Лабораторная работа 1.4.1
Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Дербенев Никита Максимович

26 октября 2023

Цель работы: Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

В работе используются:

1. Трифилярный подвес
2. Штангенциркуль
3. Линейка
4. Счетчик числа колебаний и периода
5. Набор тел

Ход работы:

1. Проверим, достаточно хорошо ли выполняется соотношение $T \gg \tau$. Измерим для пустой платформы τ - время уменьшения амплитуды колебаний в 2 раза для угла $30°, 15°$ и приблизительный период колебаний (табл. 1):

   Таблица 1: Измерения τ, T

τ_{30}, c	τ_{15}, c	T, c
335	379	4.4

   Видно, что результаты отличатся более, чем в 70 раз, следовательно делаем вывод, что соотношение выполняется хорошо и потери в системе достаточно маленькие.

2. Найдем рабочий диапазон амптитуд колебаний. Для этого будем уменьшать амплитуду колебаний до тех пор, пока период колебаний не перестанет зависеть от амплитуды. Измерим период и занесем в табл. 2:

   Таблица 2: Измерения амплитуды

φ	$30°$	$15°$	$10°$	$7°$	$5°$
T, c	4.48	4.39	4.37	4.36	4.36

   Как видим, период колебаний перестает изменяться при $\varphi = 7°$, значит можно использовать его для дальнейших измерений. Использовать меньший угол не имеет смысла, так как точность измерений от этого не увеличивается, а сложность измерений возрастает.

3. Определим необходимое количество колебаний для измерений периода с точностью $\varepsilon_T = 0.5\%$.

   $$N = \frac{\sigma_T}{T\varepsilon_T} < 1$$

   Для надежности возьмем $N = 5$, так как кроме систематической, измерения могут содержать случайную погрешность (особенности счетчика).

Таблица 3: Параметры установки

	Величина	σ	ε
l, мм	2154.0	2	0.0009
z_0, мм	2151.0	2	0.0009
r, мм	30.5	0.3	0.0098
R, мм	114.6	0.5	0.0004
m, г	934.7	0.5	0.0005

4. Измерим параметры установки l, R и r, m их погрешности (табл.3). Найдем z_0 по формуле:

$$z_0 = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{2154^2 - 114.6^2} = (2151 \pm 2) \text{ мм}$$

Вычислим константу k для данной установки и ее погрешность:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 0.404 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{c^2}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_g + \varepsilon_R + \varepsilon_r + \varepsilon_{z_0} \approx 0.0111$$

$$\sigma_k = k\varepsilon_k \approx 0.037 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{c^2}$$

$$k = (0.40 \pm 0.04) \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{c^2}$$

5. Опрелелим момент инерции ненагруженной платформы I_0:

$$I_0 = kmT^2 \approx 7.11 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

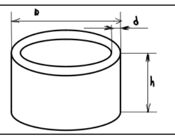
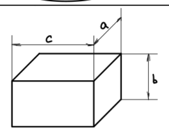
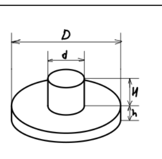
$$\varepsilon_{I_0} = \varepsilon_k + \varepsilon_m + 2\varepsilon_T \approx 0.0216$$

$$\sigma_{I_0} = I_0 \varepsilon_{I_0} \approx 0.154 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_0 = (7.11 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

6. Измерим параметры имеющихся тел:

Таблица 4: Параметры тел

№	Схема	Параметры	T, c	$I + I_0, 10^{-3}$ кг · м^2	$I, 10^{-3}$ кг · м^2	$I_{\text{теор}}, 10^{-3}$ кг · м^2
1		$h = (55.4 \pm 0.1)$ мм $d = (3.9 \pm 0.1)$ мм $D = (158.5 \pm 0.1)$ мм $m = 748.0$ г	4.150	11.59	4.48 ± 0.25	4.58
2		$a = (26.9 \pm 0.1)$ мм $b = (26.9 \pm 0.1)$ мм $c = (208.5 \pm 0.1)$ мм $m = 1177.5$ г	3.69	11.56	4.45 ± 0.25	4.33
3		$d = (20.0 \pm 0.1)$ мм $D = (158.5 \pm 0.1)$ мм $h = (7.0 \pm 0.1)$ мм $H = (30.5 \pm 0.1)$ мм $m = 1122.9$ г	3.584	10.57	3.46 ± 0.23	3.30
$1 + 3$		m = 1870.9 г	3.664	15.07	7.96 ± 0.33	7.88

Расчитаем теоретические значения моментов инерции тел и запишем в табл. 4:

$$I_1 = \frac{1}{2} m \left(r_1^2 + r_2^2\right) = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right) = 4.58 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m \left(a^2 + c^2\right) = 4.33 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$m_1 = m\frac{V_1}{V} = m\frac{d^2H}{d^2H + D^2h}$$
$$m_2 = m\frac{V_2}{V} = m\frac{D^2h}{d^2H + D^2h}$$
$$I_3 = \frac{1}{8}m_1d^2 + \frac{1}{8}m_2D^2 = \frac{1}{8}m\frac{d^4H + D^4h}{d^2H + D^2h} = 3.30 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

7. Измерим моменты инерций всех тел и запишем в табл. 4. Момент инерции и его погрешность расчитаем по формуле:

$$I = k(m_0 + m)T^2 - I_0$$
$$\sigma_I = \sigma_{I_0} + \sigma_I = \varepsilon_{I_0}I_0 + \varepsilon_{I_0}I = \varepsilon_{I_0}(I_0 + I)$$

Как видим, все измеренные моменты инерции I_i не выходят за пределы погрешности σ_{I_i}.

