

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Лабораторная работа № 3.6.1
(Общая физика: электричество и магнетизм)

Спектральный анализ электрических сигналов

Работу выполнил:
Иванов Кирилл, 625 группа

г. Долгопрудный
2017 год

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

Оборудование: анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

1. Теоретическая введение

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

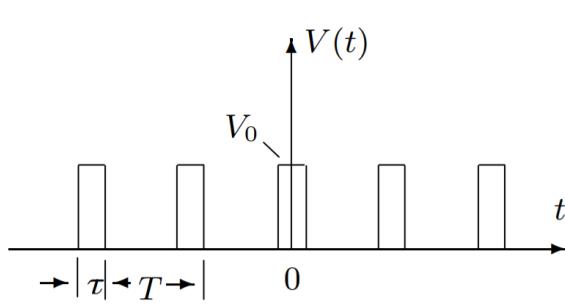


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

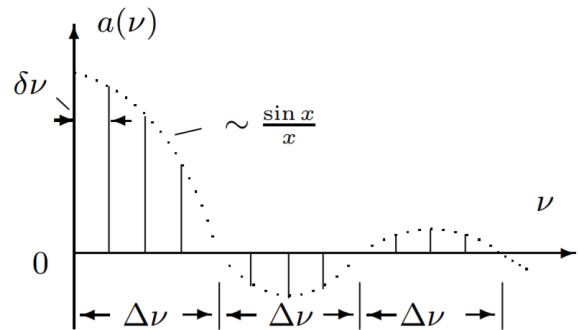


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (1)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

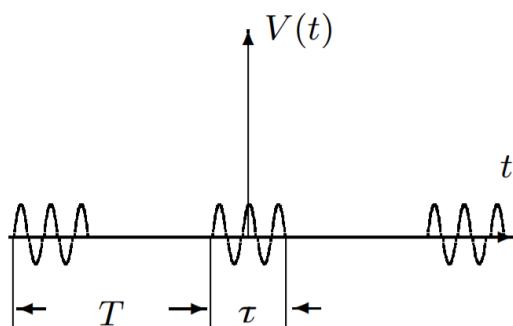


Рис. 3: Последовательность цугов

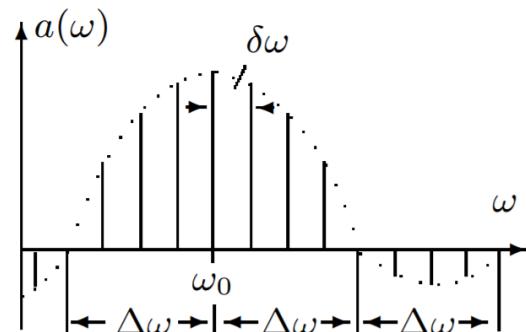


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

3. Амплитудно-модулированные колебания. Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (2)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (3)$$

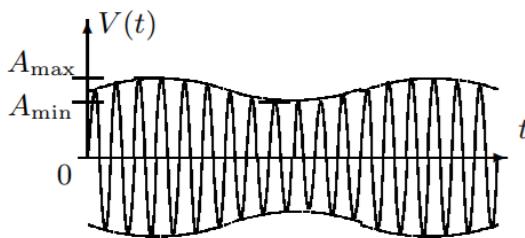


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

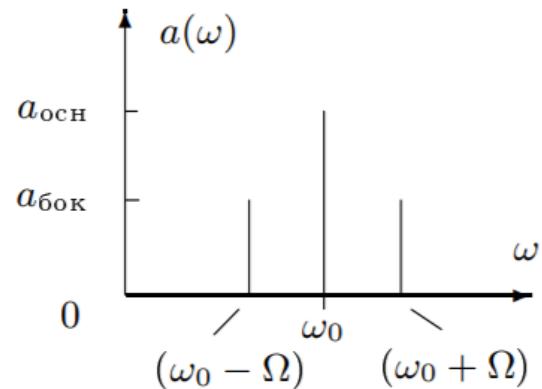


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

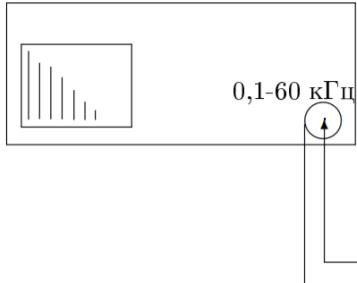
Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a_{\text{бок}} = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

