

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Мурашко Иван Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ САМОДИФРАКЦИИ СЛОЖНЫХ  
СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ  
КРИСТАЛЛАХ

01.04.03 — радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
Водоватов И. А.

Научный консультант  
доктор технических наук  
Петрунькин В. Ю.

Санкт-Петербург 2001

## Оглавление

<b>Список сокращений</b>	<b>5</b>
<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Основы эффекта фоторефракции</b>	<b>15</b>
1.1 Введение . . . . .	15
1.2 Процесс формирования голографических решеток в ФРК . .	21
1.2.1 Фоточувствительные центры в ФРК . . . . .	21
1.2.2 Процессы генерации и рекомбинации свободных носителей заряда . . . . .	22
1.2.3 Процессы переноса свободных носителей заряда . . .	24
1.2.4 Процесс формирования поля пространственного заряда	25
1.2.5 Линейный электрооптический эффект в ФРК . . . .	25
1.2.6 Система уравнений, описывающая процесс формирования голографических решеток в ФРК . . . . .	26
1.3 Решение системы уравнений, описывающей процесс формирования поля пространственного заряда . . . . .	27
1.3.1 Решение для нулевого порядка малости . . . . .	29
1.3.2 Решение для первого порядка малости . . . . .	30
1.3.3 Стационарный режим записи . . . . .	35

1.4	Двухволновое взаимодействие света в фоторефрактивных кристаллах . . . . .	37
1.4.1	Постановка задачи и вывод основных уравнений . . .	38
1.4.2	Процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии света в ФРК . . . . .	42
1.4.3	Нестационарные механизмы записи голографических решеток в ФРК . . . . .	43
1.4.4	Фенинг . . . . .	44
1.5	Случай примесей двух сортов . . . . .	45
1.5.1	Постановка задачи . . . . .	47
1.5.2	Решение для первого порядка малости . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Двойное некогерентное обращающее зеркало</b>	<b>54</b>
2.1	Введение . . . . .	54
2.2	Постановка задачи . . . . .	56
2.3	Вывод основных уравнений . . . . .	59
2.3.1	Поля падающие на кристалл слева . . . . .	60
2.3.2	Поля падающие на кристалл справа . . . . .	65
2.3.3	Вывод уравнений для среды . . . . .	66
2.3.4	Окончательный вид уравнений . . . . .	71
2.4	Численные расчеты модели двойного некогерентного обращающего зеркала . . . . .	73
2.4.1	Динамика генерации в схеме двойного некогерентного обращающего зеркала . . . . .	76
2.4.2	Запись-стирание голографических решеток . . . . .	84

<b>3</b>	<b>Полулинейный генератор</b>	<b>90</b>
3.1	Введение . . . . .	90
3.2	Постановка задачи . . . . .	92
3.3	Вывод основных уравнений . . . . .	97
3.3.1	Поля падающие на кристалл слева . . . . .	97
3.3.2	Поля падающие на кристалл справа . . . . .	101
3.3.3	Вывод уравнений для среды . . . . .	107
3.3.4	Окончательный вид уравнений . . . . .	111
3.4	Численные расчеты модели полулинейного генератора . . . .	113
	<b>Заключение и выводы</b>	<b>123</b>
	<b>Литература</b>	<b>127</b>

## Список сокращений

**ФРК** Фоторефрактивный кристалл

**ОВФ** Обращение волнового фронта

**ДНОЗ** Двойное некогерентное обращающее зеркало

## Введение

В последнее время большой интерес вызывает такая область научной деятельности, как обработка информации. Связано это с бурным ростом, который наблюдается в последние пол века в данной области. Возрастают вычислительные мощности, но еще большими темпами возрастают объемы информации. В данный момент основные вычислительные средства построены на базе полупроводниковой техники. Основной характерной чертой таких устройств является то что обработка информации в них осуществляется последовательно. Это вполне подходит для численных расчетов, но совершенно не подходит для таких, актуальных в данный момент времени задач, как распознавание изображений, поиск информации по нечетким критериям в больших объемах данных и многих других.

Объединяет данные задачи, то что с ними довольно неплохо справляется природа, в частности человеческий мозг. Мозг является по сути своей аналоговой вычислительной машиной, которая состоит из множества простейших элементов - нейронов, которые осуществляют обработку информации параллельно. Внутренняя структура самих нейронов проста, по сравнению со внутренней структурой ядра полупроводниковых (цифровых) вычислительных машин - микропроцессора, но структура конгломерата этих нейронов, который мы называем мозгом - несравненно сложнее.

В настоящее время именно параллелизм обработки информации представляется наиболее перспективным направлением развития вычисли-

тельной техники. В частности традиционные электронно-вычислительные машины (ЭВМ) объединяются в кластеры. Кластер представляет собой совокупность отдельных, простых, ЭВМ объединенных посредством сети в одно общее целое. Кластер по реализации похож на мозг, но по сути от него очень сильно отличается. Основные отличия состоят в том, что отдельный элемент кластера представляет собой сложное устройство и то что таких элементов, прежде всего в силу их высокой сложности, а следовательно, и высокой цены, мало.

В данный момент времени уже видны пределы в развитии полупроводниковой вычислительной техники. Данный факт заставляет искать новые явления природы, которые могут быть использованы в обработке информации. Особое место здесь занимает оптическая обработка информации. Примерно до середины 20-го века оптическая и электронная вычислительная техника развивались одинаковыми темпами. В то время особо остро стояли задачи численных расчетов, что привело к быстрому росту именно цифровых ЭВМ. В настоящее время, когда появились новые задачи - все больший интерес стала вызывать оптическая обработка информации. Основной отличительной чертой которой является параллелизм.

Оптическая обработка информации выигрывает за счет параллельной обработки именно на больших объемах данных, и проигрывает ЭВМ на малых объемах. Большое количество работ посвящено реализации различных математических алгоритмов на базе оптики. В частности в [1] рассматривается оптическая реализация модели Хопфилда - простейшей модели работы нейронных сетей. В данной модели основные вычислительные мощности тратятся на перемножение матриц. Посредством оптики данная

операция может быть реализована более эффективно. В работах [2] и [3] на базе оптики реализованы некоторые математические методы распознавания оптических образов.

Основным недостатком этих работ является то что в них недостаточно широко используются средства предоставляемые для данных задач оптикой. В частности, оптика используется в качестве особого вычислительного средства, позволяющего эффективно решать определенный круг математических задач. Вместе с тем очевидно, что для реализации систем распознавания оптических образов надо записывать соотношения между различными образами, т. е. реализовать так называемую ассоциативную память [4]. Для этой цели в описанных выше работах используются простые транспаранты. Вместе с тем в оптике известны другие методы реализации ассоциативной памяти. В этой связи стоит прежде всего отметить динамическую голографию. Обыкновенная оптическая голография, открытая еще Габором [5], имеет дело с восстановлением оптических изображений. Динамическая голография позволяет перезаписывать изображения и, следовательно, идеально подходит в качестве средства реализации ассоциативной памяти и может быть использована для построения устройств распознавания оптических образов. Существуют работы [6] в которых на базе ФРК реализованы устройства ассоциативной голографической памяти.

Кроме того последние исследования [7] позволяют нам надеяться на построение устройств для хранения больших объемов данных в основе которых также лежит динамическая голография. Теоретически ожидаемая плотность хранения данных в таких устройствах составляет 1Тб на ку-



бический сантиметр ( $1 \frac{TB}{sm^3}$ ), теоретически исследователи ожидают плотностей записи порядка ( $10 \frac{GB}{sm^3}$ ). Для сравнения - используемый в данный момент магнитный способ записи позволяет записывать данные с плотностью ( $10 \frac{MB}{sm^2}$ ) и это без учета размеров самих устройств. При этом в устройствах голографической памяти будут отсутствовать движущиеся части, что позволит использовать данные устройства в специфических условиях, таких например, как невесомость.

В основе динамической голографии лежит фоторефрактивный эффект, который состоит в изменении показателя преломления так называемых фоторефрактивных кристаллов (ФРК) под действием падающего света. Таким образом, в ФРК записываются голографические решетки, в дальнейшем падающий свет испытывает дифракцию на данных решетках. В результате происходит перераспределение энергии в падающих световых пучках. Данное явление носит название явления самодифракции.

На базе явления самодифракции построено большое количество разнообразных схем обращения волнового фронта. В данных схемах фоторефрактивный кристалл, работает в качестве особого зеркала, которое обращает волновой фронт падающей на него световой волны. Это значит что фазовая структура “отраженного” светового пучка является обращенной по отношению к фазовой структуре падающего светового пучка. Схемы обращения волнового фронта (ОВФ) являются основными элементами в оптических системах распознавания образов, построенных на ФРК.

Данные устройства кроме применений в области оптической обработки информации могут использоваться также для компенсации фазовых искажений в различных оптических устройствах и прежде всего в резона-

торах лазеров. В этой связи особый интерес представляет схема полулинейного генератора - которая является как бы частью резонатора лазера с помещенным туда фоторефрактивным кристаллом.

К настоящему моменту времени имеется большое количество работ [8], [9] в которых рассматривается самодифракция света в ФРК. В большинстве работ рассматриваются граничные состояния: пороговые условия генерации [13], [14] или же стационарные режимы генерации [10]. С другой стороны для задач распознавания оптических образов особый интерес представляет именно процесс развития генерации, временные характеристики данного процесса: за какое время достигается стационарное состояние и от чего данное время зависит? При ответе на данный вопрос нельзя пренебрегать таким характерным свойством ФРК как фенинг - широкоугловое рассеяние света на шумовых решетках. Фенинг в ФРК с одной стороны представляет собой шум, который ухудшает свойства приборов на базе ФРК, с другой стороны именно фенинг является затравкой на начальном этапе генерации в схемах ОВФ. В большинстве работ, как например в [11] для упрощения теоретических выкладок влиянием фенинга пренебрегается. Существуют работы в которых исследуется сам фенинг как таковой [25]. Влияние фенинга на характеристики ОВФ рассмотрено не достаточно подробно. Пожалуй единственная такая попытка была сделана в [12]. Основной проблемой в данной работе является то что рассмотрение производилось в приближении плоских волн, при этом фенинг заменялся на дополнительную плоскую волну. Вместе с тем известно, что сам фенинг имеет сложное распределение по угловым координатам и замена его на плоскую волну представляется сильным допущением. Особо стоит отметить работы

[13] и [14]. В [13] рассматриваются пороговые условия генерации в модели полулинейного генератора, а в [14] - система из двух связанных ФРК. Основной отличительной особенностью этих работ является то, что в них учитывается влияние фенинга на пороговые условия, при этом фенинг рассматривается как совокупность большого числа плоских волн. Но в этих работах рассматривалась динамика генерации в начальный момент времени. Теоретическое исследование динамики в моменты времени при которых амплитуды взаимодействующих световых пучков не малы - не рассматривалось в виду сложности вычислительных расчетов.

В данной работе была сделана попытка рассмотреть влияние фенинга на развитие генерации в различных моделях на базе ФРК. При этом рассмотрение ведется в предположении сложной структуры взаимодействующих световых пучков.

Актуальность темы диссертации. Поиск новых способов хранения и обработки информации предполагает поиск и изучение новых областей физики. Одной из таких областей, является динамическая голография. В настоящее время накоплен большой объем знаний по природе фоторефрактивного эффекта. Исследованы различные схемы обработки оптической информации на базе ФРК. Достаточно хорошо исследованы пограничные состояния: начальные моменты записи решеток и стационарные состояния. Еще больший интерес представляет динамика записи голографических решеток. Теоретическое исследование этой задачи представляется трудоемкой задачей, поэтому в большинстве случаев при рассмотрении этой задачи пренебрегают некоторыми, порой очень важными эффектами, в частности фенингом. Все это вместе взятое обуславливает актуальность исследова-

ний, направленных на изучение динамики записи голографических решеток в ФРК.

Цель работы. Настоящая работа направлена на создание адекватной модели взаимодействия сложных световых пучков в ФРК. Основное внимание при этом уделялось решению следующих проблем:

- учету влияния фенинга на характеристики различных оптических схем, использующих ФРК, прежде всего рассматривались схемы двойного некогерентного обращающего зеркала (наиболее общая схема) и схема полулинейного генератора
- учету влияния дополнительных примесей в ФРК
- разработке эффективных программ расчета характеристик данных схем

Научная новизна. Построена общая модель самодифракции света в ФРК с учетом влияния фенинга. При этом дифрагирующие лазерные пучки представляются не плоскими волнами, а в более общем случае - световыми пучками со сложным распределением по угловым координатам. Данная физическая модель является наиболее близкой к действительности. На базе этой модели исследованы процессы записи голографических решеток в схеме двойного-некогерентного обращающего зеркала и схеме полулинейного генератора с большим числом поперечных мод. В схеме двойного некогерентного обращающего зеркала впервые проведены расчеты записи голографических решеток в предположении сложного характера примесей ФРК.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Показано, что построенная общая модель самодифракции света в ФРК, адекватно описывает экспериментально наблюдаемые эффекты в схеме ДНОЗ и в схеме полулинейного генератора.
2. Показано, что модель ФРК с числом примесей больше 1 хорошо описывает экспериментально наблюдаемые процессы записи-стирания голографических решеток в ФРК.
3. Показана принципиальная возможность распознавания оптических образов в оптических системах на базе ФРК посредством разности времен восстановления записанных и записываемых оптических образов.

Практическая значимость диссертации заключается в следующем:

1. Предложенная теория записи голографических решеток в ФРК позволяет рассчитывать характеристики оптических систем распознавания оптических образов на базе ФРК.
2. Исследование процессов генерации в схеме полулинейного генератора представляет собой большой интерес в связи с созданием новых устройств компенсации фазовых искажений волновых фронтов в резонаторах лазеров. Данные исследования позволяют улучшать характеристики лазерного излучения.

Апробация работы. Основные результаты, полученные автором, опубликованы в 6 печатных работах. Они неоднократно докладывались в СПбГТУ, СПбБГТУ, а также на следующих конференциях:

- I и II Всероссийские научные конференции студентов-радиофизиков (С. Петербург, 1997 и 1998)
- International Workshop on Nondestructive Testing and Computer Simulation in Science and Engineering (St. Petersburg, Russia, 1998)
- 7-я Петербургская школа-семинар-выставка Лазеры для медицины, биологии и экологии (С. Петербург, 1999)
- Лазеры. Измерения. Информация (С. Петербург, 2000)
- Международной научной конференции “Оптика кристаллов” “ОС-2000” (Мозырь, Беларусь, 2000)

В работе принята нумерация формул и рисунков по главам.

# 1. Основы эффекта фоторефракции

## 1.1. Введение

Явление фоторефракции было обнаружено в 1966 г. при изучении прохождения достаточно мощного лазерного излучения через электрооптические кристаллы  $LiNbO_3$ ,  $LiTaO_3$  и некоторые другие [15]. Оказалось, что под воздействием лазерного излучения изменялся показатель преломления кристалла, что приводило к искажению волнового фронта луча. Таким образом луч света портил изначально высокое оптическое качество кристалла - появлялась неоднородность показателя преломления в освещенном участке. Данный факт послужил основанием для первоначального названия эффекта - optical damage (оптическое повреждение). Однако вскоре обратили внимание и на положительные стороны эффекта. Появились предложения о его практическом использовании. В дальнейшем само явление получило название фоторефракции.

Поскольку при фоторефракции изменение показателя преломления является обратимым, то фоторефрактивные кристаллы стали рассматриваться как реверсивные светочувствительные среды.

Довольно быстро была выявлена физическая суть эффекта фоторефракции, состоящая в следующем: под воздействием падающего на кристалл света электроны переносятся в зону проводимости, далее под воздействием процессов диффузии и дрейфа они переносятся в другие места, где

захватываются на ловушки. В результате в кристалле образуется неоднородное распределение пространственного заряда, а следовательно, и поля. В силу того факта, что рассматриваемые кристаллы обладают электрооптическим эффектом, в кристалле образуется неоднородное распределение показателя преломления, таким образом производится запись изображения.

Большое количество работ, посвящено исследованию процесса записи голографических решеток в ФРК. В самых первых из них исследуется природа записи решеток в “идеальном” кристалле с одним сортом примесей и одним типом носителей заряда. В этой связи стоит отметить такую работу, как [17]. В рамках этой главы мы фактически повторим вывод [17] и подробно рассмотрим процессы, проходящие при записи решеток в ФРК. Основное отличие от работы [17] будет заключаться в том, что здесь будет сделана попытка распространить вывод [17] на случай сложных световых пучков, состоящих из более чем двух взаимодействующих плоских волн.

В силу того, что в настоящее время процессы записи решеток в таком “идеальном” кристалле изучены достаточно хорошо, стали рассматриваться более сложные схемы записи. Во-первых следует отметить работы в которых используется несколько типов носителей (электроны и дырки) [18], во-вторых работы в которых исследуется процессы записи голограмм в кристаллах с большим числом примесей [30]. Основным недостатком данных работ является то что в них строится физическая модель записи решеток, но не рассматриваются процессы самодифракции света на данных решетках. Связано это прежде всего с большой трудоемкостью данной работы. Кроме того, в работе [30] уравнения для поля пространственного за-



ряда выводились в приближении того, что сам этот заряд создается только электронами в зоне проводимости и не учитывается неоднородное распределение ионизированных примесных центров, которое также вносит свой вклад в поле пространственного заряда. Такое приближение представляется нам не совсем строгим. В дальнейшем, на базе физической модели, предложенной в [30], мы исследуем процессы самодифракции света в такой системе. Для этого, в рамках данной главы мы выведем уравнения, описывающие предложенную в [30] физическую модель.

Вместе с процессами записи голографических решеток представляет интерес процесс дифракции световых пучков на этих самых решетках, что вместе составляет явление самодифракции. Наиболее простой и наиболее изученной здесь является задача о самодифракции двух плоских волн в ФРК. Данная задача изучена настолько подробно, что представляет в настоящий момент только методологический интерес. Мы будем опираться в дальнейшем на работу [28]. Это связано прежде всего с тем что уравнения, описывающие самодифракцию света в ФРК, выведены при помощи так называемого метода интегральных уравнений, основанного на интегральной лемме Лоренца. Данный метод будет использоваться для вывода усредненных уравнений в более сложной схеме самодифракции света в ФРК, когда дифрагирующие световые пучки имеют сложную пространственную структуру. Поэтому в этой главе мы фактически повторим вывод [28].

Из анализа самодифракции двух плоских волн в ФРК [8], следует что два механизма записи диффузионный и дрейфовый приводят к разным результатам. В частности, если кристалл освещается интерференционной

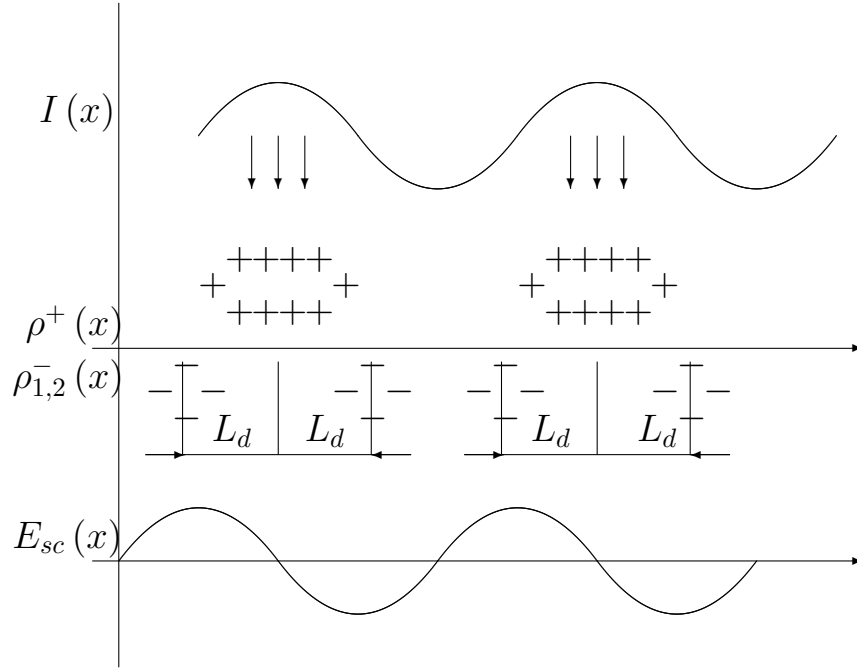


Рис. 1.1. Формирование решеток заряда и электрического поля в случае диффузионного механизма записи

картиной вида

$$I(x) = I_0 (1 + m \cos k_x x),$$

то при малых длинах диффузии  $L_d$ , таких что  $k_x L_d \ll 1$ , внутреннее поле в кристалле

$$E_{sc}(x) \sim \sin k_x x.$$

Таким образом поле  $E_{sc}$  смещено на  $\frac{\pi}{2}$  относительно интерференционной картины. Данный факт отражен на рис.1.1. Аналогично при малых длинах дрейфа  $L_0$ , таких что  $k_x L_0 \ll 1$ , внутреннее поле в кристалле

$$E_{sc}(x) \sim -\cos k_x \left( x + \frac{L_0}{2} \right),$$

что также отражено на соответствующем рис.1.2.

