

Лабораторная работа 1.3.1
Определение модуля Юнга на основе
исследования деформаций растяжения и
изгиба

Мыздриков Иван Б06-401

6 ноября 2024 г.

1 Аннотация

Цель работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одностороннего сжатия и чистого изгиба; по результатам эксперимента вычислить модуль Юнга.

2 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки

2.1 Теоретические сведения

Растяжение проволоки соответствует напряженному состоянию вдоль одной оси, которое описывается формулой:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Эту формулу можно переписать также в следующем виде:

$$F = k \Delta l, \quad (2)$$

где $k = ES/l$ – жесткость проволоки. Измерения производятся на установке Лермантова. Направим зрительную трубку на зеркальце. Выведем формулу для расчета растяжения длины проволоки по показаниям шкалы прибора (см. рис. 1). Так как мы считаем проволоку слабо растяжимой, справедлива оценка $\Delta l \ll r$, где r – длина рычага. С учетом этого, угол наклона зеркальца к горизонтали можно найти как $\alpha = \Delta l/r$. С другой стороны, из соображений геометрической оптики угол α можно найти как угол между продолжениями соответствующих лучей:

$$\alpha = \frac{n}{2h}, \quad (3)$$

где n – показания шкалы, h – расстояние от шкалы до зеркальца.

Таким образом, удлинение проволоки можно выразить как:

$$\Delta l = n \frac{r}{2h} \quad (4)$$

Отсюда формулу (1) можно переписать как

$$F = \frac{ESr}{2lh} n \quad (5)$$

2.2 Методика измерений

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермонтова, схема которого изображена на рис. 1.

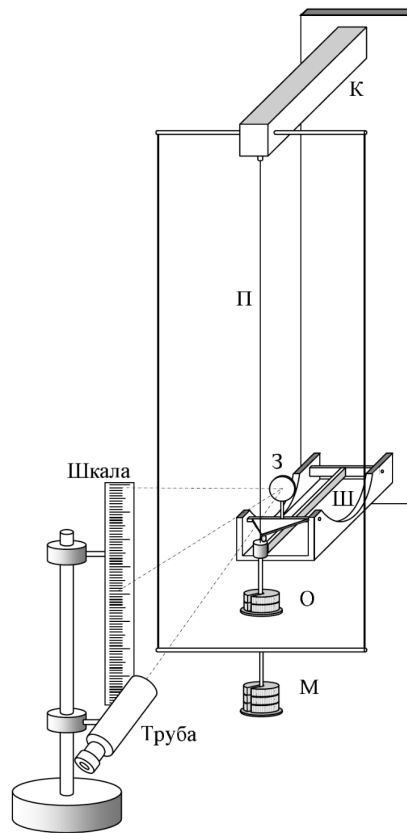


Рис. 1: Прибор Лермантова

2.3 Результаты измерений и обработка данных

1. Сведем характеристики установки в таблицу:

Таблица 1: Параметры прибора Лермантова

$d_{\text{пр}}, \text{ мм}$	$r, \text{ мм}$	$l, \text{ см}$	$h, \text{ см}$
0.46 ± 0.01	15 ± 1	117 ± 2	144.0 ± 2

2. Оценим, сколько грузов можно подвесить к проволоке. Для этого найдем площадь сечения проволоки и погрешность:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 0.166 \text{ мм}^2,$$

$$\sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d} = 0.01 \text{ мм}^2$$

Предельная нагрузка на разрушение:

$$P_{max} = 0.3\sigma_{\text{пр}}S = 4.48 \text{ кг/с},$$

$$\sigma_{P_{max}} = 0.27 \text{ кг/с}$$

Согласно полученному значению, можно подвесить все грузы.