2. Экспериментальные установки

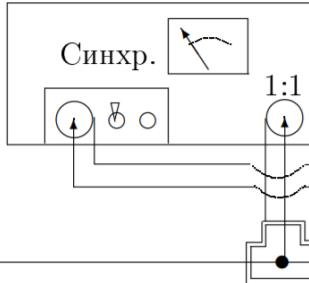
4. Экспериментальная установка А для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 7. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подается на вход анализатора спектра и одновременно на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подается также сигнал

синхронизации, запускающий ждущую развертку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

Анализатор спектра СК4-56



Генератор Г5-54



Осциллограф GOS-620

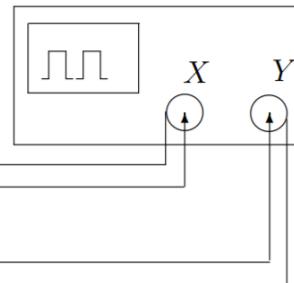


Рис. 7: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

5. Экспериментальная установка Б для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний (рис. 8) Генератор Г6-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) генератора Г6-34 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется - "нарезается" на отдельные куски - цуги. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход Y осциллографа. Сигнал синхронизации подается на осциллограф с генератора импульсов.

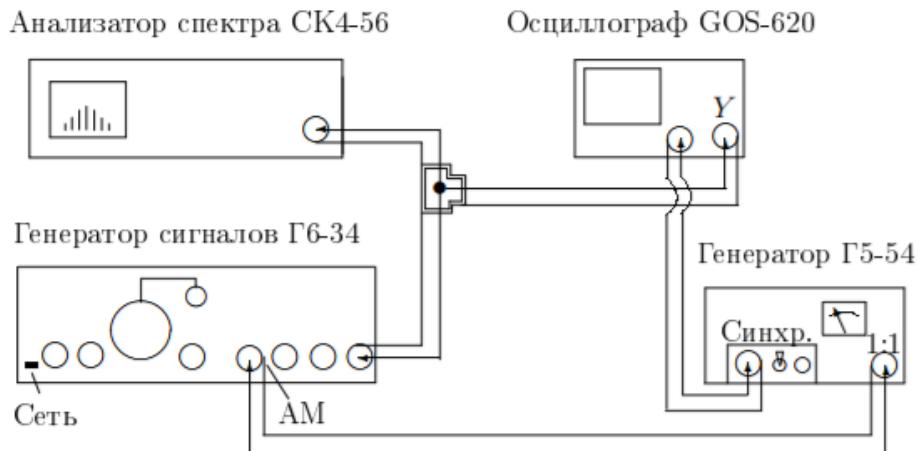


Рис. 8: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

6. Экспериментальная установка В для исследования амплитудно - модулированного сигнала (рис. 9). В генератор сигналов встроен модуляционный генератор, который расположен в левой части Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f_{\text{мод}} = 1 \text{ кГц}$ подается с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

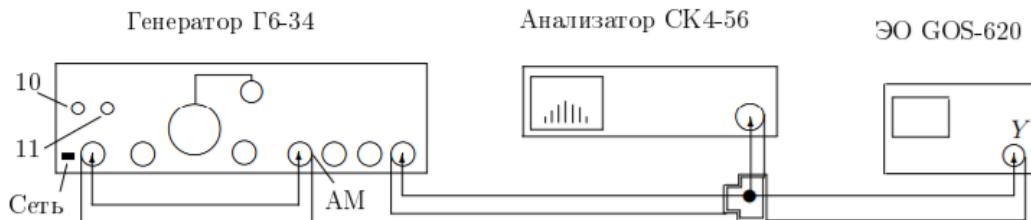


Рис. 9: Схема для исследования спектра высокочастотного гармон. сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармон. сигналом

3. Ход работы

3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Соберем схему согласно рис. 7 и включим в сеть только генератор Г5-54. Установив на анализаторе режим работы с однократной развёрткой, получим на его экране спектр импульсов с параметрами $f_{\text{повт}} = 103 \text{ Гц}$; $\tau = 25 \text{ мкс}$; частотный масштаб $m_x = 5 \text{ кГц/дел}$. Полученная картина представлена на рис. 10.

