

Лабораторная работа №2.1.4  
Определение теплоемкости твердых тел

Рожков А. В.  
Преподаватель Яворский В. А.

8 мая 2024 г.

**Цель работы:** 1. прямое измерение кривых нагревания  $T_{heat}(t)$  и охлаждения  $T_{cool}(T)$  пустого калориметра и системы «калориметр + твердое тело»; 2. определение коэффициента теплоотдачи стенок калориметра; 3. определение теплоемкости пустого калориметра и удельной теплоемкости твердого тела

**В работе используются:** калориметр с нагревателем и термометром сопротивления; универсальный вольтметр В7-78/3 в режиме омметра ( $\sigma_T = 0.05 \text{ K}$ ), измеритель температуры - термопара К-типа совместно с универсальным вольтметром В7-78/2 ( $\sigma_{T_{комн}} = 0.1 \text{ K}$ ), источник питания GPS-72303, универсальные вольтметры В7-78/3 (в режиме амперметра) ( $\sigma_I = 0.01 \text{ A}$ ) и KEITHLEY (в режиме вольтметра) ( $\sigma_U = 0.1 \text{ В}$ ) для измерения мощности нагревателя, компьютерная программа АКИП для сопряжения персонального компьютера и универсальных вольтметров В7-78/2 и В7-78/3 ( $\sigma_t = 0.01 \text{ с}$ ).

## 1 Теоретическая справка

В данной работе теплоемкость определяется по формуле

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad (1)$$

где  $\Delta Q$  – количество тепла, подведенного к телу, и  $\Delta T$  – изменение температуры тела, произошедшее в результате подвода тепла.

Температура внутри калориметра измеряется термометром сопротивления. В реальных условиях  $\Delta Q \neq P\Delta t$ , так как часть энергии уходит из калориметра благодаря теплопроводности его стенок. В результате количество тепла  $\Delta Q = C\Delta T$ , подведённое к системе "тело + калориметр" будет меньше на величину тепловых потерь:

$$C\Delta T = P\Delta t - \lambda(T - T_k)\Delta T \quad (2)$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплоотдачи стенок калориметра,  $T$  - температура тела и калориметра,  $T_k$  - комнатная температура.

Уравнение (2) является основной расчетной формулой работы. В дифференциальной форме для процессов нагревания и охлаждения ( $P = 0$ ) соответственно оно имеет следующий вид:

$$CdT = Pdt - \lambda [T_{heat}(t) - T_k(t)] dt \quad (3)$$

$$CdT = -\lambda [T_{cool}(t) - T_k(t)] dt \quad (4)$$

где  $P$  – мощность нагревателя,  $\lambda$  – коэффициент теплоотдачи стенок калориметра,  $t$  – время, измеряемое от момента включения нагревателя,  $T_{heat}(t)$  – температура тела в момент времени  $t$  на кривой нагревания,  $T_{cool}(t)$  – температура тела в момент времени  $t$  на кривой охлаждения,  $T_k(t)$  – температура окружающего калориметр воздуха (комнатная) в момент времени  $t$ ,  $dt$  – время, в течение которого температура тела изменилась на  $dT$

### 1.1 Экспериментальная установка

Установка состоит из калориметра с пенопластовой изоляцией, помещенного в ящик из многослойной клееной фанеры. Внутренние стенки калориметра выполнены из материала с высокой теплопроводностью. Надежность теплового контакта между телом и стенками обеспечивается их формой: они имеют вид усеченных конусов и плотно прилегают друг к другу.

Экспериментально измеряемые данные:

1.  $R_{heat}(t)$  – кривая зависимости термометра сопротивления от времени при нагревании калориметра с телом при  $P = \text{const}$ .

2.  $R_{cool}(t)$  – кривая зависимости термометра сопротивления от времени при охлаждении калориметра с телом при  $P = 0$  (нагреватель выключен!).