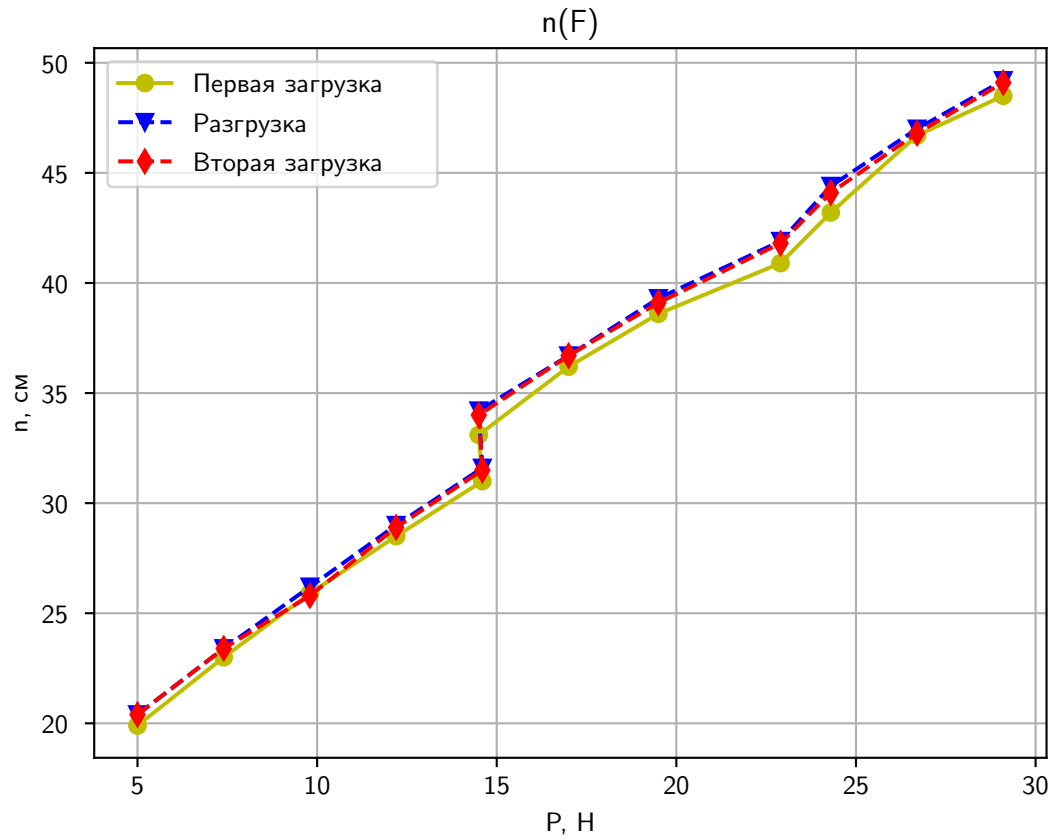
3. Перейдем к измерениям. Загрузим и разгрузим платформу:

Таблица 2: Зависимость показаний шкалы от нагрузки

Δm , гр	P , Н	$n_1 \downarrow$, см	$n_1 \uparrow$, см	$n_2 \downarrow$, см
503.4	5.0	19.9	49.2	20.4
245.5	7.4	23.0	47.0	23.4
245.6	9.8	25.9	44.4	25.8
246.1	12.2	28.5	41.9	28.9
245.6	14.6	31.0	39.3	31.5
244.3	14.5	33.1	36.7	34.0
245.6	17.0	36.2	34.2	36.7
245.3	19.5	38.6	31.6	39.1
245.8	22.9	40.9	29.0	41.8
245.5	24.3	43.2	26.2	44.1
243.6	26.7	46.7	23.4	46.8
245.3	29.1	48.5	20.4	49.1

4. Построим графики зависимости $n(F)$ для каждого эксперимента.