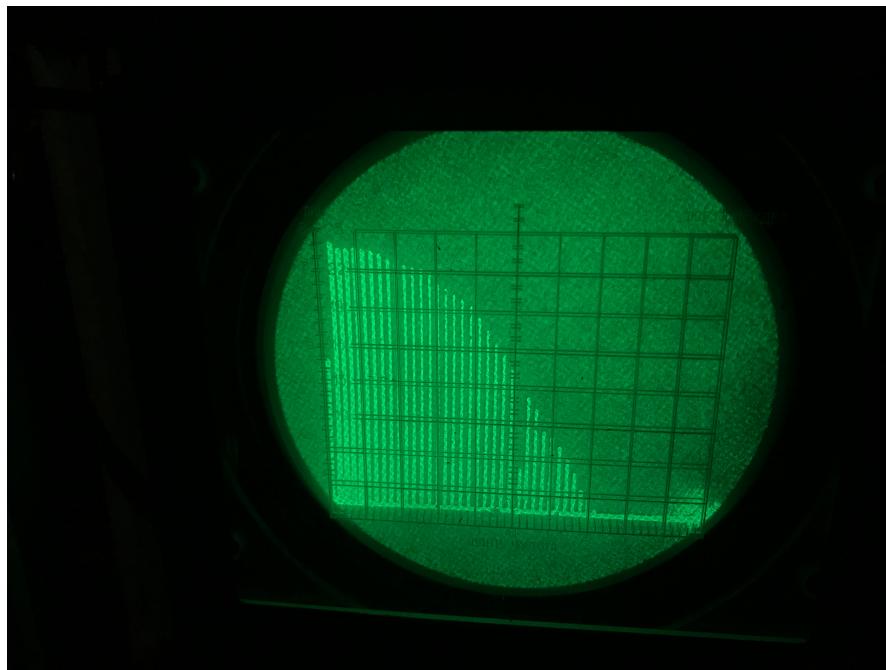
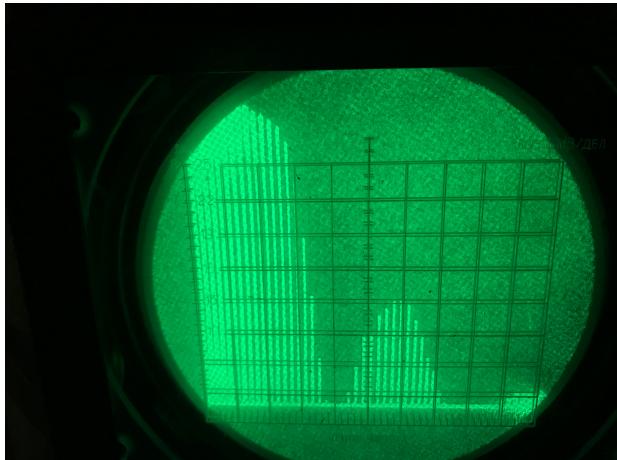
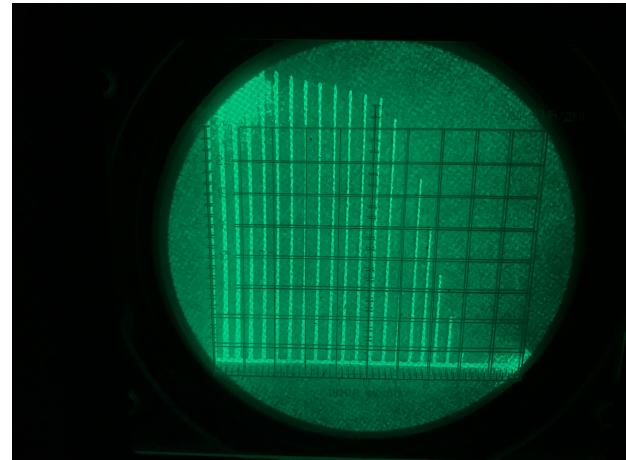


Рис. 10: Спектр прямоугольных импульсов

При увеличении длительности импульсов τ вдвое на экране получаем следующую картину (рис. 11), а при увеличении вдвое $f_{\text{повт}}$ — рис. 12. Таким образом, в первом случае уменьшилась ширина спектра, а во втором — увеличилось расстояние между компонентами спектра.

Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от длительности импульсов, оставляя неизменным $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$. Результаты занесем в таблицу 1. Построим график зависимости $\Delta\nu \left(\frac{1}{\tau} \right)$.