При этом особый интерес предоставляет диффузионный механизм записи. Прежде всего потому что перекачка энергии, как это следует из

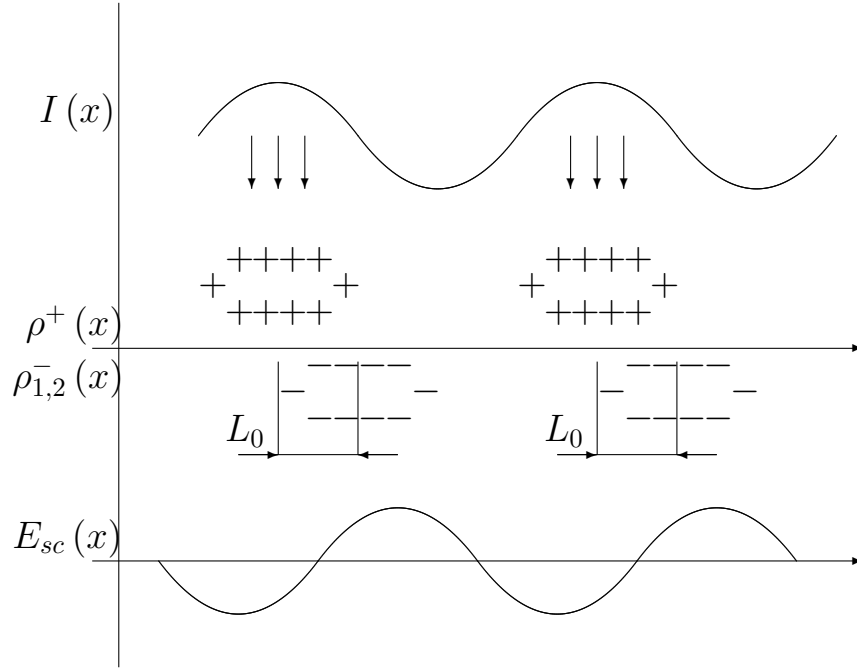


Рис. 1.2. Формирование решеток заряда и электрического поля в случае дрейфового механизма записи

анализа двухволнового взаимодействия света в ФРК [8], происходит на решетках сдвинутых на  $\frac{\pi}{2}$  относительно интерференционной картины.

С учетом того что решетки, создаваемые при диффузионном механизме записи много больше решеток, создаваемых при дрейфовом механизме, в [21] был предложен метод нестационарной записи голографических решеток в ФРК. Этот метод более подробно рассматривается ниже в этой главе.

Характерной особенностью фоторефрактивных сред является асимметричное фотоиндуцированное рассеяние, называемое фенингом (от англ. fanning). Внешнее проявление этого рассеяния состоит в том что лазерный пучок, проходящий через фоторефрактивный кристалл, вызывает появление относительно широкоугольного веера рассеянного света.

Большая часть фоторефрактивных кристаллов, используемых для

преобразования лазерного излучения, характеризуется умеренным и сильным уровнем фенинга. Так при проходе через кристалл в энергию фенинга может перейти до 90% и даже более, энергии основного пучка.

Фенинг оказывает решающее воздействие на характеристики оптических систем, построенных на базе ФРК, в частности в различных схемах генераторов (например полулинейный генератор) именно фенинг является источником того затравочного излучения из которого в дальнейшем развивается генерация. Не смотря на это до последнего времени при рассмотрении схем на базе ФРК, в большей части работ учетом фенинга пренебрегалось, в тех же где он учитывался (см. например [12]) описание самого фенинга представляется не вполне адекватным (он представляется в этих работах плоской волной). В данной работе прежде всего предполагается выяснить влияние фенинга на характеристики оптических систем с ФРК.

Существует несколько физических моделей, объясняющих фенинг. Простейшее объяснение данного явления в рамках так называемой  $\epsilon$  модели [25] выглядит следующим образом: пучок рассеивается на неоднородностях кристалла, записывает решетки нелинейного показателя преломления с рассеянными, шумовыми, компонентами и усиливает эти компоненты посредством своей энергии.

Кроме того в [25] были предложены и другие модели фоторефрактивного рассеяния. В основе одного из них лежат процессы фотопроявления флуктуаций распределения фотогальванических центров. Другие модели предполагают в качестве причины возникновения фенинга - взаимосвязь между спекл-структурой поля рассеяния и многоволновыми, не менее чем шестиволновыми, процессами взаимодействия волн в условиях глубокой

модуляции фотопроводимости. Кроме того причиной фенинга могут стать флуктуации различных физических параметров ФРК, таких как, например, концентрация примесных центров.

## **1.2. Процесс формирования голографических решеток в ФРК**

Как на то указывалось выше, процесс формирования поля пространственного заряда условно можно разделить на три составляющие, которые происходят одновременно и, следовательно, уравнения их описывающие, должны решаться совместно: генерации свободных носителей заряда; переноса свободных носителей заряда; формирование поля пространственного заряда. Рассмотрим эти составляющие подробнее. При этом будем предполагать, что свободными носителями заряда являются электроны.

### **1.2.1. Фоточувствительные центры в ФРК**

Задача о возбуждении фотоэлектронов и захвате их на примесные центры является одной из самых главных частей в более общей задаче о формировании поля пространственного заряда. Не смотря на это данная задача в данный момент еще не полностью изучена и мы можем располагать более-менее достоверными данными только для отдельных типов кристаллов.

Совершенно ясно, что важнейшим требованием обеспечивающим формирование поля пространственного заряда, является наличие примесных центров в запрещенной зоне кристалла - доноров, которые обеспечивают появление фотоэлектронов при освещении кристалла. Кроме того, необходимо присутствие центров захвата электронов - глубоких ловушек.

В простейшем случае, и донорами и ловушками являются ионы одного и того же типа атомов, но в различном валентном состоянии.

Особую роль играют ионы железа  $Fe^{2+}$  и  $Fe^{3+}$ . Эта примесь считается важнейшей для таких типов кристаллов, как  $LiNbO_3$ ,  $KNbO_3$ ,  $BaTiO_3$  и др. [20]. При освещении кристалла происходит поглощение света примесями  $Fe^{2+}$ , осуществляется дальнейшая ионизация иона с образованием  $Fe^{3+} + e$ . Электрон уходит из освещенной области пока не будет захвачен ловушкой, в частности, другим ионом  $Fe^{3+}$ .

Для важных с практической точки зрения кристаллов  $BTO$  ( $Bi_{12}TiO_{20}$ ) и  $BSO$  ( $Bi_{12}SiO_{20}$ ) однозначных представлений о наиболее важном типе фотоактивных центров пока нет.

В дальнейшем, прежде всего, мы будем рассматривать именно эти типы кристаллов. В качестве доноров, будем считать что присутствуют некоторые примесные центры  $N$ , а в качестве ловушек - ионизированный вариант примесных центров  $N^+$ . Кроме того, очевидно, что в таких кристаллах могут присутствовать примесные центры различных типов, на что указывалось, в частности, в [30]. Позже в этой главе мы рассмотрим и эту ситуацию.

### 1.2.2. Процессы генерации и рекомбинации свободных носителей заряда

Как указывалось выше, падающий на кристалл луч света возбуждает в освещенной области кристалла фотоэлектроны. При этом возбуждение происходит с примесных центров,  $N$ . Рекомбинация проходит на ловушки  $N^+$  (см. рис 1.3). Обозначим через  $N_D$  - концентрацию всех примесей в

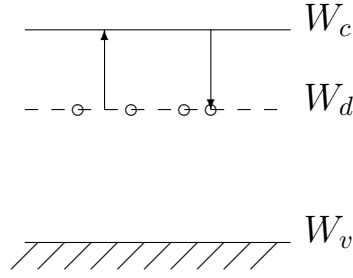


Рис. 1.3. Энергетическая схема ФРК  $W_c$  - зона проводимости,  $W_d$  - уровень примесных центров (доноров),  $W_v$  - валентная зона. Стрелками указаны оптические переходы и процессы рекомбинации подвижных электронов

кристалле ( $N_D$  - величина постоянная для данного кристалла), через  $N_D^+$  - концентрацию ионизированных доноров (они же - ловушки).

Скорость "генерации" ловушек (она же - скорость генерации фотоэлектронов) пропорциональна концентрации доноров  $N_D - N_D^+$  и интенсивности падающего света  $I$ . Коэффициент пропорциональности  $s$  называется сечением фотоионизации.

Скорость рекомбинации электронов пропорциональна концентрации ловушек  $N_D^+$  и концентрации свободных носителей заряда (электронов в нашем случае)  $n$ . Коэффициент пропорциональности обозначим через  $\gamma_R$  (так называемая константа рекомбинации).

Объединяя вышеизложенное можно записать:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = sI (N_D - N_D^+) - \gamma_R n N_D^+, \quad (1.1)$$

При выводе данного соотношения не учитывалась так называемая "темновая" (тепловая) генерация носителей заряда.

### 1.2.3. Процессы переноса свободных носителей заряда

В дальнейшем при рассмотрении процессов переноса свободного заряда будем учитывать только дрейф (см. рис.1.2) и диффузию электронов (см. рис.1.1). Это означает, что мы пренебрегаем в частности фотовольтаическим эффектом. Данное пренебрежение возможно в силу малости фотовольтаического эффекта для рассматриваемых типов кристаллов.

Для описания процессов переноса носителей заряда запишем два уравнения. Первое, так называемое уравнение баланса, описывает изменение концентрации носителей заряда за счет процессов генерации - рекомбинации, а также за счет переноса носителей

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla j. \quad (1.2)$$

Следующее - уравнение для тока в котором учитывается перенос зарядов посредством диффузионного и дрейфового механизмов

$$j = e\mu nE + D\nabla n, \quad (1.3)$$

где обозначено через  $\mu$  - подвижность электронов,  $D$  - коэффициент диффузии. Электрическое поле  $E$ , определяемое соотношением (1.4) состоит из двух частей: постоянного поля  $E_0$ , определяемого внешними условиями и искомого поля пространственного заряда  $E_{sc}$ .

$$E = E_0 + E_{sc}, \quad (1.4)$$



#### 1.2.4. Процесс формирования поля пространственного заряда

Процесс формирования поля пространственного заряда описывается уравнением Пуассона

$$\nabla E = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} (n + N_A - N_D^+), \quad (1.5)$$

в левой части которого записана суммарная плотность заряда. Через  $N_A$  обозначена концентрация отрицательных зарядов (акцепторов).

В темновых условиях некоторая часть примесных центров свободна от электронов, т. е.  $N_D^+|_{I=0} \neq 0$ . Компенсирующие акцепторные уровни полностью заполнены электронами, так чтобы в темновых условиях компенсировать  $N_D^+$ , т. е.  $N_D^+|_{I=0} = N_A$ . Так в частности для кристаллов  $BSO$ :  $N_D = 10^{19} \text{ см}^{-3}$  [22],  $N_A = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  [23]

#### 1.2.5. Линейный электрооптический эффект в ФРК

Важнейшим механизмом фоторефракции, обеспечивающим формирование голографических решеток, является электрооптический эффект. С точки зрения кристаллооптики в основе электрооптического эффекта лежит зависимость компонент тензора диэлектрической непроницаемости  $\check{a}_{ij}$  ( $\check{a} = \varepsilon^{-1}$ ) от приложенного электрического поля  $E$  если связь линейна, то этот эффект носит название эффекта Поккельса или линейного электрооптического эффекта. Если связь квадратична - то данное явление носит название эффекта Керра. В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно эффект Поккельса. Необходимым условием для существования эффекта Поккельса является отсутствие центра инверсии в кристалле. Ли-

нейная связь обычно записывается в виде

$$\delta\tilde{a}_{ij} = \sum_k r_{ijk} E_k,$$

где  $r_{ijk}$  - тензор электрооптических коэффициентов. При этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости для кубических кристаллов

$$\delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon^2 \sum_k r_{ijk} E_k$$

В дальнейшем мы будем предполагать линейную связь и считать

$$\delta\varepsilon = \alpha E. \quad (1.6)$$

### 1.2.6. Система уравнений, описывающая процесс формирования голографических решеток в ФРК

Как на то указывалось выше уравнения (1.1 - 1.5) должны решаться совместно, т. о. система уравнений, описывающая процесс формирования голографических решеток в ФРК выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = sI(N_D - N_D^+) - \gamma_R n N_D^+,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla j,$$

$$j = e\mu n E + D \nabla n,$$

$$\nabla E = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} (n + N_A - N_D^+), \quad E = E_0 + E_{sc},$$

$$\delta\varepsilon = \alpha E.$$

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	<i>BSO</i>	<i>BaTiO<sub>3</sub></i>
Диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon$	-	56	4300
Концентрация доноров	$N_D$	$cm^{-3}$	$10^{19}$	-
Концентрация акцепторов	$N_A$	$cm^{-3}$	$10^{16}$	$2 \cdot 10^{16}$
Сечение фотоионизации	$s$	$cm^2$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	-
Коэффициент рекомбинации	$\gamma_R$	$\frac{cm^3}{s}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-8}$
Подвижность	$\mu$	$\frac{cm^2}{Vs}$	0.03	0.5
Электрооптический коэффициент	$\alpha$	$\frac{sm}{V}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Таблица 1.1. Параметры материалов *BSO* и *BaTiO<sub>3</sub>*

$$N_A = N_D^+|_{I=0}, \quad N_D = const|_t, \quad N_A = const|_t. \quad (1.7)$$

В заключение имеет смысл привести численные значения параметров, используемых в описанных выше уравнениях [19].

### 1.3. Решение системы уравнений, описывающей процесс формирования поля пространственного заряда

Предположим, что кристалл освещается лазерным пучком  $a(\vec{r})$  (см. рис 1.4), представляющим собой некоторую совокупность плоских волн:

$$a(\vec{r}) = E_1 e^{i \vec{k}_1 \vec{r}} + E_2 e^{i \vec{k}_2 \vec{r}} + \dots + E_n e^{i \vec{k}_n \vec{r}} = \sum_{k=1}^n E_k e^{i \vec{k}_k \vec{r}}.$$

Суммарная интенсивность падающего света:

$$I = |a(\vec{r})|^2 = \left| \sum_{k=1}^n E_k e^{i \vec{k}_k \vec{r}} \right|^2,$$

т. е.

$$I(\vec{r}) = I_0 \left( 1 + \sum_K m(K) e^{i \vec{K} \vec{r}} + \sum_K m^*(K) e^{-i \vec{K} \vec{r}} \right),$$

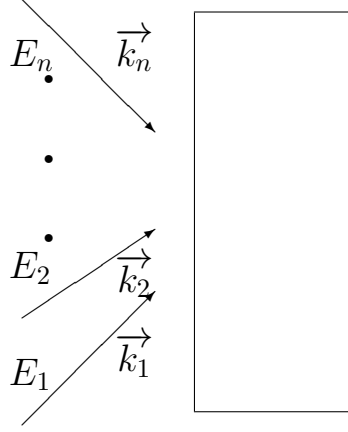


Рис. 1.4. Постановка задачи

где через  $I_0$  обозначено

$$I_0 = \sum_{k=1}^n |E_k|^2$$

и через  $m(K)$  обозначена глубина модуляции светового поля

$$m(K) = \frac{E_{k_i} E_{k_j}^*}{I_0}, \quad \vec{K} = \vec{k}_i - \vec{k}_j$$

Далее представляется удобным использовать комплексную форму записи электрического поля

$$E(\vec{r}) = E_0 + E_{sc}(\vec{r}) = E_0 + \sum_K E_{sc}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K E_{sc}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

а также других величин входящих в рассматриваемую систему уравнений

$$n(\vec{r}) = n_0 + \sum_K \check{n}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{n}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

$$j(\vec{r}) = j_0 + \sum_K \check{j}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{j}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

$$N_D^+(\vec{r}) = N_{D0}^+ + \sum_K \check{N}_D^+(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_D^{+*}(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

$$N_D(\vec{r}) = N_{D0} + \sum_K \check{N}_D(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_D^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

$$N_A(\vec{r}) = N_{A0} + \sum_K \check{N}_A(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_A^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}.$$

В дальнейшем будем полагать  $|m(K)| \ll 1$ , при этом как показано в [8]  $|\check{n}(K)| \ll |n_0|$  и  $|\check{N}_D^+(K)| \ll |N_{D0}^+|$ . Данное предположение справедливо, в частности, при сложном характере исходного светового пучка  $a(\vec{r})$ , т. е. если  $n \gg 1$ , либо при не больших величинах перекачки интенсивности между отдельными плоскими волнами в исходном световом пучке.

### 1.3.1. Решение для нулевого порядка малости

Прежде всего получим выражение для  $n_0$ . Для этого запишем (1.1) в случае нулевого порядка :

$$\frac{\partial N_{D0}^+}{\partial t} = sI_0 (N_{D0} - N_{D0}^+) - \gamma_R n_0 N_{D0}^+.$$

Уравнение (1.2) запишем как

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial N_{D0}^+}{\partial t}.$$

Из последнего соотношения исключен член  $\frac{\partial j_0}{\partial x}$  в силу того что  $j_0 = \text{const}_x$ .

Таким образом

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = sI_0 (N_{D0} - N_{D0}^+) - \gamma_R n_0 N_{D0}^+.$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения оказывается удобным сделать дополнительное предположение о квазистационарном распределении электронов в зоне проводимости [8], отвечающем распределению по образцу электрического поля  $E(\vec{r})$  в рассматриваемый момент времени, при котором написанное выше соотношение переходит в

$$sI_0 (N_{D0} - N_{D0}^+) = \gamma_R n_0 N_{D0}^+.$$

Возможность такого предположения связана с тем, что среднее время жизни электрона в зоне проводимости фоторефрактивного кристалла  $\tau \approx$

$10^{-6} - 10^{-9}$  с., поэтому среднее время установления стационарного распределения  $n(\vec{r})$ , для заданных  $I(\vec{r})$  и  $E(\vec{r})$  оказывается, как правило, намного меньшим времени записи голограммы, т. е. характерного времени заметного изменения  $E_{sc}(\vec{r})$

Таким образом

$$n_0 = \frac{sI_0(N_{D0} - N_{D0}^+)}{\gamma_R N_{D0}^+}. \quad (1.8)$$

Учитывая очевидное соотношение  $n_0 = const_x$ , имеем

$$n_0 + N_{A0} - N_{D0}^+ = 0, \quad (1.9)$$

откуда

$$n_0 = \frac{sI_0(N_{D0} - n_0 - N_{A0})}{\gamma_R(n_0 + N_{A0})}.$$

Учитывая [18], где сделана оценка для  $n_0 = 10^9 - 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Вспомнив, что для кристаллов *BSO*:  $N_D = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ,  $N_A = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  имеем

$$n_0 \ll N_{D0} - N_{A0}, \quad n_0 \ll N_{A0} \quad (1.10)$$

несложно окончательно записать

$$n_0 = \frac{sI_0(N_{D0} - N_{A0})}{\gamma_R N_{A0}}. \quad (1.11)$$

### 1.3.2. Решение для первого порядка малости

В дальнейшем предполагается получить выражение для  $E_{sc}(K)$ , при этом будет предполагаться малость соответствующих величин  $|\check{m}(K)| \ll 1$ ,  $|\check{n}(K)| \ll |n_0|$ ,  $|\check{N}_D(K)| \ll |N_{D0}|$  и  $|\check{N}_D^+(K)| \ll |N_{D0}^+|$ , так что в уравнениях будем пренебрегать членами квадратичными по малому параметру  $m$  ( $\check{n}$ ,  $\check{N}_D$ ,  $\check{N}_D^+$ ). Таким образом при рассмотрении взаимодействия двух плоских волн можно пренебречь воздействием на  $E_{sc}(K)$  других плоских волн

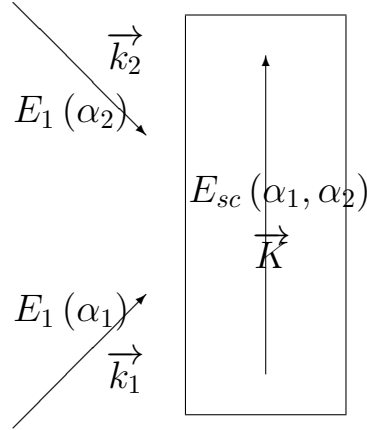


Рис. 1.5. Запись синусоидальной решетки в ФРК(частный случай)

из рассматриваемого лазерного пучка  $a(\vec{r})$ . Кроме того в целях удобства будем считать, что вектор  $\vec{K}$ , соответствующий рассматриваемым плоским волнам, направлен вдоль оси  $OX$  (см. рис 1.5), а также в формулах будем опускать  $(K)$ . Таким образом, вектор  $\vec{K}$  направлен вдоль кристалла и, следовательно, рассмотрение ведется для плоских волн у которых  $\alpha_1 \approx -\alpha_2$ . Связано это прежде всего с тем что взаимодействие в случае  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  мало, и им пренебрегается. Взаимодействие максимально для определенного  $\vec{K}_{opt}$ . В экспериментах кристалл, обычно освещают двумя сложными световыми пучками, между которыми идет перекачка энергии. При этом угол между этими пучками стараются выбрать так чтобы взаимодействие было максимальным, т. е. волновой вектор между взаимодействующими пучками выбирается близким к  $\vec{K}_{opt}$ . В силу того, что взаимодействие (перекачка энергии) идет между плоскими волнами угловой вектор между которыми близок к  $\vec{K}_{opt}$ , можно выбрать направление этого вектора вдоль оси  $OX$ , а взаимодействием плоских волн, волновой вектор между которыми сильно отличается от  $\vec{K}_{opt}$  можно пренебречь.