3.  $T_k(t)$  – кривая зависимости комнатной температуры от времени

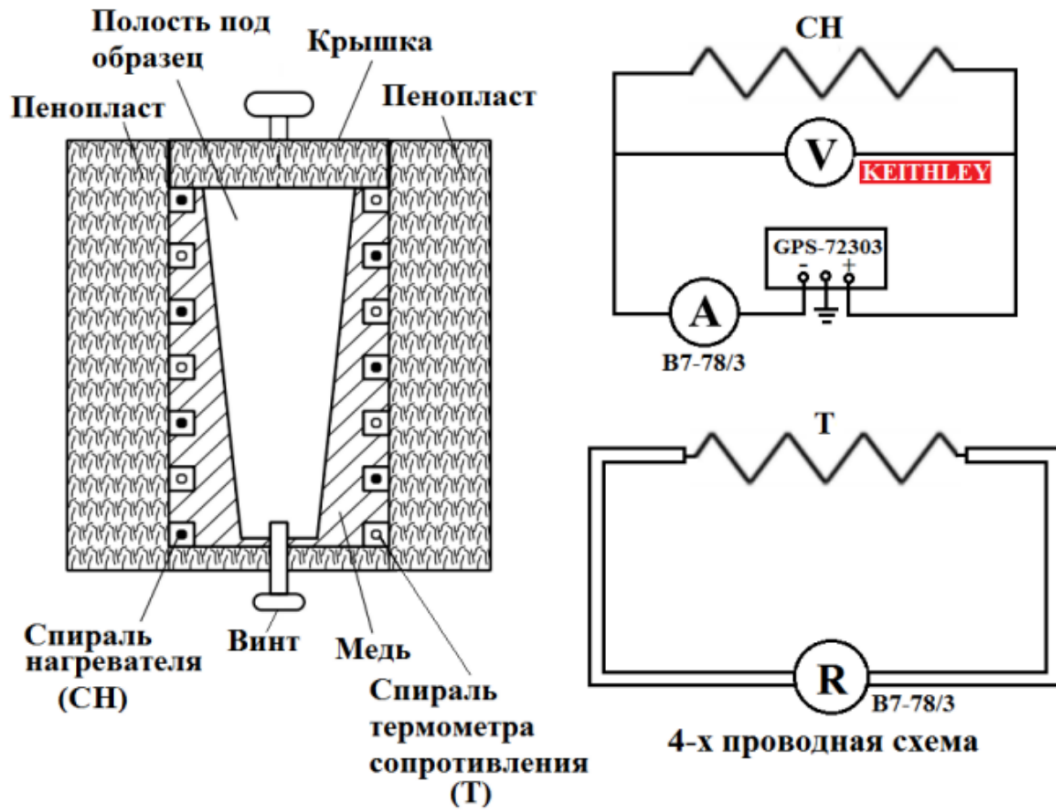


Рис. 1: Схема устройства калориметра

## 1.2 Методика эксперимента

Температура измеряется термометром сопротивления. Сопротивление проводника изменяется с температурой по закону

$$R_T = R_{273}(1 + \alpha(T - 273)), \quad (5)$$

где  $R_T$  – сопротивление термометра при  $T^\circ\text{C}$ ,  $R_0$  – его сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

Выразим сопротивление  $R_{273}$  через измеренное значение  $R_k$  – сопротивление термометра при комнатной температуре. Согласно (5), имеем

$$R_{273} = \frac{R_k}{1 + \alpha(T_k - 273)}, \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), найдём:

$$T(R_T) = 273 + \frac{R_T}{\alpha R_k} [1 + \alpha(T_k - 273)] - \frac{1}{\alpha} \quad (7)$$

Формула (7) позволяет легко пересчитать кривые  $R_{heat}(t)$ ,  $R_{cool}(t)$  в кривые  $T_{heat}(t)$ ,  $T_{cool}(t)$ . Входящий в формулу температурный коэффициент сопротивления меди равен  $\alpha = 4.28 \cdot 10^{-3} \text{град}^{-1}$ .

Из уравнения (4) при  $T_k(t) = T_k = \text{const}$ :

$$CdT_{cool} = -\lambda [T_{cool} - T_k] dt \quad (8)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными  $T_{cool}$  и  $t$ :

$$\frac{CdT_{cool}}{-\lambda [T_{cool} - T_k]} = dt \quad (9)$$

После интегрирования в пределах от  $t = 0$  ( $T_{cool} = T$ ) до произвольного момента времени  $t$ :

$$\frac{-C}{\lambda} \ln \frac{T_{cool} - T_k}{T - T_k} = t \quad (10)$$

Отсюда находим явную зависимость от времени:

$$T_{cool}(t) = (T - T_k)e^{\frac{-\lambda}{C}t} + T_k \quad (11)$$

Уравнение (11) легко спрямляется в координатах  $(\ln \frac{T_{cool} - T_k}{T - T_k}, t)$ . Тангенс угла наклона данной прямой позволяет определить отношение искомых величин  $\frac{\lambda}{C}$ .

