# Simetría: partículas como representaciones del grupo de Poincaré

Iván Mauricio Burbano Aldana

Universidad de los Andes

11 de diciembre de 2017

# Tabla de Contenidos

# Espaciotiempo

Un espaciotiempo relativista es [Matolcsi, 1993] un par $(M, g)$ donde:

- $M$ es un espacio afín de 4 dimensiones modelado en un espacio vectorial $\mathbf{M}$;
- $g : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to I \otimes I$ es una forma de Lorentz.

# Espaciotiempo aritmético

## Ejemplo

$(\mathbb{R}^4, \eta)$ donde $\eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ en la base canónica

$$\eta_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{ab} \tag{1}$$

Todo espaciotiempo es isomorfo a este pero no de manera canónica!

# Grupo de Poincaré $\mathcal{P}$

Transformaciones $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que preservan la estructura espacio tiempo. Entonces deben ser:

- afines

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \ni (a, \Lambda) : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ p &\mapsto \Lambda p + a; \end{aligned} \tag{2}$$

- ortogonales ($\Lambda \in \mathcal{L}$ el grupo de Lorentz)

$$\eta(u, v) = \eta(\Lambda u, \Lambda v). \tag{3}$$

Como $\mathcal{L}$ actúa de manera natural sobre $\mathbb{R}^4$ la estructura de grupo es la de producto semidirecto

$$\begin{gathered} \mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L} \\ (a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda\Lambda') \end{gathered} \tag{4}$$

# Transformaciones ortocronas propias

Podemos clasificar a las transformaciones de Lorentz por [Scheck, 2010]

| Componente conexa | $\det \Lambda$ | $\Lambda^0_0$ |
|---|---|---|
| $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ | $1$ | $\geq 1$ |
| $\mathcal{L}^{\downarrow}_{+} = PT\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ | $1$ | $\leq -1$ |
| $\mathcal{L}^{\uparrow}_{-} = P\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ | $-1$ | $\geq 1$ |
| $\mathcal{L}^{\downarrow}_{-} = T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ | $-1$ | $\leq -1$ |

Como se vio en clase, el análisis de $P$ y $T$ debe hacerse con cuidado. Nos restringimos al grupo de Lorentz ortocrono propio $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ y al grupo de Poincaré correspondiente $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+} = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$.

# Recubridor Universal

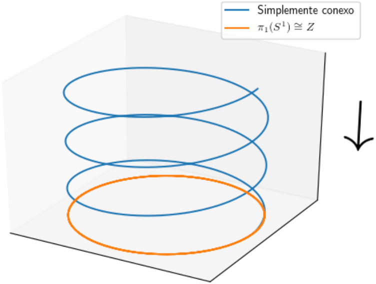


Figura: Se muestra como $\mathbb{R}$ es el recubridor universal de $S^1$.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^4 &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)_s \\ v^\alpha e_\alpha &\mapsto v^\alpha \sigma_\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

$$\eta(u, u) = \det(\Phi(u)) \tag{6}$$

$$\Lambda : \mathrm{SL}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{L}_\uparrow^+ \tag{7}$$

# Simetrías en mecánica cuántica

- Estados puros y observables básicos: Proyecciones $\rho_\psi$ sobre el subespacio generado por $\psi \in \mathcal{H}$
- Probabilidad de transición de $\rho_\phi$ a $\rho_\psi$ es $\mathrm{tr}(\rho_\psi \rho_\phi) = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|^2}{\|\phi\|^2 \|\psi\|^2}$
- Las simetrías de un sistema están representadas por grupos $G$ que actuan sobre el espacio de estados mediante una representación $T$ tal que se preservan estas probabilidades, es decir, para todo $g \in G$

$$\mathrm{tr}(T(g)(\rho_\psi) T(g)(\rho_\phi)) = \mathrm{tr}(\rho_\psi \rho_\phi). \tag{8}$$

# Importancia del recubridor fundamental

- ¡Es difícil trabajar con esta clase de mapas! Sería mejor poder trabajar con mapas entre vectores
- Para cierto grupos $G$, como el de Poincaré, se puede demostrar que cualquier representación como la descrita arriba viene de una representación unitaria $U : \tilde{G} \to U(\mathcal{H})$ del recubridor universal $\tilde{G}$.
- Solo tenemos que hallar representaciones unitarias de $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(\mathbb{C}^2)$.