Запишем уравнения для первого порядка малости. Уравнение (1.1)

запишется в этом случае в виде:

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m (N_D - N_{D0}^+) - \gamma_R \check{n} N_{D0}^+ - sI_0 \check{N}_D^+ + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R n_0 \check{N}_D^+,$$

Откуда с учетом (1.9)

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m (N_D - n_0 - N_{A0}) + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R \check{n} (n_0 + N_{A0}) - sI_0 \check{N}_D^+ - \gamma_R n_0 \check{N}_D^+,$$

далее вспомнив про (1.10) окончательно получаем

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m (N_D - N_{A0}) + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R \check{n} N_{A0} - (sI_0 + \gamma_R n_0) \check{N}_D^+. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.2) перепишем в виде

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} + iK \frac{1}{e} \check{j}. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.3) в виде

$$\check{j} = e\mu n_0 E_{sc} + e\mu \check{n} E_0 + iK e D \check{n}. \quad (1.14)$$

В дальнейшем имеет смысл рассмотреть ситуацию при которой до момента времени  $t = 0$  кристалл не освещался, так что

$$I|_{t<0} = 0,$$

откуда с учетом (1.7) и , очевидного в данной ситуации соотношения,

$$\check{n}|_{t<0} = 0$$

имеем

$$\check{n} + \check{N}_A - \check{N}_D^+|_{t<0} = 0.$$

Перепишем уравнение (1.5) в виде

$$iK E_{sc} = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} (\check{n} - \check{N}_D^+), \quad (1.15)$$



или с учетом (1.13 ) в виде

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{e\varepsilon} \check{j}. \quad (1.16)$$

Концентрацию акцепторных примесей  $\check{N}_A$  в (1.16) можно учесть с помощью начального условия

$$E_{sc}|_{t=0} = 0.$$

Вводя следующие обозначения

$$\tau_R = \frac{1}{\gamma_R N_{A0}}$$

и

$$\tau_I = \frac{1}{sI_0 + \gamma_R n_0},$$

запишем с учетом (1.11 ) выражение (1.12 ) в виде

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = \frac{(m + m_0) n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{N}_D^+}{\tau_I}, \quad (1.17)$$

где

$$m_0 = \frac{\check{N}_D}{N_{D0} - N_{A0}}.$$

Далее из (1.15 ) несложно получить

$$\check{N}_D^+ = iK \frac{\varepsilon}{4\pi e} E_{sc} + \check{n}$$

и, обозначая

$$E_q = \frac{4\pi e N_{A0}}{\varepsilon K \left(1 + \frac{N_{A0}}{N_{D0} - N_{A0}}\right)}, \quad (1.18)$$

окончательно получим из (1.17 )

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = \frac{(m + m_0) n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_I} - i \frac{n_0}{\tau_R} \frac{E_{sc}}{E_q}, \quad (1.19)$$

Подставив (1.19) и (1.14) в (1.13), можно получить уравнение для

$\check{n}$

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{(m + m_0) n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_I} - i \frac{n_0}{\tau_R} \frac{E_{sc}}{E_q} + i \frac{n_0}{\tau_E} \frac{E_{sc}}{E_0} + i \frac{\check{n}}{\tau_E} - \frac{\check{n}}{\tau_D},$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau_E &= \frac{1}{K \mu E_0}, \\ \tau_D &= \frac{1}{K^2 D}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Снова учитывая предположение о квазистационарности распределения свободных носителей заряда в зоне проводимости, т. е. предполагая что  $\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = 0$

имеем для  $\check{n}$

$$\check{n} = \frac{\tau}{\tau_R} n_0 \left( m + m_0 + i E_{sc} \left( \frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q} \right) \right), \quad (1.21)$$

где введены следующие обозначения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_D} - i \frac{1}{\tau_E},$$

и

$$E_m = \frac{\gamma_R N_{A0}}{K \mu}. \quad (1.22)$$

Подставим теперь (1.14) в (1.16)

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = - \frac{4\pi \mu n_0}{\varepsilon} \left( E_{sc} + \frac{\check{n}}{n_0} E_0 + i \frac{\check{n}}{n_0} E_D \right),$$

где обозначено

$$E_D = \frac{K D}{\mu}. \quad (1.23)$$

Записав

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{4\pi \mu n_0}{\varepsilon} \quad (1.24)$$

и обозначив

$$\tau_{eff} = \tau_m \frac{\tau_R}{\tau}, \quad (1.25)$$

Обозначение	Формула	Ед. изм.	<i>BSO</i>	<i>BaTiO<sub>3</sub></i>
$\tau_R$	$\tau_R = \frac{1}{\gamma_R N_{A0}}$	s	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$
$E_m$		$\frac{V}{cm^2} \cdot \frac{1}{K}$	$0.66 \cdot 10^7$	$0.5 \cdot 10^9$
$E_q$		$\frac{V}{cm^2} \cdot \frac{1}{K}$	$1.0 \cdot 10^6$	$0.28 \cdot 10^5$

Таблица 1.2. Некоторые параметры эволюционного уравнения поля пространственного заряда  $E_{sc}$  для материалов *BSO* и *BaTiO<sub>3</sub>*,  $K$  - волновой вектор

с учетом (1.21) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tau_{eff} \frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = & -(m + m_0) (E_0 + iE_D) - \\ & - E_{sc} \left( 1 + (E_0 + iE_D) \left( \frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Очень часто рассматривают задачу, в которой внешние поля  $E_0$  и  $E_D$  малы, так что

$$E_0 \ll E_m, E_q$$

и

$$E_D \ll E_m, E_q$$

Для этого случая,

$$\tau_{eff} \frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -(m + m_0) (E_0 + iE_D) - E_{sc}. \quad (1.27)$$

На основании данных таблицы 1.1 можно подсчитать параметры, которые входят в соотношение 1.26. Результаты представлены в таблице 1.2.

### 1.3.3. Стационарный режим записи

Особый интерес представляет стационарный режим записи решеток поля пространственного заряда  $E_{sc}$  при котором

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = 0. \quad (1.28)$$

При этом имеет смысл рассмотреть два предельных случая:

- $E_0, E_D \ll E_m, E_q$
- $E_0, E_D \gg E_m, E_q$

В первом случае  $E_{sc}^{st}$  определяется из (1.27) и (1.28) следующим соотношением

$$E_{sc}^{st} = -(m + m_0)(E_0 + iE_D). \quad (1.29)$$

В этом случае стационарное поле пространственного заряда определяется величиной внешних полей.

Во втором случае, прежде заметим, что как следует из таблицы 1.2, в частности для кристаллов  $BaTiO_3$  :

$$E_m \gg E_q,$$

так что

$$\frac{1}{E_m} \ll \frac{1}{E_q}. \quad (1.30)$$

Откуда с учетом (1.26) и (1.28) находим

$$E_{sc}^{st} = (m + m_0) E_q. \quad (1.31)$$

Соотношение (1.31) говорит о том что максимально возможное поле пространственного заряда определяется параметрами кристалла и не зависит от внешних условий, в частности от приложенного внешнего поля. Действительно с учетом очевидных соотношений

$$m_0 \ll 1$$

и

$$m \ll 1$$

имеем из (1.18)

$$E_{sc}^{st} \ll E_q \approx \frac{4\pi e N_{A0}}{\varepsilon K}.$$

Это соотношение отражает очевидный факт, что в ФРК с ограниченной концентрацией ловушек максимальная амплитуда зарядовой решетки не может превосходить  $eN_{A0}$  - откуда в соответствии с уравнением Пуассона (1.5) максимальная амплитуда решетки поля оказывается ограниченной величиной

$$\frac{4\pi e N_{A0}}{\varepsilon K}.$$

#### **1.4. Двухволновое взаимодействие света в фоторефрактивных кристаллах**

Рассмотрение свойств фоторефрактивных кристаллов, будет не полным без задачи о взаимодействии двух плоских волн в ФРК, которая с одной стороны является достаточно изученной, а с другой - позволяет нам рассмотреть важные процессы перекачки энергии. Кроме того с задачей двухволнового взаимодействия света в ФРК, в частности с процессами перекачки энергии при взаимодействии двух плоских волн - связано объяснение такого основополагающего свойства ФРК, как фенинг.

При выводе уравнений, описывающих процесс дифракции световых волн на динамических решетках мы будем пользоваться методом интегральных уравнений [26, 27, 28]

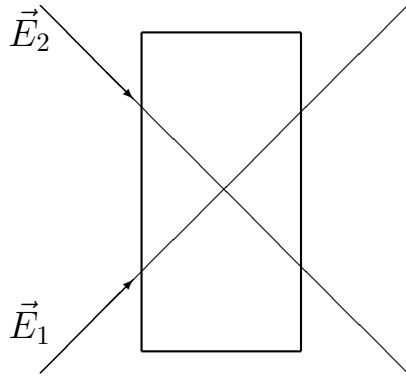


Рис. 1.6. Постановка задачи двухволнового взаимодействия света в фоторефрактивных кристаллах(общий случай)

#### 1.4.1. Постановка задачи и вывод основных уравнений

В задаче о двухволновом взаимодействии света в ФРК, фоторефрактивный кристалл освещается двумя плоскими волнами, падающими на кристалл с одной из его сторон (см. рис. 1.6).

Примем

$$\vec{E}_1 = A_1(z, t) \vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$$

и

$$\vec{E}_2 = A_2(z, t) \vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$$

так что общее поле освещающее ФРК

$$\vec{E} = A_1(z, t) \vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} + A_2(z, t) \vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \quad (1.32)$$

Будем считать что источником рассеянных полей являются эквивалентные токи. Для нахождения амплитуд этих полей применим лемму Лоренца (подобным образом это делается, например, в теории возбуждения

ВОЛНОВОДОВ см. [29] ):

$$\int_S \left\{ \left[ \vec{H}_a \vec{E}_b \right]_n - \left[ \vec{H}_b \vec{E}_a \right]_n \right\} ds = \frac{4\pi}{c} \int_V \left\{ \left( \vec{j}_a \vec{E}_b \right) - \left( \vec{j}_b \vec{E}_a \right) \right\} dv. \quad (1.33)$$

Найдем выражения, описывающие поле  $E$ . Для чего заметим, что возмущению диэлектрической проницаемости в среде  $\Delta\varepsilon$  соответствует эквивалентный ток:

$$\vec{j}_{eq} = i\vec{E}_{\Delta\varepsilon} \frac{\omega}{4\pi}, \quad (1.34)$$

где

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_m(z, t) e^{i(\vec{\kappa}\vec{r})} + \varepsilon_m^*(z, t) e^{-i(\vec{\kappa}\vec{r})}, \quad (1.35)$$

$\varepsilon_m$  - комплексная амплитуда решетки. Для волнового вектора решетки  $\vec{\kappa}$  выполняется следующее соотношение:

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{\kappa} = 0. \quad (1.36)$$

Объем  $V$ , в этом случае, ограничен справа сечением  $S$  (см. рис.1.7). В дальнейшем будем предполагать

$$\int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_1^*) ds = \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_2^*) ds = \int_S (\vec{e}_2 \vec{e}_2^*) ds = 1, \quad (1.37)$$

в частности это предполагает что световые пучки  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  имеют одну и ту же поляризацию

В качестве поля (a) в соотношении 1.33 примем поле  $\vec{E}$  в виде разложения (1.32) с источником  $\vec{j}_{eq}$  в виде (1.34), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно поля обращенные по отношению к искомым  $\vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}$  и  $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2\vec{r})}$ . В первом случае лемма Лоренца дает:

$$\frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} dv = \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} =$$

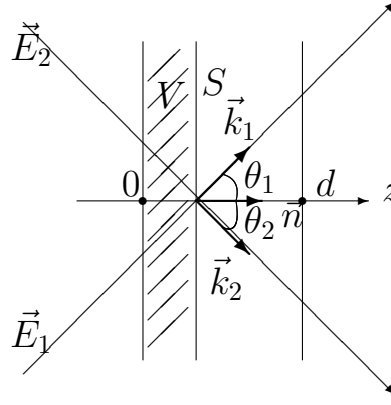


Рис. 1.7. Лемма Лоренца (взаимодействие двух плоских волн)

$$= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H} \vec{e}_1^* \right]_n e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_1^* \vec{E} \right]_n e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\}. \quad (1.38)$$

Область интегрирования изображена на рис. 1.7.

С учетом известного соотношения для плоских волн

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[ \frac{\vec{k}}{k} \vec{E} \right] \quad (1.39)$$

для правой части соотношения (1.38) получим

$$\begin{aligned} & \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H} \vec{e}_1^* \right]_n e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_1^* \vec{E} \right]_n e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_1 \left[ \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1 \right] \vec{e}_1^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_1) \vec{r}} ds + \\ &+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_2 \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2 \right] \vec{e}_1^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}} ds - \\ &- \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_1 \left[ \left[ \frac{-\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1^* \right] \vec{e}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_1) \vec{r}} ds - \\ &- \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_2 \left[ \left[ \frac{-\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1^* \right] \vec{e}_2 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}} ds = \\ &= -2 \cos \theta_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_1. \end{aligned} \quad (1.40)$$

При выводе данного соотношения пренебрегалось быстро осциллирующими членами. Кроме того были использованы следующие очевидные



соотношения

$$(\vec{e}_1 \vec{k}_1) = 0,$$

$$\left. \frac{\vec{k}_1}{k_1} \right|_n = \cos \theta_1$$

и было учтено соотношение (1.37).

Для левой части (1.38)

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} = \\ & = \frac{i\omega}{c} \int_0^z dz' \int_S \varepsilon_m(z', t) \vec{e}_1^* e^{i(\vec{k} + \vec{k}_1) \vec{r}} \vec{E} ds + \\ & + \int_0^z dz' \int_S \varepsilon_m^*(z', t) \vec{e}_1^* e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_1) \vec{r}} \vec{E} ds = \frac{i\omega}{c} \int_0^z dz' \varepsilon_m^*(z', t) A_2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Объединяя (1.41) и (1.40) получим

$$A_1 = \frac{-i\omega}{2\cos\theta_1 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \int_0^z dz' \varepsilon_m^*(z', t) A_2.$$

Действуя по аналогии с изложенным выше для вспомогательного поля  $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  можно получить

$$A_2 = \frac{-i\omega}{2\cos\theta_2 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \int_0^z dz' \varepsilon_m(z', t) A_1.$$

С учетом линейного электро-оптического эффекта (1.6) можно записать

$$\varepsilon_m(z', t) = \alpha E_{sc},$$

где через  $\alpha$  обозначен электро-оптический коэффициент. Откуда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-i\omega\alpha}{2\cos\theta_1 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z dz' E_{sc}^*(z', t) A_2, \\ A_2 &= \frac{-i\omega\alpha}{2\cos\theta_2 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z dz' E_{sc}(z', t) A_1 \end{aligned} \quad (1.42)$$

### 1.4.2. Процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии света в ФРК

Для того чтобы рассмотреть процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии ФРК мы будем пользоваться уравнениями для стационарного режима записи поля пространственного заряда  $E_{sc}^{st}$ . Прежде всего рассмотрим систему уравнений вытекающую из соотношения (1.29) при  $m \gg m_0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-i\omega\alpha}{2\cos\theta_1 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z dz' E_{sc}^*(z', t) A_2, \\ A_2 &= \frac{-i\omega\alpha}{2\cos\theta_2 c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z dz' E_{sc}(z', t) A_1, \\ E_{sc}^{st} &= -m (E_0 + iE_D), \\ m &= \frac{A_1^* A_2}{|A_1|^2 + |A_2|^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial |A_1|^2}{\partial z} &= \frac{\partial A_1}{\partial z} A_1^* + \frac{\partial A_1^*}{\partial z} A_1 = \kappa \frac{1}{\cos\theta_1} \frac{|A_1|^2 |A_2|^2}{|A_1|^2 + |A_2|^2} \\ \frac{\partial |A_2|^2}{\partial z} &= \frac{\partial A_2}{\partial z} A_2^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial z} A_2 = -\kappa \frac{1}{\cos\theta_2} \frac{|A_1|^2 |A_2|^2}{|A_1|^2 + |A_2|^2} \end{aligned}$$

где

$$\kappa = \frac{\omega\alpha E_D \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{c}$$

Прежде всего стоит отметить выполнение закона сохранения энергии

$$\frac{\partial (\cos\theta_1 |A_1|^2 + \cos\theta_2 |A_2|^2)}{\partial z} = 0.$$

Кроме того перекачка энергии, как это отмечалось выше, возможна лишь для диффузионного механизма записи при котором  $E_D \neq 0$ .

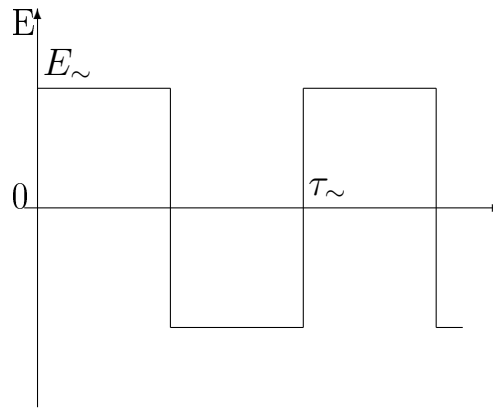


Рис. 1.8. Знакопеременное электрическое поле, используемое для нестационарной голографической записи

### 1.4.3. Нестационарные механизмы записи голографических решеток в ФРК

Как показано выше перекачка энергии возможна для диффузионного механизма записи при этом данный механизм целиком определяется внутренними свойствами кристалла и не зависит от внешних условий. При этом хотелось бы иметь возможность управлять эффективностью перекачки с помощью внешних полей.

В ФТИ им. Иоффе (С.-Петербург) [21] был предложен нестационарный механизм записи голографических решеток в переменном электрическом поле (см. рис. 1.8) с периодом изменения  $\tau_{\sim}$  много меньшим характерного времени формирования голограммы.

Запись голограммы в таком поле можно рассматривать как аналог диффузионного механизма записи (см. рис. 1.1). В обоих случаях происходит абсолютно симметричное расплывание заряда фотоиндуцированных электронов относительно максимумов интерференционной картины.

При этом если в случае диффузионного механизма “расплывание” фотоэлектронов вызвано обычной тепловой диффузией то в случае рассматриваемого нестационарного режима записи причиной “расплывания” фотоэлектронов является гораздо более эффективный дрейф во внешнем электрическом поле.

В дальнейшем мы будем пользоваться (1.26) в котором под диффузионным полем  $E_D$  мы будем подразумевать некоторое “эффективное” диффузионное поле.

#### 1.4.4. Фенинг

К особому типу двухволнового рассеяния следует отнести фенинг. В рамках простейшей  $\varepsilon$  модели [25], фенинг можно описать следующим уравнением

$$E_{sc}^{\varepsilon} = E_{sc_0} + E_{sc}, \quad (1.43)$$

где  $E_{sc}$  определяется уравнением (1.26), а  $E_{sc_0}$  - постоянная затравка, определяемая распределением неоднородностей в кристалле.

Другие модели фенинга предполагают неоднородное распределение различных параметров кристалла, в частности примесных центров. Неоднородность распределения примесных центров учитывается в (1.26) коэффициентом  $m_0$ .

Конкретное значение параметров  $E_{sc_0}$  и  $m_0$  довольно трудно оценить. О порядках величин можно судить лишь по внешним проявлениям, в частности по уровню фенинга. Вместе с тем уровень фенинга зависит также от других параметров кристалла: полей  $E_D$ ,  $E_0$  электрооптических коэффициентов и т. п.