Из уравнения (3) при  $T_k(t) = T_k = const$ :

$$CdT_{heat} = Pdt - \lambda [T_{heat} - T_k] dt \quad (12)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными  $T_{heat}$  и  $t$ :

$$\frac{CdT_{heat}}{P - \lambda [T_{heat} - T_k]} = dt \quad (13)$$

После интегрирования в пределах от  $t = 0$  ( $T_{heat} = T_k$ ) до произвольного момента времени  $t$ :

$$\frac{-C}{\lambda} \ln \frac{P - \lambda (T_{heat} - T_k)}{P} = t \quad (14)$$

Отсюда находим явную зависимость от времени:

$$T_{heat}(t) = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{\frac{-\lambda}{C}t}) + T_k \quad (15)$$

Уравнение (15) позволяет по найденному ранее из кривой охлаждения отношению  $\frac{\lambda}{C}$  определить  $\lambda$ , а зная  $\lambda$  и  $\frac{\lambda}{C}$  легко найти искомую теплоемкость  $C$ .

Метод измерений величин  $C$  и  $\lambda$  рассмотренный выше, дает хорошие результаты при стабильной комнатной температуре во время проведения эксперимента и является по своей сути интегральным.  $C$  и  $\lambda$  определяются из уравнений (11) и (15), которые следуют из уравнений (3) и (4) после их интегрирования. При существенных колебаниях комнатной температуры ( $\sim 2 - 3$  °C) интегральные уравнения (11) и (15) могут привести к достаточно большой погрешности в определении величин  $C$  и  $\lambda$ . В этом случае следует использовать дифференциальные методы, основанные на измерении величин  $(\frac{dT}{dt})_{heat}$  и  $(\frac{dT}{dt})_{cool}$  в окрестностях каких-либо «удобных» точек. К таким «удобным» точкам относится точка на кривой нагревания, при которой температура калориметра совпадает с комнатной. Действительно, дифференцируя уравнение (3) по времени при  $T_{heat}(t) = T_k(t)$ , получим простую и удобную формулу для определения теплоемкости  $C$ :

$$C = \frac{P}{(dT_{heat}/dt)_{T=T_k}} \quad (16)$$

Она дает хорошие результаты, если ее применение никак не связано с моментом включения нагревателя. Причина проста: сразу после включения нагревателя в калориметре происходят переходные процессы формирования тепловых потоков, которые не описываются уравнением (3) и соответственно уравнением (16). Чтобы обойти данную трудность, перед включением нагревателя необходимо охладить калориметр до температуры на  $\sim 2 - 5$  °C ниже комнатной. В этом случае при подходе к точке  $T_{heat}(t) = T_k(t)$  все переходные процессы уже закончатся и уравнение (16) будет корректным.

Другими «удобными» точками для определения  $C$  и  $\lambda$  являются точки при одной и той же температуре  $T$  на кривых нагревания  $T_{heat}(t)$  и охлаждения  $T_{cool}(t)$  соответственно. Действительно продифференцируем уравнения (3) и (4) по времени:

$$C \left( \frac{dT}{dt} \right)_{heat} = P - \lambda [T_{heat}(t) - T_k(t)] \quad (17)$$

$$C \left( \frac{dT}{dt} \right)_{cool} = -\lambda [T_{cool}(t) - T_k(t)] \quad (18)$$

Определим  $A = \left( \frac{dT}{dt} \right)_{heat}$  и  $B = \left( \frac{dT}{dt} \right)_{cool}$  при одной и той же температуре  $T$  на кривых  $_{heat}(t)$  и  $T_{cool}(t)$  соответственно. Тогда с учетом введенных обозначений, решая систему уравнений (17) и (18), получим следующие выражения для  $C$  и  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{P}{(T - T_{k2})(1 - \frac{A}{B}) + T_{k2} - T_{k1}} \quad (19)$$

