Estados KMS y la teoría de Tomita-Takesaki

Iván Mauricio Burbano Aldana
201423205

Director: Andrés Fernando Reyes Lega

25 de mayo de 2017

1. Introducción

El estudio de la paradoja EPR (Einstein, Podosky y Rosen) [1] o desigualdades tipo Bell [2, 3] permite notar una distinción fuerte entre teorías clásicas y cuánticas. Indagar sobre esta lleva a la investigación de la estructura lógica de la mecánica cuántica, donde se halla un retículo completo ortocomplementado que en general no es booleano [4]. Esta estructura lógica está en el centro de las diferencias entre la interpretación de estas teorías como modelos probabilísticos [5, 6]. Ya siendo consciente de la estructura lógica en mecánica cuántica, von Neumann protagonizó la busqueda de una axiomatización de esta teoría y encontró en el estudio de álgebras de operadores el lenguaje correcto [7]. La teoría de operadores nos presenta un formalismo en el cual se pueden entender estos distintos modelos de probabilidad como casos especiales de una misma teoría [8, 9]. En efecto, la probabilidad clásica (en el sentido de Kolmogorov [10, 11]) puede ser modelada mediante álgebras de von Neumann *conmutativas*. El caso no conmutativo aplica a teorías cuánticas, irrespectivamente de si se trata de sistemas relativistas o no relativistas [12].

La "física cuántica algebraica"(como se conoce este enfoque basado en álgebras de operadores[13]) permite una comprensión más profunda de la estructura de la mecánica cuántica, la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística. Aspectos fundamentales como, por ejemplo, el rompimiento espontáneo de simetría que da lugar al estado superconductor o a la generación de masa en el Modelo Estándar, encuentran una formulación natural en este lenguaje [14].

En este trabajo, nos proponemos estudiar la teoría de Tomita-Takesaki, tal como se presenta en [12]. Dicha teoría tiene sus orígenes en el estudio de la estructura matemática de los estados KMS (Kubo-Martin-Scwinger) de mecánica estadística. En particular, a partir del análisis de entropías de von Neumann para sistemas de partículas idénticas realizado en [15], se reconoció que, bajo ciertas condiciones, existe una ambigüedad en la definición de entropía de enredamiento calculada a partir de la representación GNS [16]. Dicha ambigüedad encontró interesantes aplicaciones a la física molecular, exploradas en [17, 18]. Desde un punto de vista más formal, dicha ambigüedad está relacionada con una cierta *libertad gauge* que puede ser entendida en el contexto de la teoría de Tomita-Takesaki. El objetivo de este trabajo es entender y profundizar en esta relación.

2. Objetivo General

Formular rigurosamente la relación existente entre la libertad gauge discutida en [17, 18] y el operador modular de Tomita-Takesaki.

3. Objetivos Específicos

- Discutir algunas de las axiomatizaciones estándar de la mecánica clásica y la mecánica cuántica como modelos probabilísticos.
- Presentar la estructura lógica del retículo de proyecciones ortogonales sobre un espacio de Hilbert como se hizo durante el semestre en el seminario de Teoría Cuántica de Campos y entender a través de esta la paradoja EPR y las desigualdades de Bell.
- Estudiar las nociones necesarias de teoría de operadores. En particular, algunos de los fundamentos sobre C^*-álgebras y álgebras de von Neumann y sus aplicaciones a la física cuántica.
- Desarrollar la formulación matemática y el origen físico de la condición KMS.
- Exhibir en el texto la ambigüedad en la entropía descrita arriba, su interpretación como libertad gauge y su relación con el operador modular.

