Московский Физико-Технический Институт

Отчет по эксперименту

1.1.4.
Изучение статистических закономерностей на примере измерения фона космического излучения

Выполнил:
Студент 1 курса ФРКТ
Группа Б01-302
Хальфин Бахтияр

Долгопрудный
2023

Аннотация

Цель работы: изучить статические закономерности при измерении однородного во времени случайного процесса; проверить возможность описания интенсивности радиационного фона статистическими законами Пуассона и Гаусса; определить среднее число регистрируемых космических лучей в секунду и определить погрешность результата

В работе используются: счетик Гейгера-Мюллера, компьютер с интерфесом для связи со счётчиком.

Теоретические сведения

Базовые статистические понятия

Для простоты будем считать, что все ошибки, кроме статистических, пренебрежимо малы и рассматривать их не будем.

Наиболее важной характеристикой измерения является *выборочное среднее* значение числа измерений

$$\langle n \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{1}$$

При увеличении количества измерений, выборочное среднее будет стремиться к некоторому конечному пределу, но реальное число измерений всегда конечно, поэтому значение среднего всегда содержить *погрешность*

$$\overline{n} = \lim_{N \to \infty} \langle n \rangle$$

Кроме среднего значения важно знать *средний квадрат отклонения*, называемый также *выборочной дисперсией*

$$\sigma_n^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2 \tag{2}$$

Аналогично при $N \to \infty$ выборочная дисперсия стремится к некоторому предельному значению

$$\sigma_n^2 = \lim_{N \to \infty} \sigma_n^2 = \overline{(n - \overline{n})^2}$$

Погрешность среднего значения $\langle n \rangle$ при независимых измерениях связана со погрешность *отдельного* измерения формулой

$$\sigma_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \tag{3}$$

Таким образом, увеличивая количество измерений, среднее значение приближается к «истинному» $\overline{n}$. При конечном N истинное среднее с высокой вероятностью лежит в интервале

$$\overline{n} = \langle n \rangle \pm \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

Пуассоновский процесс

Если события однородны во времени и каждое следующее событие не зависит от прошлого, то последовательность таких событий называют *пуассоновский процессом* Для пуассоновского процесса справедливо равенство

$$\sigma = \sqrt{n} \tag{5}$$

На практике можно ожидать приближённое равенство для *выборочных* значений

$$\sigma_n \approx \sqrt{\langle n \rangle}$$

Погрешность эксперимента

Если подставить основное свойство распределения Пуассона (5) в формулу (3), получится среднеквадратичная погрешность определения среднего:

$$\sigma_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\langle n \rangle}{N}}$$

Для относительного значения погрешности:

$$\varepsilon_{\langle n \rangle} = \frac{\sigma_{\langle n \rangle}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle N}}$$

Оборудование

Для измерения интенсивности космических лучей используется счетчик Гейгера-мюллера. Счеитчик представляетт собой наполненный газом сосуд с двумя электродами. Частицы космических лучей ионизируют газ, которым наполнен сосуд и выбивают электроны из его стенок. Эти электроны ускоряются электрическим полем и ионизируют молекулы газа. В результате образуется лавина электроном, и ток через счетчик резко увеличивается.

В данной работе измеряется величина, которая меняется со временем случайным образом. Методы обработки результатов те же, что и для расчет случайных погрешностей. Погршености измерений потока частиц с помощью счетчиков Гейгера-Мюллера малы по сравнению с изменениями самого потока. Погрешности измерений определяются в основном временем, в течение которого восстанавливаются нормальные условия в счетчик после срабатывания счетчика.

В работе используется специальная компьютерная программа, с помощью которой можно получить сведения об экспериментальной установке, провести численный и реальный эксперименты.

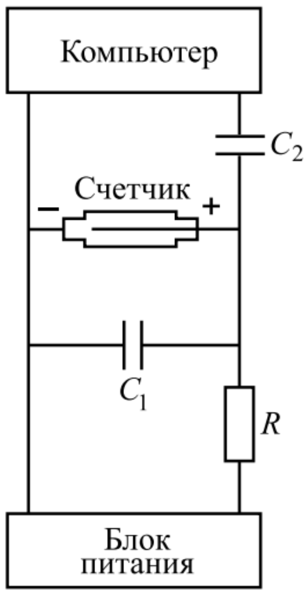


Рис. 1: Схема включения счетчика

Ход работы

1. Включаем компьютер и счетчик. В программе запускаем измерение для основного эксперимента

2. Запускаем симуляцию с настройками по умолчанию (распределение Пуассона, интенсивность —- 1.0, ускорение – 10). Убеждаемся, что в зависимости от количества N собранных экспериментальных точек

   a) Флуктуации среднего числа зарегистрированных частиц $\langle n \rangle$ уменьшаются, значение выходит на постоянную величину (рис. 2);

   b) Флуктуации среднеквадратичного отклонения σ_n уменьшаются, значение выходит на постоянную величину (рис. 3);

   c) σ_n и $\sqrt{\langle n \rangle}$ всё больше приближаются друг к другу (рис. 4);

   d) Степень совпадения экспериментальной гистрограммы с теоретическими кривыми у распределения Пуассона выше, чем у распределения Гаусса (рис. 4).