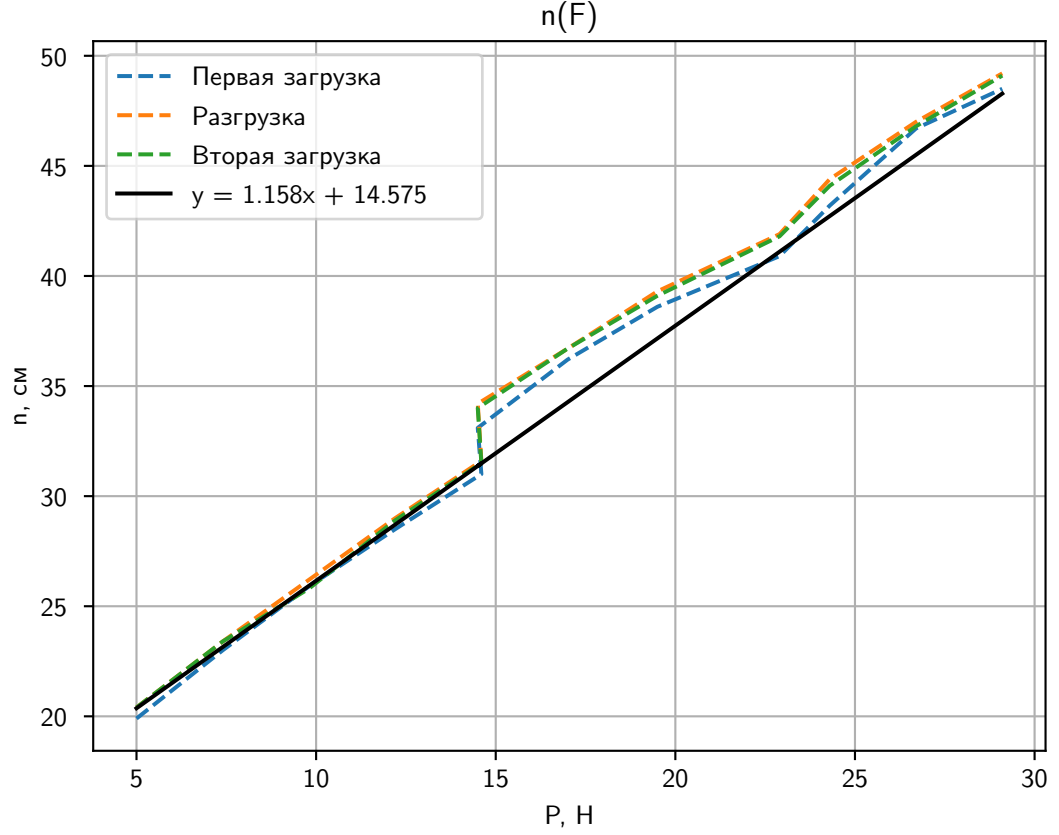
Рис. 2: Графики зависимости для $n(F)$



Видим, что линейность сохраняется только на первых 5-ти измерениях (это может быть связано с прогибанием других компонентов прибора, кроме проволоки):

Опираясь на них найдем модуль Юнга и построим линейную аппроксимацию:

Рис. 3: Графики зависимости для $n(F)$



$$k = \frac{2lh}{ESr} \quad (6)$$

Отсюда

$$E = \frac{2lh}{kSr} \quad (7)$$

В нашем случае логично использовать усредненное значение $\langle k \rangle = 1.158 \cdot 10^{-2}$ м/Н, т. к. у нас есть график для уменьшения и увеличения нагрузки. Погрешность можно рассчитать как

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k\sqrt{N-2}} \sqrt{\frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2} - k^2} = 0.03$$

Найдем модуль Юнга и его погрешность:

$$E = 177 \text{ ГПа},$$

$$\varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_l^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_S^2 + \varepsilon_r^2} \approx \sqrt{\varepsilon_k^2 + \varepsilon_S^2 + \varepsilon_r^2} \approx 0.10, \sigma_E = E\varepsilon_E \approx 16 \text{ ГПа}$$

3 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

3.1 Теоретические сведения

Модуль Юнга материала стержня E связан с величиной прогиба y_{max} как:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{max}} \quad (8)$$

где P - нагрузка на стержень, l - расстояние между точками опоры, a - ширина балки, b - высота балки.

3.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорными призмами А и Б (рис. 2). На ребра призм опирается исследуемый стержень В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять величину прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

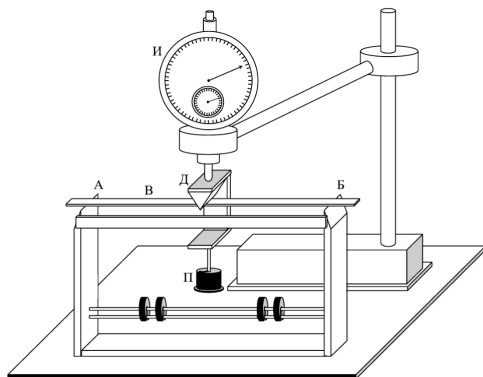


Рис. 4: Схема установки для измерения модуля Юнга

3.3 Результаты измерений и обработка данных

1. Измерим расстояние между опорами $l = (53.5 \pm 0.1)$ см.
2. Измерим ширину a и высоту b балок из различных материалов при помощи штангенциркуля:

Таблица 3: Размеры исследуемых балок

	Дерево	Латунь
a , мм	20.1	21.4
b , мм	9.9	4.0

3. Перейдем непосредственно к измерениям. Обозначим за Δm массу последнего положенного груза. Результаты измерений приведены в таблице 5.
4. Построим графики для каждого из материалов.

Рис. 5: Графики для деревянной балки

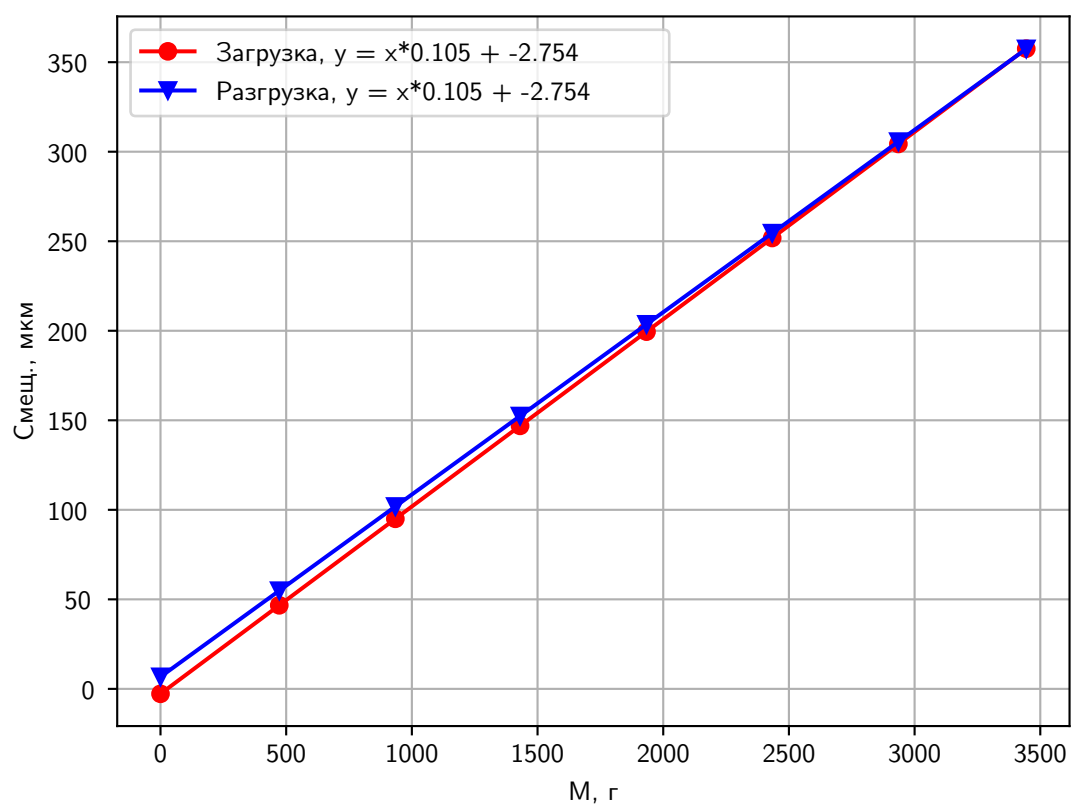


Рис. 6: Графики для латунной балки

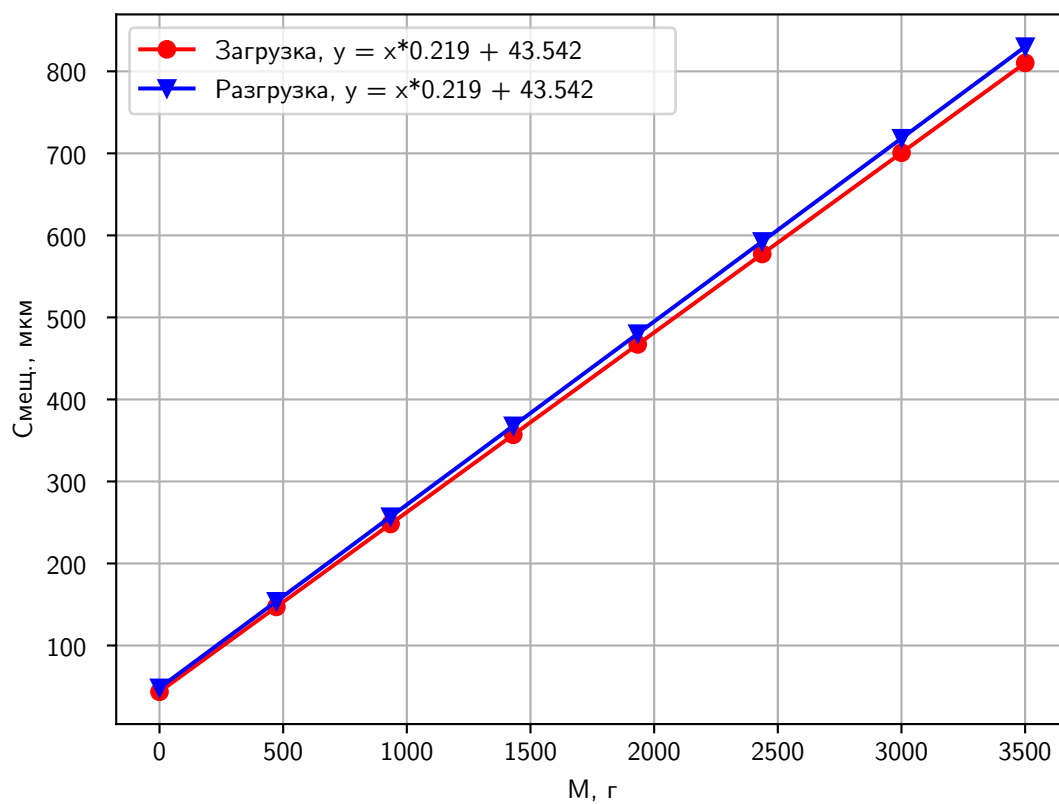


Таблица 4: Экспериментальные данные для дерева

Смещение увел. массы, мкм	Смещение умен. массы	Изменение массы
0	359	0
45	306	472.5
93	254	461.8
147	204	496.2
200	152	503
251	98	500
305	51	502
358	13	508.7

Таблица 5: Экспериментальные данные для латуни

Смещение увел. массы, мкм	Смещение умен. массы	Изменение массы
33	802	0
138	702	472.5
254	632	461.8
370	502	496.2
476	375	503
590	260	503.5
690	145	563.5
800	30	500

5. Модуль Юнга через угловой коэффициент γ можно вычислить по формуле

$$E = \frac{\gamma l^3}{4ab^3} \quad (9)$$

Отсюда погрешность:

$$\varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_\gamma^2 + (3\varepsilon_l)^2 + \varepsilon_a^2 + (3\varepsilon_b)^2}$$

6. Сведем все средние значения угловых коэффициентов и модулей Юнга в таблицу:

Таблица 6: Значения модуля Юнга

Материал	Дерево	Латунь
γ , Н/мм	10.5	21.6
ε_γ	0.01	0.01
a , мм	20.1	21.4
b , мм	9.9	4.0
E , ГПа	20.6	60.3
ε_E	0.011	0.012

4 Обсуждение результатов

Достаточно сравнить полученные результаты с табличными значениями модуля Юнга ГПа, $E_{\text{лт}} = 95$ ГПа (источник <https://en.wikipedia.org/>

[wiki/Young%27s_modulus](#)). Видим явную ошибку в измерении латуни, при том порядка $2/3$.