Рис. 11: Спектр прямоугольных импульсов при $\tau=50 \text{ мкс}$ Рис. 12: Спектр прямоугольных импульсов при $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$

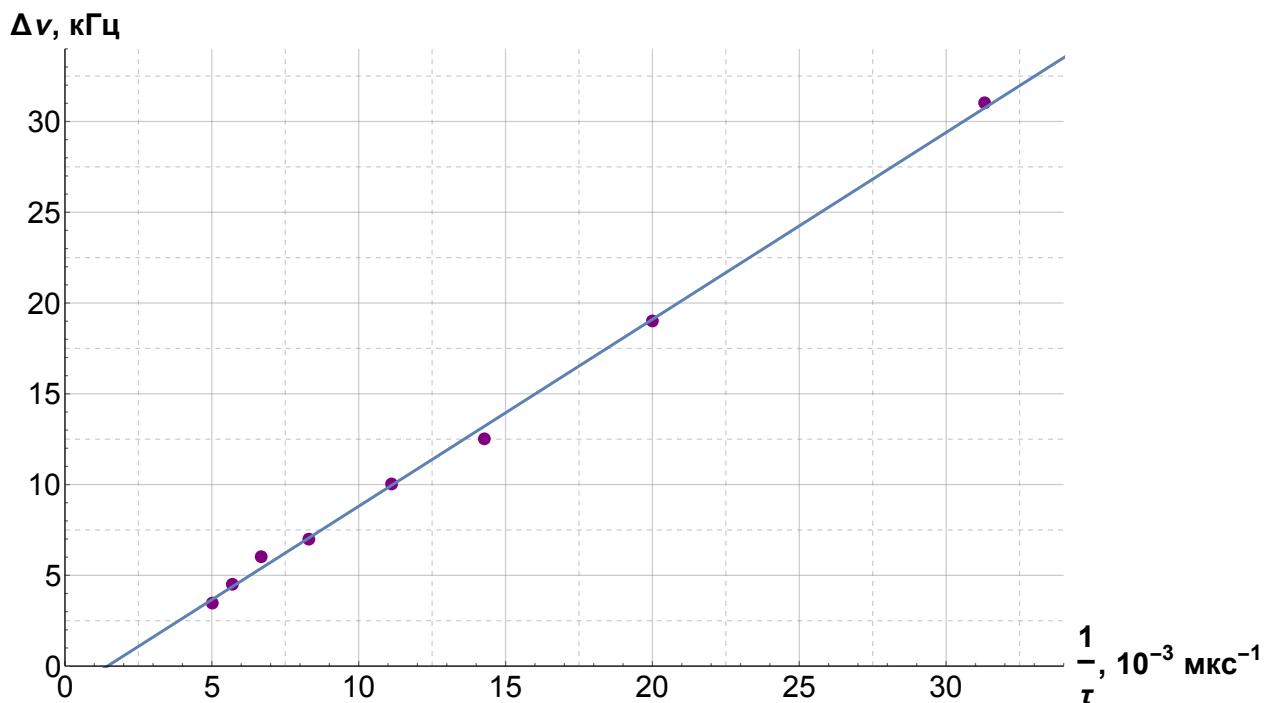
Из него (рис ??) получем коэффициент наклона аппроксимированной прямой $y = ax + b$:

$$a = 1,029 \pm 0,017$$

Это соответствует соотношению неопределённости (1).

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от длительности импульсов

N	τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\frac{1}{\tau}$, 10^{-3} мкс $^{-1}$
1.	32.	31.0	31.3
2	50	19.0	20.0
3	70	12.5	14.3
4	90	10.0	11.1
5	120	7.0	8.3
6	150	6.0	6.7
7	175	4.5	5.7
8	200	3.5	5.0

Рис. 13: График зависимости $\Delta\nu \left(\frac{1}{\tau} \right)$.Таблица 2: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate	Standard Error
a	1.029	0.017
b	-1.497	0.268

3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Соберём схему, изображённую на рис. 8. Установив частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц, посмотрим, как изменяется вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое (т.е. при $\tau = 50, 100$

мкс, $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$). Получаем, что ширина спектра уменьшится, а модули спектра (амплитуда) увеличится.