4. Metodología

El desarrollo de esta monografía se hará mediante el estudio de la bibliografía en las referencias. En primer lugar, será necesario escribir de manera detallada el trabajo que ya se realizó este semestre sobre lógica cuántica. Con este podremos entender como la paradoja EPR es esencialmente un fenómeno lógico que se filtra a la teoría probabilística de la mecánica cuántica. En segundo lugar, la presentación de las teorías clásicas y cuánticas como teorías probabilísticas se hará, en el primer caso, mediante la teoría de la medida (ejemplificandola mediante los ensambles canónicos y microcanónicos) y, en el segundo, mediante los axiomas de Dirac-von Neumann. El estudio la teoría de álgebras de operadores, la formulación de los estados KMS y la teoría de Tomita Takesaki se hará principalmente con la referencia [12]. Se seguirán las referencias [17] y [18] para ilustrar las ambigüedades en la entropía para sistemas como $M_2(\mathbb{C})$, el oscilador armónico y la molécula de Etileno de manera que tendremos modelos concretos que nos permitan completar el objetivo. Finalmente, con las herramientas desarrolladas en este proceso se interpretará esta ambigüedad como libertad gauge y se relacionará con el operador modular.

Para evaluar el progreso en este proceso se realizarán reuniones semanales con el director. Esto nos dará la oportunidad de presentar los avances y dicutir las ideas que surjan durante el proceso. Además, se pretende en formato de charla presentar avances en el seminario de Teoría Cuántica de Campos.

5. Cronograma

Tareas \ Semanas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X	X														
2	X	X	X													
3				X	X	X	X									
4								X								
5								X	X	X	X					
6												X	X	X	X	X
7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

- Tarea 1: Estudio de axiomatizaciones de la probabilidad clásica y cuántica.
- Tarea 2: Conectar la paradoja EPR, desigualdades de Bell y la estructura lógica de proyecciones ortogonales.
- Tarea 3: Estudio de teoría de álgebras de Operadores.
- Tarea 4: Entrega y presentación del 30 %.
- Tarea 5: Estudio de la condición KMS y la teoría de Tomita-Takesaki.
- Tarea 6: Investigación sobre la libertad gauge discutida en [17, 18] y su conexión con el operador modular de Tomita-Takesaki.
- Tarea 7: Redactar el documento.

6. Personas Conocedoras del Tema

- Alonso Botero Mejía (Universidad de los Andes)
- Monika Winklmeier (Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes)
- Aiyalam Parameswaran Balachandran (Syracuse University , New York, USA)

Referencias

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Reality Be Considered Complete?," 1935.

[2] J. Bell, "The Einstein Podolsky Rosen Paradox," *Physics*, vol. 1, no. 3, pp. 195–200, 1964.

[3] D. A. Guzmán, L. J. Uribe, A. Valencia, F. J. Rodríguez, and L. Quiroga, "Contrasting classical probability concepts with quantum mechanical behavior in the undergraduate laboratory," *European Journal of Physics*, vol. 36, no. 5, 2015.

[4] A. Wilce, "Quantum Logic and Probability Theory," *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2012.

[5] A. S. Holevo, *Statistical Structure of Quantum Theory*. 2001.

[6] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. Edizioni della Normale, 2011.

[7] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, 1955.

[8] S. J. Summers and M. Rédei, "Quantum Probability Theory," 2006.

[9] L. Cano, A. Cardona, H. Ocampo, and A. F. Reyes-Lega, "Some Aspects of Operator Algebras in Quantum Physics," in *Geometric, Algebraic and Topological Methods for Quantum Field Theory*, pp. 1–74, World Scientific, 2013.

[10] A. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea Publishing Company, 2 ed., 1956.

[11] E. T. Jaynes, *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.

[12] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 2 ed., 1992.

[13] N. Landsman, "Algebraic Quantum Mechanics," in *Compendium of Quantum Physics: Concepts, Experiments, History and Philosophy*, pp. 6–10, Springer, 2009.

[14] F. Strocchi, *Symmetry Breaking*. Springer, 2 ed., 2008.

[15] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, A. R. De Queiroz, and A. F. Reyes-Lega, "Entanglement and particle identity: A unifying approach," *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 8, 2013.

[16] R. Sorkin, "Private Communication."

[17] A. P. Balachandran, A. Queiroz, and S. Vaidya, "Quantum entropic ambiguities: Ethylene," *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 88, no. 2, 2013.

[18] A. P. Balachandran, A. R. de Queiroz, and S. Vaidya, "Entropy of quantum states: Ambiguities," *European Physical Journal Plus*, vol. 128, no. 10, 2013.

Firma del Director

Firma del Estudiante