При этом всегда можно пересчитать  $E_{sc_0}$  в  $m_0$ , действительно, подставив (1.43) в (1.26) несложно получить

$$\tau_{eff} \frac{\partial E_{sc}^\varepsilon}{\partial t} = - \left( m + m_0^{eff} \right) (E_0 + iE_D) - E_{sc}^\varepsilon \left( 1 + (E_0 + iE_D) \left( \frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q} \right) \right).$$

где

$$m_0^{eff} = m_0 - \frac{E_{sc_0}^\varepsilon}{E_0 + iE_D} \left( 1 + (E_0 + iE_D) \left( \frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q} \right) \right).$$

Поэтому в дальнейшем учет фенинга будет осуществляться в рамках (1.26) без введения дополнительных затравочных решеток  $E_{sc_0}$

## 1.5. Случай примесей двух сортов

В применении к задаче построения оптических нейронных сетей на базе фоторефрактивных кристаллов особый интерес представляет случай когда в кристалле существует долговременная память. В нашем случае это значит, что поле пространственного заряда  $E_{sc}$  имеет два характерных времени релаксации. Одно из этих времен отвечает за процесс распознавания записанных оптических образов, а второе, более длительное, за процесс записи этих самых образов (процесс обучения). Процесс распознавания должен происходить достаточно быстро. Сама динамика данного процесса определяется быстрым временем, но кроме того время распознавания зависит от уровня затравочных решеток. В случае системы с двумя временами - в кристалле достаточно долгое время будут существовать медленно релаксирующие затравочные решетки.

Если смотреть экспериментальные кривые записи-стирания оптических голограмм, то на них можно увидеть два экспоненциальных участка, характеризующихся различными временами релаксации (см. например

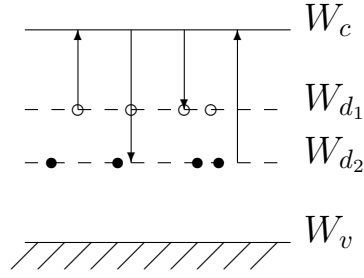


Рис. 1.9. Энергетическая схема ФРК с двумя частично компенсированными донорными уровнями  $W_{d_1}$  и  $W_{d_2}$ .  $W_c$  - зона проводимости,  $W_v$  - валентная зона. Стрелками указаны оптические переходы и процессы рекомбинации подвижных электронов

[30]). Объяснение данного факта может быть дано если рассматривать более сложную систему с несколькими сортами примесей.

Впервые такая задача рассматривалась в [30]. При этом было показано что данная модель позволяет объяснить некоторые характерные особенности записи голографических решеток в ФРК. В частности был объяснен эффект электрического проявления голограммы, заключающийся в восстановлении значительной части голограммы, первоначально стертой в отсутствии внешнего поля, во внешнем электрическом поле.

Вместе с тем в [30] не были получены уравнения описывающие динамику записи голографических решеток в ФРК с двумя сортами примесей в предположении сложного характера взаимодействующих световых пучков.

### 1.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу при которой в кристалле присутствуют два сорта примесей  $N_D^{(1)}$  и  $N_D^{(2)}$  (см. рис. 1.9). Для каждого из этих сортов примесей свои параметры: сечение фотоионизации  $s^{(1)}$  и  $s^{(2)}$ , а также коэффициент рекомбинации  $\gamma_R^{(1)}$  и  $\gamma_R^{(2)}$ . Система уравнений, описывающая процесс формирования поля пространственного заряда  $E_{sc}$  в данном случае выглядит следующим образом

$$\frac{\partial N_D^{(1)+}}{\partial t} = s^{(1)} I \left( N_D^{(1)} - N_D^{(1)+} \right) - \gamma_R^{(1)} n N_D^{(1)+}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial N_D^{(2)+}}{\partial t} = s^{(2)} I \left( N_D^{(2)} - N_D^{(2)+} \right) - \gamma_R^{(2)} n N_D^{(2)+}, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^{(1)+}}{\partial t} + \frac{\partial N_D^{(2)+}}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla j, \quad (1.46)$$

$$j = e \mu n E + D \nabla n, \quad (1.47)$$

$$\nabla E = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} \left( n + N_A^{(1)} - N_D^{(2)+} + N_A^{(2)} - N_D^{(2)+} \right), \quad (1.48)$$

$$E = E_0 + E_{sc},$$

$$N_A^{(1,2)} = N_D^{(1,2)+} \Big|_{I=0}, \quad N_D^{(1,2)} = \text{const}|_t, \quad N_A^{(1,2)} = \text{const}|_t.$$

Решение будем искать в виде

$$E_{sc}(\vec{r}) = \sum_K E_{sc}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K E_{sc}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}},$$

$$I(\vec{r}) = I_0 \left( 1 + \sum_K m(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K m^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}} \right),$$

$$\begin{aligned}
n(\vec{r}) &= n_0 + \sum_K \check{n}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{n}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}, \\
j(\vec{r}) &= j_0 + \sum_K \check{j}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{j}^*(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}, \\
N_D^{(1,2)+}(\vec{r}) &= N_{D0}^{(1,2)+} + \sum_K \check{N}_D^{(1,2)+}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_D^{(1,2)+*}(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}, \\
N_D^{(1,2)}(\vec{r}) &= N_{D0}^{(1,2)} + \sum_K \check{N}_D^{(1,2)}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_D^{(1,2)*}(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}, \\
N_A^{(1,2)}(\vec{r}) &= N_{A0}^{(1,2)} + \sum_K \check{N}_A^{(1,2)}(K) e^{i\vec{K}\vec{r}} + \sum_K \check{N}_A^{(1,2)*}(K) e^{-i\vec{K}\vec{r}}.
\end{aligned}$$

При этом аналогично рассмотренному выше будем предполагать, что

$$|\check{m}(K)| \ll 1, \quad |\check{n}(K)| \ll |n_0|,$$

$$|\check{N}_A^{(1,2)}(K)| \ll |N_{A0}^{(1,2)}|,$$

$$|\check{N}_D^{(1,2)}(K)| \ll |N_{D0}^{(1,2)}|$$

и

$$|\check{N}_D^{(1,2)+}(K)| \ll |N_{D0}^{(1,2)+}|.$$

Кроме того в целях удобства будем считать, что вектор  $\vec{K}$ , соответствующий рассматриваемым плоским волнам, направлен вдоль оси  $OX$  (см. рис 1.5), а также в формулах будем опускать  $(K)$ .

### 1.5.2. Решение для первого порядка малости

Запишем уравнения для первого порядка малости. Уравнение (1.44, 1.45) запишется в этом случае в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \check{N}_D^{(1,2)+}}{\partial t} &= s^{(1,2)} I_0 m \left( N_D^{(1,2)} - N_{A0}^{(1,2)} \right) + s^{(1,2)} I_0 \check{N}_D^{(1,2)} - \\
&\quad \gamma_R^{(1,2)} \check{n} N_{A0}^{(1,2)} - \left( s^{(1,2)} I_0 + \gamma_R^{(1,2)} n_0 \right) \check{N}_D^{(1,2)+}. \quad (1.49)
\end{aligned}$$



При выводе (1.49) были учтены следующие законы сохранения

$$N_{A0}^{(1)} + n_1 = N_{D0}^{(1)+},$$

$$N_{A0}^{(2)} + n_2 = N_{D0}^{(2)+},$$

$$n_0 = n_1 + n_2,$$

а также следующее отношения  $N_{A0}^{(1,2)} \gg n_0$ .

Обозначив

$$n_0^{(1,2)} = \frac{s^{(1,2)} I_0 (N_{D0}^{(1,2)} - N_{A0}^{(1,2)})}{\gamma_R^{(1,2)} N_{A0}^{(1,2)}}.$$

$$\tau_R^{(1,2)} = \frac{1}{\gamma_R^{(1,2)} N_{A0}^{(1,2)}},$$

$$\tau_I^{(1,2)} = \frac{1}{s^{(1,2)} I_0 + \gamma_R^{(1,2)} n_0},$$

$$m_0^{(1,2)} = \frac{\check{N}_D^{(1,2)}}{N_{D0}^{(1,2)} - N_{A0}^{(1,2)}},$$

запишем (1.49) в следующем виде

$$\frac{\partial \check{N}_D^{(1,2)+}}{\partial t} = \frac{n_0^{(1,2)} (m + m_0^{(1,2)})}{\tau_R^{(1,2)}} - \frac{\check{n}}{\tau_R^{(1,2)}} - \frac{\check{N}_D^{(1,2)+}}{\tau_I^{(1,2)}}. \quad (1.50)$$

Следующим шагом будет нахождение  $\check{n}$ . Для этого уравнение (1.46) перепишем в виде

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{\partial \check{N}_D^{(1)+}}{\partial t} + \frac{\partial \check{N}_D^{(2)+}}{\partial t} + iK \frac{1}{e} \check{j}. \quad (1.51)$$

Уравнение (1.47) в виде

$$\check{j} = e\mu n_0 E_{sc} + e\mu \check{n} E_0 + iK e D \check{n}. \quad (1.52)$$

Дальнейшее упрощение невозможно без некоторых предположений, в частности будем предполагать, что одна из примесей обладает большими временами  $\tau_R$  и  $\tau_I$  чем вторая, так что

$$\tau_R^{(1)} \ll \tau_R^{(2)},$$

$$\tau_I^{(1)} \ll \tau_I^{(2)},$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\partial \check{N}_D^{(1)+}}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial \check{N}_D^{(2)+}}{\partial t} \right|.$$

Откуда (1.51) переписывается следующим образом

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{\partial \check{N}_D^{(1)+}}{\partial t} + iK \frac{1}{e} \check{j}. \quad (1.53)$$

Перепишем (1.48) для первой гармоники в следующем виде

$$\begin{aligned} iK E_{sc}^{(1)} &= -\frac{4\pi e}{\varepsilon} \left( \check{n} - \check{N}_D^{(1)+} \right), \\ iK E_{sc}^{(2)} &= \frac{4\pi e}{\varepsilon} \check{N}_D^{(2)+}, \\ E_{sc} &= E_{sc}^{(1)} + E_{sc}^{(2)}, \end{aligned}$$

при этом

$$\frac{\partial E_{sc}^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{e\varepsilon} \check{j}. \quad (1.54)$$

Здесь, так же как и в (1.15) учет концентраций акцепторов  $\check{N}_{A_1}$  и  $\check{N}_{A_2}$  учитывается в следующих начальных условиях

$$E_{sc}^{(1)}|_{t=0} = 0$$

и

$$E_{sc}^{(2)}|_{t=0} = 0.$$

С учетом того, что

$$\check{N}_D^{(1)+} = iK \frac{\varepsilon}{4\pi e} E_{sc}^{(1)} + \check{n},$$

а также вводя следующее обозначение

$$E_q^{(1)} = \frac{4\pi e N_{A_0}^{(1)}}{\varepsilon K \left( 1 + \frac{N_{A_0}^{(1)}}{N_{D_0}^{(1)} - N_{A_0}^{(1)}} \right)}$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ

$$\frac{\partial \check{N}_D^{(1)+}}{\partial t} = \frac{(m + m_0^{(1)}) n_0^{(1)}}{\tau_R^{(1)}} - \frac{\check{n}}{\tau_R^{(1)}} - \frac{\check{n}}{\tau_I^{(1)}} - i \frac{n_0^{(1)} E_{sc}^{(1)}}{\tau_R^{(1)} E_q^{(1)}},$$

откуда подставив (1.50) и (1.52) в (1.53) можно получить для  $\check{n}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{n}}{\partial t} = & \frac{(m + m_0^{(1)}) n_0^{(1)}}{\tau_R^{(1)}} - \frac{\check{n}}{\tau_R^{(1)}} - \frac{\check{n}}{\tau_I^{(1)}} - \\ & - i \frac{n_0^{(1)} E_{sc}^{(1)}}{\tau_R^{(1)} E_q^{(1)}} + i K \mu n_0 E_{sc} - \frac{\check{n}}{\tau_D} + i \frac{\check{n}}{\tau_E}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где  $\tau_E$  и  $\tau_D$  определяются (1.20).

Снова учитывая предположение о квазистационарности распределения свободных носителей заряда в зоне проводимости, т. е. предполагая что  $\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = 0$ , из (1.55) имеем для  $\check{n}$

$$\check{n} = \frac{\tau}{\tau_R^{(1)}} n_0^{(1)} \left( m + m_0^{(1)} + i \frac{E_{sc}}{E_m^{(1)}} - i \frac{E_{sc}^{(1)}}{E_q^{(1)}} \right), \quad (1.56)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_R^{(1)}} + \frac{1}{\tau_I^{(1)}} + \frac{1}{\tau_D} - i \frac{1}{\tau_E},$$

и, аналогично, (1.22)

$$E_m^{(1,2)} = \frac{\gamma_R^{(1,2)} N_{A0}^{(1,2)}}{K \mu}. \quad (1.57)$$

Соответственно из (1.54, 1.23)

$$\frac{\partial E_{sc}^{(1)}}{\partial t} = - \frac{4\pi \mu n_0^{(1)}}{\varepsilon} \left( E_{sc} + \frac{\check{n}}{n_0} E_0 + i \frac{\check{n}}{n_0} E_D \right),$$

откуда, введя аналогично (1.24, 1.25), следующие обозначения

$$\frac{1}{\tau_m^{(1,2)}} = \frac{4\pi \mu n_0^{(1,2)}}{\varepsilon}, \quad (1.58)$$

$$\tau_{eff} = \tau_m^{(1)} \frac{\tau_R^{(1)}}{\tau} \quad (1.59)$$

и с учетом (1.56) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{eff} \frac{\partial E_{sc}^{(1)}}{\partial t} = & - \left( m + m_0^{(1)} \right) (E_0 + iE_D) - \\ & - E_{sc}^{(1)} \left( 1 + (E_0 + iE_D) \left( \frac{1}{E_m^{(1)}} - \frac{1}{E_q^{(1)}} \right) \right) - \\ & - E_{sc}^{(2)} \left( 1 + \frac{E_0 + iE_D}{E_m^{(1)}} \right). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Для вывода уравнения для  $E_{sc}^{(2)}$  прежде всего заметим, что

$$\check{N}_D^{(2)+} = iK \frac{\varepsilon}{4\pi e} E_{sc}^{(2)},$$

следовательно,

$$\frac{\partial E_{sc}^{(2)}}{\partial t} = i \frac{4\pi e}{\varepsilon K \tau_R^{(2)}} \left( \check{n} - \left( m + m_0^{(2)} \right) n_0^{(2)} \right) - \frac{E_{sc}^{(2)}}{\tau_I^{(2)}}$$

откуда, воспользовавшись (1.57) и (1.58), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{sc}^{(2)}}{\partial t} = & - \frac{i \left( m + m_0^{(2)} \right) E_m^{(2)}}{\tau_m^{(2)}} - \frac{E_{sc}^{(2)}}{\tau_I^{(2)}} + \\ & + \frac{1}{\tau_m^{(1)}} \left( i \left( m + m_0^{(1)} \right) E_m^{(1)} - E_{sc} + E_{sc}^{(1)} \frac{E_m^{(1)}}{E_q^{(1)}} \right) \frac{\tau}{\tau_R^{(2)}}, \\ & E_{sc} = E_{sc}^{(1)} + E_{sc}^{(2)}, \\ & E_{sc}^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \\ & E_{sc}^{(2)} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Система уравнений (1.60) и (1.61) описывает динамику процесса формирования поля пространственного заряда в системе с двумя сортами примесей.

Как нетрудно проверить

$$E_m^{(2)} \ll E_m^{(1)}$$

а также

$$\left| \frac{\tau}{\tau_R^{(2)}} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\tau_R^{(2)}}{\tau} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{\tau_R^{(2)}}{\tau_R^{(1)}} + \frac{\tau_R^{(2)}}{\tau_I^{(1)}} + \frac{\tau_R^{(2)}}{\tau_D} - i \frac{\tau_R^{(2)}}{\tau_E} \right|} \ll 1.$$

Данные соотношения подтверждают основное предположение о существовании двух решеток с разными временными характеристиками:

$$\left| \frac{\partial E_{sc}^{(1)}}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial E_{sc}^{(2)}}{\partial t} \right|.$$

При этом система (1.60, 1.61) в тривиальном случае  $E_{sc}^{(2)} = 0$  переходит в (1.26)

## 2. Двойное некогерентное обращающее зеркало

### 2.1. Введение

Наиболее общей схемой, при рассмотрении дифракции света в фото-рефрактивных кристаллах, является схема в которой кристалл освещается с двух сторон взаимно-некогерентными лазерными пучками. В результате дифракции световых пучков на общих голографических решетках для световых пучков, падающих на кристалл с разных сторон - появляются световые пучки обращенные по отношению к исходным. Таким образом, данная схема является простейшим устройством обращения волнового фронта на базе ФРК.

Данная схема называется схемой двойного некогерентного обращающего зеркала (ДНОЗ) и обладает некоторыми практическими преимуществами, т. к. не требует когерентности между лазерными пучками, при этом значительно снижаются требования к юстировке и механической стабильности устройства.

В силу своей общности эта схема исследуется уже довольно продолжительное время. Накоплено большое количество экспериментальных данных [34], [42]. Исследовано большое количество теоретических моделей [33], [12]. Часто исследование процессов генерации обращенных пучков в такой модели производится без учета влияния фенинга и в приближении когда кристалл освещается с двух сторон плоскими волнами. В тех работах (см.

например [12]) в которых исследуется влияние фенинга на характеристики ДНОЗ - сам фенинг представляется в виде плоских волн. Если же рассматривается сложный характер как фенинга так и взаимодействующих световых пучков, как, например, в [13] и [14], то рассмотрение ведется только для начальных этапах генерации. В, частности, установившийся режим генерации ДНОЗ в таком приближении до сих пор теоретически не исследовался.

Вместе с тем эксперименты показывают, что работа ДНОЗ протекает совершенно по разному в случае когда кристалл освещается двумя плоскими волнами, или же одна из этих волн имеет сложную пространственную структуру. В частности, при облучении кристалла плоскими волнами возникает сильное фотоиндуцированное рассеяние света в кольцо дуги. В этой связи имеет смысл выделить работу [31] в которой данный факт объясняется фотонаведенными неоднородностями показателя преломления.

Анализ простейшей ситуации в которой взаимодействующие волны являются плоскими, можно показать что схема ДНОЗ является генератором. Т. е. для развития генерации в такой схеме достаточна лишь начальная затравка и мощность обращенных волн в стационарном режиме не зависит от уровня этой начальной затравки. От нее зависит лишь время выхода на этот стационарный уровень. С данным утверждением спорит автор работы [32]. Он рассматривает ДНОЗ в трехмерном случае, и делает выводы что в отличии от двумерного случая данную схему нельзя рассматривать в качестве генератора.

Если рассматривать ДНОЗ как генератор, то развитие генерации в такой схеме может проистекать только в том случае когда параметры кри-

сталла удовлетворяют так называемым пороговым условиям. В простейшем случае взаимодействия плоских волн пороговые условия были выведены в [35]. Основным недостатком такого вывода является то, что он не учитывает сложный характер взаимодействующих световых пучков, а также не учитывает влияние фенинга. Работы в которых были учтены оба этих фактора [13] и [14] относятся к другим системам ОВФ.

В меньшей степени, изучено влияние фенинга и, тем более сложного характера взаимодействующих световых пучков на динамику развития генерации в ДНОЗ. Автор в своих работах [16],[37] и [38] пытается восполнить этот пробел. В частности, в [37] был предложен метод учета сложного характера взаимодействующих световых пучков, при котором дифрагирующие лазерные пучки представляются не плоскими волнами, а в более общем случае - световыми пучками со сложным распределением по угловым координатам, а распределение фенинга представляется случайной величиной. Таким образом при усреднении по ансамблю в [37] и [38] получены уравнения для амплитуд взаимодействующих световых пучков при которых их угловые распределения учитываются в так называемых коэффициентах перекрытия.

Ниже в данной главе мы фактически повторим вывод [37]. Кроме того здесь будет рассмотрено влияние сложного характера примесей в ФРК на характеристики ДНОЗ.