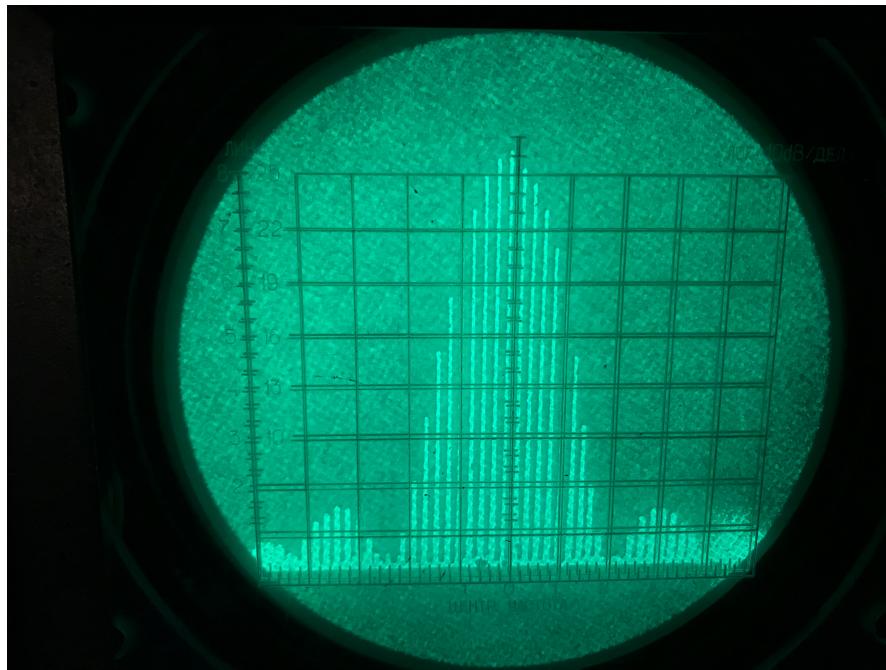


Рис. 14: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$

При фиксированных значениях $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$ и частотном масштабе $m_x = 5 \text{ кГц}/\text{дел}$ посмотрим, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 (на генераторе Г6-34 $\nu_0 = 10, 25, 40 \text{ кГц}$). Результаты отразим на рисунках 14 – 16.

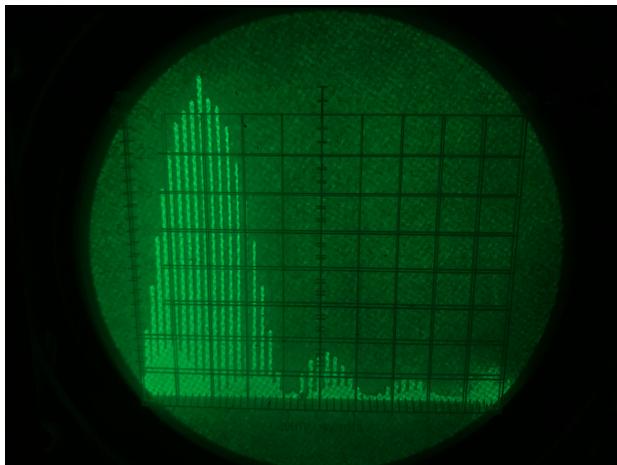


Рис. 15: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 10 \text{ кГц}$

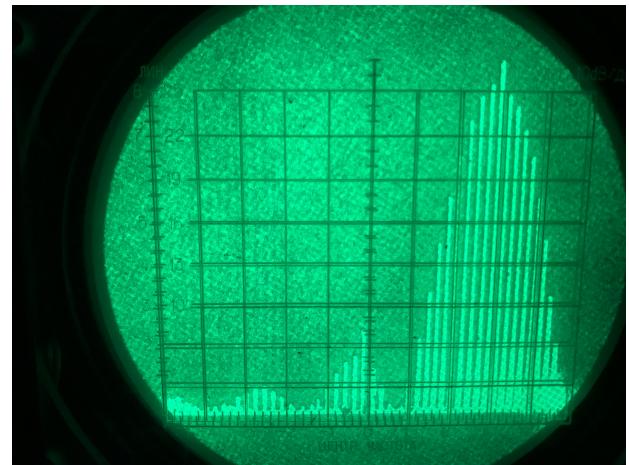


Рис. 16: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 40 \text{ кГц}$

При фиксированной длительности импульсов $\tau = 50 \text{ мкс}$ исследуем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$). Проведем измерения для 5 – 6 значений частоты $f_{\text{повт}}$ в диапазоне 1 – 8 кГц, подбирая горизонтальный масштаб m_x , удобный для измерений. Результаты занесем в таблицу 3 и построим график зависимости расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$ (рис ??).

