Лабораторная работа №3.7.1
Скин-эффект в полом цилиндре

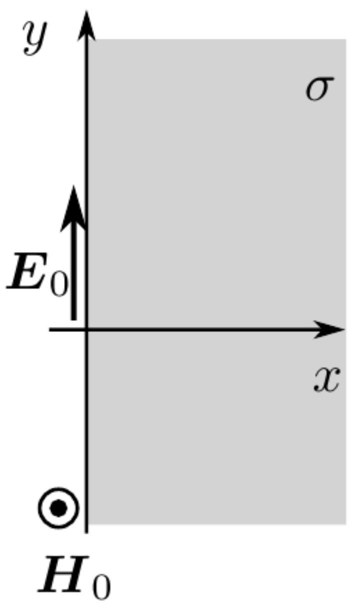
Абакшин Василий, Б05-207

26 октября 2023 г.

Цель работы: Исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

Теоретическая часть

Скин-эффект для полупрастранства



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор $\boldsymbol{E}$ направлен всюду вдоль оси y и зависит только от координаты x, т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x,t)$. В квазистационарном приближении

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Преобразуя это уравнение, можно получить уравнение, схожее с уравнением диффузии:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{H} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1}$$

Точно такое же уравнение имеет место и для вектора E :

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{E} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

Подставляем в (2) наше электрическое поле $E_y = E_y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{3}$$

Если $E_y(0,t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (3) будет функция вида

$$E_y(x,t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \tag{4}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu\mu_0}} \tag{5}$$

Скин-эффект в тонокм полом цилиндре

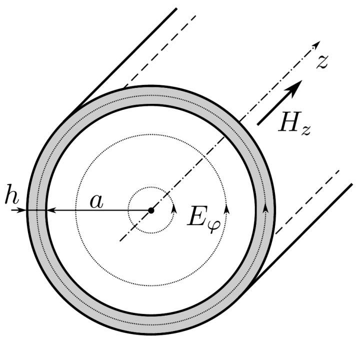


Рис. 1: Эл-магнитные поля в цилиндре

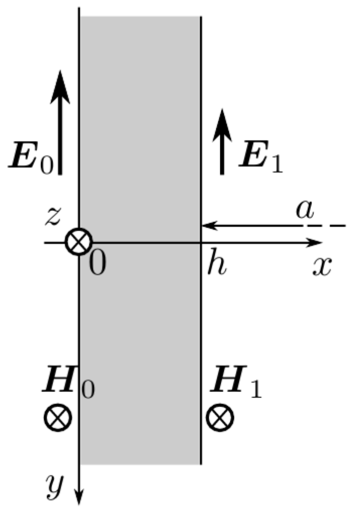


Рис. 2: Стенка цилиндра

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображении симметрии и непрерывности соответствующих компонет векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t},\ E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \mathrm{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \tag{6}$$

В прближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_0, которое колебается с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\mathrm{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a\,\mathrm{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4} \tag{7}$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0. При $\delta \ll h$ (высокачастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \tag{8}$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\mathrm{tg}\,\psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi a h \sigma \mu \mu_0 \nu \tag{9}$$

Установка и процесс измерения

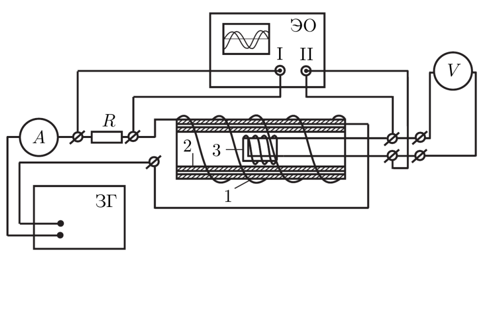


Рис. 3: Установка

Переменное магнитное поле создается соленоидом 1, на который подается переменный ток со звукового генератора ЗГ. Внутри соленоида расположен медный экран 2. Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорциональна производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорциональна току через соленоид

$$H_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{\nu I} = \xi_0 \xi \tag{10}$$

где константу ξ_0 можно определить из условия $|H_1|/|H_0| \to 1$ при $\nu \to 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени, поэтому измеренная на осциллографе разность фаз φ будет на $\frac{\pi}{2}$ больше реальной ψ:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

Ход работы

Параметры нашей установки $2a = 45$ мм, $h = 1.5$ мм. Проводимость порядка $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$ См/м. Получаем оценку для частоты, при которой глубина проникновения равна толщине стенок цилиндра $\nu_h = 2254$ Гц.

Измерения амплитуд в области низких частот

В области низких частот толщина скин-слоя превосходит толщину образца $\delta \gg h$ и из (7) получаем

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|}\right)^2 = (\xi_0\xi)^2 \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\pi a h \nu \mu_0 \sigma)^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\xi^2} = \xi_0^2 B^2 \nu^2 + \xi_0^2, \text{ где } B = \pi a h \sigma \mu_0$$

Получаем следующие значения: $\xi_0^2 B^2 = 0.138$, $\xi_0^2 = 4212.65$, тогда:

$$\xi_0 = 64.90 \pm 0.04 \ \frac{\text{Гц}}{\text{Ом}}, \ \sigma = (4.294 \pm 0.005) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Измерение проводимости через разность фаз при низких частотах

Построим график $\operatorname{tg}\psi(\nu)$ по тем точкам точкам, для которых он хорошо аппроксимируется прямой (при $\nu \approx 0.5\nu_h$ $\operatorname{tg}\psi \to +\infty$) Согласно формуле (9), при $\delta \gg h$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{ahw\sigma\mu_0}{2} = \pi a h \mu_0 \sigma \nu \quad (\mu = 1)$$

Коэффициент наклона прямой:

$$\pi a h \mu_0 \sigma = k = (5.2 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ с}$$

$$\sigma = \frac{k}{\pi a h \mu_0} = (3.93 \pm 0.73) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

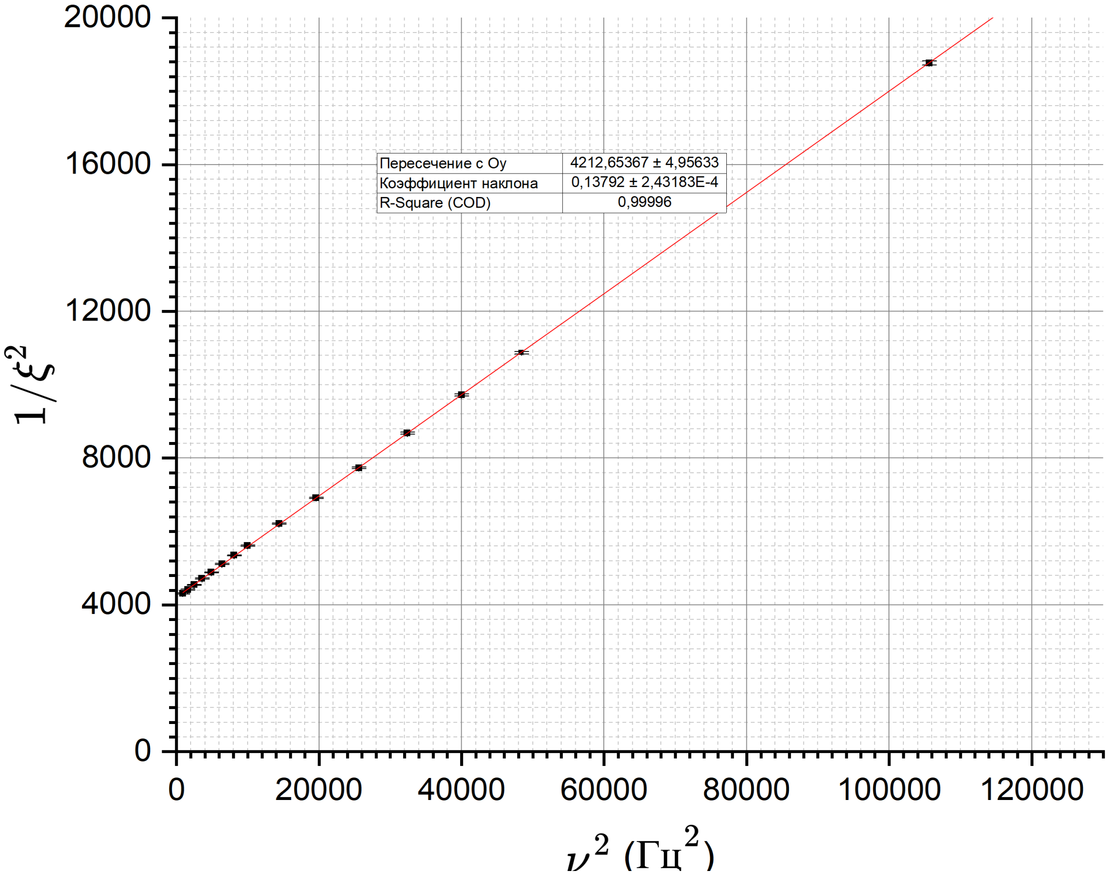


Рис. 4: График зависимости $1/\xi^2(\nu^2)$

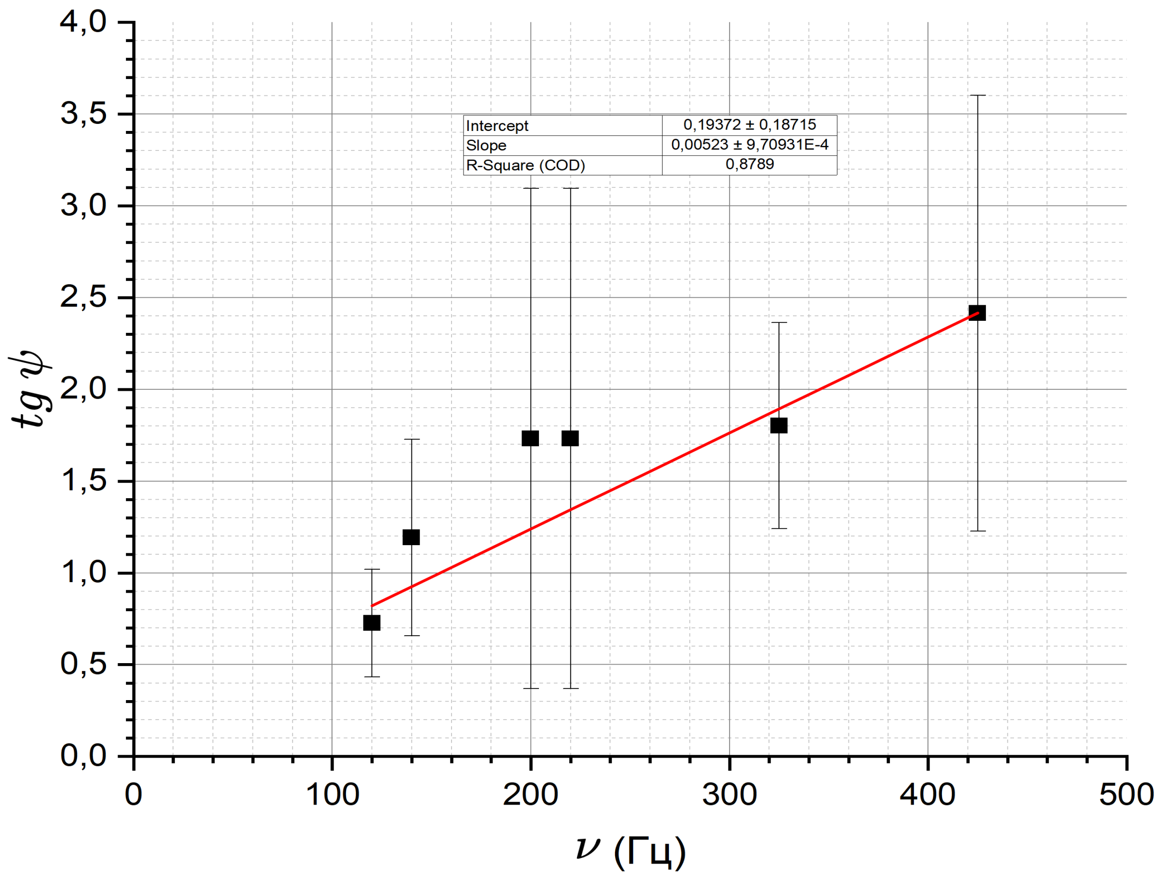


Рис. 5: График зависимости $\operatorname{tg}\psi(\nu)$

Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

Согласно формуле (8), при $\delta \ll h$

$$\psi - \pi/4 = k \cdot \sqrt{\nu}; \; k = h\sqrt{\pi \mu_0 \sigma}$$

Получено значение $k = 0.0184 \pm 0.0014$, отсюда получаем значение проводимости:

$$\sigma = (3.80 \pm 0.58) \cdot 10^7 \; \frac{\text{См}}{\text{м}} \tag{11}$$

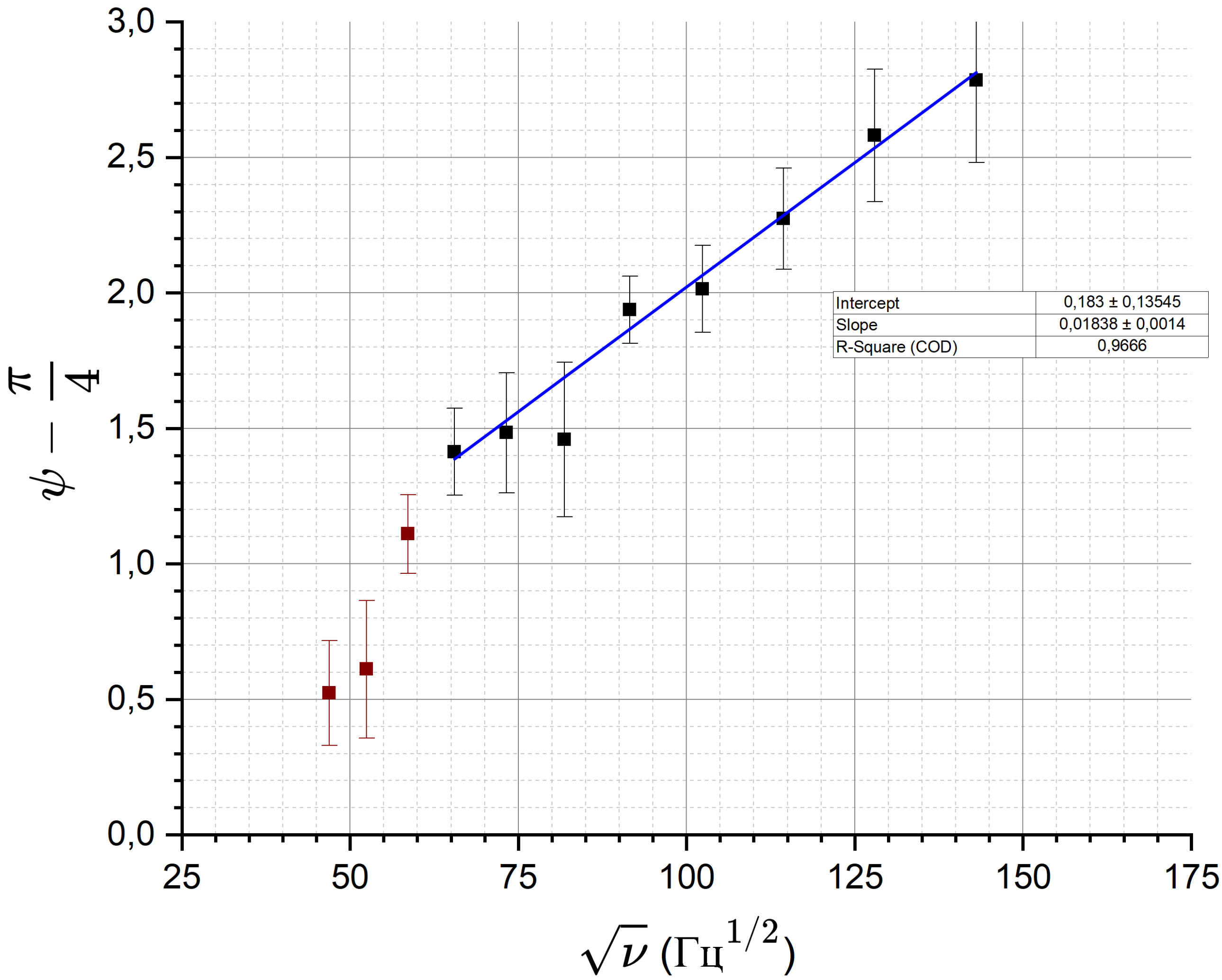


Рис. 6: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$

Измерение проводимости через изменение индуктивности

Измерить проводимость можно также через изменение индуктивности катушки внутри цилиндра. Данные, измеренные с помощью RCL-метра:

ν, кГц	0.04	0.15	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.5	2.5	4	10	15	20
L, мГн	10	7.35	5.4	4.8	4.0	3.65	3.45	3.26	2.9	2.9	2.9	3	3.17	3.6

Таблица 1: Значения индуктивности катушки при различных частотах

Примерно так выглядит график $L(\nu)$:

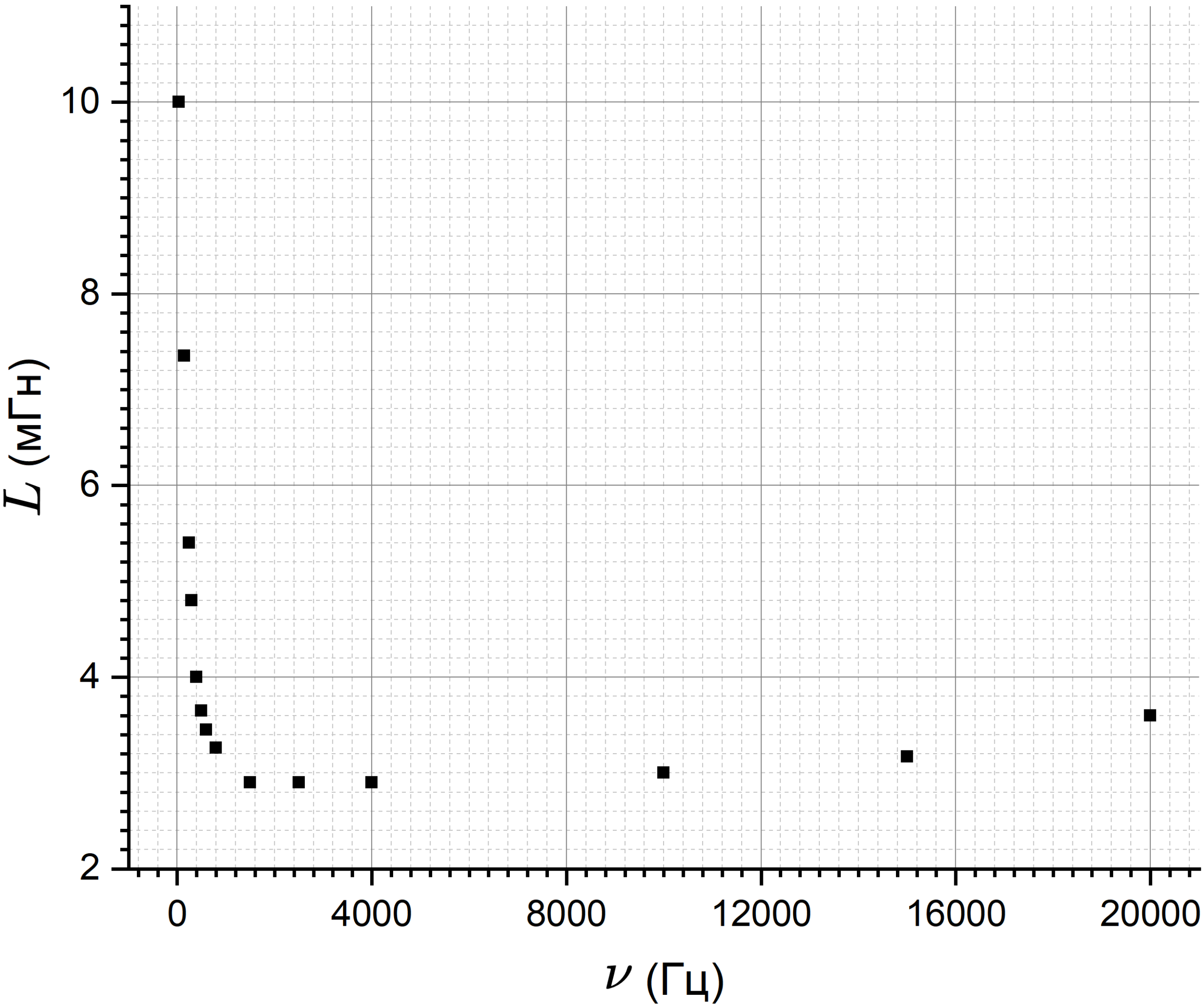


Рис. 7: График зависимости $L(\nu)$

Полученные максимальные и минимальные значения: $L_{min} = 2.9$ мГн, $L_{max} = 10$ мГн.

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = \pi^2 a^2 h^2 {\mu_0}^2 \sigma^2 \nu^2$$

То есть коэффициент наклона графика

$$k = (\pi a h \mu_0 \sigma)^2 \ \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0}$$

Подставляя полученные значения, получаем:

$$\sigma = (4.11 \pm 0.07) \cdot 10^7 \ \frac{\text{См}}{\text{м}} \tag{12}$$

Отношение магнитных полей

Отношение $|H_1|/|H_0|$ можем посчитать двумя способами. Первый способ - через формулу (10),использовав посчитанное значение ξ_0 в анализе амплитуд в области низких частот. Второй способ - через теоретическую формулу (7), использовав первое полученное значение σ. Посмотрим на их различие с помощью графиков зависимости $|H_1|/|H_0|(\nu)$

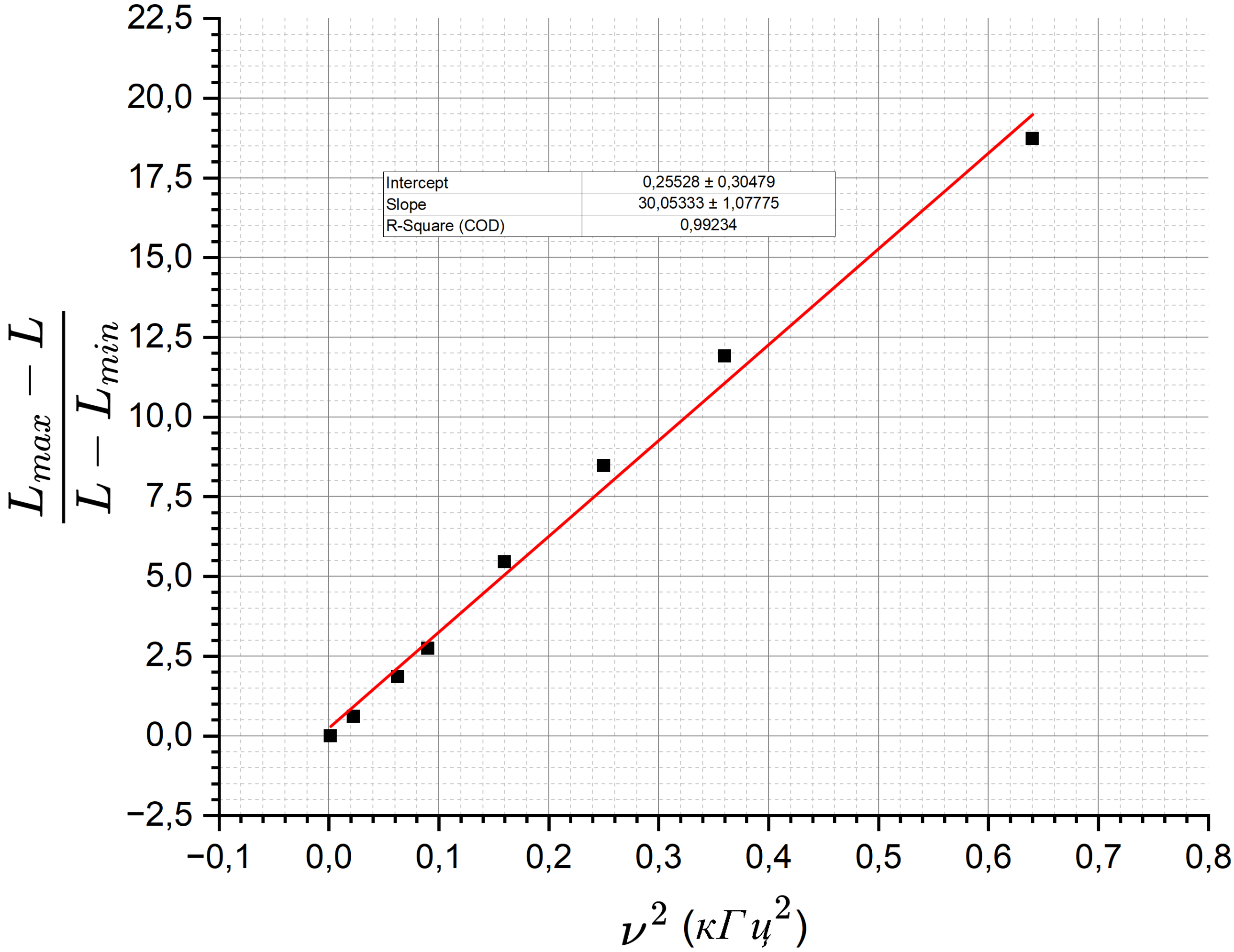


Рис. 8: График зависимости $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}}(\nu^2)$

Выводы

В данной лабораторной работе мы измеряли удельную проводимость меди 4-мя различными способами с помощью явления скин-эффекта. Запишем результаты в общую таблицу:

Метод измерения	$\sigma, 10^7\ \frac{\text{См}}{\text{м}}$	$\Delta\sigma, 10^7\ \frac{\text{См}}{\text{м}}$	ε_σ
Отношение амплитуд	4.294	0.005	0.1%
Разности фаз (низкие частоты)	3.93	0.73	18.6%
Разности фаз (высокие частоты)	3.80	0.58	15.2%
Индуктивность	4.11	0.07	1.8%

Таблица 2: Сравнение результатов различных методов

В работе использовалась медь марки $M3$, для которой $\sigma_{\text{табл}} = 5.62 \cdot 10^7\ \frac{\text{См}}{\text{м}}$. Полученные нами значения совпадают по порядку, но, все же, немного нижу табличного значения. Несовпадение может быть вызвано многими факторами, например наводкой поля в соединительных проводах и пренебрежением размерами медного цилиндра и соленоида.

Методы измерения через разность фаз дали высокие погрешности, потому что измерения делались на глаз на осциллографе, и гарантировать их точность можно только с введенной погрешностью. Кроме того, при измерении на высоких частотах зависимость не является везде линейной, это тоже привносит свою неточность.

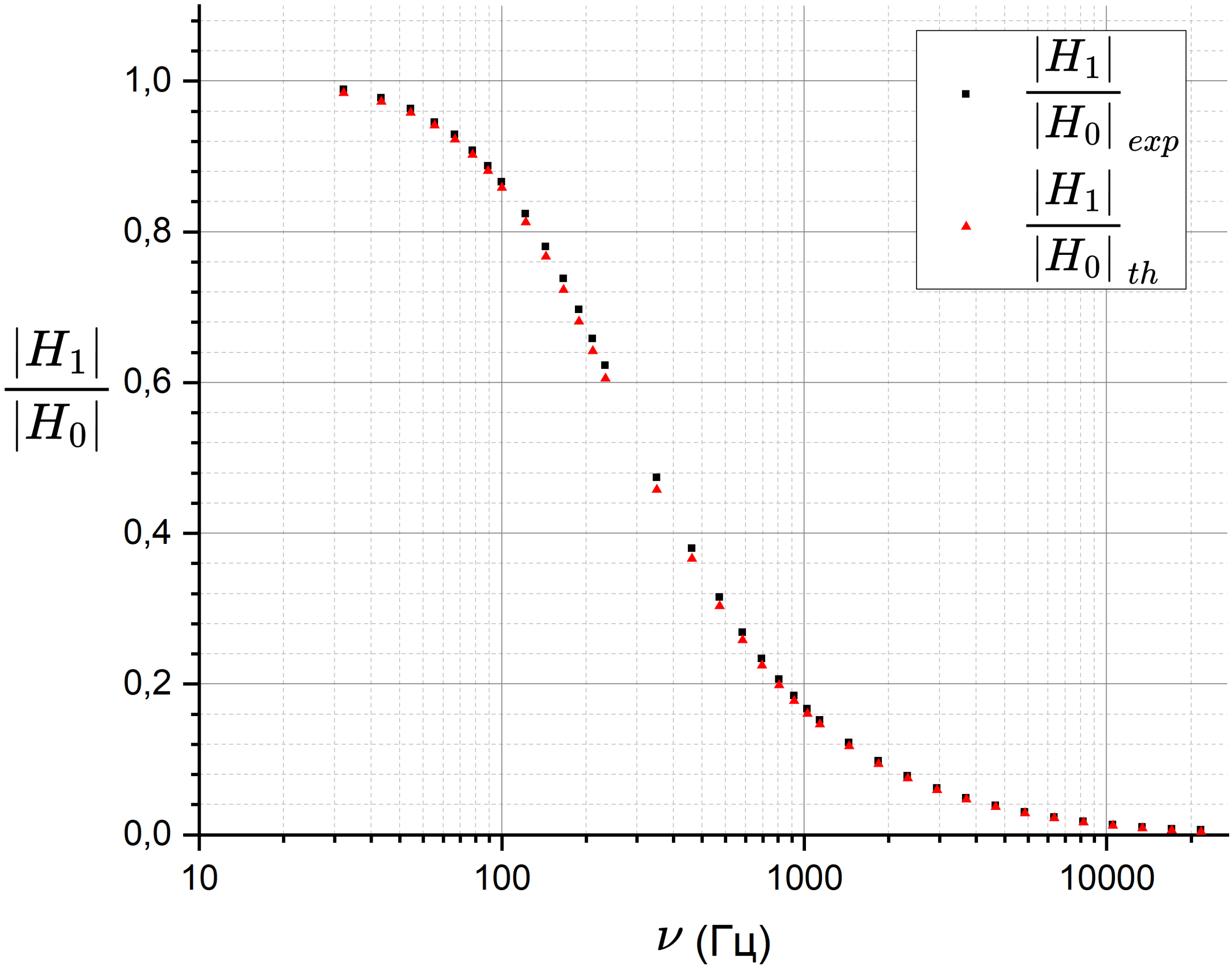


Рис. 9: График зависимость $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$

Что касается зависимости $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$, то экспериментальные данные очень хорошо согласуются с теоретической зависимостью.