## 2.2. Постановка задачи

По аналогии с [37], предположим, что на среду слева и справа направлены две волны, некогерентные между собой (см. рис. 2.1). Поэтому



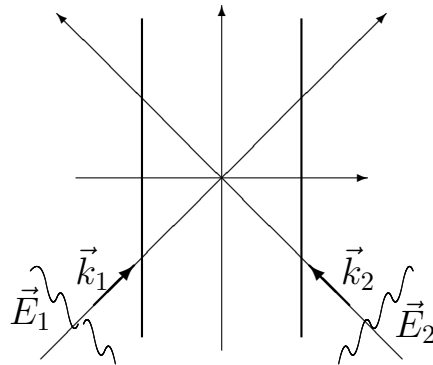


Рис. 2.1. Постановка задачи (общий случай)

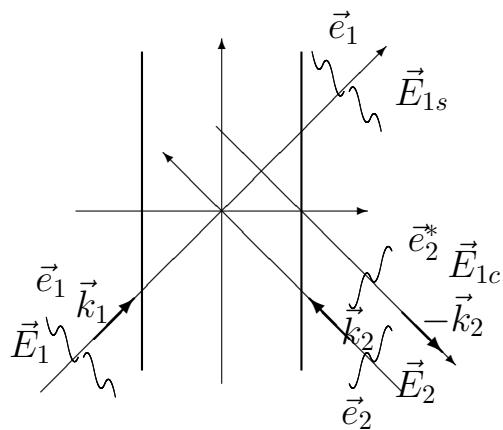


Рис. 2.2. Постановка задачи (разделение на компоненты)

рассмотрение этих волн и взаимодействие их с фоторефрактивной средой можно рассматривать независимо. Представим поле в среде (ФРК) в следующем виде (см. рис. 2.2):

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{1s} + \vec{E}_{1c} + \vec{E}_{1f}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{2s} + \vec{E}_{2c} + \vec{E}_{2f},\end{aligned}$$

где  $\vec{E}_{1s}$  - прямая волна, имеющая структуру волны падающей на кристалл слева;  $\vec{E}_{1c}$  - обращенная волна, имеющая структуру обращенную по отношению к волне падающей на кристалл справа. Через  $\vec{E}_{1f}$  обозначен остаток, имеющий смысл волны рассеянной на случайных неоднородностях показателя преломления. Компоненты волны  $\vec{E}_2$ , распространяющейся с другой стороны кристалла имеют аналогичный смысл.

Примем

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1s} &= A_{1s}(z, t) \vec{e}_1(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{1c} &= A_{1c}(z, t) \vec{e}_2^*(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{1f} &= A_{1f}(z, t) \vec{e}_{1f}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})},\end{aligned}$$

где  $\vec{e}_1(\vec{r})$  - распределение поля невозмущенной волны, падающей слева;  $\vec{e}_2(\vec{r})$  - распределение поля невозмущенной волны, падающей справа;  $\vec{e}_{1f}(\vec{r})$  - распределение случайно рассеянного поля.

Следует отметить тот факт, что усиление плоских волн в различных направлениях - разное, так что максимум функции распределения  $\vec{e}_{1f}(\vec{r})$  имеет место в направлении наибольшего усиления. Вместе с тем вполне разумным представляется выбирать направление распространения исходных волн так чтобы обращенные пучки распространялись бы в направлении наибольшего усиления. Это оправдывает тот факт, что за направление

несущей для распределений полей компонент  $\vec{E}_{1c}$  и  $\vec{E}_{1f}$  мы выбрали один и тот же вектор  $\vec{k}_2$ .

Соотношения, описывающие компоненты поля  $\vec{E}_2$ , можно записать по аналогии:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{2s} &= A_{2s}(z, t) \vec{e}_2(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{2c} &= A_{2c}(z, t) \vec{e}_1^*(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{2f} &= A_{2f}(z, t) \vec{e}_{2f}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})},\end{aligned}$$

Для функций распределения  $\vec{e}_1(\vec{r})$ ,  $\vec{e}_2(\vec{r})$  и  $\vec{e}_{1f,2f}(\vec{r})$  выполняются следующие условия нормировки:

$$\begin{aligned}\int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_1^*) ds &= 1, \int_S (\vec{e}_2 \vec{e}_2^*) ds = 1, \\ \left\langle \int_S (\vec{e}_{1f} \vec{e}_{1f}^*) ds \right\rangle &= 1, \left\langle \int_S (\vec{e}_{2f} \vec{e}_{2f}^*) ds \right\rangle = 1,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по ансамблю. Кроме того:

$$\langle e_{1f} \rangle = 0, \langle e_{2f} \rangle = 0.\tag{2.2}$$

Полное поле для волны, распространяющейся слева имеет вид

$$\vec{E}_1 = A_{1s} \vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} + A_{1c} \vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} + A_{1f} \vec{e}_{1f} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}\tag{2.3}$$

и для волны справа вид -

$$\vec{E}_2 = A_{2s} \vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} + A_{2c} \vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} + A_{2f} \vec{e}_{2f} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}.\tag{2.4}$$

### 2.3. Вывод основных уравнений

По аналогии с двухволновым взаимодействием света в ФРК будем считать что источником рассеянных полей являются эквивалентные токи.

Для нахождения амплитуд этих полей применим лемму Лоренца (1.33).

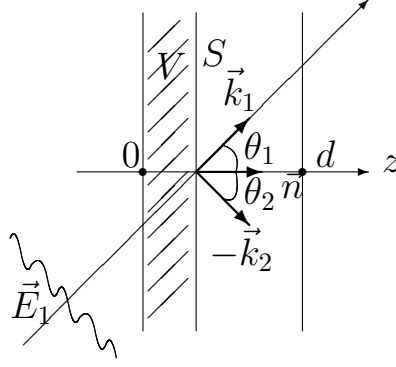


Рис. 2.3. Лемма Лоренца (поля слева)

### 2.3.1. Поля падающие на кристалл слева

Прежде всего найдем выражения, описывающие поля  $E_1$ . Для чего заметим, что возмущению диэлектрической проницаемости в среде  $\Delta\epsilon$  соответствует эквивалентный ток:

$$\vec{j}_{eq} = i\vec{E}_1\Delta\epsilon\frac{\omega}{4\pi}, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta\epsilon = \epsilon_m(\vec{r}, t)e^{i(\vec{\kappa}\vec{r})} + \epsilon_m^*(\vec{r}, t)e^{-i(\vec{\kappa}\vec{r})}, \quad (2.6)$$

$\epsilon_m$  - комплексная амплитуда решетки. Для волнового вектора решетки  $\vec{\kappa}$  выполняется следующее соотношение:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{\kappa} = 0. \quad (2.7)$$

Объем  $V$ , в этом случае, ограничен справа сечением  $S$  (см. рис. 2.3). В качестве поля (а) в соотношении 1.33 примем поле  $\vec{E}_1$  в виде разложения (2.3) с источником  $\vec{j}_{eq}$  в виде (2.5), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно  $\vec{e}_1^*e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}$ ,  $\vec{e}_2e^{-i(\vec{k}_2\vec{r})}$  и  $\vec{e}_{1f}^*e^{-i(\vec{k}_2\vec{r})}$ -обращенные по отношению к искомым полям. Например для

нахождения амплитуды обращенной волны используем в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  - поле имеющее распределение  $\vec{e}_2$  и направленное по  $\vec{k}_2$ , т. е. против направления распространения обращенной волны. Лемма Лоренца при этом дает:

$$\frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} dv = \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_2 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_2 \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\}. \quad (2.8)$$

Область интегрирования изображена на рис. 2.3.

Для нахождения интеграла в правой части (2.8), необходимо найти  $\vec{H}_1$  и  $\vec{h}_2$ . Считая волну квазиплоской, будем как и ранее предполагать связь между  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в виде (1.39)

Если воспользоваться условиями нормировки (2.1) и нулевого среднего для фенинга (2.2) при усреднении по ансамблю, то для первого слагаемого во второй части (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} \int_S \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_2 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1s} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1 \right] \vec{e}_2 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}} ds + \\ &+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1c} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2^* \right] \vec{e}_2 \right]_n ds + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1f} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_{1f} \right] \vec{e}_2 \right]_n ds = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \left( A_{1c} \left[ \vec{e}_2 \left[ \vec{e}_2^* \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n + A_{1f} \left[ \vec{e}_2 \left[ \vec{e}_{1f} \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n \right) ds = \\ &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S \{ A_{1c} (\vec{e}_2 \vec{e}_2^*) + A_{1f} (\vec{e}_2 \vec{e}_{1f}) \} ds = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1c}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При выводе данного соотношения пренебрегалось быстро осциллирующими членами, что позволило исключить из рассмотрения слагаемое с множителем  $e^{-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}}$ . Кроме того при раскрытии векторных произведений использовалось очевидное тождество :  $(\vec{k}_2 \vec{e}_2) = 0$ .

Второе слагаемое в правой части (2.8) добавит:

$$\begin{aligned}
& - \int_S [\vec{h}_2 \vec{E}_1]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2 \right] \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds = \\
& = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \left[ \vec{E}_1 \left[ \vec{e}_2 \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S (\vec{e}_2 \vec{E}_1) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds = \\
& = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S \{A_{1c} (\vec{e}_2 \vec{e}_2^*) + A_{1f} (\vec{e}_2 \vec{e}_{1f})\} ds = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1c}.
\end{aligned}$$

При проведении данных выкладок предполагалось что  $(\vec{k}_2 \vec{E}_1) = 0$ . Таким образом в правой части (2.8) имеем  $-2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{1c}$ .

Остается рассмотреть объемный интеграл в правой части (2.8). Для этого воспользуемся соотношением (2.5) для эквивалентных токов. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi i\omega}{c} \frac{1}{4\pi} \int_0^z dz' \int_S ds_{\Delta\varepsilon} (\vec{E}_1 \vec{e}_2) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \\
& = \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz' \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_2) ds = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{1c}.
\end{aligned}$$

При проведении данных выкладок сохранялись только те члены, для которых  $e^{-i((\vec{k} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{r})} = 1$ , согласно условию (2.7), а остальными членами с осциллирующими множителями пренебрегалось.

Обозначим

$$M = \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_2) ds,$$

тогда

$$A_{1c} = - \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z A_{1s} M dz'.$$

Дифференцируя по  $z$ , получим

$$\frac{\partial A_{1c}}{\partial z} = - \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M.$$

Во втором случае вспомогательное поле :  $\vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}$ . Запишем прежде всего лемму Лоренца (1.33) для этого случая:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ [\vec{H}_1 \vec{e}_1^*]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} - [\vec{h}_1^* \vec{E}_1]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

и опять же область интегрирования изображена на рис. 2.3. Первое слагаемое интеграла в правой части (2.10) можно вычислить по аналогии с (2.9):

$$\begin{aligned} \int_S [\vec{H}_1 \vec{e}_1^*]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} ds &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1s} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1 \right] \vec{e}_1^* \right]_n ds = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S \left( A_{1s} \left[ \vec{e}_1 \left[ \vec{e}_1^* \frac{\vec{k}_1}{k_1} \right] \right]_n \right) ds = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_1 A_{1s}. \end{aligned}$$

Учитывая, что второе слагаемое удвоит данный результат, для (2.10) можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1c} dz' \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_1^* \vec{e}_2^*) ds + \\ + \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1f} dz' \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) ds = -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_1 A_{1s}. \end{aligned}$$

Обозначив через

$$M_{1f} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_1) ds \right\rangle,$$

окончательно, после дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial A_{1s}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \{A_{1c} M^* + A_{1f} M_{1f}^*\}.$$

Найдем третью компоненту поля  $E_1$ . Для этого в качестве второго поля выберем свободно распространяющееся поле в направлении  $-\vec{k}_2$ , имеющее распределение поля на  $S$  обращенное к  $\vec{e}_{1f} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ , т. е.  $\vec{e}_{1f}^* e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ . При

этом следует учесть зависимость  $\vec{e}_{1f}$  от продольной координаты, так что мы берем в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_{1f}^*$  в интересующем нас сечении  $S$  с продольной координатой  $z$ . В этом случае лемма Лоренца (1.33) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_{1f}^*) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_{1f}^*) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_{1f}^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_{1f}^* \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части выражения (2.11):

$$\begin{aligned} &\int_S \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_{1f}^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1c} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2^* \right] \vec{e}_{1f}^* \right]_n ds + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{1f} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_{1f} \right] \vec{e}_{1f}^* \right]_n ds = \\ &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S (A_{1c} (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_2^*) + A_{1f} (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_{1f})) ds = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1f}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое удвоит данный результат:

$$\int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_{1f}^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_{1f}^* \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\} = -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1f}$$

Объемный интеграл в (2.10) равен:

$$\frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz' \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) ds.$$

Дифференцируя объемный интеграл по продольной координате, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \left( \int_0^z A_{1s} dz' \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) ds \right)}{\partial z} &= \frac{i\omega}{c} A_{1s} \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) ds + \\ &+ \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz' \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_{1f}^*}{\partial z} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$



При этом, несложно показать, что вторым слагаемым в (2.12) можно пренебречь, откуда получим:

$$\frac{\partial A_{1f}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_{1s} M_{1f} \quad (2.13)$$

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1s}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{A_{1c} M^* + A_{1f} M_{1f}^*\}, \\ \frac{\partial A_{1c}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_{1s} M, \\ \frac{\partial A_{1f}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_{1s} M_{1f}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.3.2. Поля падающие на кристалл справа

Рассмотрим теперь поле  $E_2$ . Опять же применим лемму Лоренца (1.33) для этого случая. Область интегрирования изображена на рис. 2.4.

В качестве эквивалентного тока выберем:

$$\vec{j}_{eq} = i\vec{E}_{2\Delta\epsilon} \frac{\omega}{4\pi}, \quad (2.15)$$

где возмущение диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon$  определяется соотношением (2.6)

В качестве поля (a) в (1.33) примем поле  $\vec{E}_2$  в виде разложения (2.4) с источником  $\vec{j}_{eq}$  в виде (2.15), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно  $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ ,  $\vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$  и  $\vec{e}_{2f}^* e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$  - обращенные по отношению к искомым полям. Действуя по аналогии с изложенным выше и вводя следующее обозначение

$$M_{2f} = \left\langle \int_S \epsilon_m^* (\vec{e}_{2f}^* \vec{e}_2) ds \right\rangle,$$

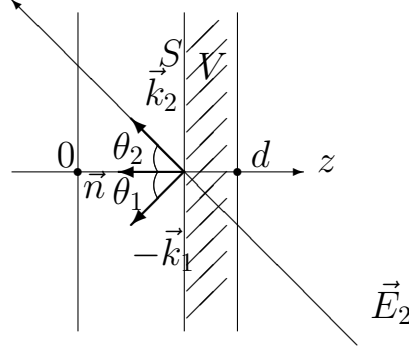


Рис. 2.4. Лемма Лоренца(волны падающие справа)

для полей справа можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2s}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \{A_{2c} M^* + A_{2f} M_{2f}^*\}, \\ \frac{\partial A_{2c}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_{2s} M, \\ \frac{\partial A_{2f}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_{2s} M_{2f}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2.3.3. Вывод уравнений для среды

Системы уравнений (2.14 и 2.16) должны быть дополнены уравнениями, учитывающими реакцию среды. Мы будем рассматривать в дальнейшем два случая. Первый случай, уравнение (1.26), соответствует среде с примесью одного сорта. В данном случае мы имеем динамическую систему с одним характерным временем релаксации. Второй случай, система уравнений (1.60, 1.61), соответствует среде с примесями двух сортов. Здесь мы имеем дело со сложной системой в которой можно выделить два характерных времени релаксации голографических решеток.

При этом, для обоих случаев, имеет смысл рассматривать важный с практической точки зрения диффузионный механизм записи.

## Случай примеси одного сорта

В случае ФРК с примесями одного сорта с учетом диффузионного механизма записи будем исходить из общего уравнения (1.26) в котором положим  $E_0 = 0$ .

При этом с целью упрощения окончательных уравнений будем предполагать, что выполнено условие (1.30). С учетом эффекта Поккельса (1.6), обозначая через

$$\Gamma = \frac{\alpha E_D}{\tau_{eff}} \quad (2.17)$$

так называемый коэффициент нелинейной связи - имеем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) \varepsilon_m e^{i\vec{k}\vec{r}} = \\ & = -i\Gamma \frac{(\vec{E}_1 \vec{E}_1^*) + (\vec{E}_2 \vec{E}_2^*)}{I_0} - i\Gamma m_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $I_0$  - полная интенсивность всех падающих пучков, а через  $m_0$  обозначены те компоненты  $m_0$  в (1.26) волновой вектор  $K$  которых близок к  $\kappa$ .

Сохраним в правой части (2.18) только члены зависящие от  $r$  по закону  $e^{-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r}}$ , учтя что,  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{\kappa} = 0$ . В результате для первого слагаемого правой части (2.18) получим:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 \vec{E}_1^*) + (\vec{E}_2 \vec{E}_2^*) &= (A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*) (\vec{e}_1 \vec{e}_2) e^{-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r}} + \\ &+ A_{1s} A_{1c}^* \left( \vec{e}_1 e_f^{(1)*} \right) e^{-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r}} + A_{2s} A_{2c}^* \left( \vec{e}_2 e_f^{(2)*} \right) e^{-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в пренебрежении быстро осциллирующими членами имеем следующее уравнение для  $\varepsilon_m$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) \varepsilon_m = \\ & = -i\Gamma \frac{A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*}{I_0} (\vec{e}_1 \vec{e}_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\Gamma \frac{A_{1s}A_{1f}^*}{I_0} \left( \vec{e}_1 e_f^{(\vec{1})^*} \right) - \\
& -i\Gamma \frac{A_{2s}A_{2f}^*}{I_0} \left( \vec{e}_2 e_f^{(\vec{2})^*} \right) - i\Gamma m_0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Если получившееся уравнение для  $\varepsilon_m$  домножить на  $\vec{e}_1^* \vec{e}_2^*$ , проинтегрировать по  $S$  и усреднить по ансамблю (при этом исчезнут интегралы в которые входит  $\vec{e}_{1f,2f}$ , т. к.  $\langle \vec{e}_{1f,2f} \rangle = 0$ ), то придем к уравнению для величины  $M^*$ , которая входит в систему уравнений (2.14, 2.16):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M^* = -i \frac{\Gamma}{I_0} B (A_{1s}A_{1c}^* + A_{2s}A_{2c}^*) + \frac{M_0^*}{\tau_{eff}}, \tag{2.20}$$

где

$$M_0 = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_2) m_0^* ds$$

а через  $B$  обозначено

$$B = \int_S (\vec{e}_1^* \vec{e}_2^*) (\vec{e}_1 \vec{e}_2) ds,$$

таким образом  $B$  - величина, определяемая известными распределениями полей, а  $M_0$  - величина постоянная во времени, которая определяет начальную заправку.

Чтобы вывести уравнение для  $M_{1f}^*$  нужно домножить уравнение (2.19) на  $(\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f})$  и усреднить по ансамблю. При этом следует учитывать, что  $\vec{e}_{1f}$  зависит от  $t$  и от  $z$ . При усреднении по ансамблю можно считать, что  $\langle \vec{\varepsilon}_m \left( \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_{1f}}{\partial t} \right) \rangle = 0$  и что  $\vec{e}_{1f}$  и  $\vec{e}_{2f}$  не коррелируют, что эквивалентно пренебрежению обращенным фенингом, тогда  $\left\langle \int_S (\vec{e}_2 \vec{e}_{2f}^*) (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) ds \right\rangle = 0$ , и в результате имеем:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f}^* = -i \frac{\Gamma}{I_0} C_1 A_{1s} A_{1f}^* + \frac{M_{1f_0}^*}{\tau_{eff}}, \tag{2.21}$$

где

$$M_{1f_0} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) m_0 ds$$

и

$$C_1 = \left\langle \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) ds \right\rangle.$$

$M_{f_0}$  и  $C_1$  зависят от времени и координаты, но так как выполняются условия нормировки (2.1), то эта зависимость не очень сильная. При расчетах мы будем считать эти величины постоянными.

Аналогичным образом можно получить уравнение для  $M_{2f}^*$ . Для этого домножим уравнение (2.19) на  $(\vec{e}_2^* \vec{e}_{2f})$  и усредним полученное по ансамблю. В результате получим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f}^* = -i \frac{\Gamma}{I_0} C_2 A_{2s} A_{2f}^* + \frac{M_{2f_0}^*}{\tau_{eff}}, \quad (2.22)$$

где

$$M_{2f_0} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_2 \vec{e}_{2f}^*) m_0 ds$$

и

$$C_2 = \left\langle \int_S (\vec{e}_2 \vec{e}_{2f}^*) (\vec{e}_2^* \vec{e}_{2f}) ds \right\rangle.$$

Опять же в дальнейшем, при расчетах, будем предполагать  $M_{2f_0}$  и  $C_2$  постоянными во времени величинами.

