phi^\dagger) = \partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu = \partial^\mu \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} &= -m^2 \phi.\end{aligned}\quad (20)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange entregan la de Klein-Gordon

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = (\square + m^2)\phi. \quad (21)$$

(b) Bajo esta transformación $\phi \mapsto (e^{-iq\theta} \phi)^\dagger = e^{iq\theta} \phi^\dagger$ y el Lagrangiano es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-iq\theta} \phi, e^{iq\theta} \phi^\dagger) &= (\partial_\mu (e^{iq\theta} \phi^\dagger)) (\partial^\mu (e^{-iq\theta} \phi)) - m^2 e^{iq\theta} \phi^\dagger e^{-iq\theta} \phi \\ &= (e^{iq\theta} \partial_\mu \phi^\dagger) (e^{-iq\theta} \partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= (\partial_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi = \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger).\end{aligned}\quad (22)$$

Se concluye que en efecto el Lagrangiano es invariante.

(c) Asumiendo $q\theta$ como pequeño se tiene $\phi \mapsto \phi - iq\theta \phi$ y $\phi^\dagger \mapsto \phi^\dagger + iq\theta \phi^\dagger$. Ya que el Lagrangiano es invariante, la corriente de Noether obtenida es particularmente sencilla

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (-iq\theta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} (iq\theta \phi^\dagger) = iq\theta ((\partial^\mu \phi) \phi^\dagger - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi). \quad (23)$$

Esto nos va a ser útil una vez cuanticemos el campo. Ahora bien, a partir de la ecuación del enunciado

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \hat{a}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}), \\ \partial^\mu \phi(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} ip^\mu (-a(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}^\dagger(p) e^{ip \cdot x}), \\ \partial^\mu \phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} ip^\mu (a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} - \hat{a}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}).\end{aligned}\quad (24)$$

Entonces, en terminos de los operadores de creación y destrucción se obtiene

$$\begin{aligned}
(\partial^\mu \phi(x))\phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} ip^\mu \\
&\quad \left(-a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})e^{-i(p-q)\cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{i(p-q)\cdot x} \right. \\
&\quad \left. -a(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q})e^{-i(p+q)\cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})e^{i(p+q)\cdot x} \right), \\
(\partial^\mu \phi^\dagger(x))\phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} ip^\mu \\
&\quad \left(a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{i(p-q)\cdot x} - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{-i(p-q)\cdot x} \right. \\
&\quad \left. -\hat{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{-i(p+q)\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q})e^{i(p+q)\cdot x} \right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Al restar estos términos se pueden factorizar las exponenciales comunes de manera que se obtiene

$$\begin{aligned}
j^\mu(x) &= iq\theta \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} ip^\mu \\
&\quad \left((\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) - a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}))e^{-i(p-q)\cdot x} + \right. \\
&\quad \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q}) \right)e^{i(p-q)\cdot x} \\
&\quad \left(\hat{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{q}) - a(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q}) \right)e^{-i(p+q)\cdot x} + \\
&\quad \left. \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}) - a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \right)e^{i(p+q)\cdot x} \right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Para el cálculo de la carga conservada note que

$$\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(p\pm q)\cdot x} &= \int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(E_{\mathbf{p}}\pm E_{\mathbf{q}})t} e^{\mp i(\mathbf{p}\pm\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= (2\pi)^3 e^{\pm i(E_{\mathbf{p}}\pm E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}\pm\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{27}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{x} j^\mu(x) &= iq\theta \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \frac{1}{2\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} ip^\mu \\
&\quad \left((\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) - a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}))e^{-i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \right. \\
&\quad \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q}) \right)e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\
&\quad \left(\hat{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{q}) - a(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{q}) \right)e^{-i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + \\
&\quad \left. \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}) - a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \right)e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Más aún, ya que $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} = \sqrt{m^2 + (-\mathbf{p})^2} = E_{-\mathbf{p}}$ el coeficiente de cada termino va a ser igual para $\mathbf{q} = \pm\mathbf{p}$ y podemos realizar la integración

sobre \mathbf{q}

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} j^\mu(x) = & iq\theta \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} ip^\mu \\ & ((\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})) + (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}))) \quad (29) \\ & (\hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p}) - a(\mathbf{p})\hat{a}(-\mathbf{p}))e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + \\ & (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(-\mathbf{p}))e^{2iE_{\mathbf{p}}t} . \end{aligned}$$

En particular, la carga conservada se obtiene al poner $\mu = 0$

$$\begin{aligned} Q = & iq\theta \int d^3\mathbf{p} \frac{i}{2} \\ & ((\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})) + (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}))) \quad (30) \\ & (\hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p}) - a(\mathbf{p})\hat{a}(-\mathbf{p}))e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + \\ & (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(-\mathbf{p}))e^{2iE_{\mathbf{p}}t} . \end{aligned}$$

Ya que $[a(\mathbf{p}), \hat{a}(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] = 0$ esto se puede reescribir de manera más sugestiva

$$\begin{aligned} Q = & iq\theta \int d^3\mathbf{p} \frac{i}{2} \\ & ((\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) - a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})) + (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}))) \quad (31) \\ & (\hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p}) - \hat{a}(-\mathbf{p})a(\mathbf{p}))e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} + \\ & (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}))e^{2iE_{\mathbf{p}}t} . \end{aligned}$$