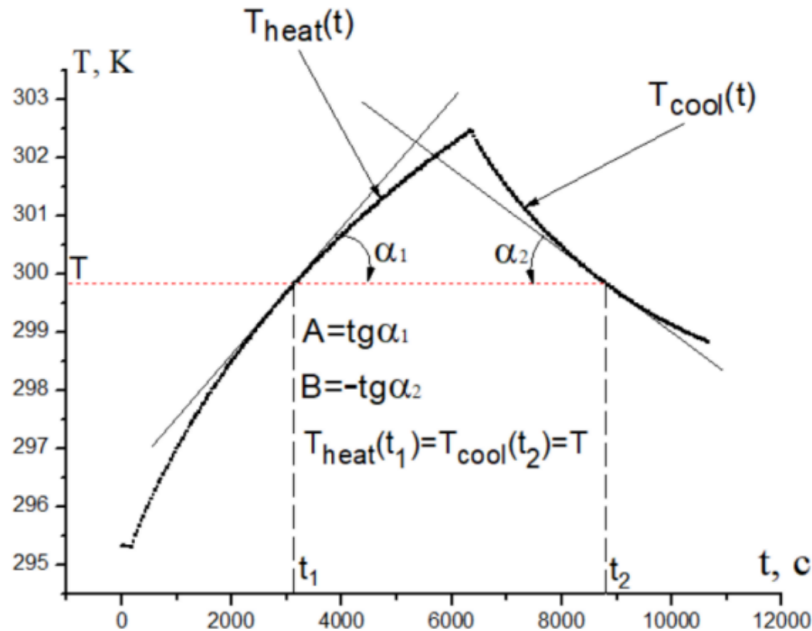
$$C = \frac{P}{A - B + A \frac{T_{k1} - T_{k2}}{T - T_{k1}}} \quad (20)$$

где  $T_{k1}$  и  $T_{k2}$  – комнатная температура в моменты времени  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , когда  $T_{heat}(t_1) = T_{cool}(t_2) = T$ .

В случае равенства комнатных температур, когда  $T_{k1} = T_{k2} = T_k$  формулы (19) и (20) упрощаются

$$\lambda = \frac{P}{(T - T_k)(1 - \frac{A}{B})} \quad (21)$$

$$C = \frac{P}{A - B} \quad (22)$$



Следует иметь в виду, что определение величины  $B$  на кривой охлаждения  $T_{cool}(t)$  необходимо производить на участках кривой достаточно далеких от момента выключения нагревателя, после того как в калориметре закончатся переходные процессы «переполюсовки» тепловых потоков. Корректный интервал времени для определения  $B$  можно определить экспериментально из кривой  $T_{cool}(t)$ , спрямляя ее в координатах  $(\ln \frac{T_{cool} - T_k}{T - T_k}, t)$ , после чего исключить из рассмотрения начальный нелинейный участок:



## 2 Ход работы

### 2.1 Проведение измерений

#### 2.1.1 Охлаждение калориметра

Вставляем в калориметр охлаждённый конус. Через 4 минуты после того, как температура в калориметре начинает медленно расти, вынимаем конус и ждём ещё 4 минуты. Калориметр охладился примерно на  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

#### 2.1.2 Определение зависимости сопротивления терморезистора от времени при нагревании пустого калориметра

Включаем нагреватель, после того, как температура в калориметре превысила комнатную на  $9\text{ }^{\circ}\text{C}$ , отключаем цепь спирали нагревателя.

#### 2.1.3 Определение зависимости сопротивления терморезистора от времени при охлаждении пустого калориметра

Продолжаем следить за изменением температуры калориметра. После того, как она уменьшилась на  $2$  градуса по сравнению с максимальной, приступаем к измерению теплоёмкости калориметра вместе с исследуемым телом.

#### 2.1.4 Охлаждение калориметра

Снова охлаждаем калориметр до температуры на  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  ниже комнатной. Вставляем в калориметр исследуемый образец и повторяем заново пункты 2-3.

#### 2.1.5 Исследуемые образцы

Измерения проводим для образцов из алюминия и титана. Массы исследуемых образцов:

$$m_{\text{алюм}} = (294.1 \pm 0.5) \text{ г}$$

$$m_{\text{титан}} = (293.2 \pm 0.5) \text{ г}$$

#### 2.1.6 Окончание измерений

Останавливаем запись в программе. Сохраняем файлы с данным.

## 2.2 Обработка результатов измерений

### 2.2.1 Сопоставление кривых с отметками времени в лабораторном журнале

По результатам измерений имеем общий график 5 (представлен в приложении). Сопоставим кривые с временными отметками:

Событие	Начало, сек	Конец, сек
$T_{heat_1}(t)$ - нагрев пустого калориметра	1000	2500
$T_{cool_1}(t)$ - охлаждение пустого калориметра	2600	3700
$T_{heat_2}(t)$ - нагрев алюминия	4800	6000
$T_{cool_2}(t)$ - охлаждение алюминия	6300	6900
$T_{heat_3}(t)$ - нагрев титана	7800	8600
$T_{cool_3}(t)$ - охлаждение титана	8800	9300

Таблица 1: Сопоставление кривых с отметками времени

Также видим, что комнатная температура менялась менее чем на  $2\text{ K}$ , значит мы можем использовать интегральный способ вычисления теплоёмкости.

### 2.2.2 Теплоёмкость пустого калориметра

Построим кривую  $T_{cool}(t)$  в координатах  $(\ln \frac{T_{cool}-T_k}{T-T_k}, t)$ , где  $T_k$  - среднее значение комнатной температуры за время измерения;  $T$  - температура калориметра в начале кривой. соответствующий график 2:

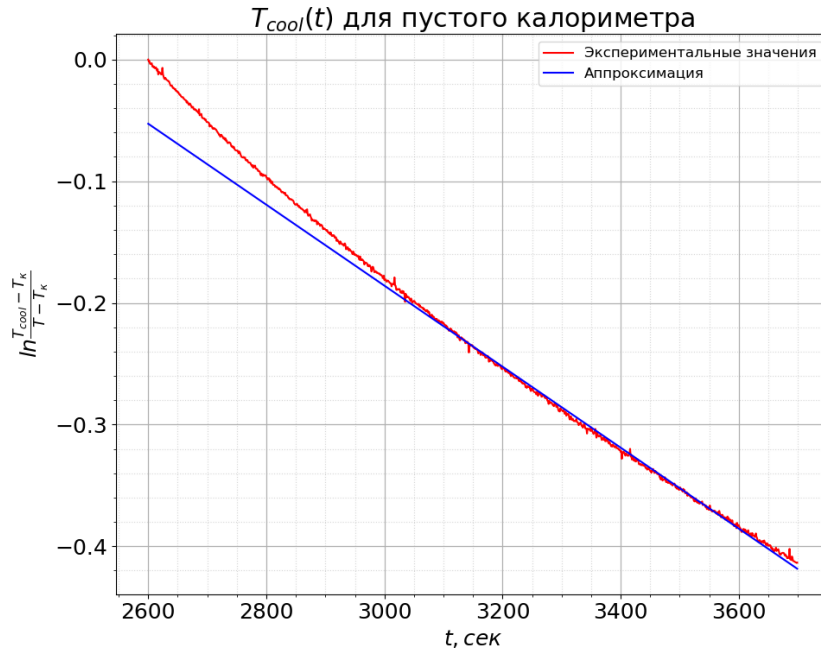


Рис. 2:  $T_{cool}(t)$  для пустого калориметра

Исключим начальный нелинейный участок и определим коэффициент угла наклона прямой по МНК. Из формулы (11)  $\frac{\lambda}{C} = -k$ .

Приборная погрешность  $\frac{\lambda}{C}$ :

$$\sigma_{\frac{\lambda}{C}}^{\text{приб}} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \frac{\lambda}{C}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{1}{t} \frac{1}{T_{cool} - T_k}\right)^2 \sigma_{T_{cool}}^2 + \left(\frac{1}{t} \frac{T_{cool} - T}{(T_{cool} - T_k)(T - T_k)}\right)^2 \sigma_{T_k}^2 + \left(\frac{1}{t} \frac{1}{T - T_k}\right)^2 \sigma_T^2}$$

Итого результат с полной погрешностью:

$$\frac{\lambda}{C} = (33 \pm 2) * 10^{-5} \text{ c}^{-1}$$

Из уравнения (15) ясно, что  $\lambda$  можно найти по углу наклона прямой  $T_{heat} \left( P(1 - e^{-\frac{\lambda}{C}t}) \right)$ . Из этой формулы  $\lambda = \frac{1}{k}$ . Приборная погрешность  $\lambda$  и  $C$ :

$$\sigma_{\lambda}^{\text{приб}} = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{P}\right)^2 \sigma_P^2 + \left(\frac{Pte^{-\frac{\lambda}{C}t}}{T_{heat} - T_{\kappa}}\right)^2 \sigma_{\frac{\lambda}{C}}^2 + \left(\frac{P\frac{\lambda}{C}e^{-\frac{\lambda}{C}t}}{T_{heat} - T_{\kappa}}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\lambda}{T_{heat} - T_{\kappa}}\right)^2 (\sigma_{T_{heat}}^2 + \sigma_{T_{\kappa}}^2)}$$

$$\sigma_C^{\text{приб}} = C \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\frac{\lambda}{P}}}{\frac{\lambda}{P}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\lambda}}{\lambda}\right)^2}$$

Итого результат с полной погрешностью:

$$\lambda = (0.24 \pm 0.02) \frac{\text{Дж}}{\text{К} * \text{с}}$$

$$C_{\text{калориметр}} = \lambda / \frac{\lambda}{C} = (0.73 \pm 0.07) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

### 2.2.3 Теплоёмкость алюминия

Аналогично предыдущему пункту определяем теплоёмкость алюминиевого образца вместе с калориметром, затем вычитаем теплоёмкость калориметра. соответствующий график 3:

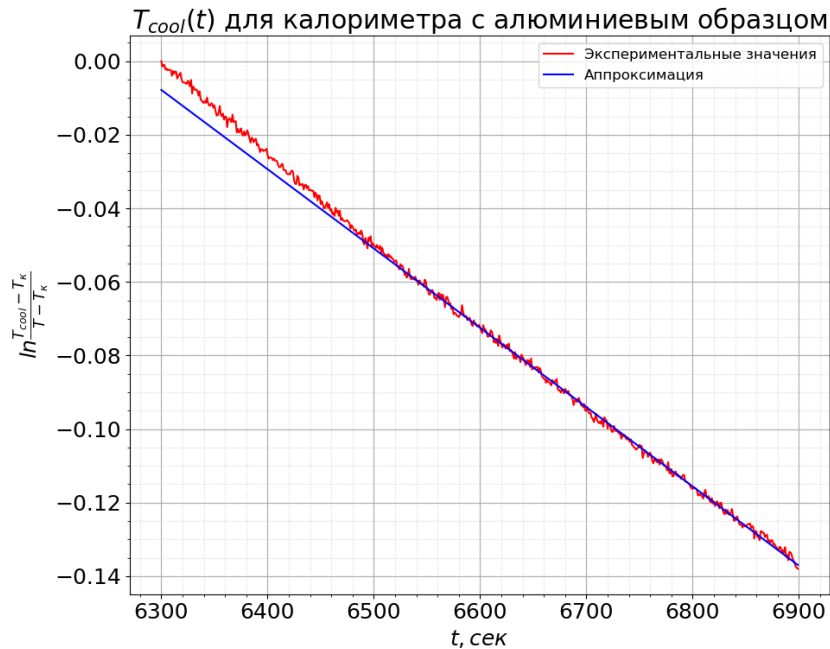


Рис. 3:  $T_{cool}(t)$  для калориметра с алюминиевым образцом

$$\frac{\lambda}{C} = (22 \pm 4) * 10^{-5} \text{ c}^{-1}$$

$$\lambda = (0.21 \pm 0.04) \frac{\text{Дж}}{\text{К} * \text{с}}$$



$$C = \lambda / \frac{\lambda}{C} = (1.0 \pm 0.2) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$C_{\text{алюм}} = C - C_{\text{калориметр}} = (0.2 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{алюм}} = \frac{C_{\text{алюм}}}{m_{\text{алюм}}} = (0.8 \pm 0.9) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

#### 2.2.4 Теплоёмкость титана

Аналогично найдём все нужные значения для титана.

