Palancas y Poleas

Iván Mauricio Burbano Aldana
ivanmbur@gmail.com

Temas 1 Introducción a vectores geométricos

2 Posición, Velocidad y Aceleración

3 Leyes de Newton

4 Poleas

5 Cuerpos Rígidos en 2D

6 Palancas

7 Preguntas de Física

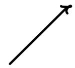
1 Introducción a Vectores Geométricos

Los numeros nos permiten describir muchos cosas

* Distancias (metros)
* Masas (Kilogramos)
* Temperatura (° Celsius / Kelvin)
* Corriente (amperios)

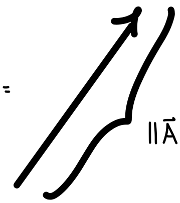
Todas estas son cantidades con magnitud pero sin dirección. Para describir cantidades con dirección necesitamos la noción de vector.

Un vector es una flecha. Estas las denotaremos por letras adornadas con una flechita arriba, e.g.

$\vec{A}$ = 

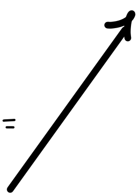
Propiedades

* Longitud Cada vector $\vec{A}$ tiene una longitud asociada $\|\vec{A}\|$

$\vec{A}$ = 

$\|\vec{A}\|$

* Dirección Si un vector tiene una longitud no nula, entonces tambien tiene una dirección definida.

$\vec{A}$ =  $\neq$  = $\vec{B}$

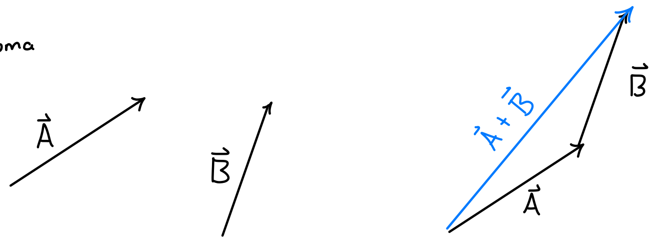
Aunque $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$, $\vec{A} \neq \vec{B}$ pues no tienen la misma dirección

$\vec{0} = \cdot$

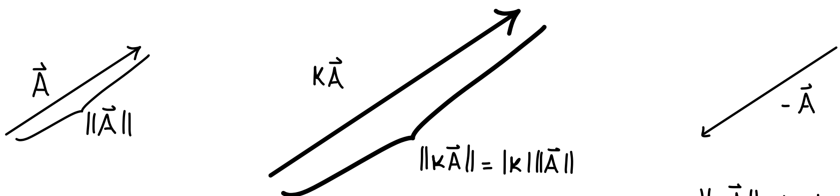
El vector $\vec{0}$, con $\|\vec{0}\|=0$, no tiene una dirección

Operaciones

* Suma



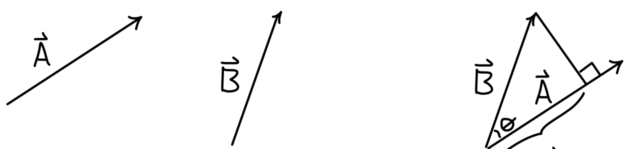
* Multiplicación por números



$\|-\vec{A}\| = |-1|\|\vec{A}\| = \|\vec{A}\|$

Observación Multiplicar por un número negativo cambia la dirección del vector

* Producto punto El producto punto nos permite multipar dos vectores y obtener un número

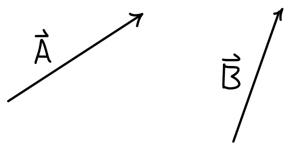


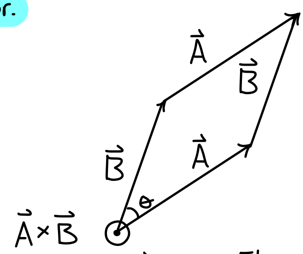
$\|\vec{B}\|\cos(\theta) =$ "Proyección ortogonal de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$"

$$\vec{A}\ \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\theta)$$

Observación Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares ("ortogonales") $\vec{A}\ \vec{B} = 0$

* Producto Cruz Nos permite multiplicar dos vectores y obtener otro vector.



