

1.4.8. Измерение модуля Юнга путем акустического резонанса

Комиссаров Данил Б01-307

Ноябрь 2023

1 Основные формулы

$$f_1 = u/2L \quad (1)$$

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{k} \quad (4)$$

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 l} \quad (5)$$

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (6)$$

$$E = c_{\text{ст}}^2 \rho \quad (7)$$

$$\Delta E = E \sqrt{4 \left(\frac{\delta c_{\text{ст}}}{c_{\text{ст}}} \right)^2 + \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2} \quad (8)$$

2 Обработка результатов

2.1 Медь

Предварительно оценим частоту первого резонанса по формуле (1).

$$f_1 = 3.06 \text{ кГц}$$

Путем перестройки звукового генератора был найден первый резонанс $f_1 = 3.151 \text{ кГц}$. На экране наблюдается эллипс.

Измерения (кГц)	1	2	3	4
	3.151	3.152	3.151	3.150

По формулам (2) и (3) находим, что экспериментальная погрешность равна $\sigma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ кГц}$. Или же относительная погрешность по (4): $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4}$. Найдем частоты, на кратных гармониках:

Измерения (кГц)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3.151	6.326	9.482	12.647	15.801	18.970	22.106	25.251	28.386	31.552

Найдем плотность медного стержня $d = (1.185 \pm 0.001) \text{ см}$, $l = (3.05 \pm 0.01) \text{ см}$, $m = (29.437 \pm 0.001) \text{ г}$ по (5).
 $\rho = (8755 \pm 31) \text{ кг/м}^3$.

Определим среднее значение диаметра медного стержня:

Измерения (см)	1	2	3	4
	1.20	1.20	1.19	1.21

$$d_{\text{ср}} = 1.2 \text{ см.}$$

$$\frac{d/2}{l} = 9.9 \cdot 10^{-3} \ll 1 \text{ - стержень тонкий.}$$

Повторим опыты и для других стержней.

2.2 Дюраль

Частоты кратных гармоник:

Измерения (кГц)	1	2	3	4	5	6	7
	4.257	8.537	12.775	17.038	21.289	25.559	29.762

$$d = 1.173 \text{ см}, l = 4.14 \text{ см}, m = 12.443 \text{ г}$$

Плотность стержня (5): $\rho = 2782 \text{ кг/м}^3$.

$$d_{\text{ср}} = 1.17 \text{ см.}$$

$$\frac{d/2}{l} = 9.6 \cdot 10^{-3} \ll 1 - \text{стержень тонкий.}$$

2.3 Сталь

Частоты кратных гармоник:

Измерения (кГц)	1	2	3	4	5	6
	4.123	8.249	12.374	16.505	20.619	24.780

$$d = 1.950 \text{ см}, l = 2.95 \text{ см}, m = 26.017 \text{ г}$$

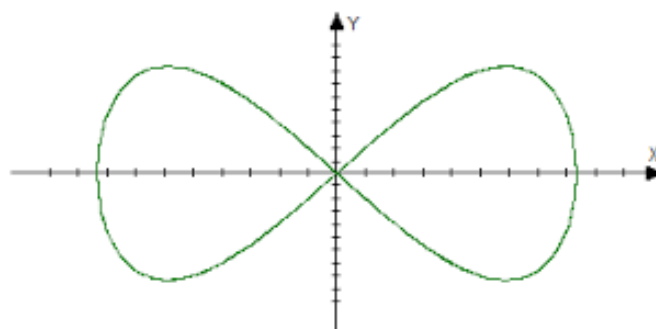
Плотность стержня (5): $\rho = 7673 \text{ кг/м}^3$.

$$d_{\text{ср}} = 1.21 \text{ см.}$$

$$\frac{d/2}{l} = 10^{-4} \ll 1 - \text{стержень тонкий.}$$

2.4 Первая гамоника для дюрали

Модуляция на частоте $f = 1.579 \text{ кГц}$. При этой частоте стержень входит в резонанс. Ось X показывает колебания самого генератора, ось Y показывает колебания с датчика. Стержень имеет собственную частоту $f = 4.257 \text{ кГц}$ - такая же частота сигналов с датчика, а генератор имеет частоту $f/2$. Пока X совершает одно колебание, Y совершает 2 колебания, отсюда и такая фигура.



2.5 Добротность медного стержня

Напряжение при первом резонансе: $U = 13.5 \text{ В}$.

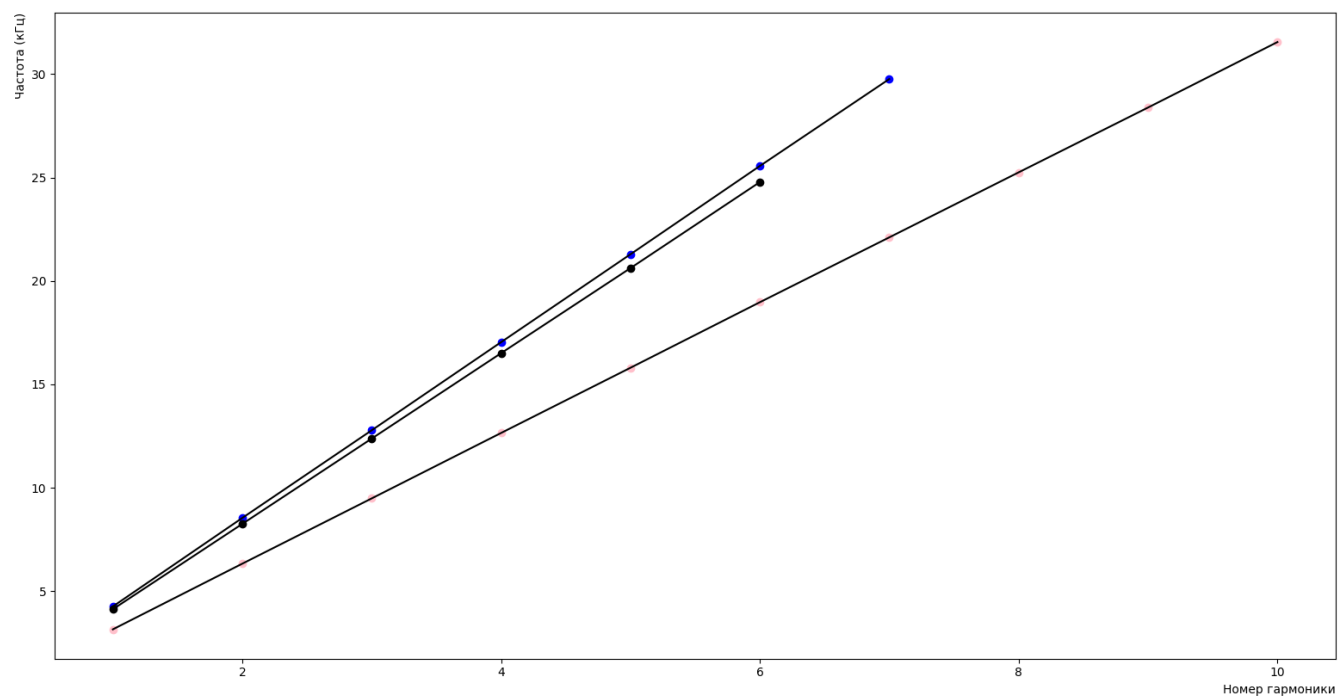
$$\frac{U}{\sqrt{2}} = 9.5 \text{ В.}$$

Частоты при таком напряжении: $\nu = 3.156 \text{ кГц}$, $\nu = 3.146 \text{ кГц}$

$$\Delta f = 10 \text{ Гц. } Q = \frac{f}{\Delta f} = 315.1.$$

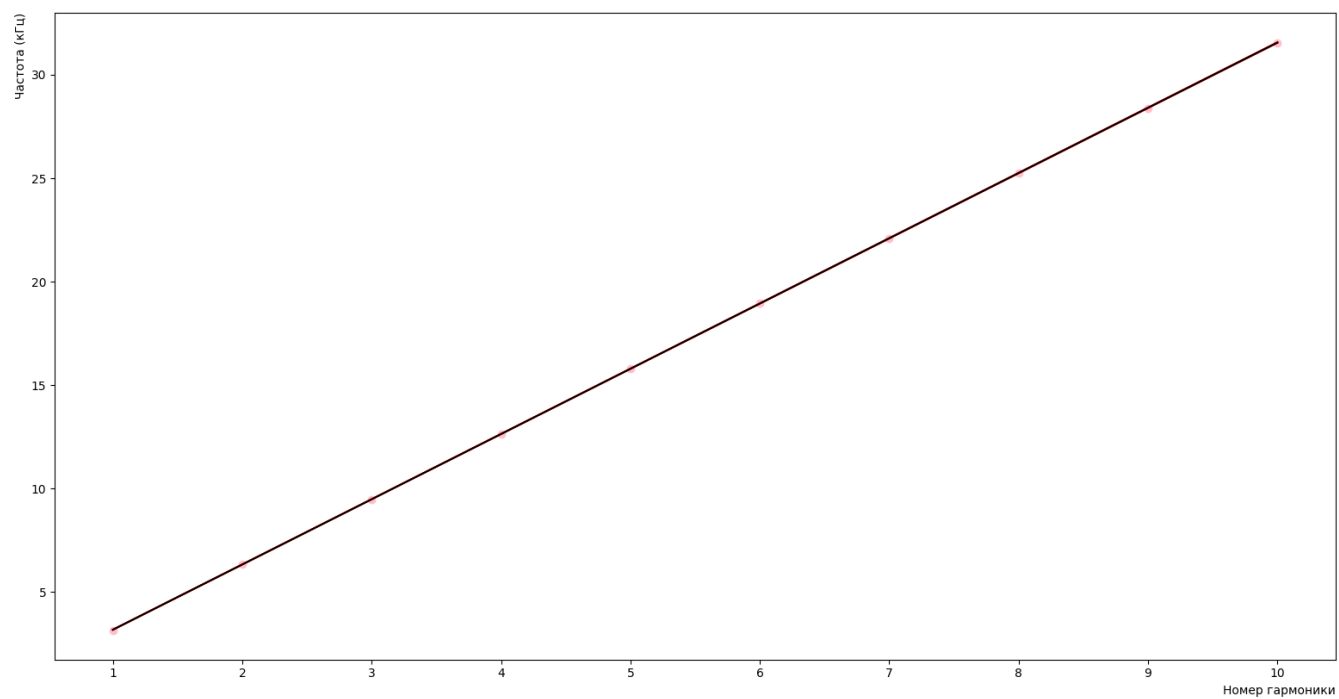
2.6 График частоты

График зависимости частоты от номера гармоники



*верхняя прямая соответствует дюралю, средняя - стали, нижняя - меди.

Ниже график аппроксимированной прямой для меди с погрешностями (прямые погрешностей практически совпадает с аппроксимированной прямой).



2.7 Скорость звука

По (6) скорость звука равна:

Для меди: $u = (3808.8 \pm 8.1) \text{ м/с}^2$ (0.21%)

Для дюралю: $u = (5152.2 \pm 6.1) \text{ м/с}^2$ (0.11%)

Для стали: $u = (4991.7 \pm 3.1) \text{ м/с}^2$ (0.06%)

(погрешность измерения длины стержня пренебрежительно мала, по сравнению с погрешностью $\frac{f_n}{n}$)

2.8 Определение модуля Юнга

Воспользуемся формулами (7) и (8), тогда:

Для меди: $E = (127.0 \pm 0.7) \text{ ГПа}$ (0.55%)

Для дюралю: $E = (73.8 \pm 0.3) \text{ ГПа}$ (0.42%)

Для стали: $E = (191.2 \pm 0.7) \text{ ГПа}$ (0.38%)

3 Вывод

Измерение модуля Юнга путем акустического резонанса является достаточно надежным методом.