# Rol de la energía-momento

Como tenemos representaciones unitarias, existe, operadores autoadjuntos $P_a$ que generan traslaciones

$$U(a, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = e^{ia^b P_b}. \tag{9}$$

Como las traslaciones conmutan, los generadores deben conmutar también. Además, transforman como cuadrivectores

$$U(0,\alpha)^{-1} P^a U(0,\alpha) = \Lambda(\alpha)^a_b P^b. \tag{10}$$

Entonces adquieren la interpretación de los operadores de energía momento. Las representaciones irreducibles van a estar etiquetadas por los subespacios propios que corresponden a $p$ y que podemos conectar mediante $\mathcal{P}^+_\uparrow$.

# Programa

El esquema general va a ser[Sternberg, 1994]

- hallar las orbitas de la acción de $SL(\mathbb{C}^2)$;
- hallar el grupo de isotropía de un punto en cada órbita;
- entontrar las representaciones irreducibles de este.

# Orbitas de la acción de SL($\mathbb{C}^2$)

[Haag, 1992]

| clase | órbita |
|---|---|
| $m_+$ | $\eta(p,p) = m^2$ y $p^0 > 0$ |
| $0_+$ | $\eta(p,p) = 0$ y $p^0 \geq 0$ |
| $0_0$ | $p = 0$ |
| $\kappa$ | $\eta(p,p) = -\kappa^2$ |
| $m_-$ | $\eta(p,p) = m^2$ y $p^0 < 0$ |
| $0_-$ | $\eta(p,p) = 0$ y $p^0 \leq 0$ |

# Estudio de $m_+$

Veamos el ejemplo de $m_+$ y como nos podemos mover a través de ella. Escoja $\overline{p} = (m, 0, 0, 0)$ y defina para todo $p$ tal que $\eta(p, p) = m^2$ y $p^0 > 0$

$$\beta(p) = \left( \frac{E_p \, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} + \sum_{\mu=1}^{3} p^\mu \sigma_\mu}{m} \right)^{1/2} \tag{11}$$

con $E_p = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3} (p^\mu)^2 + m^2} = p^0$. Luego

$$\Lambda(\beta(p))\overline{p} = p. \tag{12}$$

# Grupo de isotropía

El grupo de isotropía de $\overline{p}$ satisface

$$\overline{p} = \Lambda(\alpha)(\overline{p}) = \Phi^{-1}(\alpha\Phi(\overline{p})\alpha^*) = \Phi^{-1}(m\alpha\alpha^*) = m\Phi^{-1}(\alpha\alpha^*). \tag{13}$$

Concluimos que el grupo de isotropía es $\mathrm{SU}(\mathbb{C}^2)$ el recubridor universal de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.

# Clasificación en irreducibles

Sabemos que las representaciones irreducibles de $\mathrm{SU}(\mathbb{C}^2)$ están etiquetadas por espín $s \in \mathbb{N}/2$[Hall, 2013]. Luego las representaciones irreducibles de $\mathcal{P}_{\uparrow}^{+}$ están etiquetadas por una masa $m \in \mathbb{R}^{+}$ y espín $s \in \mathbb{N}/2$.

# Referencias


Haag, R. (1992).
*Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*.
Springer, 2nd edition.

Hall, B. C. (2013).
*Quantum Theory for Mathematicians*.
Springer.

Matolcsi, T. (1993).
*Spacetime Without Reference Frames*.
Akadémiai Kiadó, Budapest.

Scheck, F. (2010).
*Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*.
Springer, 5th edition.

Sternberg, S. (1994).
*Group Theory and Physics*.
Cambridge University Press.