Таблица 3: Зависимость расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$

N	$f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$	$\delta\nu, \text{ кГц}$
1	1.0	1.2
2	2.0	2.3
3	3.5	3.7
4	5.0	5.6
5	6.5	7.2
6	8.0	9.0

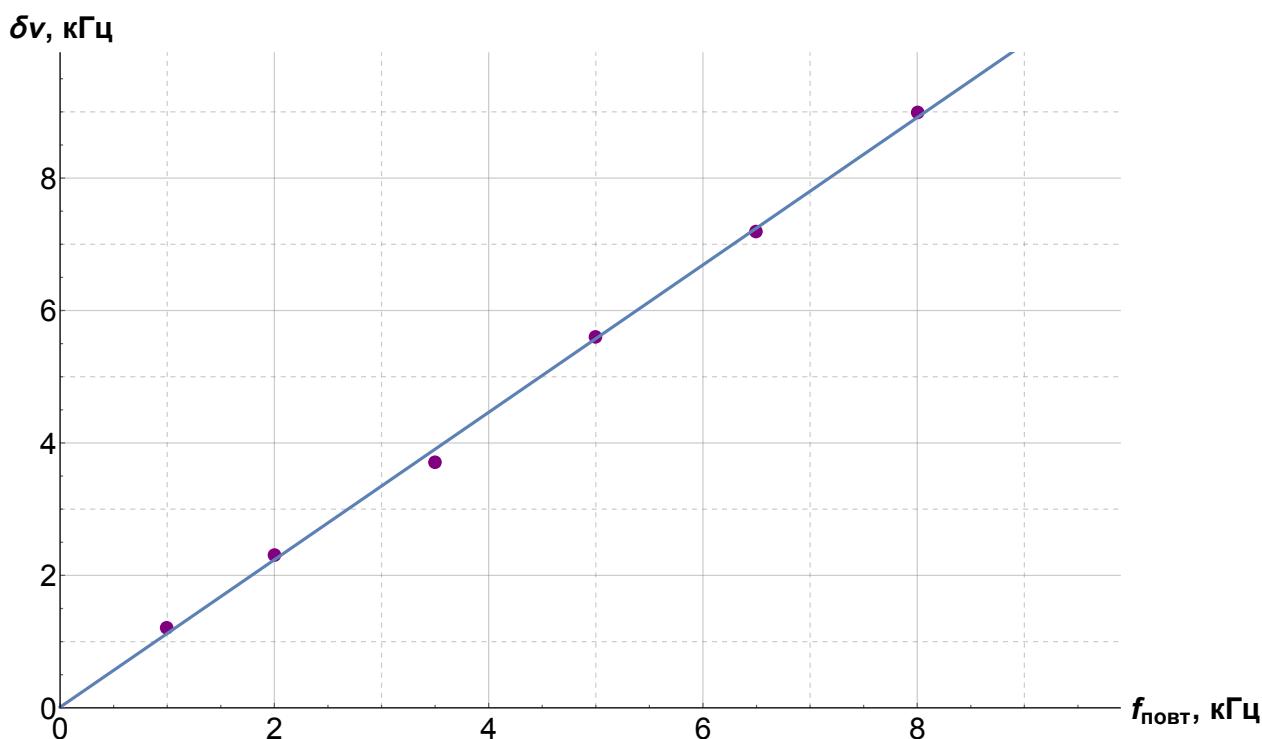


Рис. 17: График зависимости расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$

Таблица 4: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate	Standard Error
a	1.10	0.02
b	0.01	0.10

Из графика видно, что при стремлении частоты повторения к нулю стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Соберем схему, изображённую на рис. 9 Изменяя глубину модуляции на Г6-34, исследуем зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $\left(\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}\right)$ от глубины модуляции m , которая находится из отношения амплитуд на осциллографе по формуле (2). Результаты занесем в таблицу 5 и построим график рис. 18.