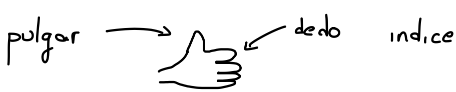


El vector $\vec{A}\times\vec{B}$ sale de la página

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin(\theta)$$

Observación Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, $\vec{A}\times\vec{B}=0$

Regla de la mano derecha $\vec{A}\times\vec{B}$ siempre es perpendicular al plano que contiene a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$ Esto permite dos posibilidades, eg si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ estan sobre la página, $\vec{A}\times\vec{B}$ puede salir de la página o entrar a ella Para decidir cual de las dos posibilidades, ponga su mano derecha en la siguiente posición

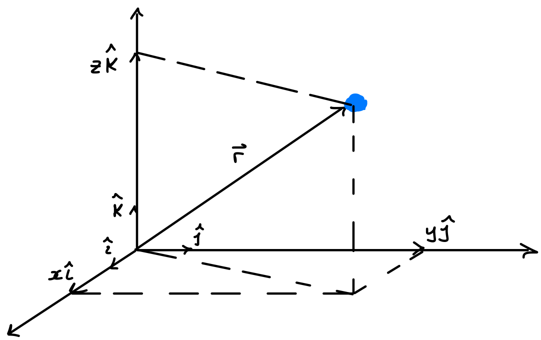


Con su dedo indice apunte a lo largo de $\vec{A}$ Despues doblelo hacia $\vec{B}$ $\vec{A}\times\vec{B}$ apunta en la dirección de su pulgar

Asegurese que entiende por qué $\vec{A}\times\vec{B}$ apunta afuera del papel en nuestro ejemplo ¿En qué dirección apunta $\vec{B} \times \vec{A}$?

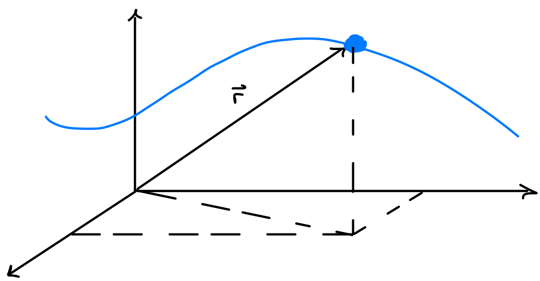
2. Posición, Velocidad y Aceleración

Dado un punto de referencia podemos describir la posición de una partícula con un vector

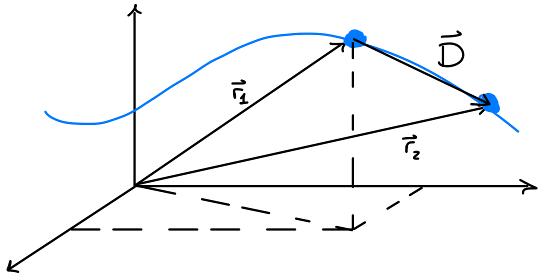


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

La trayectoria de una partícula deja un trazo en el espacio



Suponga que en el tiempo t_1 una partícula está en la posición $\vec{r}_1$ mientras que en el tiempo t_2 está en $\vec{r}_2$ ¿Cuál es el vector que empieza en $\vec{r}_1$ y termina en $\vec{r}_2$?



Note que $\vec{r}_1 + \vec{D} = \vec{r}_2$ Luego $\vec{D} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ La velocidad promedio entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 se define como

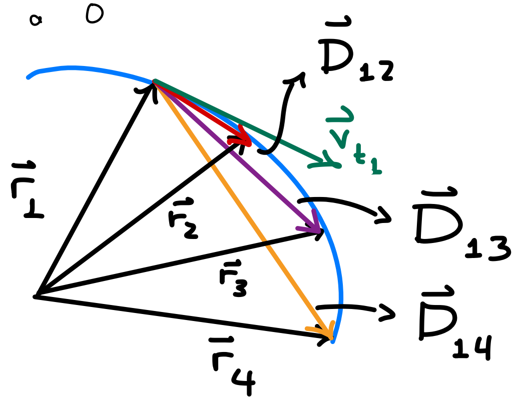
$$\vec{v}_{12} = \frac{1}{\Delta t} \vec{D}_{12}$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$