Esta forma sugiere considerar el cambio de variable $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$ bajo el cual la integral se mantiene invariante debido a que la energía lo hace y el cambio en los diferenciales se compensa con el de la orientación de la región de integración

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}(-\mathbf{p})a(\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} &= \int_{-\mathbb{R}^3} d^3(-\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p})e^{-2iE_{-\mathbf{p}}t} \\ &= (-1)^3 \int_{-\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}(\mathbf{p})a(-\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}^\dagger(-\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} &= \int_{-\mathbb{R}^3} d^3(-\mathbf{p}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p})e^{-2iE_{-\mathbf{p}}t} \\ &= (-1)^3 \int_{-\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(-\mathbf{p})e^{-2iE_{\mathbf{p}}t}. \end{aligned} \quad (32)$$

Entonces los coeficientes de las exponenciales se anulan de manera que al sacar el factor $i/2$ de la integral obtenemos

$$Q = \frac{q}{2} \theta \int d^3 \mathbf{p} \left((a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}) - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})) + (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})) \right) \quad (33)$$

Ya que $[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = [\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})]$ se obtiene que

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}) - \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{q}) \\ &= a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{p}) + [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] - \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})\hat{a}(\mathbf{p}) - [\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})] \\ &= a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{q})\hat{a}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (34)$$

Poniendo $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ vemos que los dos términos de la suma son iguales y se obtiene una carga conservada

$$Q = q\theta \int d^3 \mathbf{p} (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})). \quad (35)$$

Si una cantidad se conserva es claro que cualquier múltiplo de ella también. Ya que el parámetro de la transformación $q\theta$ no tiene una interpretación clara por el momento, podemos redefinir la carga de Noether a

$$Q = \int d^3 \mathbf{p} (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})). \quad (36)$$

Podemos definir los operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a(\mathbf{p}) &:= a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}), \\ \mathcal{N}_{\hat{a}}(\mathbf{p}) &:= \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (37)$$

Sus integrales corresponden a los operadores número que cuentan el número de partículas a y \hat{a} respectivamente. Se concluye entonces que la siguiente carga es conservada.

$$Q = \int d^3 \mathbf{p} (\mathcal{N}_a(\mathbf{p}) - \mathcal{N}_{\hat{a}}(\mathbf{p})). \quad (38)$$

En la interpretación de partículas esto corresponde a que estas se crean de a pares. En efecto, cualquier aumento de partículas de tipo a debe ser compensado con un aumento igual de partículas de tipo \hat{a} de manera que la diferencia se conserve. Es precisamente por esta razón que las partículas de tipo \hat{a} se interpretan como las antipartículas de las de tipo a .

Problema 3

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} &= -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \psi)} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu, \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} &= -\frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu - m\bar{\psi}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi = -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\psi \\
&= -(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu + \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m\bar{\psi} = i\bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi}.
\end{aligned} \tag{40}$$

La segunda ecuación se puede encontrar de la primera mediante el adjunto de Dirac. Por lo tanto la ecuación de movimiento es la de Dirac

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0. \tag{41}$$

Considere una vez más, una transformación de la forma $\psi \mapsto e^{-i\alpha} \psi$. Bajo esta transformación $\bar{\psi} \mapsto e^{i\alpha} \bar{\psi}$ y el Lagrangiano se transforma como

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}'(e^{-i\alpha} \psi, e^{i\alpha} \bar{\psi}, \partial(e^{-i\alpha} \psi), \partial(e^{i\alpha} \bar{\psi})) \\
&= \frac{i}{2} e^{i\alpha} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (e^{-i\alpha} \psi) - \frac{i}{2} \partial_\mu (e^{i\alpha} \bar{\psi}) \gamma^\mu e^{-i\alpha} \psi - m e^{i\alpha} \bar{\psi} e^{-i\alpha} \psi \\
&= \frac{i}{2} e^{i\alpha} \bar{\psi} \gamma^\mu e^{-i\alpha} \partial_\mu (\psi) - \frac{i}{2} e^{i\alpha} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu e^{-i\alpha} \psi - m e^{i\alpha} \bar{\psi} e^{-i\alpha} \psi \\
&= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (\psi) - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \mathcal{L}'(\psi, \bar{\psi}, \partial\psi, \partial\bar{\psi}).
\end{aligned} \tag{42}$$

Entonces el Lagrangiano es invariante y en particular esta transformación es una simetría. Bajo transformaciones infinitesimales se tiene $\psi \mapsto \psi - i\alpha\psi$ y $\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} + i\alpha\bar{\psi}$. Entonces, la corriente conservada asociada a estas transformaciones es

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \psi)} + i\alpha \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\alpha}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \frac{\alpha}{2} \gamma^\mu \psi = \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \tag{43}$$

Una vez más, la constante α es arbitraria y la corriente conservada se puede redefinir como

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \tag{44}$$

Referencias

- [1] R. MacKenzie, “Path Integral Methods and Applications,” no. December 1999, 2000.