

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ (3.6.1)

Фаттахов Марат

Шерхалов Денис

16 декабря 2023 г.

## 1 Аннотация

**Цель работы:** изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

**В работе используются:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

## 2 Теоретическое введение

### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь  $\frac{a_0}{2}$  - среднее значение функции  $f(t)$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $a_n$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда  $T$  кратно  $\tau$ ).

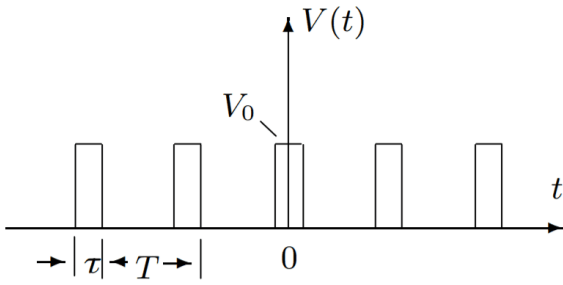


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

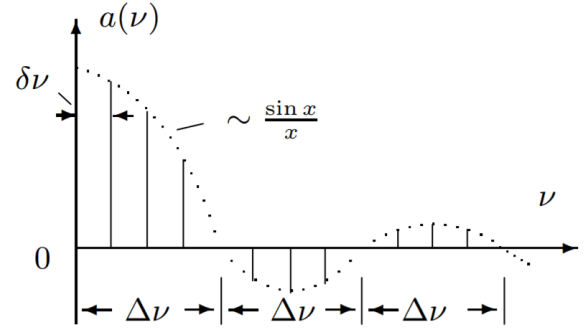


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем *шириной спектра*  $\Delta\omega$  расстояние от главного максимума ( $\omega = 0$ ) до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. 3).

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Зависимость для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

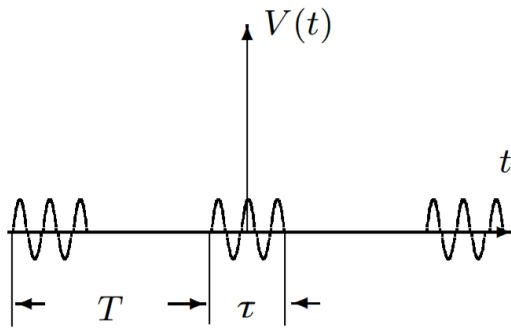


Рис. 3: Последовательность цугов

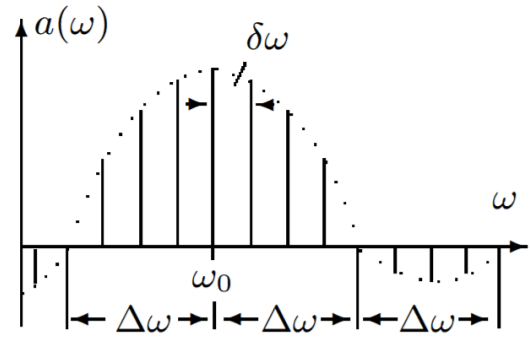


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t$$

Коэффициент  $m$  называют **глубиной модуляции**. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

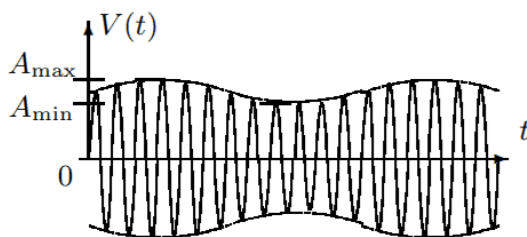


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

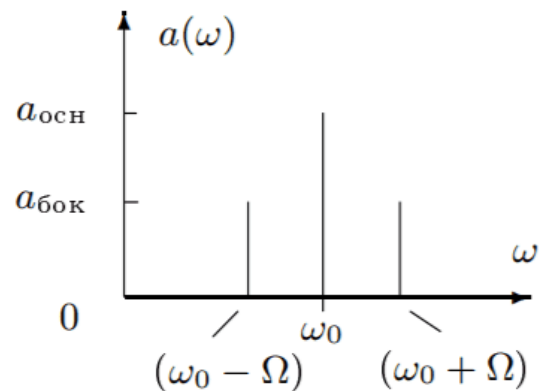


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a = A_0$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $\frac{m}{2}$  от амплитуды немодулированного колебания:  $a = \frac{A_0 m}{2}$ . Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

### 3 Ход работы

#### А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц (период  $T = 1$  мс) и длительностью импульса  $\tau = T/20 = 50$  мкс.
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
  - а. Изменяем  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированном  $\tau = 50$  мкс и получаем:

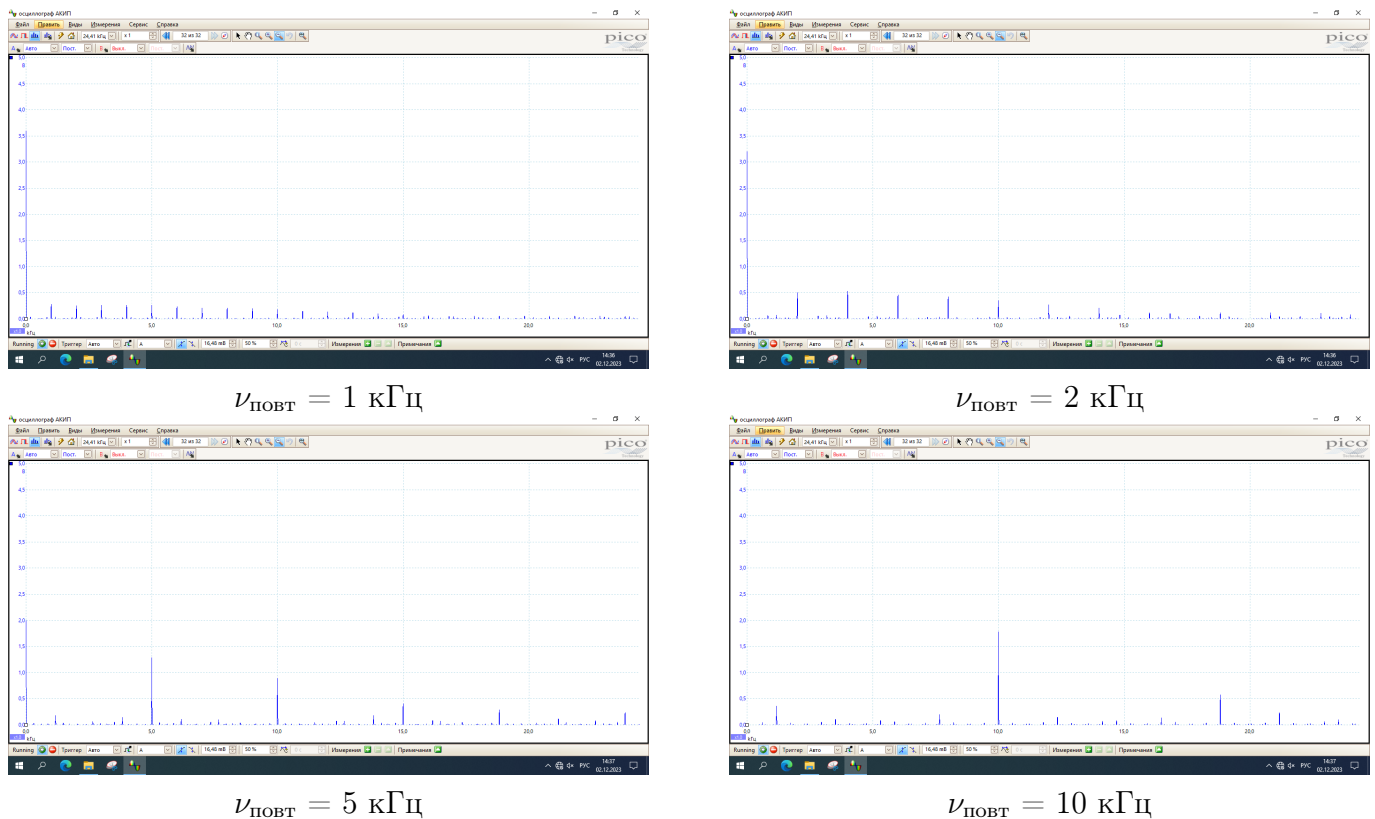
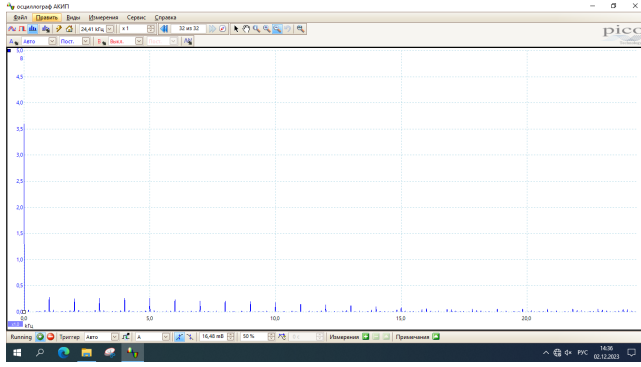


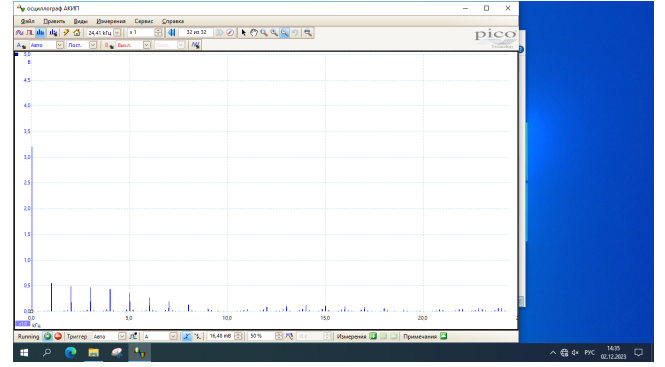
Рис. 7

Как видно из графиков, при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра.

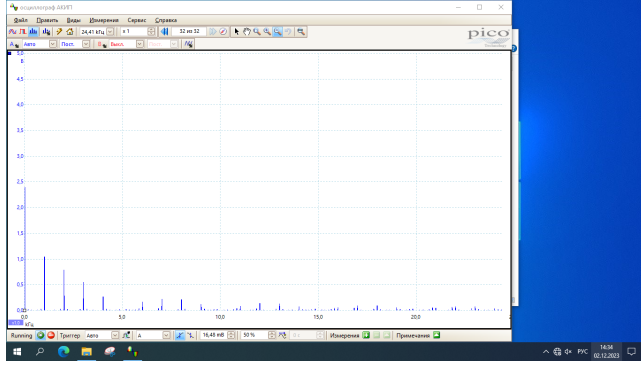
6. Изменяем  $\tau$  при фиксированном  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц и получаем:



$\tau = 50$  мкс



$\tau = 100$  мкс



$\tau = 200$  мкс

Рис. 8

Как видно из графиков, при увеличении длительности сигнала уменьшается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды  $a_n$  и частоты  $\nu_n$  спектральных гармоник при фиксированных  $\nu_{\text{повт}} = 3$  кГц и  $\tau = 50$  мкс.

$n$ гармоники	1	2	3	4	5	6
$\nu_n^{\text{эксп}}$ , кГц	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.8
$\nu_n^{\text{теор}}$ , кГц	3.	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0
$ a_n ^{\text{эксп}}$ , мВ	791	699	607	414	240	174
$ a_n/a_1 _{\text{эксп}}$	1	0.884	0.767	0.523	0.303	0.220
$ a_n/a_1 _{\text{теор}}$	1	0.891	0.725	0.524	0.312	0.114

Здесь  $a_1 = 143.8$  мВ.

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$

$$|a_n|_{\text{теор}} = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}$$

4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала  $T = 1$  мс,  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц. Изменяя длительность импульса  $\tau$  в диапазоне от  $\tau = T/50$  до  $\tau = T/5$ , измерим полную ширину спектра сигнала  $\Delta\nu$  — от центра спектра ( $\nu = 0$ ) до гармоники с нулевой амплитудой  $a_n \approx 0$  и установим зависимость между  $\Delta\nu$  и  $\tau$ , полученную из формулы ??.

Построим график  $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$ . Используя МНК, получим  $k = 1.0229 \pm 0.0223$ , откуда с хорошей точностью можем заключить, что  $\Delta\nu \frac{1}{\tau} = 1$ , что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.12

$\tau$ , мкс	20	40	60	80	100	120	140
$\Delta\nu$ , кГц	50	25	17	12.5	10	7.5	5
$1/\tau \cdot 10^3$ , с <sup>-1</sup>	50.0	25.0	16.7	12.5	10	8.3	7.1

Таблица 1: Исследование зависимости  $\Delta\nu$  и  $\tau$

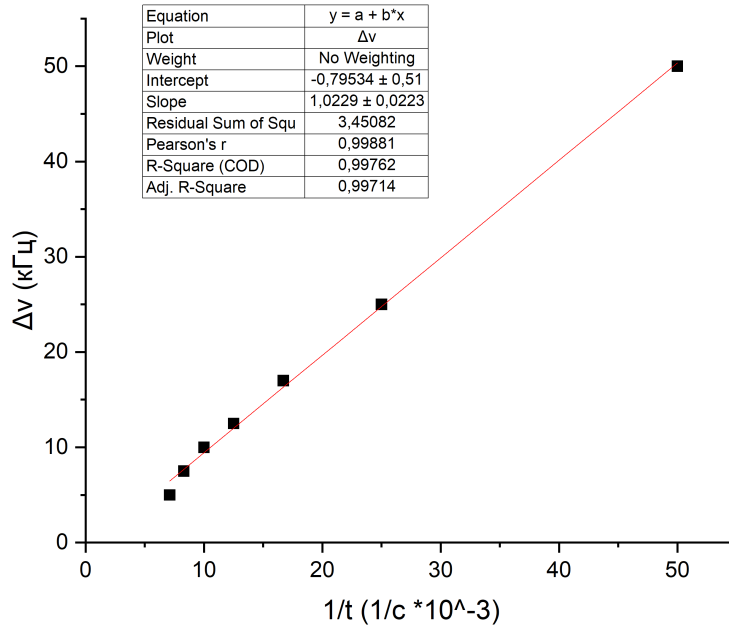


Рис. 9: Зависимость  $\Delta\nu$  от  $1/\tau$

5. Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала  $\tau = 100$  мкс. Изменяя период повторения  $T$  в диапазоне от  $2\tau$  до  $50\tau$  измерим расстояния  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра.

$T$ , мкс	200	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
$\delta\nu$ , кГц	5	2	1	0.688	0.459	0.400	0.330	0.287	0.250	0.220	0.200

Таблица 2: Зависимость  $\delta\nu$  от  $T$

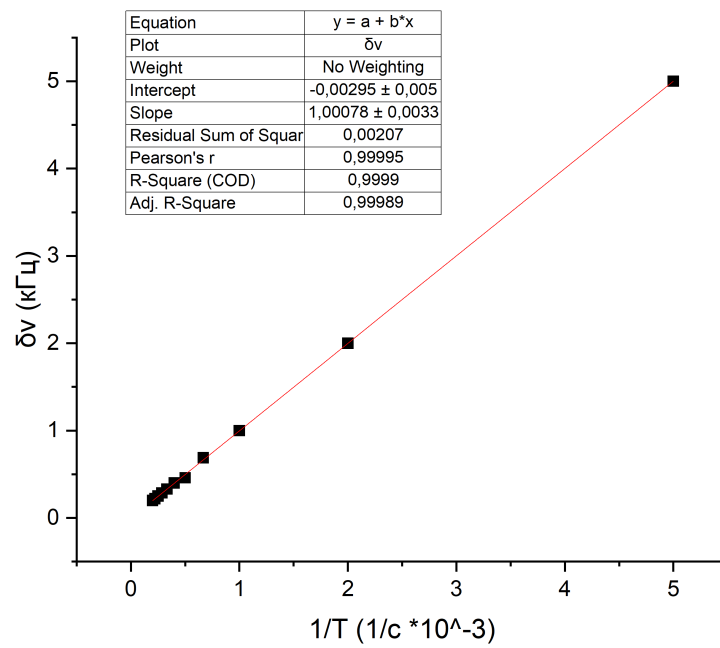


Рис. 10: Зависимость  $\delta\nu$  от  $1/T$

Построим график  $\delta\nu \left( \frac{1}{T} \right)$ . Используя МНК, получим  $k = 1.001 \pm 0.003$ , что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.13.

## Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

1. Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и глубиной модуляции  $m = 0.5$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из графика получим  $A_{\text{max}} = 1.489$  мВ и  $A_{\text{min}} = 0.489$  мВ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}} = \frac{1}{1.978} \approx 0.5$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,503, то мы видим, что формула ?? верна.

3. Изменяя на генераторе глубину модуляции  $m$  в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ . Построим график зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$  и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

$m, \%$	10	25	40	55	70	85	100
$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	33.72	84.0	135.0	186.0	235.0	285.0	334.0
$a_{\text{осн}} = 672 \text{ мВ}$							
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.050	0.125	0.200	0.277	0.350	0.425	0.498

Таблица 3. Исследование зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$ .

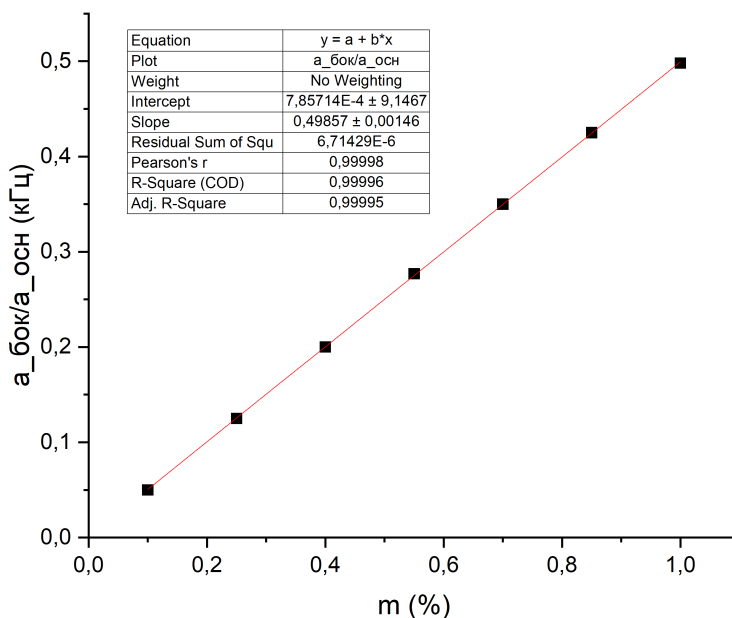


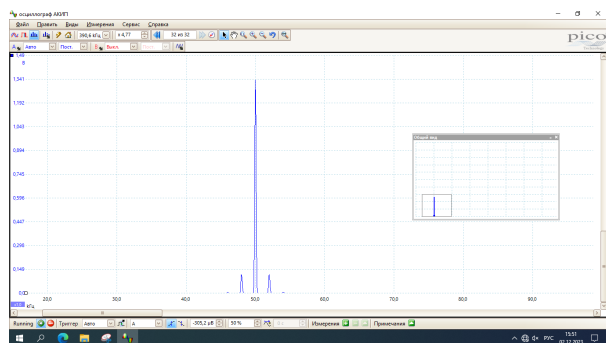
Рис. 11: Зависимость  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

Построим график  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$ . Используя МНК, получим  $k = 0.499x \pm 0,001$ , что подтверждает  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$ , т.е. совпадает с теоретическим предсказанием. График приведён на рис.??.

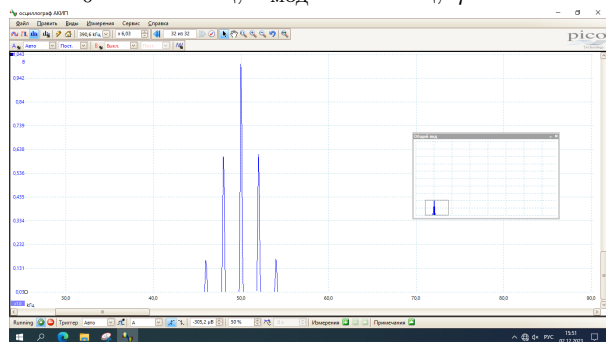


## Д. Наблюдение спектра сигнала, модулированного по фазе

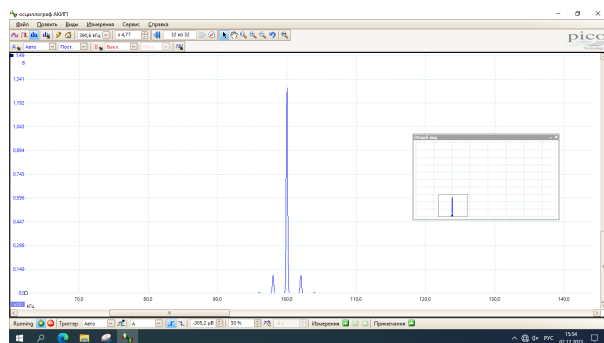
1. Настраиваем генератор в режим модулированного по фазе синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и максимальным отклонением (глубиной модуляции)  $\varphi = 10$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 60$$