Таблица 5: Зависимость отношения амплитуд спектра от глубины модуляции

N	A_{min}	A_{max}	$A_{\text{осн}}$	$A_{\text{бок}}$	m	$\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$
1	1.0	1.8	6.0	1.1	0.29	0.18
2	0.6	2.0	6.3	2.0	0.54	0.32
3	0.4	2.3	6.5	2.7	0.70	0.42
4	0.2	2.5	6.3	3.2	0.85	0.51
5	0.8	1.8	6.3	1.5	0.38	0.24

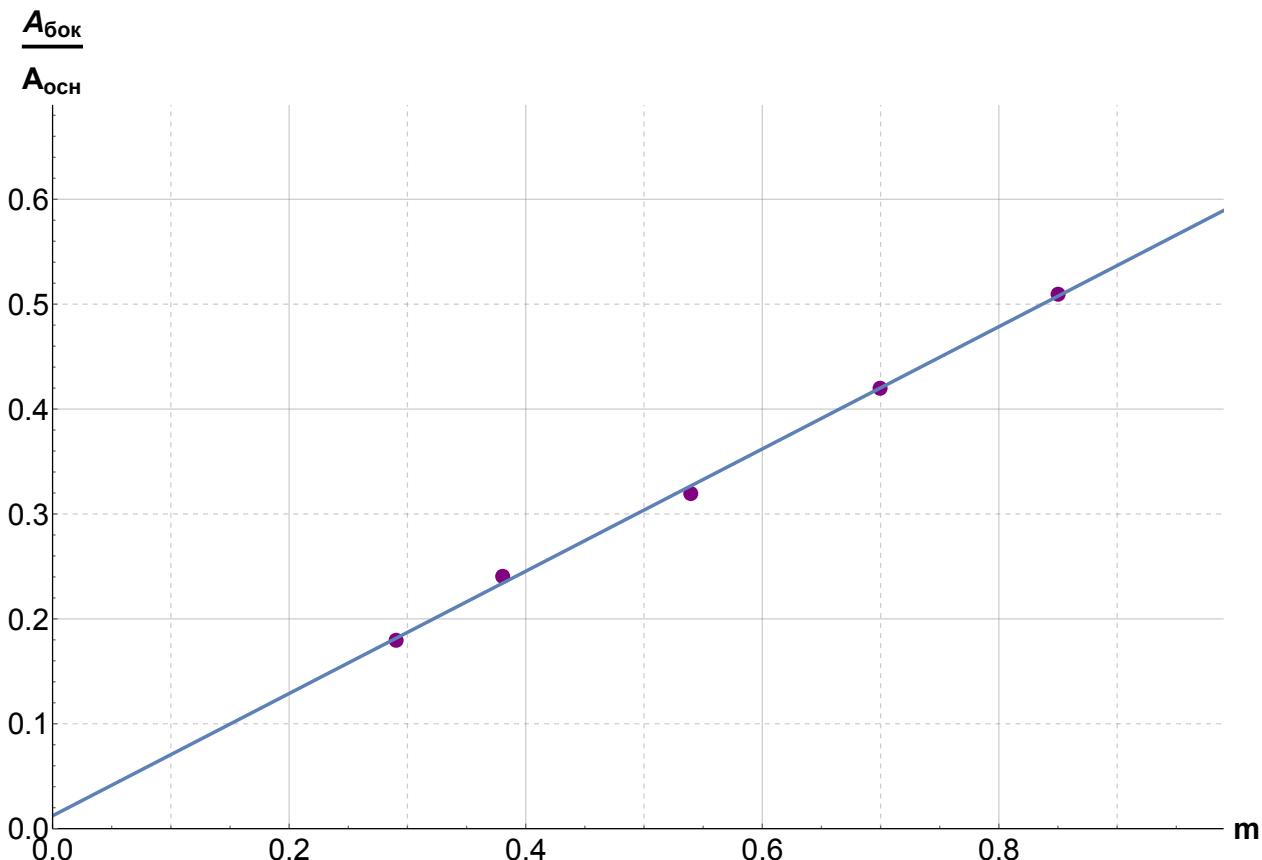


Рис. 18: График зависимости отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $\left(\frac{A_{\text{осн}}}{A_{\text{бок}}}\right)$ от глубины модуляции m

Таблица 6: Расчет аппроксимированной прямой $y = ax + b$

	Estimate	Standard Error
a	0.54	0.03
b	0.012	0.007

Получаем, что наш коэффициент наклона равен

$$a = 0,54 \pm 0,03$$

что примерно совпадает с теоретическим значением из формулы (3).

4. Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, пуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределенности.