

Лабораторная работа 3.2.4 и 3.2.5. Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре

Абакшин Василий, Б05-207

3 сентября 2023 г.

Цель работы: исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

Оборудование: осциллограф, генератор сигналов, магазин сопротивлений, магазин емкостей, магазин индуктивности, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные провода.

Установка

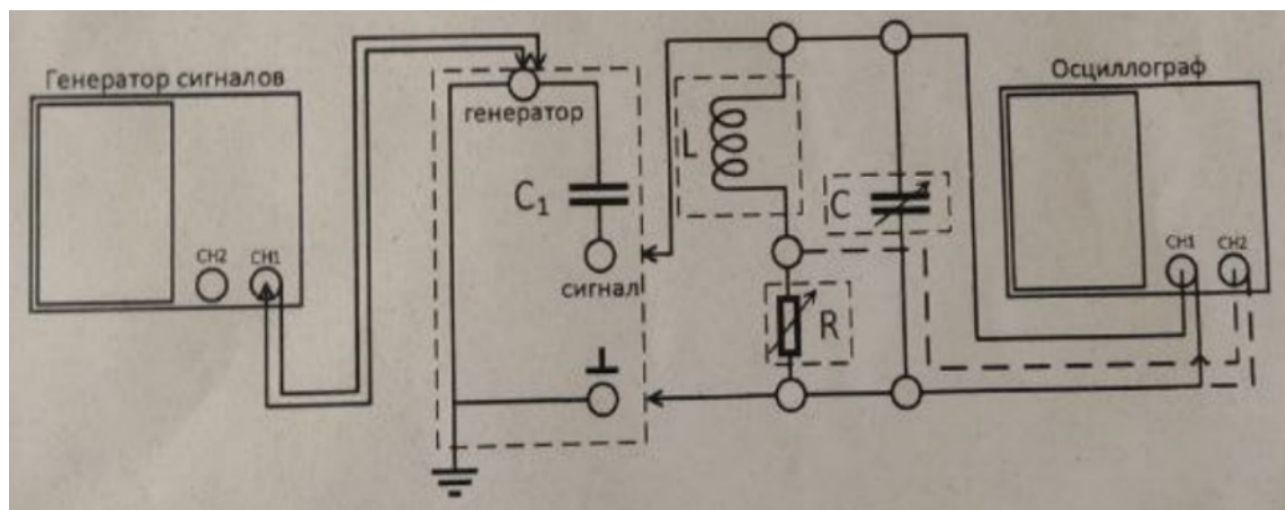


Рис. 1: Схема электрической цепи

В цепи используется катушка постоянной индуктивности $L = 100$ мГн, переменной емкости C и сопротивления R . Колебания напряжения наблюдаются на осциллографе, подключенном параллельно конденсатору. Также используется дополнительная емкость C_1 , на которую изначально поступает сигнал генератора. Она нужна для снижения выходного импеданса генератора, чтобы он не сильно влиял на общий импеданс контура.

При исследовании свободных колебаний будем подавать на контур периодические импульсы, а в случае вынужденных колебаний — синусоидальный сигнал.

Ход работы и измерения

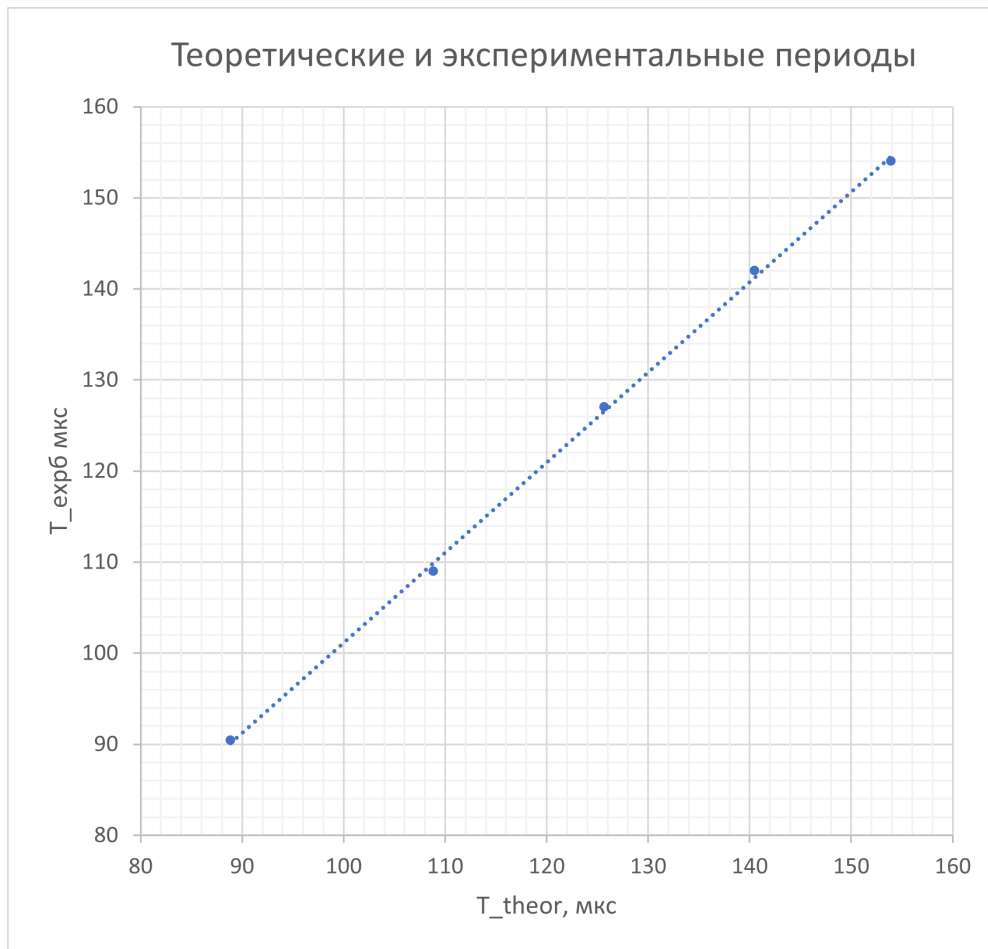
1. Период колебаний при установленной 0 емкости на магазине емкостей $T_0 = 64,4 \text{ мкс}$.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC_0} \rightarrow C_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = 105,05 \cdot 10^{-11} \approx 1 \text{ нФ}$$

Будем увеличивать емкость контура и сравнивать экспериментальную величину периода с вычисленной теоретически:

$C + C_0, \text{ нФ}$	$T_{exp}, \text{ мкс}$	$T_{th}, \text{ мкс}$
2	90,4	88,9
3	109	108,8
4	127	125,7
5	142	140,5
6	154	153,9

Таблица 1: Экспериментальные и теоретические значения периодов колебаний



Экспериментальные результаты отличаются от теоретических не более, чем на 1,7%. Наибольший вклад в погрешность вносит точность наших измерений. Что касается графика, угол наклона $\alpha = 0,991 \pm 0,014$. То есть случайная погрешность составила $\varepsilon_\alpha \approx 1,5\%$

2. Подберем и установим значение C^* так, чтобы частота собственных колебаний была $\nu_0 = 6,5 \text{ кГц}$. $C^* = \frac{1}{4\pi^2 \nu_0^2 L} \approx 6 \text{ нФ}$. Рассчитаем теоретически критическое сопротивление контура $R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 8165 \text{ Ом}$. Измеряем логарифмических декремент затухания по соседним максимумам при различных внешних сопротивлениях ($0,05R_{cr} - 0,2R_{cr}$):

$R_{\text{вн}}, \text{ Ом}$	$R = R_{\text{вн}} + R_L, \text{ Ом}$	$\theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}}$	$Q = \frac{\pi}{\theta}$	σ_Q
408 (0,05 R_{cr})	443	0,38	8,25	0,65
653,2 (0,08 R_{cr})	688,2	0,54	5,81	0,32
898,2 (0,11 R_{cr})	933,2	0,73	4,3	0,18
1143,1 (0,14 R_{cr})	1178,1	0,92	3,42	0,11
1633 (0,2 R_{cr})	1668	1,27	2,46	0,06

Таблица 2: Декремент затухания свободных колебаний

Основная часть ошибки при расчете добротности данным способом — случайная ошибка в измерении напряжения. Примем её за 2%. В таком случае $\sigma_\theta \approx 0,03$.

Здесь мы приняли $R_L = 35 \text{ Ом}$ приблизительно. Построим график зависимости $\frac{1}{\theta^2} = f\left(\frac{1}{R^2}\right)$. Так как

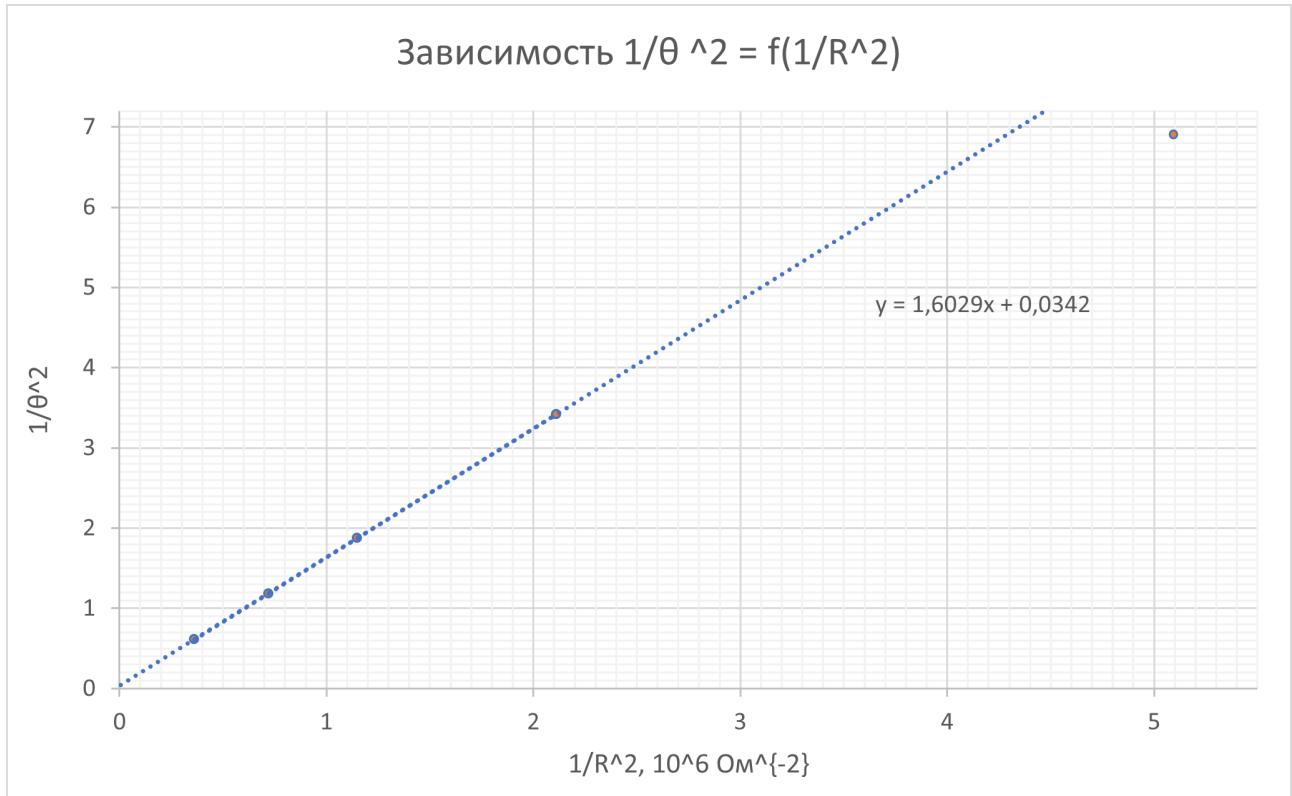
$$\theta = \ln \left(\frac{U_k}{U_{k+1}} \right) = \gamma T = \gamma \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\theta^2 = \gamma^2 \frac{4\pi^2}{\omega_1^2} = \gamma^2 \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1 \right) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{4L}{CR^2} - 1 \right)$$

то зависимость должна получиться линейной:

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2}$$



Прямая построена по 4-м точкам: всем, кроме последней, её убрали из рассмотрения, так как она плохо ложится на прямую. Коэффициент $k = (1,603 \pm 0,008) \cdot 10^6$ $\varepsilon_k = 0,5\%$. Найдем $R_{cr} = 2\pi\sqrt{k} = (7955 \pm 20) \text{ Ом}$. В пределах случайной погрешности не попадает

в теоретически рассчитанное значение, вероятно потому, что мы не очень хорошо знаем R_L .

3. Расчет добротности по спирали на фазовой плоскости. В помощью осциллографа получаем портрет колебаний на фазовой плоскости (в режиме XY), определяем декремент затухания по соседним пересечениям оси X. Так как измерения проводились на глаз, то оценим погрешность $\sigma_U = 0,1$ дел.

R, Ом	U_k , дел	U_{k+1} , дел	θ	Q	σ_Q
443	4,4	3	0,38	8,20	0,86
1668	3,8	1	1,34	2,35	0,18

Таблица 3: Определение добротности по фазовой плоскости

4. Рассчитаем теоретическое значение добротности через параметры контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{L}{R} \omega_1 = \frac{L}{R} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$$

При параметрах $L = 100$ мГн, $C = 6$ нФ имеем (примем погрешность $\sigma_{R_L} = 5$ Ом):

1. $R_1 = 443$ Ом $Q_1 = 9,20$, $\sigma_{Q_1} = 0,10$
2. $R_2 = 1668$ Ом $Q_2 = 2,40$, $\sigma_{Q_2} = 0,01$

5. Измерение АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний.

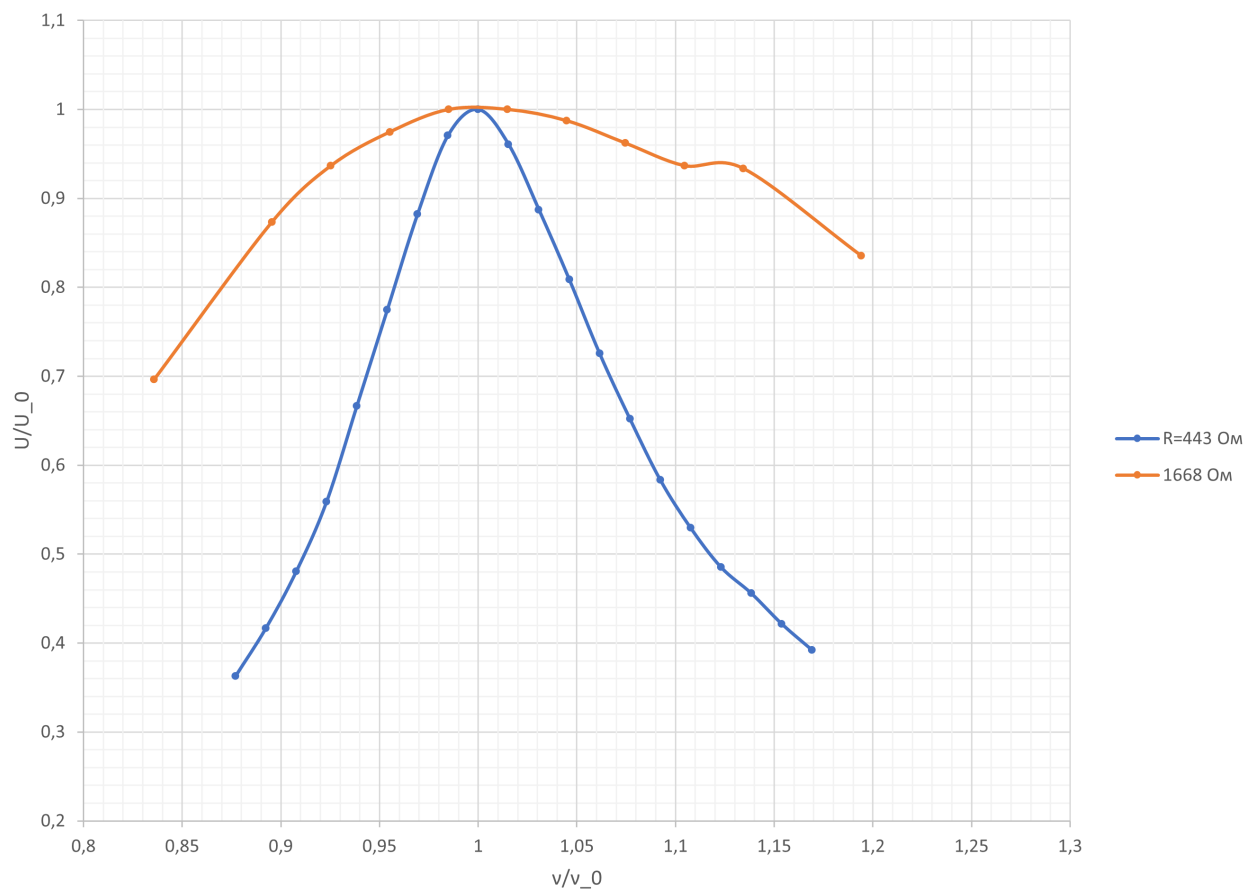
Установим на генераторе синусоидальный сигнал и будем наблюдать картину вынужденных колебаний. Занесем в таблицу полученные данные и построим графики в координатах $\frac{U}{U_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$

ν , Гц	U , В	Δt , мкс	$\Delta \phi$, $\cdot \pi$
5700	37	72,4	0,83
5800	42,5	69,2	0,80
5900	49	67,2	0,79
6000	57	62,8	0,75
6100	68	58,8	0,72
6200	79	53,2	0,66
6300	90	47,6	0,60
6400	99	40,8	0,52
6500	102	34,4	0,45
6600	98	27,2	0,36
6700	90,5	22	0,29
6800	82,5	17,2	0,24
6900	74	14,8	0,20
7000	66,5	12	0,17
7100	59,5	10,4	0,15
7200	54	8,8	0,13
7300	49,5	8	0,12
7400	46,5	6,4	0,095
7500	43	6	0,09
7600	40	4,4	0,07

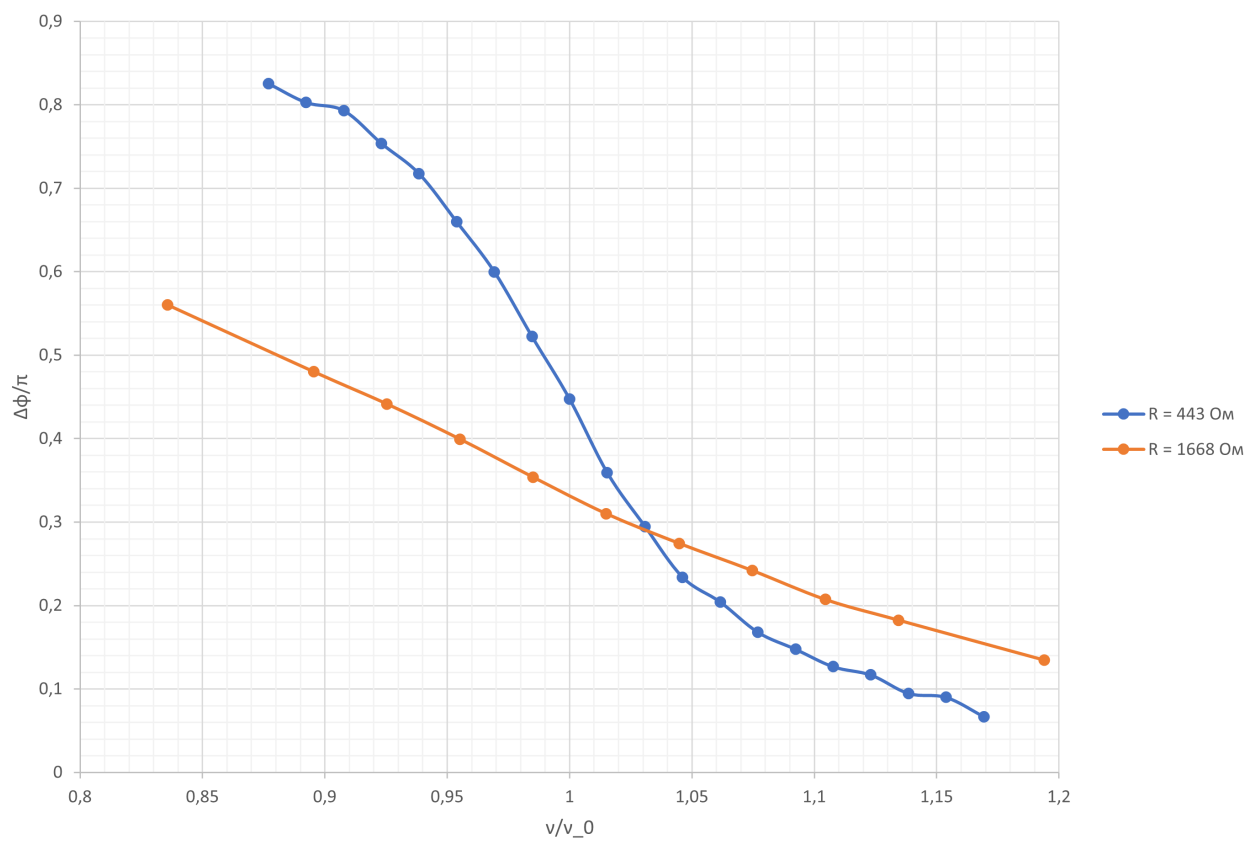
ν , Гц	U_{max} , В	Δt , мкс	$\Delta \phi$, $\cdot \pi$
5600	22,0	50	0,56
6000	27,6	40	0,48
6200	29,6	35,6	0,44
6400	30,8	31,2	0,40
6600	31,6	26,8	0,35
6800	31,6	22,8	0,31
7000	31,2	19,6	0,27
7200	30,4	16,8	0,24
7400	29,6	14	0,21
7600	29,5	12	0,18
8000	26,4	8,4	0,13

Таблица 4: АЧХ и ФЧХ для $R_1 = 443$ Ом и $R_2 = 1668$ Ом

Амплитудно-частотная характеристика



Фазово-частотная характеристика



$R, \text{ Ом}$	$\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}$	Q	σ_Q
443	0,12	8,33	0,69
1668	0,43	2,33	0,16

Таблица 5: Определение добротности по графику АЧХ

Определим добротность по графику АЧХ. $Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}$, где $2\Delta\Omega$ - ширина резонансной кривой на уровне $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

Рассчитаем добротность по ФЧХ. Для этого проведем горизонтальную линию через уровень, где наблюдается резонанс (ровно $\frac{\pi}{2}$ не наблюдается в экспериментальном резонансе). Затем отразим одну половину относительно этой прямой и измерим приблизительно ширину на расстоянии $\frac{\pi}{4}$ от резонанса (ровно в $\frac{\pi}{4}$ не сможем измерить ввиду недостатка точек и смещения резонанса). Примерные результаты:

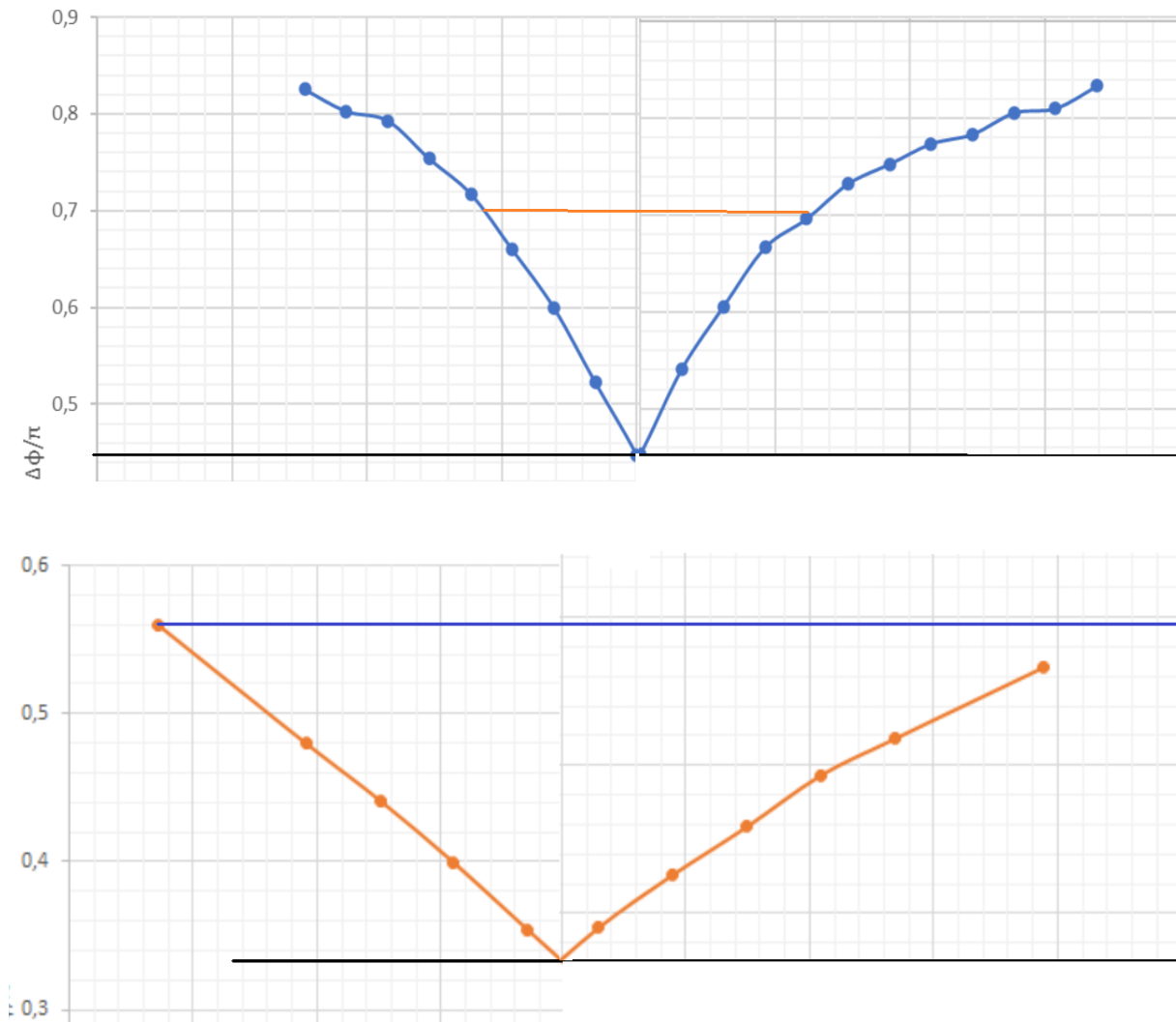


Рис. 2: Вспомогательные графики для определения погрешности по ФЧХ

Погрешности в этих методах сложно оценить. Примем погрешность в определении ширины резонансной кривой за $\sigma_{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = 0,01$ в случае $R = 443 \text{ Ом}$ и $0,03$ в случае $R = 1668 \text{ Ом}$. (для второго случая приходится немного экстраполировать).

$R, \text{ Ом}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	Q	σ_Q
443	0,115	8,70	0,76
1668	0,415	2,41	0,17

Таблица 6: Определение добротности по графику ФЧХ

6. Итоговая таблица:

$R, \text{ Ом}$	$f(L, C, R)$	$f(\theta)$	Фаз. спираль	АЧХ	ФЧХ
443	$9,20 \pm 0,10$ (1%)	$8,25 \pm 0,65$ (8%)	$8,20 \pm 0,86$ (10%)	$8,33 \pm 0,69$ (8%)	$8,70 \pm 0,76$ (9%)
1668	$2,40 \pm 0,01$ (0,3%)	$2,46 \pm 0,06$ (2%)	$2,35 \pm 0,18$ (8%)	$2,33 \pm 0,16$ (7%)	$2,41 \pm 0,17$ (7%)

Вывод

В данной лабораторной работе мы исследовали свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре и различными способами находили его добротность. Самый точный способ, конечно же, теоретический. Затем достаточно эффективен способ вычисления через декремент затухания. Фазовая спираль даёт высокую погрешность, поэтому это не очень надёжный способ вычисления добротности. Способы вычисления через АЧХ и ФЧХ хороши, если есть специальная программа, позволяющая вычислять ширину резонансной кривой, и хорошо снятые данные (с этим тоже возникли проблемы). Несмотря на то, что при нашей оценке у $R_2 = 1668 \text{ Ом}$ относительная погрешность в этих опытах 7%, данные были сняты некачественно и ориентироваться на них сложно.