### Случай примеси двух сортов

В случае кристалла с примесями двух сортов мы будем исходить из системы уравнений (1.60, 1.61), предполагая, что

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^{(1)} + \varepsilon_m^{(2)}.$$

Таким образом, полагая

$$M^{(1,2)} = \int_S \varepsilon_m^{(1,2)*} (\vec{e}_1 \vec{e}_2) ds,$$

$$\begin{aligned}
M_{1f}^{(1,2)} &= \left\langle \int_S \varepsilon_m^{(1,2)*} (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_1) ds \right\rangle, \\
M_{2f}^{(1,2)} &= \left\langle \int_S \varepsilon_m^{(1,2)*} (\vec{e}_{2f}^* \vec{e}_2) ds \right\rangle,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

имеем

$$\begin{aligned}
M &= M^{(1)} + M^{(2)}, \\
M_{1f} &= M_{(1f)}^{(1)} + M_{(1f)}^{(2)}, \\
M_{2f} &= M_{(2f)}^{(1)} + M_{(2f)}^{(2)}.
\end{aligned}$$

По аналогии с выводом (2.18), полагая при диффузионном механизме записи  $E_0 = 0$ , а также считая что выполняется условие (1.30), получим из (1.60) для первого сорта примесей  $\varepsilon_m^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q^{(1)}} \right) \right) \varepsilon_m^{(1)} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}} = \\
&= -i\Gamma \frac{(\vec{E}_1 \vec{E}_1^*) + (\vec{E}_2 \vec{E}_2^*)}{I_0} - i\Gamma m_0^{(1)} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}} - \\
&\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) \varepsilon_m^{(2)} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где  $I_0$  суммарная интенсивность света, освещающего образец, а  $\Gamma$  определяется (2.17). Через  $m_0^{(1)}$  обозначены те компоненты  $m_0^{(1)}$  в (1.60) волновой вектор  $K$  которых близок к  $\kappa$ .

Для второго уравнения (1.61) мы будем предполагать в дальнейшем

$$\frac{1}{\tau_m^{(2)}} \approx \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \gg \frac{\tau}{\tau_m^{(1)} \cdot \tau_R^{(2)}}.$$

Это позволяет нам упростить (1.61) и записать

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) \varepsilon_m^{(2)} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}} = \\
&= -i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} \Gamma^{(2)} \frac{(\vec{E}_1 \vec{E}_1^*) + (\vec{E}_2 \vec{E}_2^*)}{I_0} - i\Gamma^{(2)} m_0^{(2)} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где обозначено

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma \frac{E_m^{(2)}}{E_D}.$$

Соотношения описывающие изменение во времени величин (2.23)

можно получить по аналогии с эволюционными уравнениями для случая примесей одного сорта (2.20, 2.21, 2.22):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M^{(1)*} &= -iB \frac{\Gamma}{I_0} (A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M^{(2)*} + \frac{M_0^{(1)*}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M^{(2)*} &= -i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} \frac{\Gamma^{(2)}}{I_0} B (A_{1s} A_{1c}^* + A_{2s} A_{2c}^*) + \frac{M_0^{(2)*}}{\tau_m^{(2)}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f}^{(1)*} &= -i \frac{\Gamma}{I_0} C_1 (A_{1s} A_{1f}^*) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M_{1f}^{(2)*} + \frac{M_{1f_0}^{(1)*}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M_{1f}^{(2)*} &= -i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} \frac{\Gamma^{(2)}}{I_0} C_1 (A_{1s} A_{1f}^*) + \frac{M_{1f_0}^{(2)*}}{\tau_m^{(2)}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f}^{(1)*} &= -i \frac{\Gamma}{I_0} C_2 (A_{2s} A_{2f}^*) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M_{2f}^{(2)*} + \frac{M_{2f_0}^{(1)*}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M_{2f}^{(2)*} &= -i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} \frac{\Gamma^{(2)}}{I_0} C_2 (A_{2s} A_{2f}^*) + \frac{M_{2f_0}^{(2)*}}{\tau_m^{(2)}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

#### 2.3.4. Окончательный вид уравнений

Имеет смысл привести окончательный вид уравнений. Во-первых эволюционные уравнения для голографических решеток Мы будем различать

два случая. Первый - кристалл с примесями одного сорта:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M &= iB\Gamma \frac{(A_{1s}^* A_{1c} + A_{2s}^* A_{2c})}{I_0} + \frac{M_0}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f} &= iC_1\Gamma \frac{A_{1s}^* A_{1f}}{I_0} + \frac{M_{1f_0}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f} &= iC_2\Gamma \frac{A_{2s}^* A_{2f}}{I_0} + \frac{M_{2f_0}}{\tau_{eff}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где предполагается

$$B = const|_t, C_{1,2} = const|_t, M_0 = const|_t, M_{1f_0} = const|_t, M_{2f_0} = const|_t.$$

Во втором случае запишем уравнения сопряженные по отношению к

(2.26, 2.27, 2.28):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M^{(1)} &= iB\Gamma \frac{(A_{1s}^* A_{1c} + A_{2s}^* A_{2c})}{I_0} - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M^{(2)} + \frac{M_0^{(1)}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M^{(2)} &= i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} B\Gamma^{(2)} \frac{(A_{1s}^* A_{1c} + A_{2s}^* A_{2c})}{I_0} + \frac{M_0^{(2)}}{\tau_m^{(2)}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f}^{(1)} &= iC_1\Gamma \frac{(A_{1s}^* A_{1f})}{I_0} - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M_{1f}^{(2)} + \frac{M_{1f_0}^{(1)}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M_{1f}^{(2)} &= i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} C_1\Gamma^{(2)} \frac{(A_{1s}^* A_{1f})}{I_0} + \frac{M_{1f_0}^{(2)}}{\tau_m^{(2)}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f}^{(1)} &= iC_2\Gamma \frac{(A_{2s}^* A_{2f})}{I_0} - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_m^{(1)}} \right) M_{2f}^{(2)} + \frac{M_{2f_0}^{(1)}}{\tau_{eff}}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_I^{(2)}} \right) M_{2f}^{(2)} &= i \frac{\tau_{eff}}{\tau_m^{(2)}} C_2\Gamma^{(2)} \frac{(A_{2s}^* A_{2f})}{I_0} + \frac{M_{2f_0}^{(2)}}{\tau_m^{(2)}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Опять же

$$B = const|_t, C_{1,2} = const|_t,$$



$$M_0^{(1,2)} = \text{const}|_t, M_{1f_0}^{(1,2)} = \text{const}|_t, M_{2f_0}^{(1,2)} = \text{const}|_t.$$

В уравнениях (2.29, 2.30) вполне понятен физический смысл коэффициентов  $B$  и  $C_{1,2}$  - они представляют собой коэффициенты перекрытия, т. е. определяют ту часть кристалла в которой происходит взаимодействие между соответствующими световыми пучками. Из этого определения следует, что  $B < 1$  и  $C_{1,2} < 1$ .

Для световых полей слева

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1s}}{\partial z} &= -iD \{A_{1c}M^* + A_{1f}M_{1f}^*\}, \\ \frac{\partial A_{1c}}{\partial z} &= -iDA_{1s}M, \\ \frac{\partial A_{1f}}{\partial z} &= -iDA_{1s}M_{1f}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

и справа

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2s}}{\partial z} &= iD \{A_{2c}M^* + A_{2f}M_{2f}^*\}, \\ \frac{\partial A_{2c}}{\partial z} &= iDA_{2s}M, \\ \frac{\partial A_{2f}}{\partial z} &= iDA_{2s}M_{2f}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где в целях удобства полагалось, что  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , так что  $D = \frac{\omega}{c} \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ .

#### 2.4. Численные расчеты модели двойного некогерентного обра- щающего зеркала

Прежде всего следует определить допустимые значения коэффициентов, которые используются в уравнениях (2.29(2.30), 2.31 и 2.32). Интенсивности световых пучков входят как в правую, так и в левую часть систем уравнений (2.31) и (2.32). Следовательно в этих уравнениях мы вполне

можем отнормировать интенсивности на произвольную величину. В системе материальных уравнений (2.29 (2.30)) интенсивности световых пучков входят в коэффициент модуляции - величину исходно отнормированную. Кроме того суммарная интенсивность входит в выражение для  $\tau_{eff}$  (1.25). В свою очередь величина  $\tau_{eff}$  определяет масштаб времени для системы (2.29 (2.30)). Мы всегда можем положить

$$\tau_{eff} = 1 \quad (2.33)$$

и в дальнейшем считать время в единицах  $\tau_{eff}$ .

При этом, как следует из (1.25), (1.24) и (1.8)

$$\tau_{eff} \sim \frac{1}{I_0},$$

следовательно чем больше суммарная интенсивность  $I_0$  тем меньше  $\tau_{eff}$ .

Прежде всего заметим, что углы между взаимодействующими пучками невелики, так что  $K \sim 100 \div 1000$ . В результате типичное значение  $E_q$  из табл. 1.2.

$$E_q \sim 10^3 \div 10^4 \frac{V}{sm}.$$

При расчетах мы будем считать, что

$$\beta = \frac{E_D}{E_q} < 1. \quad (2.34)$$

С учетом того что существует возможность изменять  $E_D$  в нестационарных механизмах записи, оценка конкретного значения  $E_D$  затруднительна.

Поэтому в дальнейшем будем считать

$$E_D = \beta E_q,$$

где в силу (2.34)  $\beta < 1$ . В дальнейших расчетах мы будем предполагать для  $\beta$  оценку в  $\beta = 0.1$ . Из табл. 1.1 следует что электрооптический коэффициент  $\alpha$  находится в пределах

$$\alpha \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$$

Так что для  $\Gamma$  с учетом (2.17) и (2.33) имеем

$$\Gamma \sim 10^{-4} \div 10^{-1}.$$

В дальнейшем при расчетах будем считать  $\Gamma \sim 2.0 \cdot 10^{-4}$ .

Для коэффициентов перекрытия  $B$  и  $C_{1,2}$ , как на то указывалось выше,  $B < 1$  и  $C_{1,2} < 1$ .

Сложнее всего сделать оценки для затравочных решеток  $M_0$ ,  $M_{1f_0}$  и  $M_{2f_0}$ . Однако здесь можно утверждать, что

$$M_{1f_0} \approx M_{2f_0},$$

$$M_0 \ll M_{1f_0}, M_{2f_0}.$$

В дальнейшем будем предполагать

$$M_{1f_0} \approx M_{2f_0} \sim \cdot 10^{-3} \div \cdot 10^{-5},$$

$$M_0 \sim \cdot 10^{-5} \div \cdot 10^{-7}.$$

Последняя оценка - для  $D$ :

$$D \sim 10^4 \frac{1}{sm}.$$

При расчетах в дальнейшем будем нормировать уравнения (2.31), (2.32) на длину кристалла, так что эта длина  $l = 1$ . С учетом характерных размеров кристаллов в величину порядка сантиметра. Имеем для  $D$  следующую безразмерную величину:

$$D \sim 10^4.$$

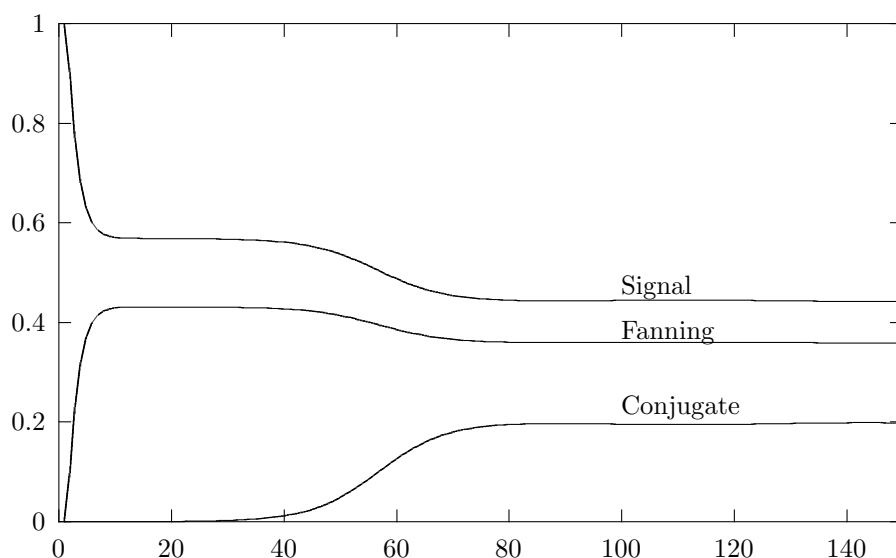


Рис. 2.5. Динамика развития генерации в двойном некогерентном обращающем зеркале. Signal - сигнальная волна, Conjugate - обращенная волна, Fanning - феннинг

#### 2.4.1. Динамика генерации в схеме двойного некогерентного обращающего зеркала

Типичные кривые роста, полученные численным расчетом системы уравнений (2.29, 2.31 и 2.32) представлены на рис. 2.5.

Качественным образом картина представленная на рис. 2.5 соответствует экспериментальным данным. В частности, на начальном этапе происходит быстрый рост фенинга. Происходит это прежде всего за счет того что затравка для фенинга много больше затравки для обращенной волны. На этом этапе происходит процесс усиления, следовательно стационарный уровень фенинга зависит от величины начальной затравки. Затравка для фенинга выбрана из соображений того что в стационарном режиме в фенинг переходит порядка 30 – 60% энергии исходного лазерного пучка.

Через некоторое время появляется обращенная волна. Данный про-

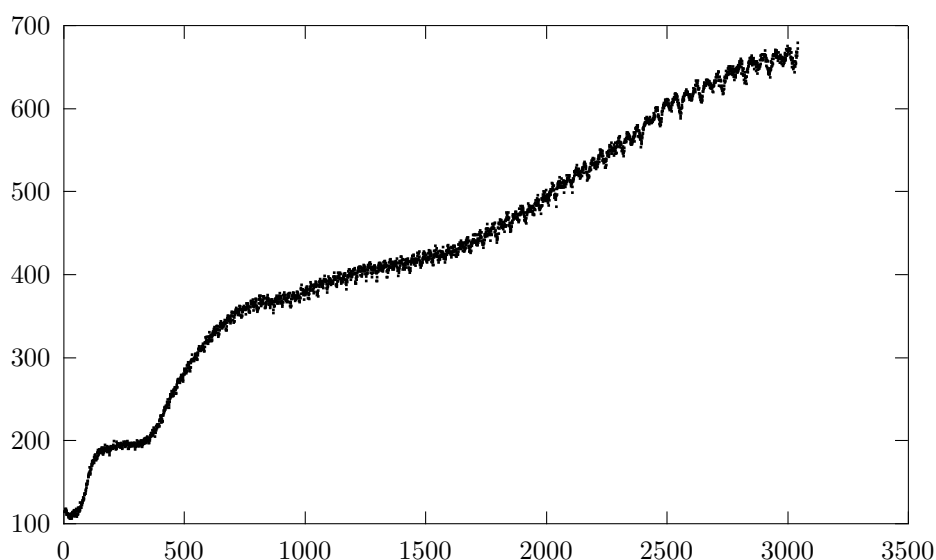


Рис. 2.6. Динамика развития генерации отраженной волны в ДНОЗ. Начальный рост отраженной волны. Наиболее типичный случай роста. Зависимость интенсивности отраженной волны от времени (шаг по времени 0.1 сек.) Экспериментальные данные.

цесс является процессом генерации и начальная затравка здесь нужна только для развития генерации и не оказывает влияния на уровень стационарного режима. От уровня данной затравки зависит время выхода на данный уровень.

На рис. 2.6 показана наиболее типичная картина роста отраженной волны в ДНОЗ. Качественным образом она соответствует рис. 2.5, в частности на начальном участке  $0 \div 70\tau_{eff}$ .

Параметры которые могут подвергаться изменениям и от которых зависит стационарный режим генерации в схеме ДНОЗ - это затравки для отраженной волны, затравки для фенинга и коэффициент  $\Gamma$  ( $D$ ).

Имеет смысл рассмотреть, как будет меняться картина генерации отраженной волны при уменьшении коэффициента  $\Gamma$ . На рис. 2.7 представ-

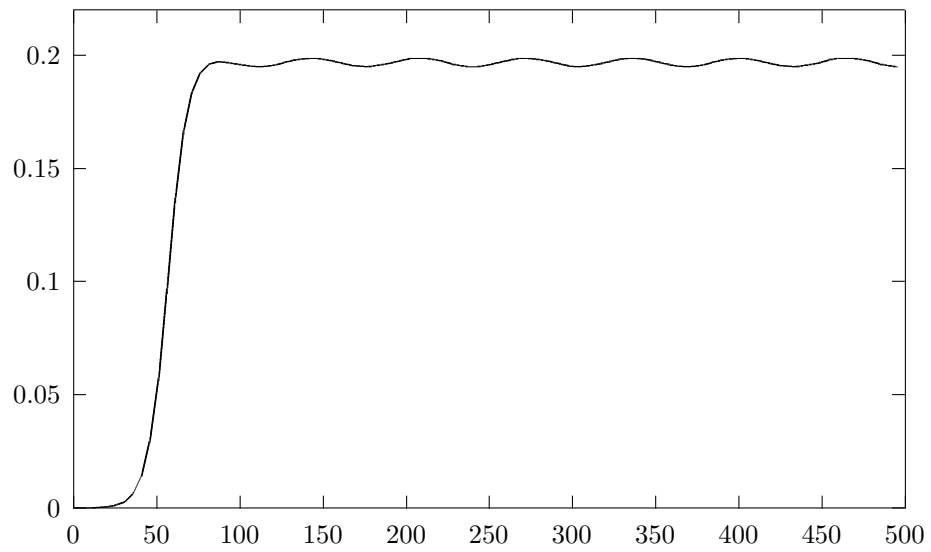


Рис. 2.7. Динамика развития генерации отраженной волны в ДНОЗ при коэффициенте  $\Gamma = 0.00025$

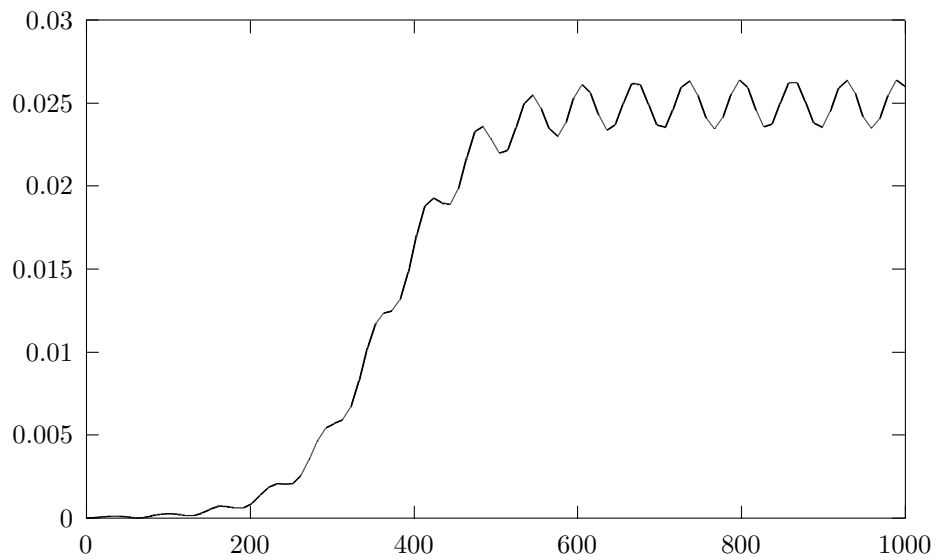


Рис. 2.8. Динамика развития генерации отраженной волны в ДНОЗ при коэффициенте  $\Gamma = 0.00023$

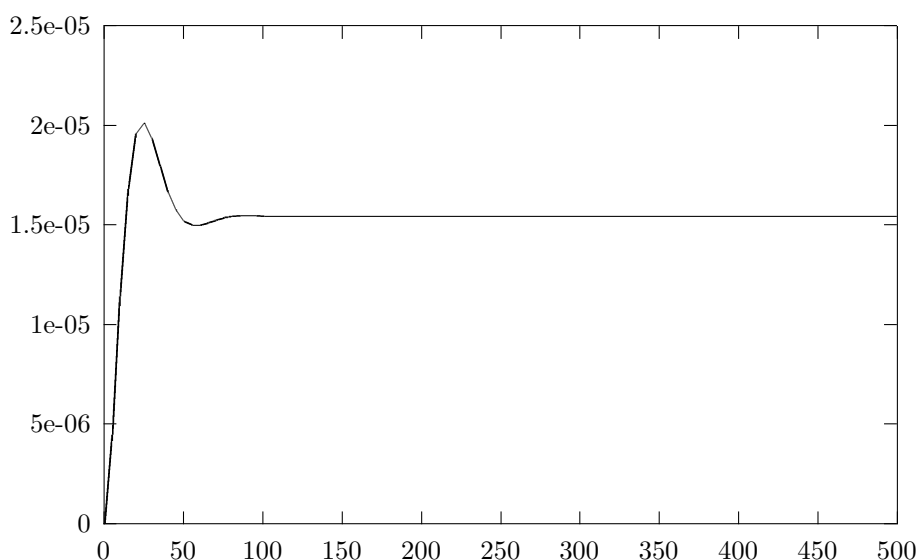


Рис. 2.9. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ при небольшом коэффициенте  $\Gamma = 0.00021$

лена динамика генерации полностью соответствующая случаю, изображенному на рис. 2.5. В этом случае значение коэффициента  $\Gamma$  было взято равным 0.00025. Результаты для  $\Gamma = 0.00023$  и  $\Gamma = 0.00021$ , представлены на рис. 2.8 и рис. 2.9, соответственно. На данных рисунках видно, что в стационарном режиме генерации присутствуют осцилляции. При этом если рассмотреть случай в котором взяты меньшее затравки для фенинга и обращенной волны, при прочих равных условиях - амплитуда этих осцилляций становится меньше.

Режим осцилляций в схеме ДНОЗ, наблюдается экспериментально экспериментальные данные представлены на рис. 2.10. Результаты рис. 2.10 получены в присутствии сильного фенинга и больших коэффициентах усиления.

На рис. 2.11 показана динамика развития генерации обращенной волны в ситуации, когда затравка для фенинга и обращенной волны меньше

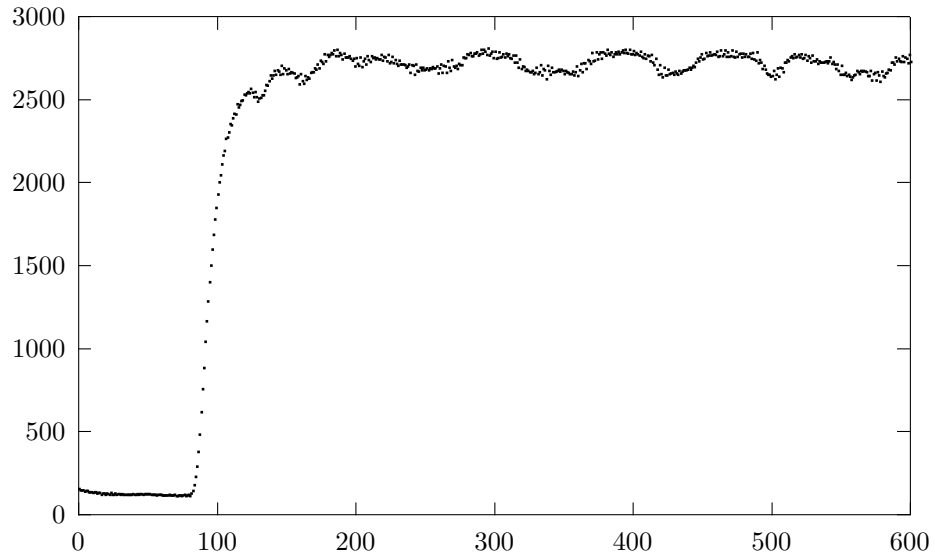


Рис. 2.10. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ. Зависимость интенсивности обращенной волны от времени (шаг по времени 0.1 сек.) Осциллирующие колебания в установившемся режиме. Экспериментальные данные.

чем в случае, изображенном на рис. 2.5 и рис. 2.7, затравка для фенинга ( $M_{1f_0}, M_{2f_0}$ ) меньше в 2 раза, затравка  $M_0$  меньше в 10 раз.

Особый интерес представляет динамика генерации обращенной волны в зависимости от величины начальной затравки  $M_0$  при прочих равных условиях. Соответствующее семейство кривых изображено на рис. 2.12. Средняя кривая этого семейства эквивалентна случаю изображенному на 2.7, что соответствует  $M_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ . Первая кривая рис. 2.12 соответствует  $M_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ , а третья  $M_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ . Т. е. изменение затравок выбрано в 10 раз. Как видно из этого рисунка, от начальной затравки зависит лишь время выхода на стационарный режим и не зависит конкретное значение интенсивности обращенной волны в этом стационарном режиме. При этом опять же видно, что при большом уровне затравок, первая кривая на рис.



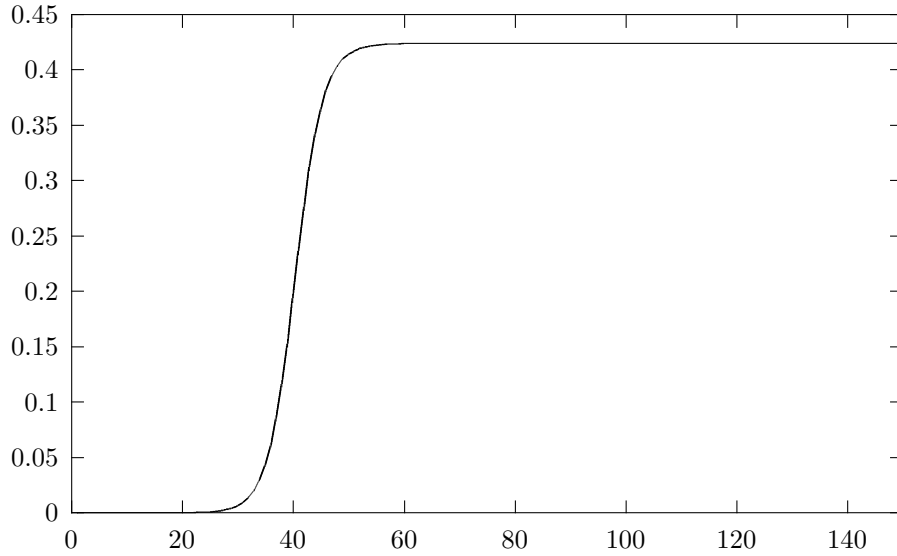


Рис. 2.11. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ при малых затравках для фенинга ( $M_{1f_0}, M_{2f_0}$ ) и обращенной волны  $M_0$ .

2.12, генерация обращенной волны в ДНОЗ сопровождается осциллирующим процессом в стационарном режиме.

По другому выглядит картина в случае слабых коэффициентов нелинейной связи  $\Gamma$ . На рис. 2.13 изображено семейство кривых, которое получено изменением начальной затравки в случае рис. 2.9, что соответствует  $\Gamma = 0.00021$ . Верхняя кривая рис. 2.13 эквивалентна рис. 2.9, что соответствует  $M_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ . Остальные кривые соответствуют меньшим затравкам в  $M_0 = 4 \cdot 10^{-8}$  и  $M_0 = 3 \cdot 10^{-8}$  соответственно. Т. е. в этом случае от начальных затравок зависит уровень стационарного режима генерации обращенной волны в схеме ДНОЗ.

Модели в которых ДНОЗ, ведет себя как генератор, т. е. стационарный уровень не зависит от начальной затравки проводилось в приближении плоских волн и в отсутствие фенинга. Кривые которые соответствуют данному приближению изображены на рис. 2.14. Параметры расчетов в

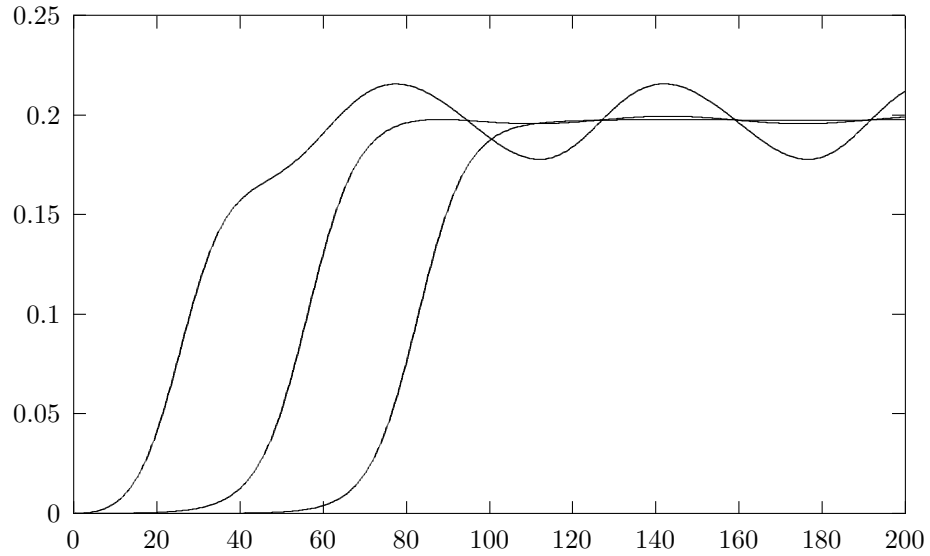


Рис. 2.12. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ при различном уровне затравок  $M_0$ , при прочих равных условиях. Коэффициент  $\Gamma = 0.00025$ .

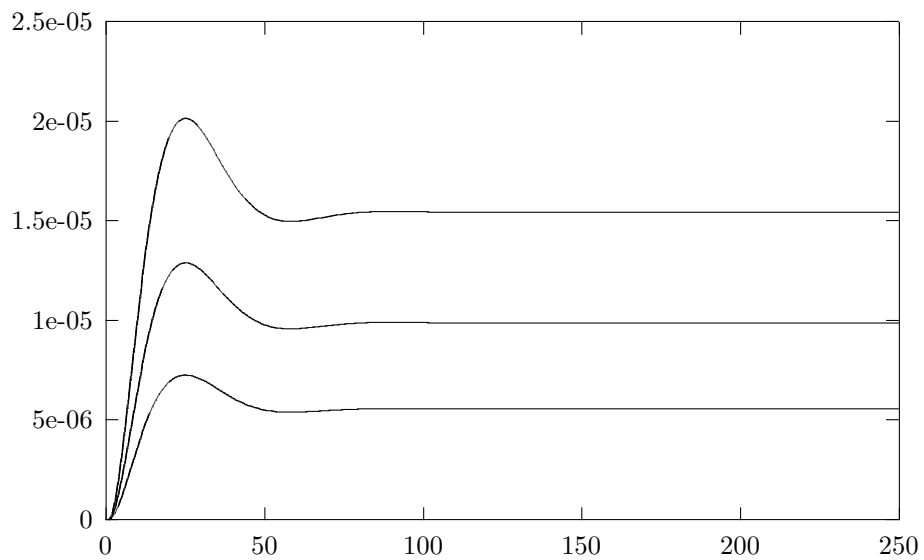


Рис. 2.13. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ при различном уровне затравок  $M_0$ , при прочих равных условиях. Коэффициент  $\Gamma = 0.00021$ .

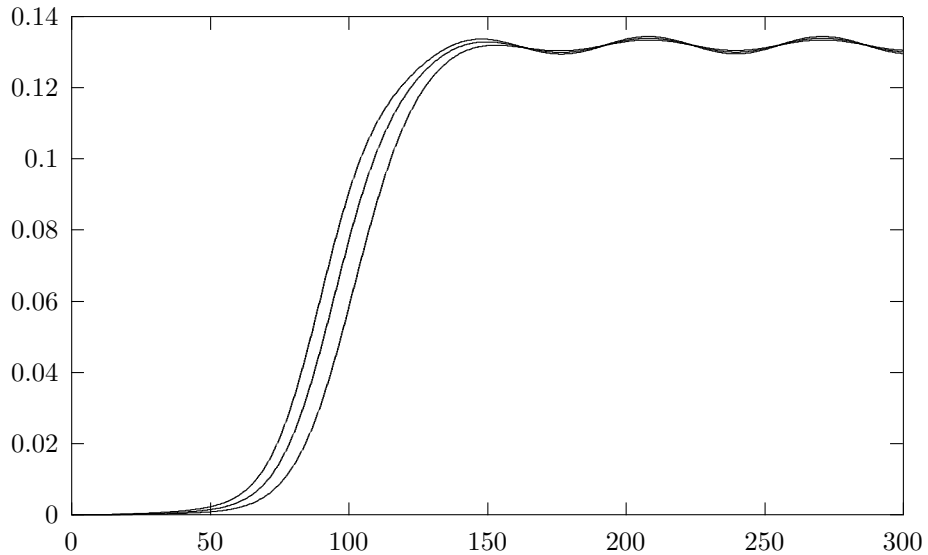


Рис. 2.14. Динамика развития генерации обращенной волны в ДНОЗ при различном уровне затравок  $M_0$ , при прочих равных условиях. Коэффициент  $\Gamma = 0.00021$ . Случай отсутствия фенинга.

данном случае были взяты аналогично рис. 2.13, но при этом из расчетов исключался фенинг. Основным отличием случая рис. 2.13 от рис. 2.12 и, в большей степени от рис. 2.14, является сильный уровень фенинга в установившемся режиме. В результате при малом уровне фенинга (рис. 2.12, 2.14) мы имеем картину в которой ДНОЗ можно считать генератором. В случае сильного фенинга (рис. 2.13) картина меняется и стационарный режим зависит от уровня начальной затравки, здесь можно говорить об работе ДНОЗ, как усилителя.

Обычно эксперимент сопровождается большим уровнем фенинга, т. е. самое главное условие данного утверждения выполнено. Но зато практически невозможно записать в кристалле постоянные затравки разного уровня при прочих равных условиях (в одном и том же кристалле). Таким образом провести экспериментальную проверку этого утверждения -

затруднительно.

#### **2.4.2. Запись-стирание голографических решеток**

С точки зрения построения систем распознавания оптических образов на базе ФРК особый интерес представляют эксперименты на запись-стирание голографических решеток. Целью этих экспериментов является получение ответа на следующий основной вопрос: насколько долго в кристалле сохраняются голографические решетки и отчего данное время зависит.

Прежде всего имеет смысл рассмотреть зависимости времени восстановления обращенной волны в ДНОЗ в зависимости от времени стирания голографических решеток. Стирание этих решеток обычно проводят следующим образом. Закрывают один из падающих на кристалл лазерных пучков, а второй оставляют. Время в течение которого перекрыт один из дифрагирующих пучков - мы будем в дальнейшем называть временем стирания. После стирания - перекрытый пучок открывают и смотрят за какое время восстановится обращенная волна.

Нами были проведены численные эксперименты на запись-стирание голографических решеток. В рамках данных экспериментов, стирание производилось при перекрытии одного из дифрагирующих лазерных пучков. Время восстановления обращенной волны отчитывалось по уровню 0.7 от стационарного. Далее ожидалось пока система выйдет снова на стационарный уровень и эксперимент повторялся.

В первом случае мы рассматривали ФРК с одним сортом примесей. Расчет в этом случае велся по системе уравнений (2.29, 2.31 и 2.32). Ре-

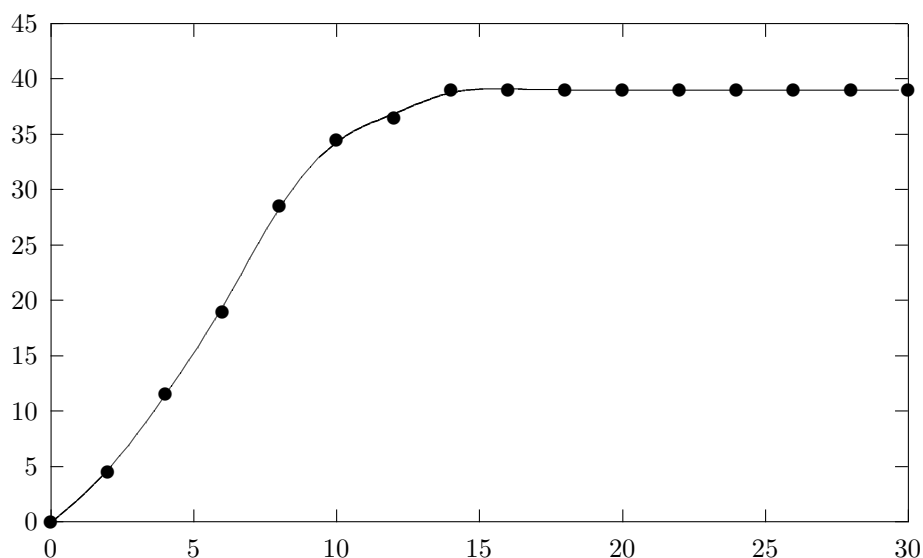


Рис. 2.15. Зависимость времени восстановления голографических решеток от времени их стирания (случай решеток с одним характерным временем релаксации)

зультат представлен на рис. 2.15.

Во втором случае рассматривался кристалл с двумя сортами примесей, т. е. расчет велся по системе уравнений (2.30, 2.31 и 2.32). Результаты этого расчета представлены на рис. 2.16.

Аналогичные эксперименты были проведены в работе [42]. При этом экспериментально было получено, что в пределах времени стирания 0-150 секунд восстановление изображения проходит за времена порядка 10 секунд. Если время стирания больше 150 секунд, восстановление проходит за время порядка 60 секунд (см. рис. 2.17). Как видно качественным образом эксперимент соответствует ситуации ФРК с примесями двух сортов. Именно в этой ситуации в кристалле присутствуют два “характерных времени релаксации”.

В этой связи имеет смысл рассмотреть как развивается обращенная

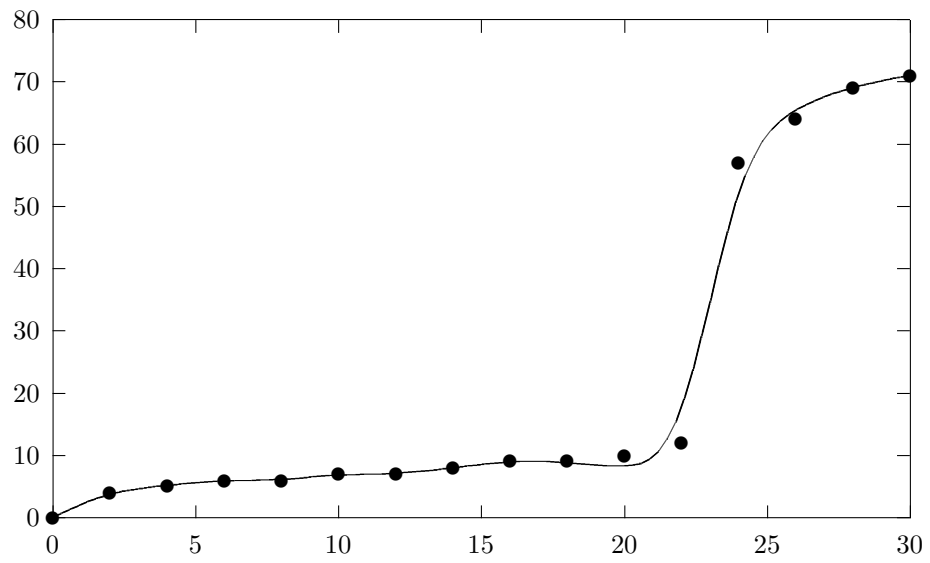


Рис. 2.16. Зависимость времени восстановления голографических решеток от времени их стирания (случай решеток с двумя характерными временами релаксации)

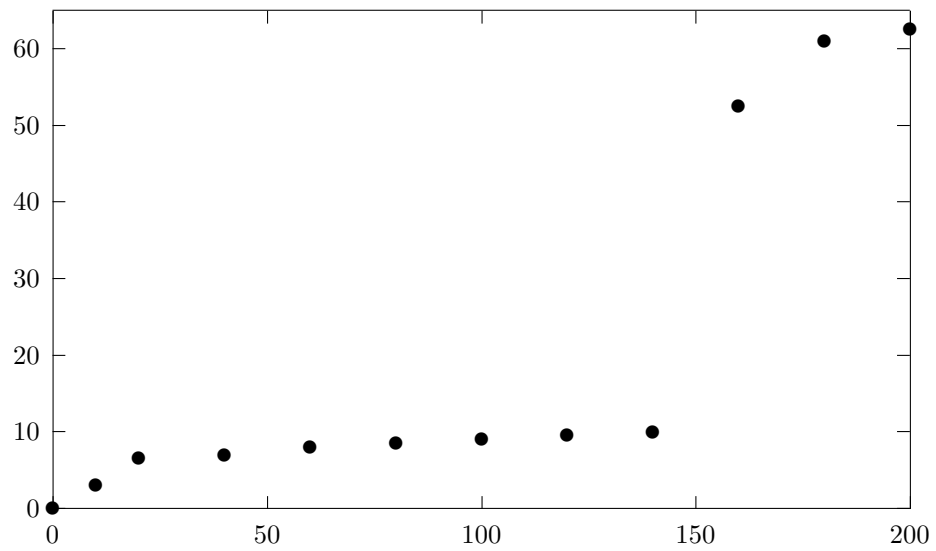


Рис. 2.17. Зависимость времени восстановления от времени стирания экспериментальные данные

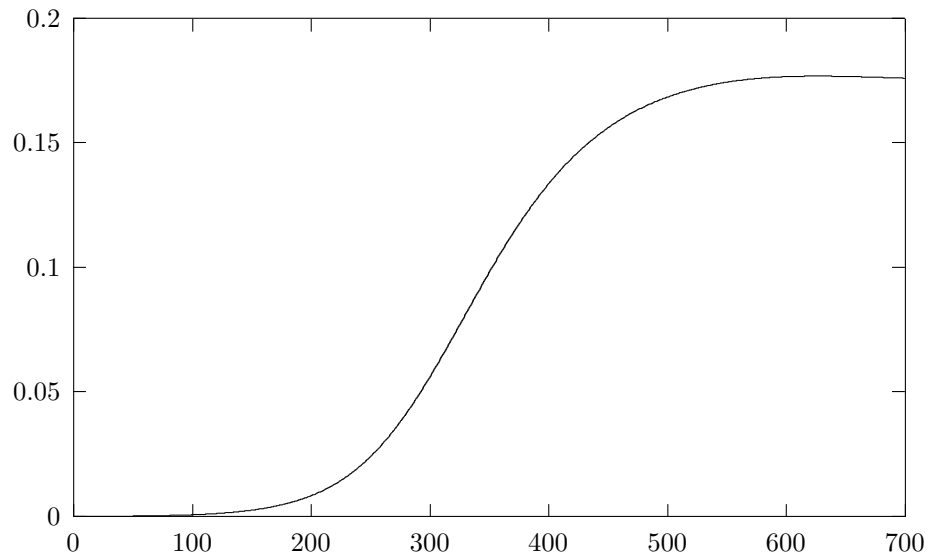


Рис. 2.18. Динамика развития генерации отраженной волны в двойном некогерентном отражающем зеркале с двумя временами релаксации

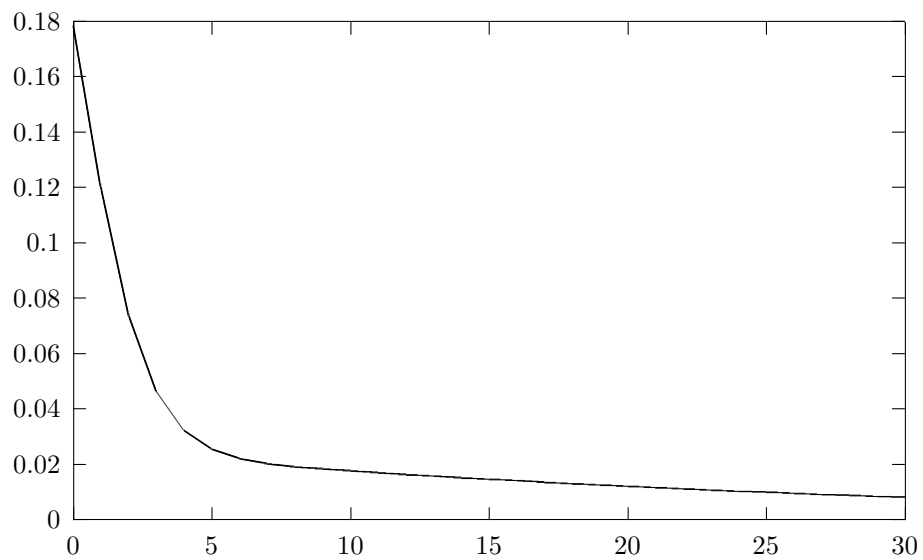


Рис. 2.19. Динамика стирания голографических решеток в двойном некогерентном отражающем зеркале с двумя временами релаксации. Зависимости интенсивности отраженной волны от времени. Кристалл освещается одним лазерным пучком.