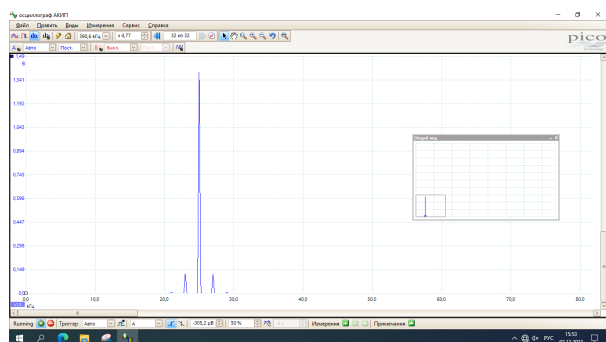


$$\nu_0 = 100 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 4 \text{ кГц}, \varphi = 10$$

Рис. 12



$$\nu_0 = 25 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10$$

## Е. Изучение фильтрации сигналов

Подадим на вход RC-цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T = 3$  мкс и длительностью  $\tau = 150$  нс. Получим спектр, представленный на рис. ???. При том же фиксированном периоде  $T$  проведем измерения отношения амплитуд соответствующих спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов  $K_n = \frac{|a_n^\phi|}{a_n^0}$ . Полученные данные представлены в таблице ???. Частоту можно почитать по формуле  $\nu = \nu_0 n = n/T$ . При больших значениях частот  $K$  линейна. Построим её и по углу наклона определим  $\tau_{RC}$

$$K(1/\nu) = \frac{1}{2\pi\tau_{RC}} \left( \frac{1}{\nu} \right)$$

Построим график  $K(1/\nu)$ .

$1/\nu$ , кГц <sup>-1</sup>	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167
$K_n$	0.380	0.190	0.120	0.071	0.078	0.042

Таблица 3: Отношение амплитуд спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов

Из коэффициента наклона получаем

$$\tau_{RC} = (3.3 \pm 0.2)$$

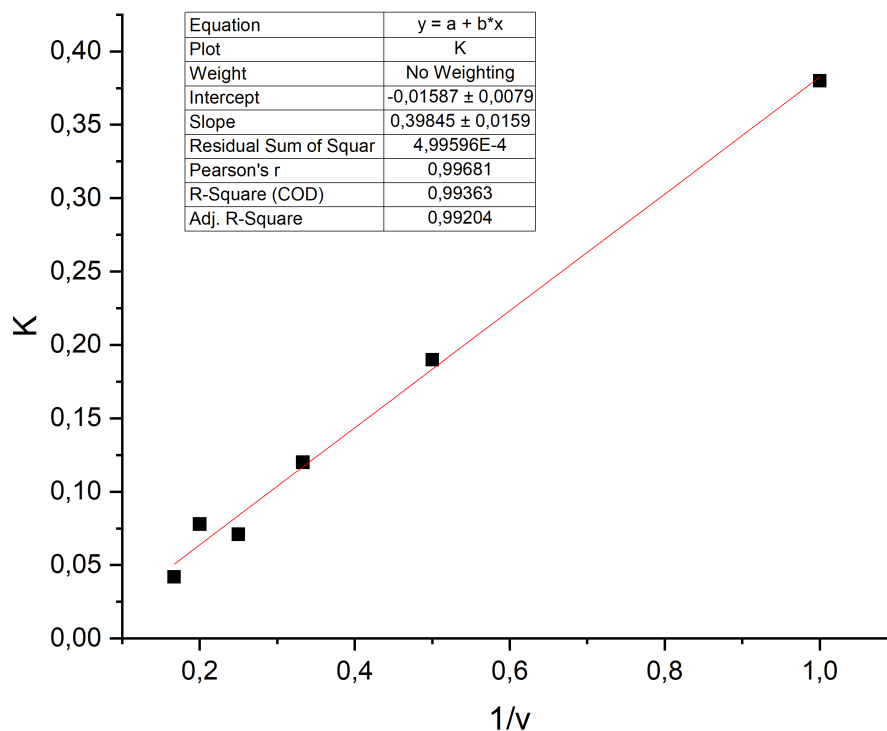


Рис. 13: Зависимость  $K$  от  $\frac{1}{\nu}$

## 4 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов, а также проанализировали фильтрацию сигналов при прохождении их через  $RC$  контур. Проверили частный случай выполнения соотношения неопределённости.