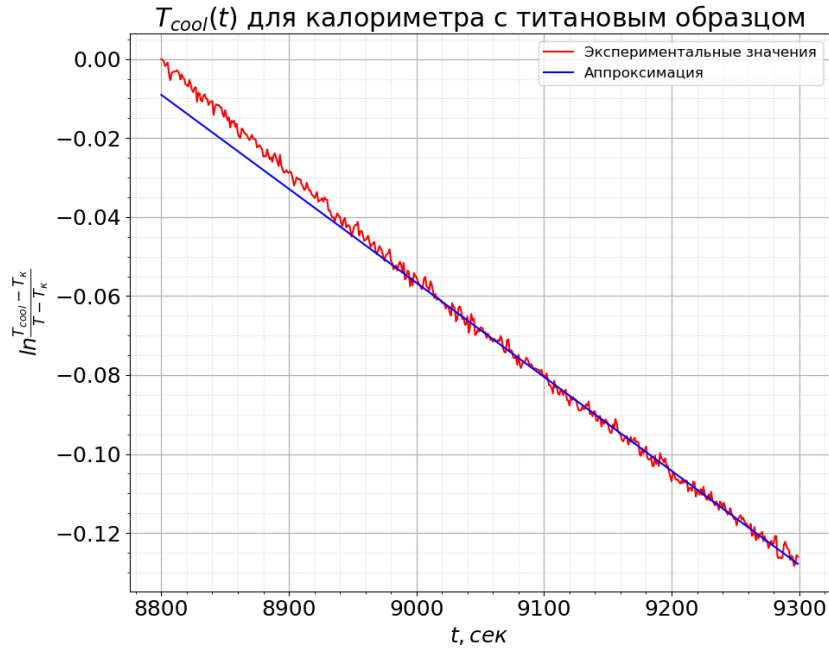


Рис. 4:  $T_{cool}(t)$  для калориметра с титановым образцом

$$\frac{\lambda}{C} = (24 \pm 6) * 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

$$\lambda = (0.19 \pm 0.05) \frac{\text{Дж}}{\text{К} * \text{с}}$$

$$C = \lambda / \frac{\lambda}{C} = (0.8 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$C_{\text{титан}} = C - C_{\text{калориметр}} = (0.1 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{титан}} = \frac{C_{\text{титан}}}{m_{\text{титан}}} = (0.3 \pm 0.27) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

### 2.2.5 Теплоёмкость пустого калориметра дифференциальным методом

Определим теплоёмкость пустого калориметра по формуле (16) в момент, когда температура при нагреве равна комнатной. Возьмём  $dT = 0.5$  K.

$$\sigma_C^{\text{приб}} = C \sqrt{\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\frac{dT_{heat}}{dt}}}{\frac{dT_{heat}}{dt}}\right)^2} = C \sqrt{\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T_{heat}} \sqrt{2}}{dT_{heat}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{dt} \sqrt{2}}{dt}\right)^2}$$

$$C_{\text{калориметр}} = (0.7 \pm 0.2) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

Другой способ: найдём теплоёмкость из уравнения (20). Возьмём  $T_{heat}(t) = T_{cool}(t) = 304.5$  K.

$$C_{\text{калориметр}} = (0.8 \pm 0.2) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

### 2.3 Теплоёмкость алюминия дифференциальным методом

Аналогично предыдущим пунктам.

По формуле (16):

$$C_{\text{алюм}} = (0.2 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{алюм}} = \frac{C_{\text{алюм}}}{m_{\text{алюм}}} = (0.6 \pm 1.1) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

По формуле (20):

$$C_{\text{алюм}} = (0.1 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{алюм}} = \frac{C_{\text{алюм}}}{m_{\text{алюм}}} = (0.7 \pm 1.2) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

### 2.4 Теплоёмкость титана дифференциальным методом

Аналогично предыдущим пунктам.

По формуле (16):

$$C_{\text{титан}} = (0.1 \pm 0.3) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{титан}} = \frac{C_{\text{титан}}}{m_{\text{титан}}} = (0.2 \pm 1.0) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

По формуле (20):

$$C_{\text{титан}} = (0.1 \pm 0.2) \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$c_{\text{титан}} = \frac{C_{\text{титан}}}{m_{\text{титан}}} = (0.3 \pm 1.1) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} * \text{К}}$$

### 3 Вывод

Табличные значения удельных теплоёмкостей для алюминия и титана:

$$c_{\text{алюм}} = 0.902 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$c_{\text{титан}} = 0.530 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Результаты для всех методов в пределах погрешностей совпадают с табличными значениями. Однако относительные погрешности в дифференциальном методе больше. Это объясняется тем, что для определения производной берётся небольшой отрезок графика. Из-за этого большую роль начинает играть приборная погрешность измерения температуры.

Большая погрешность всех результатов объясняется тем, что мы производим вычитание теплоёмкости калориметра из суммарной теплоёмкости калориметра и образца. Из-за того, что теплоёмкость калориметра в несколько раз больше, и получаются погрешности порядка самих величин.

В ходе работы измерили кривые нагревания и охлаждения пустого калориметра и системы «калориметр + твердое тело». Определили коэффициент теплопередачи стенок калориметра. Определили теплоёмкость пустого калориметра и удельные теплоёмкости алюминия и титана.

### 4 Приложение

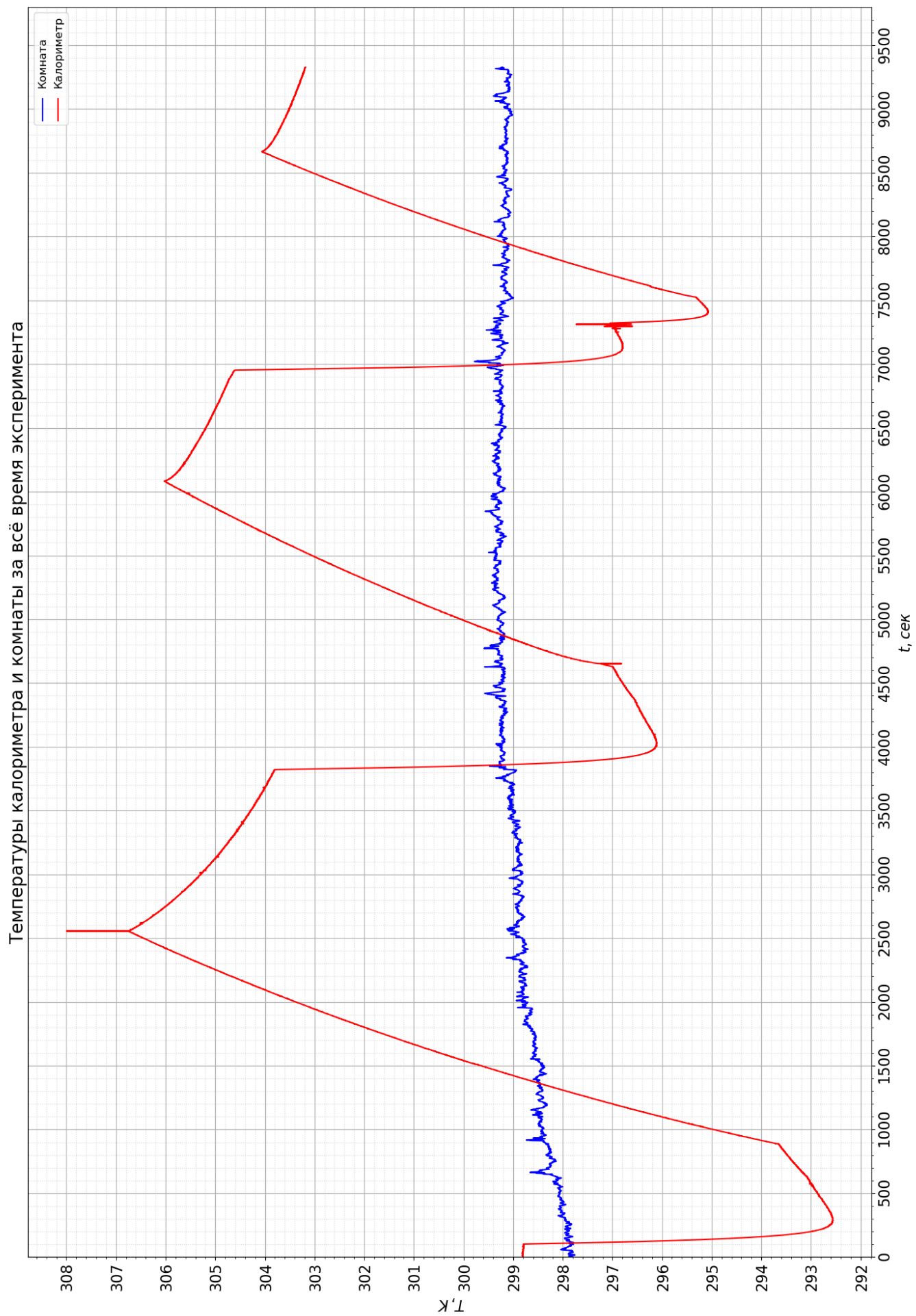


Рис. 5: Температуры калориметра и комнаты за всё время эксперимента