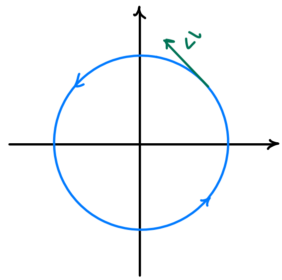
Observaciones * Dado un $\vec{D}$ fijo mientras Δt sea más pequeño la velocidad tendrá mayor magnitud

* Dado un Δt fijo mientras $\|\vec{D}\|$ sea más grande la velocidad tendrá mayor magnitud.

La velocidad $\vec{v}_{t_1}$ en el tiempo t_1 se define tomando el límite cuando Δt tiende a 0



Observación La velocidad siempre es tangencial a la trayectoria



De manera similar, la aceleración promedio entre dos intervalos de tiempo es

$$\vec{a}_{12} = \frac{1}{\Delta t}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

La aceleración $\vec{a}_1$ en el tiempo t_1 se obtiene en el límite cuando Δt tiende a 0

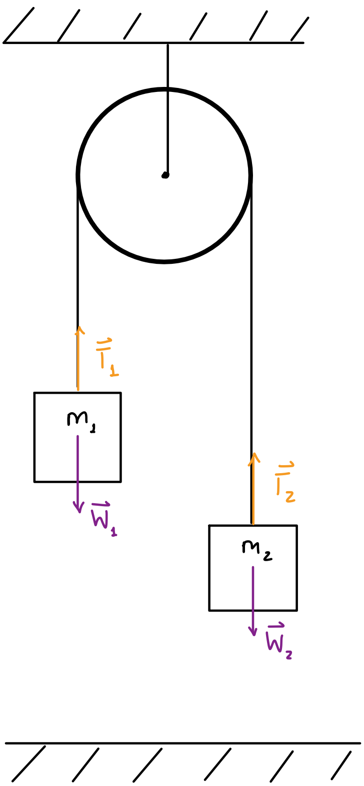
3 Leyes de Newton

I Todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, excepto si actúan sobre el fuerzas que lo hagan cambiar de estado

II El cambio en el movimiento es proporcional a la fuerza aplicada y va dirigido a lo largo de la línea recta sobre la cuál actúa la fuerza

III A cada acción corresponde siempre una reacción, de igual magnitud y sentido opuesto

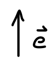
4 Poleas



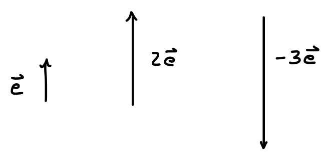
$$\left.\begin{aligned} \vec T_1 + \vec W_1 &= m_1 \vec a_1 \\ \vec T_2 + \vec W_2 &= m_2 \vec a_2 \end{aligned}\right\} \text{Segunda Ley de Newton} \; ★$$

① Separar el problema en una dimensión

Considerar $\vec e$ hacia arriba y $\|\vec e\| = 1$



Todo vector vertical se puede escribir como múltiplo de $\vec e$



En particular, hay números $T_1, T_2,$ a_1 y a_2 tq $\vec T_1 = T_1 \vec e$, $\vec T_2 = T_2 \vec e$, $\vec a_1 = a_1 \vec e$, $\vec a_2 = a_2 \vec e$ Para manejar los pesos haremos uso del descubrimiento de Galileo cerca a la tierra todos los objetos cuya única interacción es la gravitacional que tienen con ella tienen una aceleración $\vec g = -g\vec e$, donde $g \approx 9.8 \, m/s^2$ Luego utilizando la segunda ley, $\vec{W}_1 = -m_1 g \vec{e}$ mientras que $\vec{W}_2 = -m_2 g \vec{e}$ Se concluye que

$$(T_1 - m_1 g)\vec{e} = T_1\vec{e} - m_1 g \vec{e} = \vec{T}_1 + \vec{W}_1 = m_1 \vec{a}_1 = m_1 a_1 \vec{e} \Longrightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

¿Por qué? ¿Por qué?

$$(T_2 - m_2 g)\vec{e} = T_2\vec{e} - m_2 g \vec{e} = \vec{T}_2 + \vec{W}_2 = m_2 \vec{a}_2 = m_2 a_2 \vec{e} \Longrightarrow T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

¡Ahora tenemos ecuaciones que solo tienen números!