8. Измерим момент инерции тел 1 и 3 вместе, результаты запишем в табл. 4. Как видно из таблицы, аддитивность моментов инерции соблюдается, значение лежит в пределе допустимой погрешности:

$$I_{1+3} = (7.96 \pm 0.33) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$
$$I_1 + I_3 = (7.94 \pm 0.48) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

9. Поместим на платформу диск, разрезанный по диаметру, горизонтально. Постепенно раздвигая половинки диска так, чтобы их общий центр масс все время оставался на оси вращения платформы, снимем зависимость момента инерции системы I от расстояния h каждой из половинок до центра платформы. Масса грузиков $m = 1.336$ кг. Расчитаем моменты инерции по формуле и запишем в табл. 5:

$$I = k(m + m_0)T^2 - I_0$$

Таблица 5: Сдвиг половинок цилиндра

№	h, мм	T, с	$I, 10^{-3}$ кг · м^2	T, с	$I, 10^{-3}$ кг · м^2
1	0	3.094	1.58	3.012	1.13
2	5	3.098	1.61	3.020	1.17
3	10	3.116	1.71	3.040	1.29
4	15	3.142	1.86	3.068	1.44
5	20	3.188	2.12	3.104	1.64
6	25	3.226	2.34	3.164	1.98
7	30	3.294	2.75	3.222	2.32
8	35	3.370	3.21	3.298	2.77
9	40	3.444	3.66	3.382	3.28
10	45	3.550	4.34	3.466	3.80
11	50	3.634	4.88	3.562	4.41

Построим график зависимости $I(h^2)$. По графику видно, что он представляет собой линейную зависимость $I = kh^2 + b$.

По формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$I(h) = I + mh^2$$

Найдем коэффициенты по МНК:

$$I = b = (1.565 \pm 0.009) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$
$$m = k = (1.335 \pm 0.011)\ \text{кг}$$

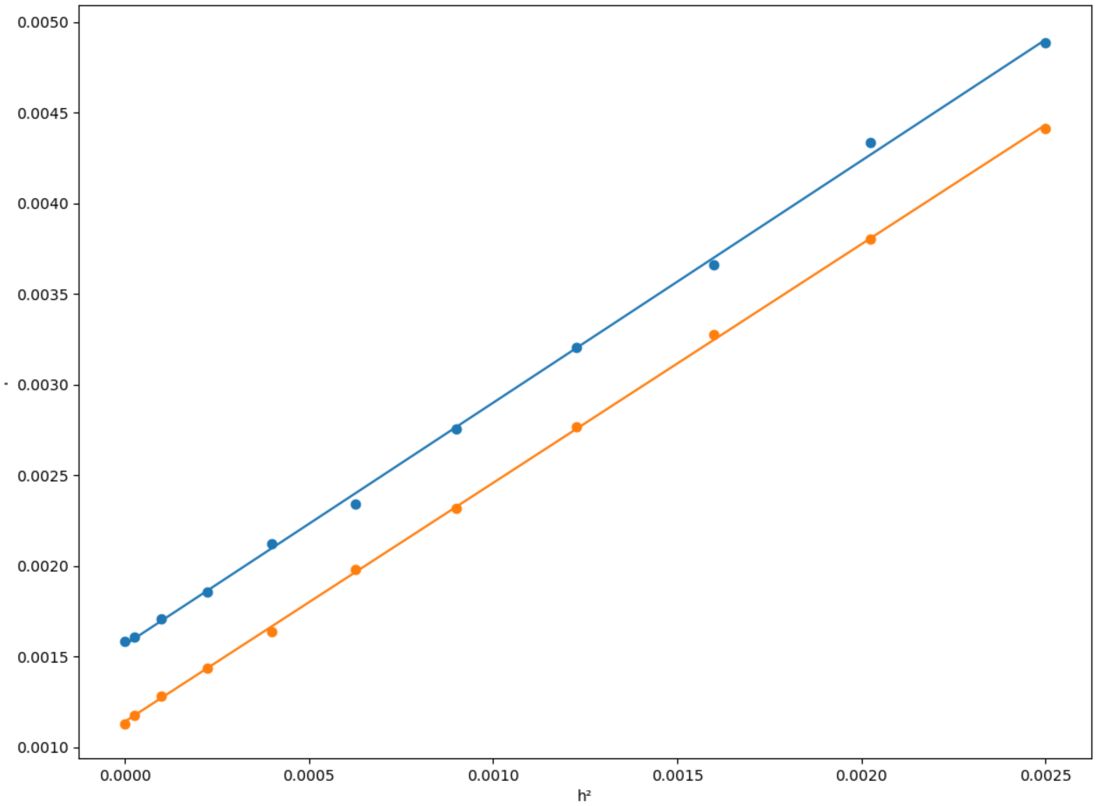
10. Повторим измерения для вертикального положения половинок, запишем в табл. 5.

Найдем коэффициенты по МНК:

$$I = b = (1.142 \pm 0.005) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$
$$m = k = (1.336 \pm 0.006)\ \text{кг}$$

Как видно из эксперимента, формула Гюйгенса-Штейнера работает, а массы цилиндра, вычисленные по МНК, лежат в пределах допустимой погрешности.

Рис. 1: Графики зависимостей $I(h^2)$ для разных положений половинок



Вывод С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью $\varepsilon_{I_0} \approx 2.2\%$. Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c –момент инерции тела относительно центра, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).