Persoalan

Menghitung gerak ayunan pendulum dengan simpangan kecil menggunakan perumusan euler.

Diketahui:

Panjang tali l=1,5 meter

Percepatan gravitasi g=9,8 m/s^2

Banyaknya pias n=300

Lebar pias h=0.04

Simpangan sudut pertama=0

Kecepatan sudut pertama =0.3 rad/s

Jawab: Algoritma:

- Memasukkan nilai-nilai fisis yang diketahui.
- Tidak memasukkan pengecekan nilai epsilon mesin karena dikhawatirkan jumlah iterasi yang ideal terlalu banyak. Lebar pias =0.0333 -> masih dalam tahap toleransi
- Menentukan besar pias dan jumlah pias untuk menyelesaikan iterasi perhitungan solusi secara numerik.
- Melakukan perhitungan kecepatan sudut dan simpangan sudut secara numerik. Dengan rumus eulernya adalah:

$$\hat{\omega}(i+1) = \hat{\omega}(i) - \frac{g}{l}\hat{\theta}(i)\Delta t$$
$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) + \hat{\omega}(i)\Delta t.$$

Dengan:

$$i = 1, \ldots, N+1$$

Menambahkan x (domain waktu) untuk setiap perulangannya dengan h.

- Melakukan perhitungan simpangan sudut untuk setiap waktu t dengan selang waktu h hingga batas waktu b secara analitik menggunakan perumusan

$$y = A\sin\omega t$$

Dimana:

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$\omega = kecepatan\ sudut\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$g = percepatan\ gravitasi\ \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)$$

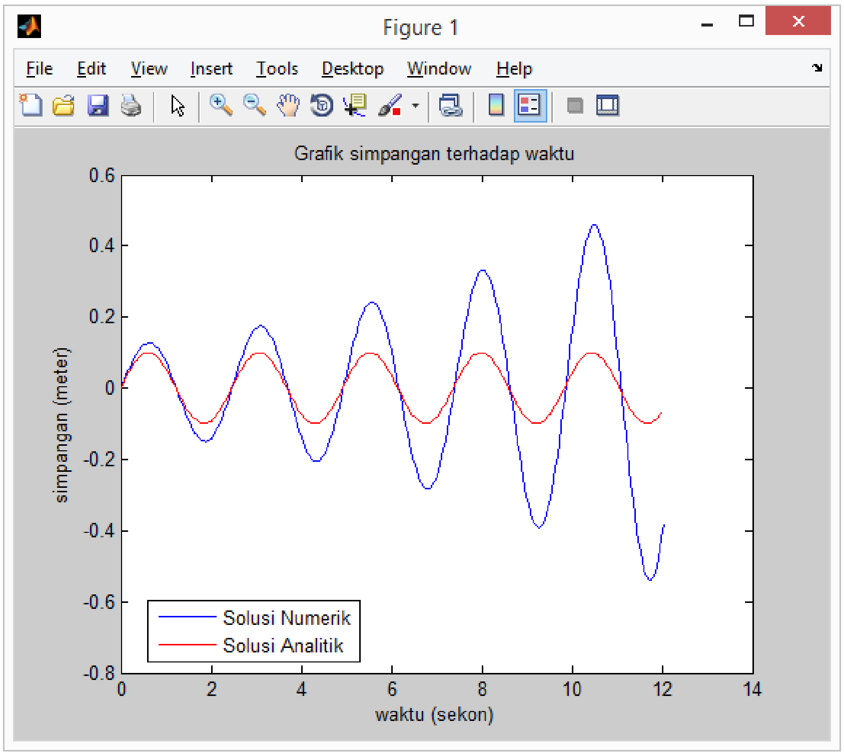
$$l = panjang\ tali\ (m)$$

- Plot grafik solusi analitik dan solusi numerik

Listing Program

```
clear
clf
ptali=1.5; % panjang tali (meter)
g=9.8; %percepatan gravitasi (m/s^2)
n=300; %banyaknya pias
h=0.04; %lebar pias
b=n*h; %waktu akhir (sekon)
teta(1)=0; %simpangan sudut
omega(1)=0.3; %kecepatan sudut

x(1)=0; %domain waktu

for i=1:n+1
    omega(i+1)=omega(i)-((g/ptali)*teta(i)*h); %menghitung kec
sudut dengan menggunakan persamaan euler
    teta(i+1)=teta(i)+omega(i)*h;          %menghitung simpangan
dengan menggunakan persamaan euler
    x(i+1)=x(i)+h;   %penambahan waktu
end

t=0:h:b;                %perhitungan analitik domain waktu
yanalitik=0.1*sin(sqrt(g/ptali)*t); %perhitungan analitik
simpangan

plot(x,teta,'b',t,yanalitik,'r')
```

Tampilan Program



Analisa:

Dari plotting data diatas, dapat dilihat bahwa solusi analitik memberikan bentuk simpangan sinusoidal. Sementara hasil pendekatan numerik menggunakan perumusan euler dihasilkan nilai simpangan yang semakin besar setiap pertambahan waktunya. Ini terjadi karena perumusan euler untuk simpangan menggunakan omega(i) bukan omega(i+1). sehingga, nilai simpangan yang dihasilkan akan terus tumbuh karena penggunaan omega yang tidak tepat peruntukkannya. Referensi lain mengatakan bahwa perumusan ini divergen diakibatkan nilai periode yang berubah-ubah. Semantara analitik tetap.

Perumusan ini diperbaiki di dalam perumusan euler-euler cromer.

Persoalan:

Apa perbedaan metode Euler-Cromer dan Verlet.

- Euler Cromer

Penggunaan euler cromer didasari oleh tidak kekalnya energi yang diberikan untuk setiap rentang waktu t pada perumusan euler.

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\omega_{n+1}^2 + \theta_{n+1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\omega_n^2 - 2\omega_n\theta_n\Delta t + \theta_n^2\Delta t^2 + \theta_n^2 + 2\omega_n\theta_n\Delta t + \omega_n^2\Delta t^2\right] \\ &= E_n + E_n\Delta t^2 \\ &= E_n\left(1+\Delta t^2\right) \end{aligned}$$

Dari uraian diatas dapat dilihat bahwa metode Euler memiliki properti yang dapat membuat E_n bertambah dari waktu ke waktu.

Modifikasi ke dalam metode euler dapat menyelesaikan permasalahan ini. dengan mengubah step pengerjaan euler menjadi:

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n - \theta_n\Delta t \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega_{n+1}\Delta t \qquad \leftarrow \text{Note change here} \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \end{aligned}$$

Dengan perubahan ini dapat dilihat bahwa perumusan energi

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{2}\left(\omega_n^2 - \theta_n^2\right)\Delta t^2 + O\left(\Delta t^3\right)$$

Sekarang dapat dilihat dalam suku yang mengandung Δt^2 dapat bernilai positif dan negatif. Gerak harmonis sederhana memiliki solusi analitik:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \sin\left(t - t_0\right) \\ \omega &= \theta_0 \cos\left(t - t_0\right) \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} \omega^2 - \theta^2 &= \theta_0^2\left[\cos^2\left(t-t_0\right) - \sin^2\left(t-t_0\right)\right] \\ &= \theta_0^2 \cos 2\left(t-t_0\right) \end{aligned}$$

Ini berarti bahwa nilai rata-rata dari $\omega^2 - \theta^2$ untuk satu periode osilasi adalah nol. Maka jelaslah terlihat bahwa penggunaan metode euler cromer dapat mendekati fungsi numerik dengan fungsi aslinya.

- Metode Verlet

Persamaan diferensial untuk single pendulum dan double pendulum dapat diselesaikan hanya dengan aproksimasi harmonis. Metode numerik dapat menyelesaikan persamaan untuk semua nilai $\alpha\ dan\ \beta$

Algoritma ini merupakan algoritma yang vanyak dipakai untuk integrasi numerik dari persamaan diferensial biasa.

Persamaan newton untuk gerak partikel m dengan gaya F adalah:

$$\ddot{r} = \frac{F(r)}{m}, \text{ with } r(t=0) = r_0,\ \dot{r}(t=0) = v_0 \quad (1)$$

Aproksimasi deret taylor untuk $r(t+h) dan\ r(t-h)$ adalah

$$r(t+h) = r(t) + h\dot{r}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{r}(t) + \cdots \ (2)$$

$$r(t-h) = r(t) - h\dot{r}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{r}(t) + \cdots \ (3)$$

Maka dihasilkan:

$$r(t+h) + r(t-h) = 2r(t) + h^2\ddot{r}(t) + O(h^4)$$

$$r(t+h) = 2r(t) - r(t-h) + h^2\ddot{r}(t) + O(h^4)$$

$$= 2r(t) - r(t-h) + h^2\frac{F(r)}{m} + O(h^4)$$

Maka kecepatannya dapat dikalkulasikan dengan

$$v(t) = \frac{r(t+h) - r(t-h)}{2h} + O(h^2)$$

Pias pertama dapat dikalkulasikan :

$$r(t+h) = r(t) + hv(t) + \frac{h^2}{2}\frac{F(r(t))}{m}$$

$$v(t+h) = v(t+h/2) + \frac{h}{2}\frac{F(r(t+h))}{m}$$

Namun, referensi lain menyatakan perumusan yang lebih mudah adalah:

$$\boxed{x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 a(x_n, t_n)},$$

Dimana $a(x_n, t_n)$ merupakan turunan pertama dari

Persoalan

Selesaikan program pendulum yang telah Anda Selesaikan dan ubah metodanya menggunakan Metoda Euler-Cromer dan Metoda Verlet

Jawab

Metode Verlet dan Euler Cromer sangat cocok untuk permasalahan pendulum.

- **Metode Euler Cromer**

Menghitung gerak ayunan pendulum dengan simpangan kecil menggunakan perumusan euler-cromer.

Diketahui:

Panjang tali l=1,5 meter
Percepatan gravitasi g=9,8 m/s^2
Banyaknya pias n=300
Lebar pias h=0.04
Simpangan sudut pertama=0
Kecepatan sudut pertama =0.3 rad/s

Jawab:

Algoritma:

- Memasukkan nilai-nilai fisis yang diketahui.
- Menentukan besar pias dan jumlah pias untuk menyelesaikan iterasi perhitungan solusi secara numerik.
- Melakukan perhitungan kecepatan sudut dan simpangan sudut secara numerik. Dengan rumus euler-cromernya adalah:

$$\hat{\omega}(i+1) = \hat{\omega}(i) - \frac{g}{l}\hat{\theta}(i)\Delta t$$

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) + \hat{\omega}(i+1)\Delta t$$

Dengan:

$$i = 1, \dots, N + 1$$

Menambahkan x (domain waktu) untuk setiap perulangannya dengan h.

- Melakukan perhitungan simpangan sudut untuk setiap waktu t dengan selang waktu h hingga batas waktu b secara analitik menggunakan perumusan

$$y = A \sin \omega t$$

Dimana:

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

$$\omega = kecepatan\ sudut\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$g = percepatan\ gravitasi\ \left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)$$

$$l = panjang\ tali\ (m)$$

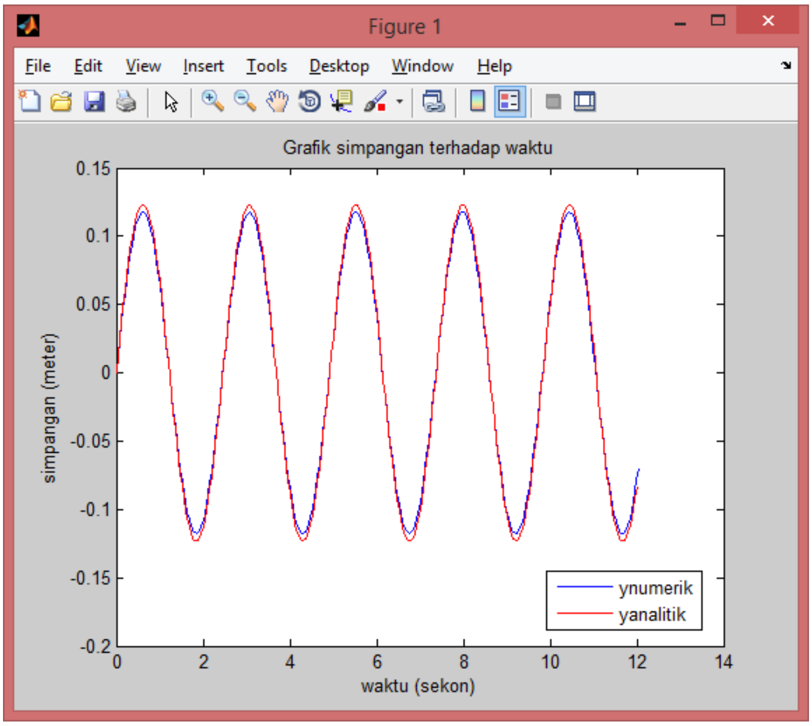
- Plot grafik solusi analitik dan solusi numerik

Listing Program

```
clear
clf
ptali=1.5; % panjang tali (meter)
g=9.8; %percepatan gravitasi (m/s^2)
n=300; %banyaknya pias
h=0.04; %lebar pias
b=n*h; %waktu akhir (sekon)
teta(1)=0; %simpangan sudut
omega(1)=0.3; %kevecepatan sudut

x(1)=0; %domain waktu

for i=1:n+1
    omega(i+1)=omega(i)-((g/ptali)*teta(i)*h); %perhitungan
numerik menggunakan euler cromer
    teta(i+1)=teta(i)+omega(i+1)*h;
    x(i+1)=x(i)+h;
end
```

```
t=0:h:b; %domain waktu
yanalitik=0.1*sin(sqrt(g/ptali)*t); %perhitungan simpangan
menggunakan fungsi analitik

plot(x,teta,'b',t,yanalitik,'r')
title('Grafik simpangan terhadap waktu');
xlabel('waktu (sekon)');
ylabel('simpangan (meter)');
```

Tampilan Program



Analisa:

Dari hasil diatas dapat dilihat bahwa penggunaan euler cromer dapat menjamin prinsip hukum kekekalan energi sesuai dengan uraian **Soal 2** dan menghilangkan pengaruh buruk dari metode sebelumnya yaitu metode euler.

Menghitung gerak ayunan pendulum dengan simpangan kecil menggunakan perumusan Verlet.

Kondisi awal=x(0)=2 dan v(0)=2

Jawab:

Algoritma:

- Memasukkan nilai-nilai fisis yang diketahui.
- Menentukan besar pias dan jumlah pias untuk menyelesaikan iterasi perhitungan solusi secara numerik.
- Memasukkan dua nilai kondisi awal x(1), x(2), y(1), y(2)
- Melakukan perhitungan simpangan sudut secara numerik. Dengan rumus Verlet-nya adalah:

$$x(j) = 2x(j-1) - x(j-2) + dt * dt * (-1.0 * 1/m) * x(j-1);$$
$$v(j-1) = (x(j) - x(j-2))/(2dt);$$

- Menambahkan x (domain waktu) untuk setiap perulangannya dengan h.
- Memasukkan perumusan nilai analitik:

$$y\_an = Acos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} * t\right);$$

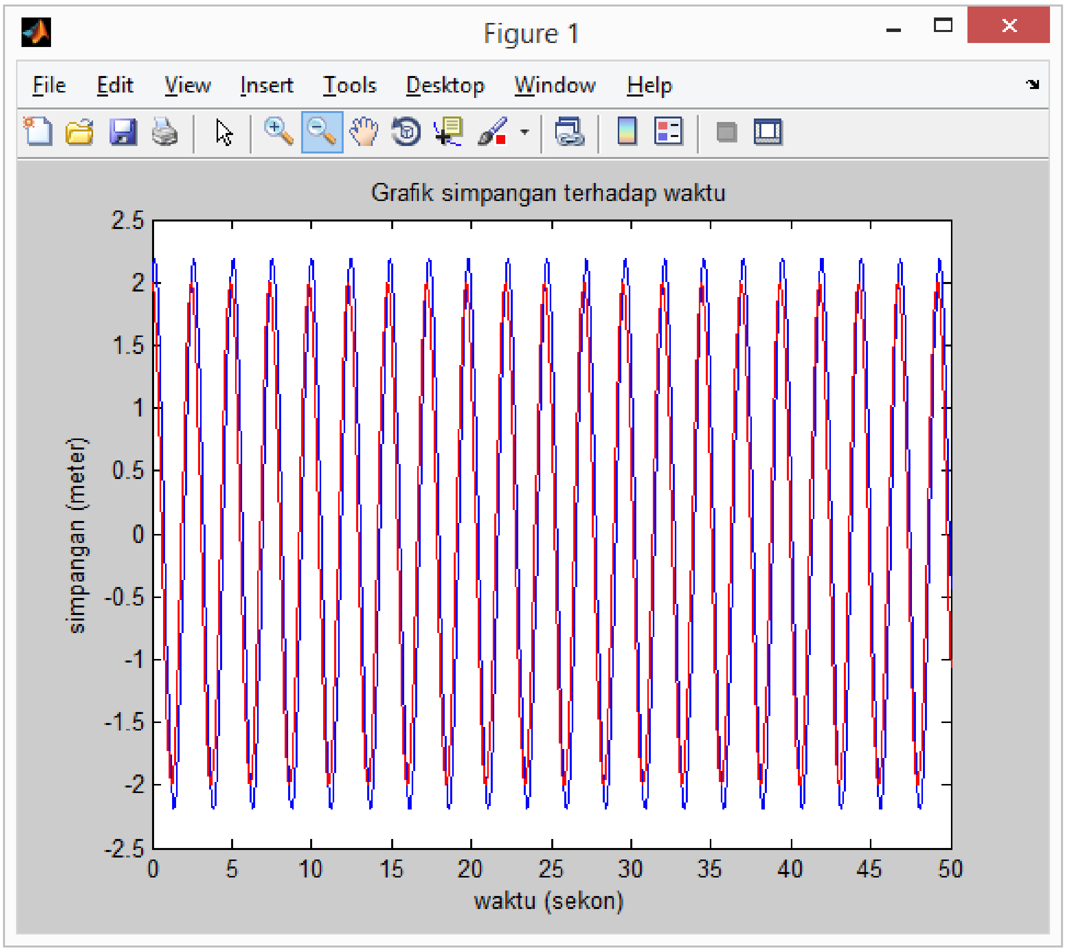
- Plot grafik solusi numerik dan Analitik

Listing Program

```
clear
clf
h=0.04;              %lebar pias
l=1.5;           %panjang tali
m=1.2;               %massa tali
v(1)=2;             %kecepatan awal
g=9.8;              %percepatan gravitasi
t0=0;             %waktu awal diketahui
x(1)=2;            %nilai simpangan awal
x(2)=x(1)+v(1)*h;    %nilai untuk waktu sama dengan h
```

```
t=t0:h:50;
n=length(t); %banyaknya pias
for i=3:n
   %iterasi menggunakan perumusan verlet
    x(i)=2.0*x(i-1)-x(i-2)+h*h*(-1*g/l)*x(i-1);
    v(i-1)=(x(i)-x(i-2))/(2*h);
end
x_an=x(1)*cos(sqrt(g/l)*t);    %kecepatan akhir
t2=t0:h:50;
plot(t,x,'b',t2,x_an,'r')  ;           %plot grafik
title('Grafik simpangan terhadap waktu');
xlabel('waktu (sekon)');
ylabel('simpangan (meter)');
```

Tampilan Program



Analisa:

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa perumusan verlet akan menghasilkan nilai error terhadap nilai analitiknya. Nilai analitik didapat dari penurunan persamaan diferensial yang diapatkan menggunakan fismat. Perumusan verlet ini membutuhkan percepatan gravitasi dan panjang tali dalam menjalankan iterasinya.