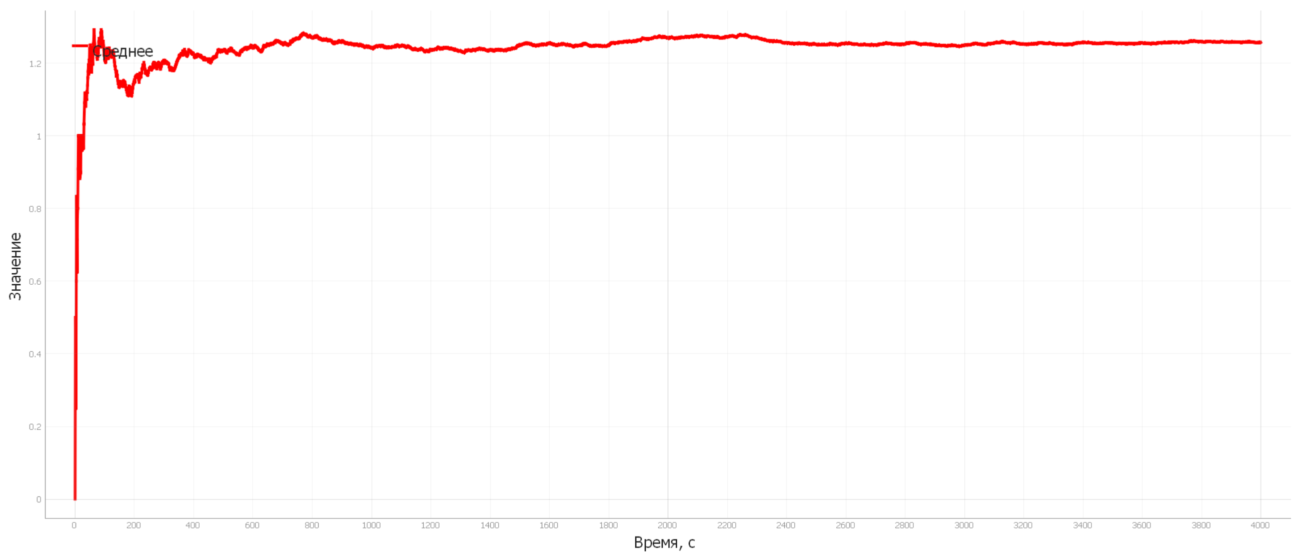


Рис. 2: Среднее число зарегистрированных частиц

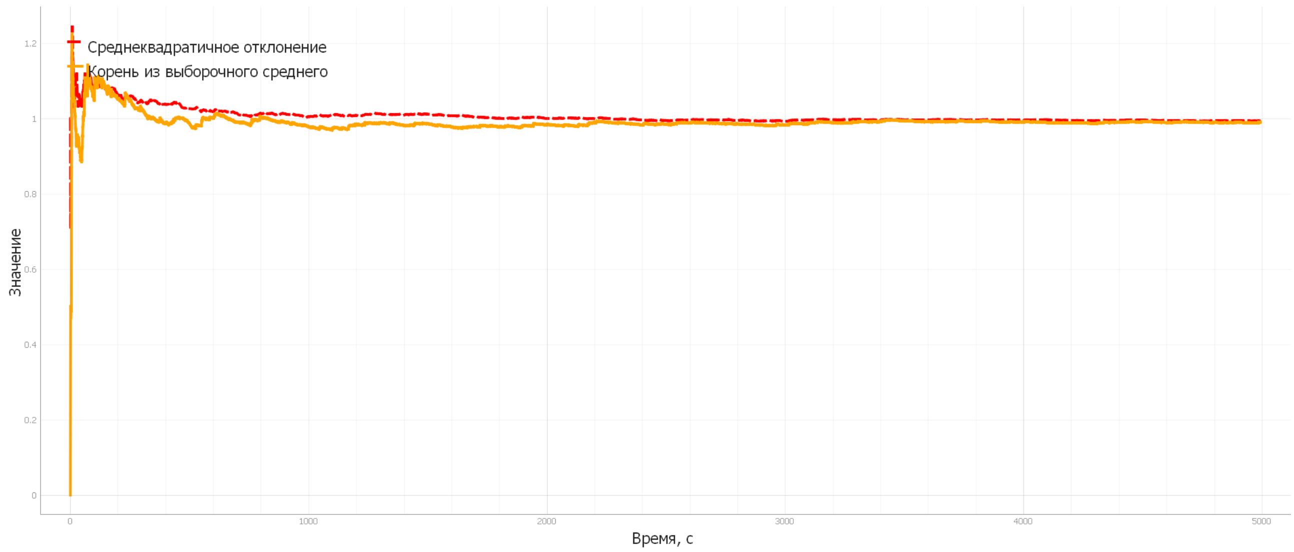


Рис. 3: Среднее квадратичное значение и корень из выборочного среднего

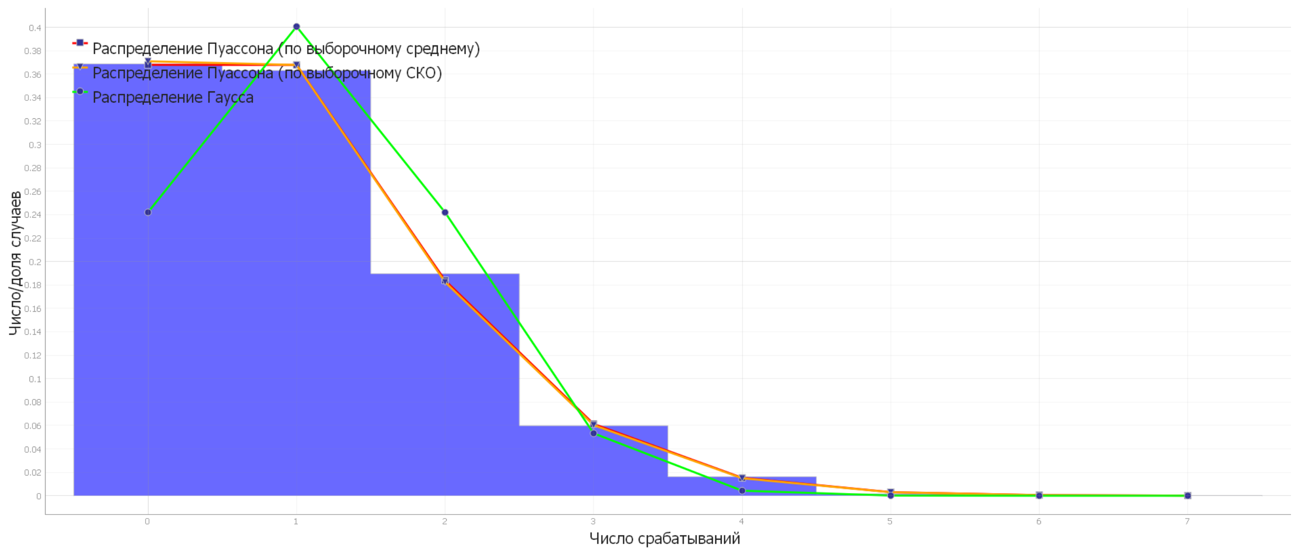
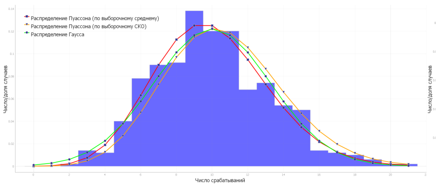
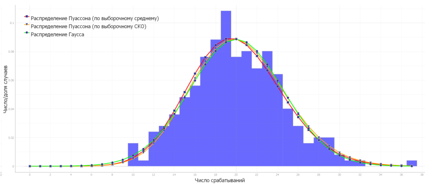


Рис. 4: Гистограмма

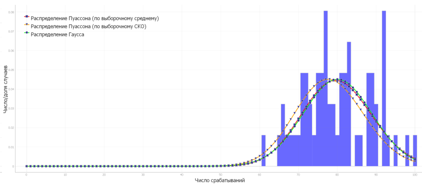
3. Рассмотрим как изменяются гистограммы для параметра группировки результатов $\tau = 10;\ 20;\ 80$:



$\tau = 10$



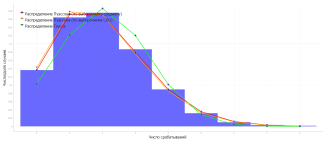
$\tau = 20$



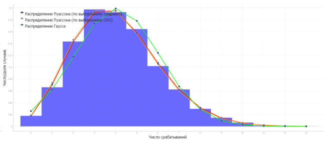
$\tau = 80$

При изменении порядка группировки результатов τ максимальная доля случаев уменьшается (в силу увеличения количества групп). График распределения Гаусса и Пуассона принимает более округлый вид.

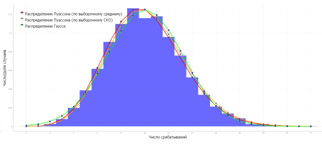
4. Рассмотрим как изменяются гистограммы для параметра средней интенсивности числа частиц $\mu = 2$; 4; 10; 25.



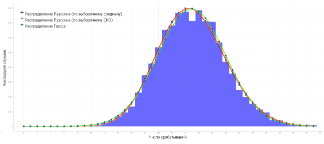
$\mu = 2$



$\mu = 4$



$\mu = 10$



$\mu = 25$

При изменении порядка группировки результатов μ максимальная доля случаев уменьшается (в силу увеличения количества групп). График распределения Гаусса и Пуассона принимает более округлый вид.

Обработка результатов

Для основного эксперимента сгруппируем данные с различными интервалами группировки $\tau = 10$с; 20с; 40с; 80с.