② Ligaduras

Polea ideal En una polea ideal la tensión a lo largo de la cuerda se mantiene, i.e.

$$T_1 = T_2 = T$$

Cuerda ideal Una cuerda ideal siempre se mantiene tensionada y no cambia su longitud. Como consecuencia, si m_1 se mueve 1m hacia arriba (por dar un ejemplo), m_2 se mueve 1m hacia abajo. Como consecuencia

$$a_1 = -a_2 = a$$

Por lo tanto

$$T - m_1 g = m_1 a$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

③ Resolver el sistema de ecuaciones

De la primera ecuación de ★ tenemos

$$T - m_1 g = m_1 a_1 \implies T = m_1 a + m_1 g$$

Con esta información ahora podemos reescribir la segunda ecuación de ★

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \implies m_1 a + m_1 g - m_2 g = -m_2 a$$

De esta podemos despejar a

$$\implies m_1 a + m_1 g - m_2 g + m_2 a = 0$$

$$\implies m_1 a + m_1 g + m_2 a = m_2 g$$

$$\implies m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g$$

$$\implies (m_1 + m_2) a = m_2 g - m_1 g$$

$$\implies (m_1 + m_2) a = (m_2 - m_1) g$$

$$\implies \boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g}$$

④ Analizar

* $a_1 = a > 0$ si $m_2 > m_1$
* $a_1 = a < 0$ si $m_1 > m_2$
* $a = g$ si $m_1 = 0$
* $a = -g$ si $m_2 = 0$
* $a = 0$ si $m_1 = m_2$
* $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\right)$

¡Simetría!

5 Cuerpos Rígidos en 2D

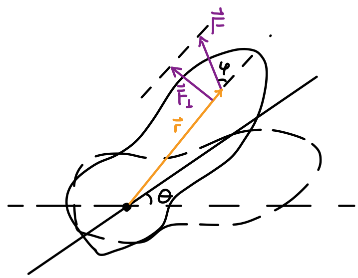
Hasta ahora nos ha preocupado el movimiento de "partículos"

¿Que hay del movimiento de objetos con extensión?

Cuerpo rígido Un cuerpo cuya forma no cambia, eg un hueso

Contraejemplo Un gato

Vamos a considerar el movimiento de un cuerpo rígido rotando alrededor de un eje fijo



$\vec{F}_\perp = \|\vec{F}\| \sin\varphi$

La posición del cuerpo es descrita por el ángulo θ que forma con una posición de referencia La taza de cambio del ángulo es conocida como la velocidad angular La taza de cambio de esta es conocida como la aceleración angular

Cuando una fuerza actua sobre un cuerpo rígido, esta genera un torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ A $\vec{r}$ se le conoce como el brazo de palanca En vista de que $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin(\varphi)$, la magnitud del torque aumenta cuando el brazo de palanca se hace más largo y la fuerza se realiza de manera más perpendicular ($\varphi = \pi/2 \, rad = 90°$) Los torques generan oceleraciones angulares La dirección del movimiento está asociada a la dirección de $\vec{\tau}$ mediante la regla de la mono derecha (ver el dibujo)

Existe una analogía entre el movimiento de este sistema y el de una partícula

Partícula	Cuerpo Rígdo
Posición ($\vec{r}$)	Ángulo (θ)
Velocdad ($\vec{v}$)	Velocdad angular (ω)
Aceleración ($\vec{a}$)	Aceleración angular (α)
Masa (m)	Momento de inercia (I)
Fuerza ($\vec{F}$)	Torque ($\vec{\tau}$)

6 Palancas

Cuerpos rígidos con un

* fulcro pivote alredor del cual gira
* potencia fuerza ejercida para producir el movimiento

mal nombre

* resistencia la fuerza que impide el movimiento deseado

Sea $\vec{F}_P$ la potencia y $\vec{r}_P$ su brazo de palanca. Por el otro lado, sea $\vec{F}_R$ la resistencia y $\vec{r}_R$ su brazo de palanca

Si no hay aceleración angular (la velocidad angular es constante)

$$\vec{0} = \vec{\tau} = \vec{r}_P \times \vec{F}_P + \vec{r}_R \times \vec{F}_R$$

Luego

$$\vec{r}_P \times \vec{F}_P = - \vec{r}_R \times \vec{F}_R$$

Tomando magnitudes se tiene

$$\|\vec{r}_P\| \, \|\vec{F}_{P_\perp}\| = \|\vec{r}_R\| \, \|\vec{F}_{R_\perp}\|$$

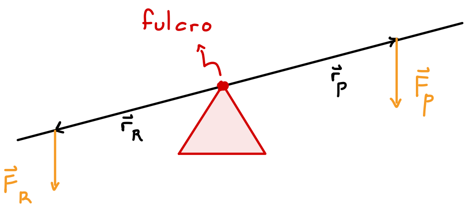
Por lo tanto, concluimos la ley de las palancas

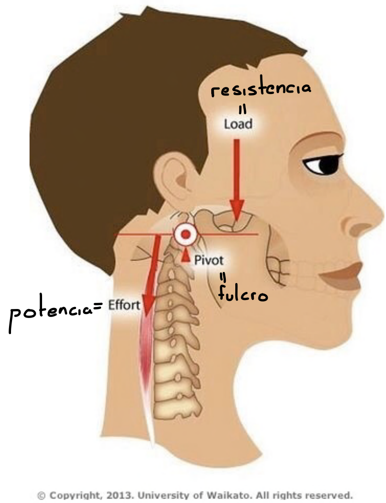
$$M = \frac{\|\vec{F}_{R_\perp}\|}{\|\vec{F}_{P_\perp}\|} = \frac{\|\vec{r}_P\|}{\|\vec{r}_R\|}$$

Al cociente M se le conoce como ventaja mecánica

* $M > 1$ Se produce más fuerza efectiva que la que se ejerce
* $M < 1$ Se produce menos fuerza efectiva que la que se ejerce

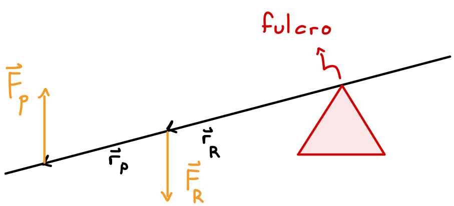
Primer género Potencia - Fulcro - Resistencia

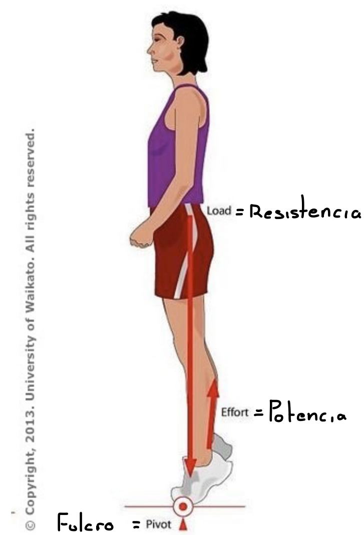




$M > 1$ o $M < 1$

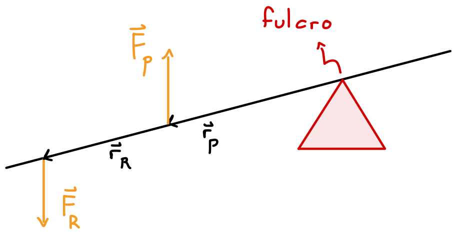
Segundo género Potencia - Resistencia - Fulcro





$M > 1$

Tercer género Resistencia - Potencia - Fulcro



$M < 1$