

Лабораторная работа 3.2.4+3.2.5

Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре

Шерхалов Денис Б02-204

29 ноября 2023 г.

Цель работы: исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивлений МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

1. Введение

Экспериментальная установка

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением RL , переменной емкости C и сопротивления R . Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности.

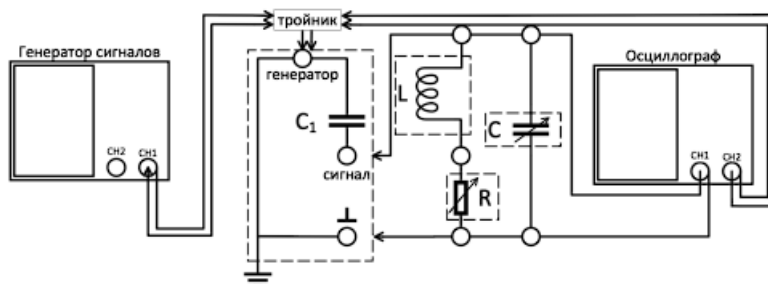


Рис. 2: Схема установки для исследования АЧХ и ФЧХ

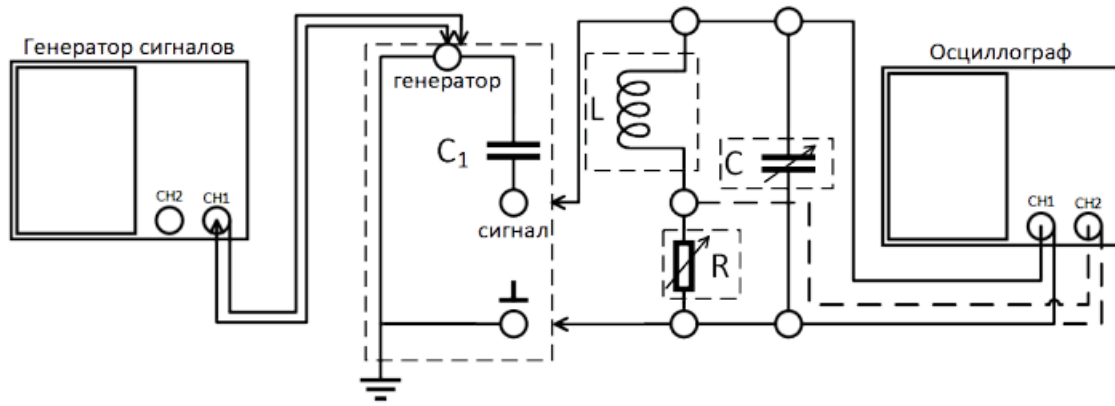


Рис. 1: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

Теоретические сведения

Для RLC контура применим правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Подставив в уравнение выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа, и разделив обе части уравнения на CL , получим:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL} = 0$$

Произведём замены $\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – собственная круговая частота, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний. Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0,$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Для случая $\gamma < \omega_0$ в силу того, что $\omega_1 > 0$, получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Для получения фазовой траектории представим формулу в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t),$$

где a и b получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и токе через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} (\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t),$$

$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{U_{C0}}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t.$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R},$$

где τ – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}},$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону, N_τ – число полных колебаний за время затухания τ .

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней синусоидального источника. Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рисунке (рис. 1):

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}.$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L \phi_0} \sin(\Omega t - \varphi).$$

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}.$$

Способы измерения добротности $Q = \frac{W_0}{W_{loss, \tau}} = \frac{\pi}{\Theta}$:

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}},$$

2. с помощью амплитуды резонанса можно получить добротность (в координатах U_C/U_0 , где U_0 – амплитуда колебаний напряжения источника, от частоты генератора). Отсюда нетрудно определить декремент затухания $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$,

3. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ($\Delta\Omega$) будет численно равна коэффициенту γ , то есть $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$.