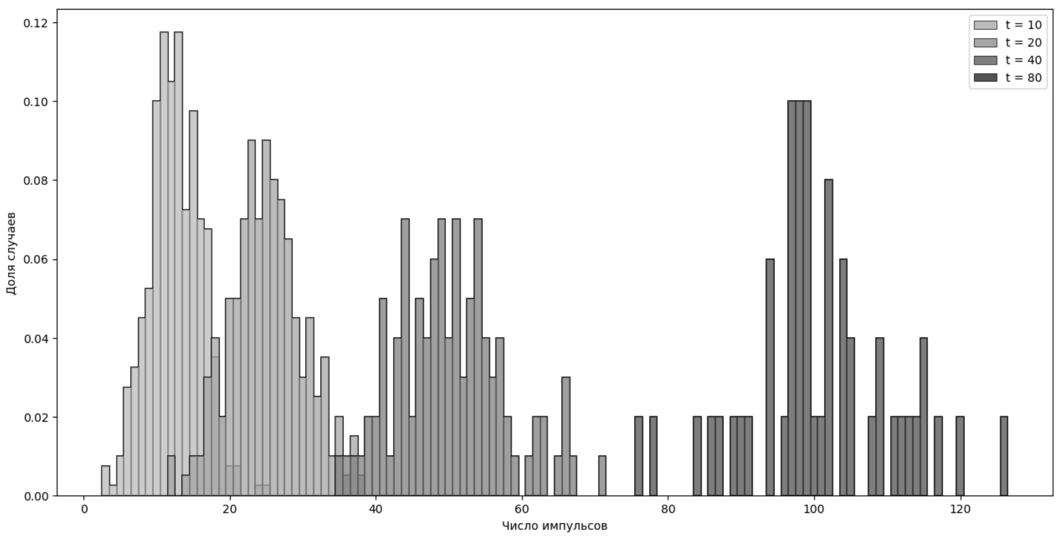


Рис. 7: Гистограмма для числа отсчетов n и w_n

Для каждого τ вычислим средее число регистрируемых частиц $\langle n \rangle$:

$$\langle n_{10} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \approx 10.09$$
$$\langle n_{20} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \approx 20.18$$
$$\langle n_{40} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \approx 40.36$$
$$\langle n_{80} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i \approx 80.72$$

Для каждого τ вычислим среднеквадратичное отклонение σ_n:

$$\sigma_{n_{10}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2} \approx 3.14$$
$$\sigma_{n_{20}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2} \approx 4.39$$
$$\sigma_{n_{40}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2} \approx 6.40$$
$$\sigma_{n_{80}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (n_i - \overline{n})^2} \approx 9.91$$

Для каждого τ вычислим погрешность среднего значения $\sigma_{\langle n \rangle}$:

$$\sigma_{\langle n_{10} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.16$$
$$\sigma_{\langle n_{20} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.31$$
$$\sigma_{\langle n_{40} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 0.64$$
$$\sigma_{\langle n_{80} \rangle} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}} \approx 1.40$$

Для каждого τ вычислим среднюю интенсивность регистрируемых частиц в секунду j:

$$\langle j_{10} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 1.01$$

$$\sigma_{\langle 10 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.02$$

$$\overline{j_{10}} = \langle j_{10} \rangle \pm \frac{\sigma_{j_{10}}}{\sqrt{N}} = 1.01 \pm 0.016 \langle j_{20} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 1.01$$

$$\sigma_{\langle 20 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.016$$

$$\overline{j_{20}} = \langle j_{20} \rangle \pm \frac{\sigma_{j_{20}}}{\sqrt{N}} = 1.01 \pm 0.016 \langle j_{40} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 1.01$$

$$\sigma_{\langle 40 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.016$$

$$\overline{j_{40}} = \langle j_{40} \rangle \pm \frac{\sigma_{j_{40}}}{\sqrt{N}} = 1.01 \pm 0.016 \langle j_{80} \rangle = \frac{\langle n \rangle}{\tau} \approx 1.01$$

$$\sigma_{\langle 80 \rangle} = \frac{\sigma_n}{\tau} = \approx 0.016$$

$$\overline{j_{80}} = \langle j_{80} \rangle \pm \frac{\sigma_{j_{80}}}{\sqrt{N}} = 1.01 \pm 0.016$$

Можно заметить, что средняя интенсивность регистрируемых частиц в секунду не зависит от величины интервала τ и числа точек $N = t/\tau$

Наложим поверх экспериментальных гистограмм теоретические распределения Пуассона и Гаусса.

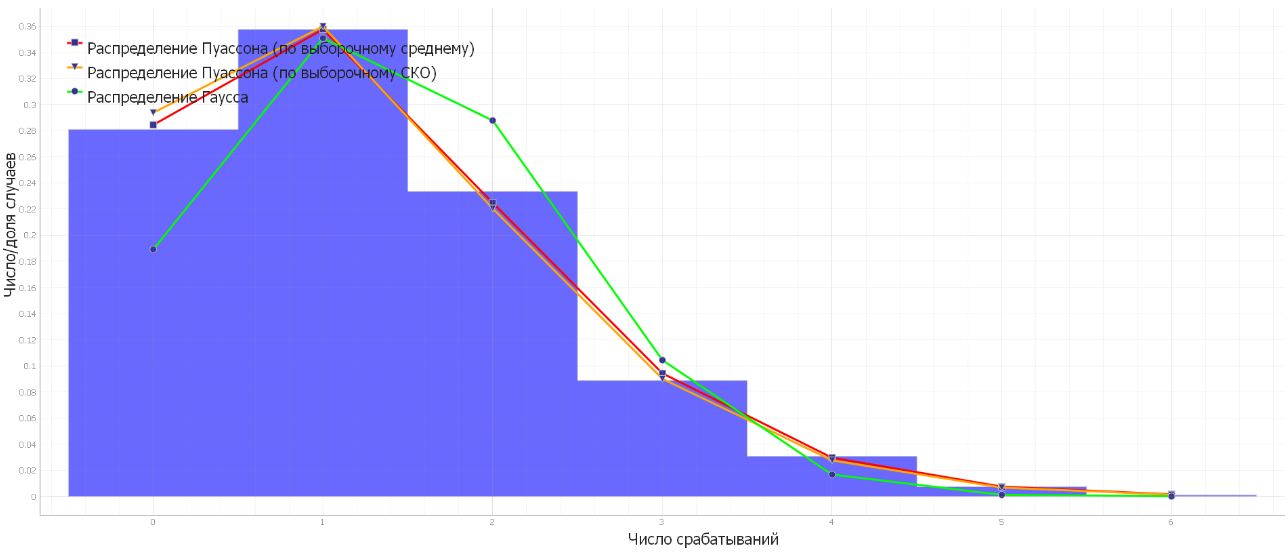


Рис. 8: Гистограмма с наложенными распределениями Пуассона и Гаусса

Экспериментальные гистограммы с большой точностью согласуются с распределениями Пуассона и с несколько меньшей точностью с распределением Гаусса.

Проверим справедливость основного свойства распределения Пуассона

$$\sqrt{\langle n \rangle} \approx \sigma_n$$

$$\sqrt{10.09} \approx 3.18 \approx 3.14$$

Данное равенство выполняется с точностью до десятых. Можно сделать вывод, что регистрация частиц является однородным во времени случайным процессом, а количество отсчётов в одном опыте подчиняется распределению Пуассона.

Определим доли случаев, когда отклонение числа отсчётов n от среднего значения не превышает (по модулю) одного, двух и трёх стандартных отклонений:

$$|n - \langle n \rangle| \leq \sigma_n$$
$$w_1 = 0.59$$
$$|n - \langle n \rangle| \leq 2\sigma_n$$
$$w_2 = 0.96$$
$$|n - \langle n \rangle| \leq 3\sigma_n$$
$$w_3 = 0.99$$

Сравним результаты с теоретическими для распределния Гаусса:

$$|n - \langle n \rangle| \leq \sigma_n$$
$$w_1 = 0.67$$
$$|n - \langle n \rangle| \leq 2\sigma_n$$
$$w_2 = 0.93$$
$$|n - \langle n \rangle| \leq 3\sigma_n$$
$$w_3 = 0.99$$

Можно сделать вывод, что при достаточно больших $\overline{n}$ распределение Пуассона приближается к *нормальному распределению (распределению Гаусса)*

Вывод

В ходе выполнения работы познакомился с основными понятиями статистики. Определил среднее число регистрируемых космических лучей в секунду и определил погрешность результата. Выяснил, что средняя интенсивность регистрируемых частиц в секунду не зависит от величины интервала τ и числа точек $N = t/\tau$. Проверил возможность описания исследуемого процесса статистическими законами Пуассона и Гаусса.