4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$\Theta = \frac{\omega_0 n}{2 \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}.$$

5. с помощью формулы

$$\Theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. Ход работы

2.1. Измерение периодов свободных колебаний

Соберем установку с рисунка 1, выставим $R = 0$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 0$ нФ, однако контур сам по себе обладает некоторым C_0 , благодаря которому в контуре реализуются свободные колебания

Измерим с помощью осциллографа период затухающих колебаний $10T = 656$ мкс, по периоду колебаний вычисляем значение емкости C_0 , по формуле

$$C_0 = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 1,09 \text{ нФ}$$

Изменяя емкость C проведем измерения 10 периодов

C , нФ	1.09	2.09	4.09	6.09	8.09	10.09
T , мкс	65.6	90.8	127.0	155.1	178.8	199.7
T_{theor} , мкс	65.6	90.8	127.1	155.1	178.7	199.6

2.2. Критическое сопротивление и декремент затухания

Рассчитаем C , при котором собственная частота колебаний $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 6500$ Гц, $C = 6$ нФ. Для выбранных L и C рассчитаем критическое сопротивление контура $R_{cr} = 8168$ Ом по формуле $R_{cr} = 2\sqrt{L/C}$

Установим на магазине емкость, близкую к рассчитанной увеличивая сопротивление до критической, наблюдаем картину затухающих колебаний. При сопротивлении $R = 6$ кОм колебательный режим переходит в апериодический.

Изменяя сопротивление запишем зависимость логарифмического декремента от сопротивления

R , Ом	410	600	800	1000	1200	1600
U_1	588	660	470	610	360	550
U_2	400	370	250	250	150	140
U_3	284	220	140	100	70	40
U_4	192	130	—	40	—	—
θ	0.35	0.54	0.61	0.91	0.82	1.31

2.3. Свободное колебание на фазовой плоскости

Проведем аналогичные измерения, но уже на фазовой плоскости и запишем результаты в таблицу.

R , Ом	410	600	800	1000	1200	1600
U_1	21	20	20	19	18	17
U_2	14	12	10	8	6	4
U_3	10	7	5	3	2	1
θ	0.37	0.52	0.69	0.92	1.10	1.42

2.4. Исследование резонансных кривых

Выставим значение емкости $C = 6$ нФ и сопротивление $R = 410$ Ом (на этом моменте мы вспомнили, что забыли про C_0 и не учитывали его в течение всей лабораторной работы, поэтому нужно пересчитать частоту, $\nu_{res} = 6015$ Гц, критическое сопротивление $R_{cr} = 7511$ Ом)

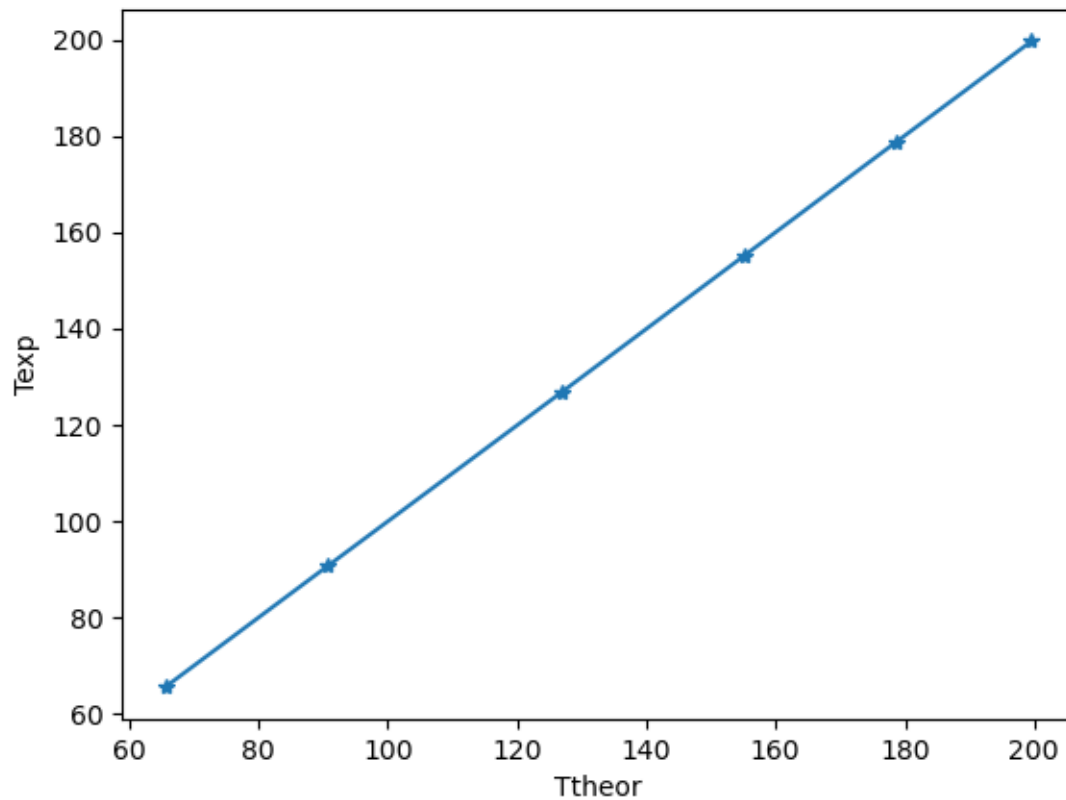
Изменяя частоту генератора вблизи резонансной частоты, находим резонансную частоту $\nu = 6010$ Гц и ее амплитуду $2U_{res} = 16.7$ В.

Снимем АЧХ вблизи резонанса

ν , Гц	5300	5390	5480	5570	5660	5750	5840
$2U$, В	7	7.8	8.9	10.2	11.7	13.7	15.2
ν , Гц	5930	6020	6110	6200	6290	6380	6470
$2U$, В	16.4	16.6	16.2	15	13.8	12.6	11
ν , Гц	6560	6650	6740	6830	6920	7010	7100
$2U$, В	10.2	9.4	8.5	8.1	7.7	7.1	6.7

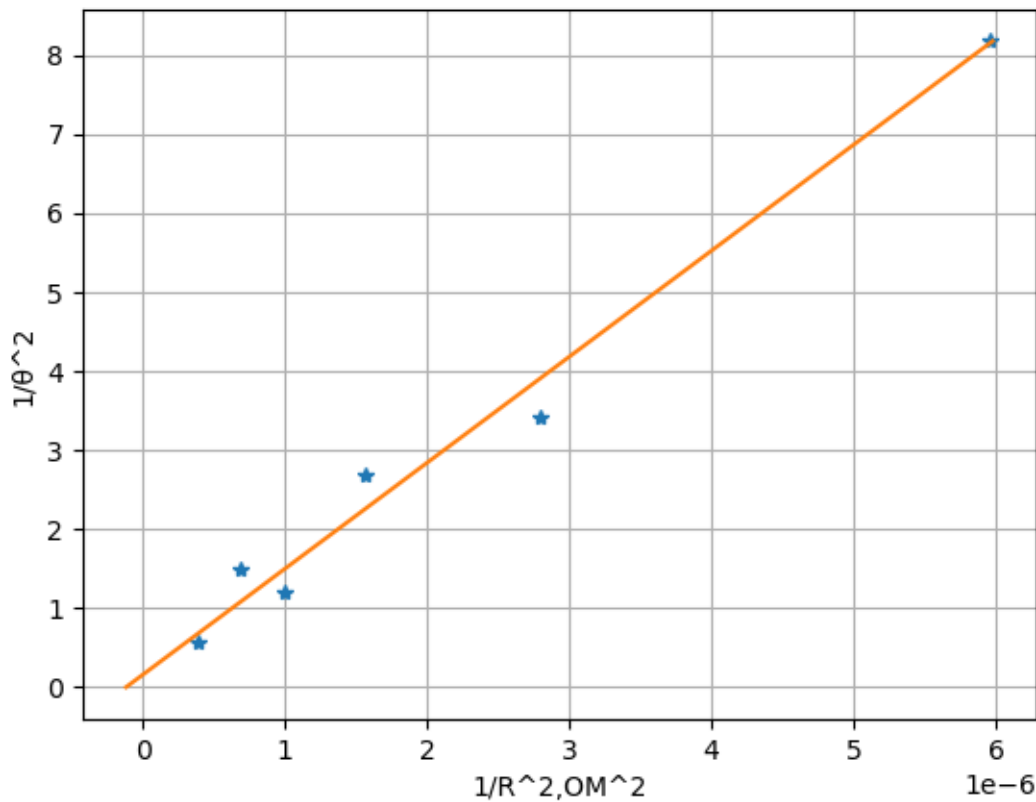
2.5. Обработка результатов

1. Из секции 3.1 построим график $T_{exp} = f(T_{theor})$



Из графика видно, что результаты совпали, погрешность $< 1\%$

2. Построим график $1/\theta^2 = f[1/R^2]$



Коэффициент наклона $K = 1320000 \pm 70000 \text{ Ом}^2$

Зная коэффициент наклона, найдем R_{cr} , по формуле $R_{cr} = 2\pi\sqrt{K} = 7200 \pm 200 \text{ Ом}$, что близко с теоретическим значением $R_{cr} = 7511 \text{ Ом}$

3. Расчитаем добротность для максимального и минимального значения θ и теоретическое с теми же параметрами.

- Вычисление добротности контура по секции 3.2:

$$Q(\theta_{min}) = 8.97 \quad Q(\theta_{max}) = 2.40$$

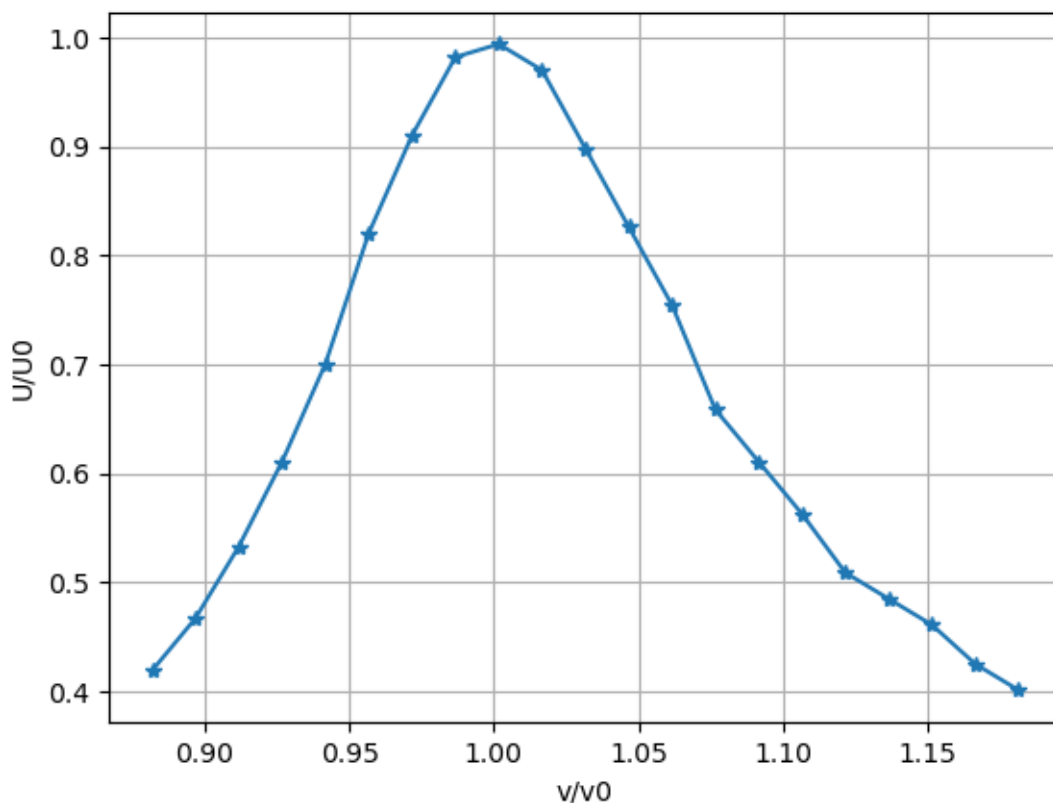
- Вычисление добротности контура по секции 3.3:

$$Q(\theta_{min}) = 8.49 \quad Q(\theta_{max}) = 2.21$$

- Вычисление добротности контура теоретически:

$$Q(\theta_{min}) = 9.16 \quad Q(\theta_{max}) = 2.34$$

4. По секции 3.4 построим АЧХ в масштабе $U/U_{res} = f(\nu/\nu_{res})$



5. Рассчитаем добротность по формуле $Q = \nu_{res}/2\Delta\Omega$, $Q=7.91$

3. Вывод

1. С учетом емкости системы, значения периодов эксперимента идеально совпали с теоретическими значениями периодов.
2. Удалось снять зависимость логарифмического декремента затухания от активного сопротивления цепи (погрешность составила порядка 5%)
3. Определили критическое сопротивление, при котором характер колебаний меняется на апериодический, тремя способами: теоретическим $R = 7.5 \text{ кОм}$, по наклону графика зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления цепи $R_{кр} = 7.2 \pm 0,2 \text{ кОм}$, с помощью наблюдением за картиной колебаний $R_{кр} = 6 \text{ кОм}$.
4. Результаты расчетов добротности сведены в таблицу:

R, Ом	Свободные колебания			Вынужденные колебания			
	f(LCR)	f(ν)	Спираль	АЧХ	ФЧХ	Нарастание	Затухание
410	9.16	8.97	8.49	7.91	-	-	-
1600	2.34	2.4	2.21	-	-	-	-

Как видим, все добротности хорошо совпали.