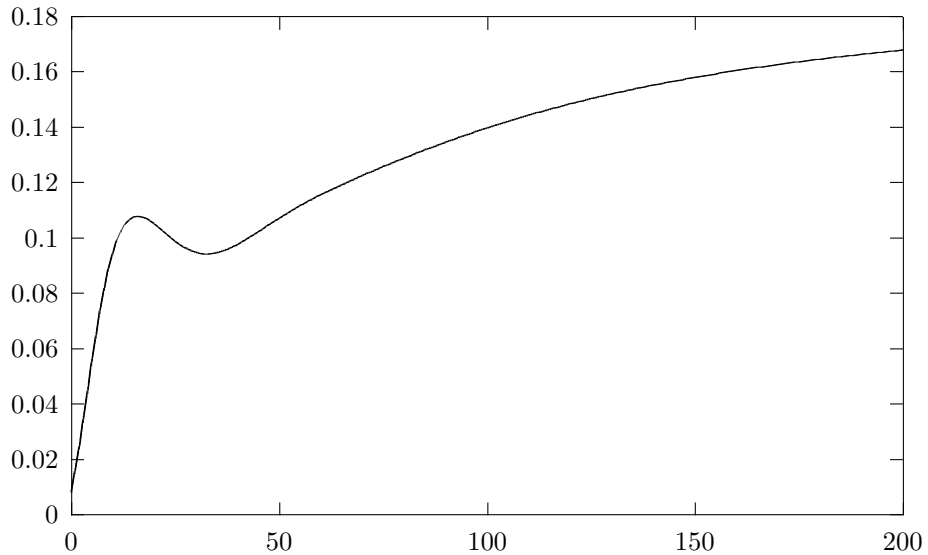


Рис. 2.20. Динамика записи голографических решеток в двойном некогерентном обращающем зеркале с двумя временами релаксации. Зависимости интенсивности обращенной волны от времени. Кристалл освещается двумя лазерными пучками. Сразу после стирания.

волна в случае кристалла с двумя сортами примесей. Результат представлен на рис. 2.18. Кроме того на рис. 2.19 представлена кривая спада обращенной волны в момент стирания голографических решеток. На данной кривой можно наблюдать два характерных участка, соответствующих двум временам релаксации. И, на конец, на рис. 2.20 представлена кривая роста обращенной волны сразу после стирания. На последней кривой (см. рис. 2.20) опять же можно выделить два характерных временных интервала: начальный момент времени когда рост обращенной волны идет достаточно быстро ( $0 \div 20\tau_{eff}$ ) и плавный рост после этого участка ( $50\tau_{eff} \div 200\tau_{eff}$ ).

Зависимости, изображенные на рис. 2.16 и рис. 2.17 позволяют нам говорить, что в ФРК существует так называемая долговременная память. Следовательно записанные голографические решетки восстанавливаются



быстрее чем записываются новые. В силу того факта, что в общем случае каждая записанная голограмма соответствует определенному оптическому изображению, можно осуществлять распознавание уже записанных изображений от вновь записываемых по времени установления стационарного режима для обращенной волны в схеме ДНОЗ. Это позволяет строить эффективные устройства распознавания оптических образов на ДНОЗ.

### 3. Полулинейный генератор

#### 3.1. Введение

Одно из практических применений ФРК заключается в использовании данных кристаллов в так называемых схемах компенсаций фазовых искажений. В частности с практической точки зрения особый интерес представляет схема в которой ФРК помещается в резонатор лазера. Использование ФРК в качестве зеркала резонатора лазера дает этому резонатору ряд дополнительных полезных свойств: данный резонатор осуществляет автоматическую компенсацию фазовых искажений. В обычном резонаторе частота генерации определяется частотой мод резонатора, т. е. пробегает дискретный набор значений. В случае использования ФРК такого жесткого ограничения нет.

В качестве зеркала резонатора можно использовать схему двойного некогерентного отражающего зеркала, рассмотренную выше. Но данная схема требует внешних источников накачки - что может быть не всегда

Рис. 3.1. Схема полулинейного генератора

приемлемо. Более разумной, в данном случае, представляется так называемая схема полулинейного генератора, которое представляет устройство, состоящее из ФРК и расположенного за ним зеркала (см. рис. 3.1).

В данной схеме накачка с одной из сторон(слева) производится лазером, а с другой стороны(справа) за счет волны отраженной от зеркала.

Первые эксперименты с  $BaTiO_3$  по схеме в которой одним из зеркал является полулинейный генератор, изображенный на рис. 3.1, были описаны в работе [43]. Фактически в данном случае одно из зеркал мощного аргонового лазера было заменено на ОВФ-зеркалом на базе ФРК. Экспериментально была продемонстрирована возможность эффективной компенсации фазовых искажений, вносимых с помощью абератора внутрь резонатора лазера. При этом мощность излучения по сравнению с обычным резонатором с тем же абератором возрасала с 1 до 500 мВт. Кроме того в данной работе отмечалось наличие структуры продольных мод, характерных для обычного лазерного резонатора.

В силу своей практической значимости схема полулинейного генератора на ФРК исследуется достаточно интенсивно. Данная схема является схемой генератора и генерация обращенной волны в такой схеме возможно при выполнении определенных, так называемых, пороговых условий. Наиболее интересные результаты в этой области были получены в работе [13]. В этой работе исследовался начальный этап генерации обращенной волны в полулинейном генераторе. При этом было показано, что установлению генерации обращенной волны в такой схеме предшествует “зона молчания”, обусловленная формированием в многомодовом резонаторе моды с обращенным волновым фронтом. Основным недостатком данной работы

является то, что не исследовались стационарные режимы генерации.

Эти режимы исследовались в обзорной работе [12]. В данной работе основное внимание уделялось влиянию фенинга на работу различных оптических схем с ФРК, в том числе и схемы полулинейного генератора. Основной недостаток данной работы заключается в том, что взаимодействующие световые пучки считались плоскими волнами. Кроме того считалось, что в резонаторе, образованном ФРК и зеркалом присутствует только одна мода.

Ниже в данной работе автором составлены уравнения учитывающие сложный характер взаимодействующих световых пучков, в том числе много-модовый характер поля в резонаторе полулинейного генератора.

### 3.2. Постановка задачи

Теорию однолинейного генератора можно развить исходя из теории двойного обращения фронтов на фоторефрактивном кристалле, рассмотренной ранее. Схема однолинейного генератора изображена на рис. 3.1.

В дополнение к тем допущениям которые были приняты ранее, допустим, что в кристалле не возникает отражающих решеток, связанных с интерференцией встречных волн, т. к. во первых угол между встречными волнами много больше угла между взаимодействующими волнами, а из (1.26) следует что коэффициент взаимодействия плоских волн в фоторефрактивном кристалле зависит от амплитуды решетки показателя преломления в кристалле  $K$  по закону  $\frac{K}{1+\beta K^2}$ , где  $\beta$  - некоторый коэффициент, а  $K$  зависит от угла  $\alpha$  между взаимодействующими плоскими волнами, так что существует некоторый угол между взаимодействующими плоскими волна-

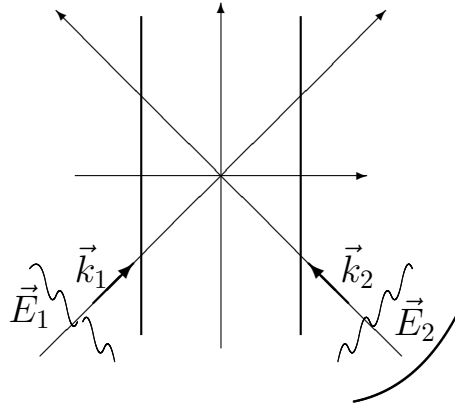


Рис. 3.2. Постановка задачи (общий случай)

ми при котором это взаимодействие - максимально; во-вторых обычно на кристалл подается переменное электрическое поле для усиления эффекта фоторефракции. Так как данное поле подается в направлении перпендикулярном направлению волновых векторов решеток, создаваемых встречными волнами, то оно не оказывает усиливающего эффекта на взаимодействие между данными волнами. Таким образом взаимодействие между встречными волнами целиком определяется диффузионным механизмом, который в данном случае несущественен.

Ранее [36] нами рассматривалась ситуация в которой в резонаторе присутствует только одна выделенная мода. Здесь сделана попытка рассмотреть ситуацию при которой в резонаторе существует некоторая совокупность мод.

Допустим, что в устройстве генерируется некоторая совокупность мод, каждая мода в которой обладает тем свойством, что волна моды падающая на зеркало и отраженная от него обладают обращенными фронтами. Помимо совокупности мод поля может существовать рассеянный фон - фе-

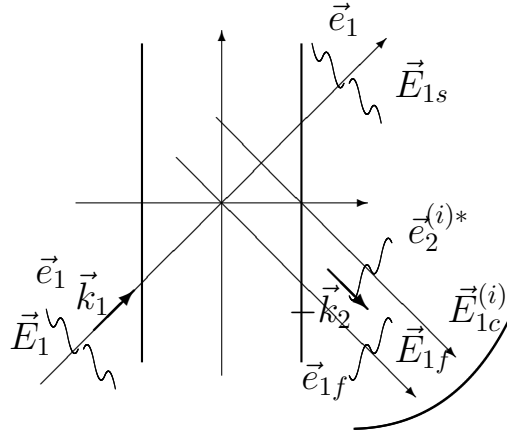


Рис. 3.3. Разделение на компоненты, поля слева

нинг, который отражаясь от зеркала падает на кристалл. Предположим, что нам известна каждая мода, т. е. известно распределение поля в ней

С учетом сказанного можно развить теорию однолинейного генератора. При сделанном предположении о том что можно пренебречь отражающими решетками поля в кристалле, световые пучки, распространяющиеся слева и справа можно рассматривать независимо.

Особый интерес представляет поле, отраженное от зеркала. Данное поле можно разложить по модам резонатора, образованного зеркалом и правой гранью резонатора. В дальнейшем будем предполагать, что некоторая совокупность компонент данного разложения является изначально выделенной. Предположим, что отдельная мода резонатора имеет распределение  $\vec{e}_2^{(i)}$ .

Запишем поле слева от фоторефрактивного кристалла в следующем виде:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1s} + \sum_i \vec{E}_{1c}^{(i)} + \vec{E}_{1f}, \quad (3.1)$$

где  $\vec{E}_{1s}$  - прямая волна, имеющая структуру волны падающей на кристалл

слева (распределение -  $\vec{e}_1$ );  $\vec{E}_{1c}^{(i)}$  - обращенная волна, в данном случае это та часть исходного лазерного пучка которая на правой грани кристалла (т. е. на выходе из кристалла) имеет структуру обращенную по отношению к части отраженного от зеркала светового пучка, имеющего распределение  $\vec{e}_2^{(i)}$ . Таким образом  $\vec{E}_{1c}^{(i)}$  является модой резонатора, изображенного в правой части исходной схемы (рис. 3.1). Через  $\vec{E}_{1f}$  обозначен остаток, имеющий смысл волны рассеянной на случайных неоднородностях показателя преломления.

Поле справа от кристалла запишем в следующем виде:

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_{2s}^{(i)} + \vec{E}_{2c} + \vec{E}_{2d} + \vec{E}_{2f},$$

где  $\vec{E}_{2s}^{(i)}$  - прямая волна, имеющая структуру рассматриваемой совокупности мод резонатора;  $\vec{E}_{2c}$  - обращенная волна, имеющая структуру обращенную по отношению к волне падающей на кристалл слева. Через  $\vec{E}_{2d}$  обозначено рассеянное излучение падающее на кристалл справа (это тот остаток который получается после вычета из всего светового пучка, отраженного от зеркала, той его части которая соответствует рассматриваемой совокупности мод резонатора). При этом следует сделать важное предположение относительно  $\vec{E}_{2d}$ :  $\vec{E}_{2d}$  не коррелирует с световыми пучками имеющими структуру обращенную по отношению к  $\vec{E}_1$ , где  $\vec{E}_1$  определяется соотношением (3.1). Через  $\vec{E}_{2f}$  обозначен остаток - фенинг.

Примем

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1s} &= A_{1s}(z, t) \vec{e}_1(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{1c}^{(i)} &= A_{1c}^{(i)}(z, t) \vec{e}_2^{(i)*}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{1f} &= A_{1f}(z, t) \vec{e}_{1f}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})},\end{aligned}$$





условия нормировки аналогичные условиям (2.1):

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_1^*) ds &= 1, \int_S (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_2^{(j)*}) ds = \delta_{ij}, \\ \left\langle \int_S (\vec{e}_{1f} \vec{e}_{1f}^*) ds \right\rangle &= 1, \left\langle \int_S (\vec{e}_{2f} \vec{e}_{2f}^*) ds \right\rangle = 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по ансамблю. Кроме того по аналогии с (2.2):

$$\langle e_d \rangle = 0, \langle e_{1f} \rangle = 0, \langle e_{2f} \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Полное поле для волны, распространяющейся слева имеет вид

$$\vec{E}_1 = A_{1s} \vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} + \sum_i A_{1c}^{(i)} \vec{e}_2^{(i)*} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} + A_{1f} \vec{e}_{1f} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \quad (3.4)$$

и для волны справа вид -

$$\vec{E}_2 = \sum_i A_{2s}^{(i)} \vec{e}_2^{(i)} e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} + A_{2c} \vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} + A_{2d} \vec{e}_d e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} + A_{2f} \vec{e}_{2f} e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})} \quad (3.5)$$

### 3.3. Вывод основных уравнений

По аналогии с рассмотренным выше двухволновым взаимодействием света в ФРК будем считать что источником рассеянных полей являются эквивалентные токи. Для нахождения амплитуд этих полей применим лемму Лоренца (1.33).

#### 3.3.1. Поля падающие на кристалл слева

Рассмотрим выражения, описывающие поля  $E_1$ . Эквивалентный ток, соответствующий возмущению диэлектрической проницаемости в среде

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_m(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k} \vec{r})} + \varepsilon_m^*(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \vec{r})}, \quad (3.6)$$

задается следующим выражением

$$\vec{j}_{eq} = i \vec{E}_1 \Delta \varepsilon \frac{\omega}{4\pi}, \quad (3.7)$$

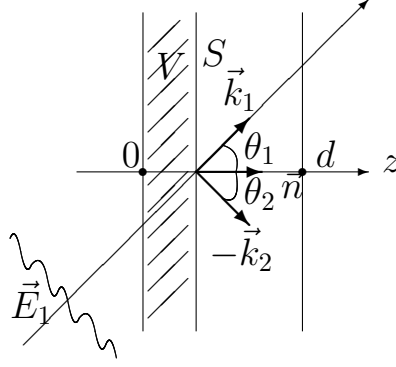


Рис. 3.5. Лемма Лоренца (поля слева)

Для волнового вектора решетки в (3.6)  $\vec{\kappa}$  выполняется следующее соотношение:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{\kappa} = 0. \quad (3.8)$$

Объем  $V$ , в этом случае, ограничен справа сечением  $S$  (см. рис. 3.5). В качестве поля (а) в соотношении 1.33 примем поле  $\vec{E}_1$  в виде разложения (3.4) с источником  $\vec{j}_{eq}$  в виде (3.7), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно  $\vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}$ ,  $\vec{e}_2^{(i)} e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  и  $\vec{e}_{1f}^* e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  -обращенные по отношению к искомым полям. Например для нахождения амплитуды обращенной волны используем в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_2^{(i)} e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  - поле имеющее распределение  $i$ -ой моды резонатора  $\vec{e}_2^{(i)}$  и направленное по  $\vec{k}_2$ . Лемма Лоренца при этом дает:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2^{(i)}) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2^{(i)}) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_2^{(i)} \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_2^{(i)} \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Область интегрирования изображена на рис. 3.5.

Для нахождения интеграла в правой части (3.9), необходимо найти  $\vec{H}_1$  и  $\vec{h}_2^{(i)}$ , для этого будем считать волны квазиплоскими и использовать

для связи  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  соотношение (1.39).

Если воспользоваться условиями нормировки (3.2) и нулевого среднего для фенинга (3.3) при усреднении по ансамблю, то для первого слагаемого во второй части (3.9) имеем:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_S [\vec{H}_1 \vec{e}_2^{(i)}]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds \right\rangle &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\langle \int_S A_{1s} \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1 \right] \vec{e}_2^{(i)} \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}} ds \right\rangle + \\
&+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_j \left\langle \int_S A_{1c}^{(j)} \left( \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2^{(j)*} \right] \vec{e}_2^{(i)} \right)_n ds \right\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\langle \int_S A_{1f} \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_{1f} \right] \vec{e}_2^{(i)} \right]_n ds \right\rangle = \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_j \left\langle \int_S A_{1c}^{(j)} \left[ \vec{e}_2^{(i)} \left[ \vec{e}_2^{(j)*} \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n ds \right\rangle + \left\langle \int_S A_{1f} \left[ \vec{e}_2^{(i)} \left[ \vec{e}_{1f} \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n ds \right\rangle = \\
&= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \int_S \left\{ \sum_j \left( A_{1c}^{(j)} \langle (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_2^{(j)*}) \rangle \right) + A_{1f} \langle (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_{1f}) \rangle \right\} ds = \\
&= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{1c}^{(i)} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

При выводе данного соотношения пренебрегалось быстро осциллирующими членами, что позволило исключить из рассмотрения слагаемое с множителем  $e^{-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}}$ . Кроме того при раскрытии векторных произведений использовалось очевидное тождество :  $(\vec{k}_2 \vec{e}_2^{(i)}) = 0$ .

Второе слагаемое в правой части (3.9) , как нетрудно показать, удвоит данный результат. Таким образом в правой части (3.9) имеем

$$\int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_2^{(i)} \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_2^{(i)} \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\} = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_c^{(1)}.$$

Остается рассмотреть объемный интеграл в правой части (3.9). Для этого воспользуемся соотношением (3.7) для эквивалентных токов. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{4\pi}{c} \frac{i\omega}{4\pi} \int_0^z dz' \int_S ds_{\Delta\epsilon} \left( \vec{E}_1 \vec{e}_2^{(i)} \right) e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\rangle = \\
&= \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1s} dz' \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)} \right) ds \right\rangle = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{1c}^{(i)}.
\end{aligned}$$

При проведении данных выкладок сохранялись только те члены, для которых  $e^{-i((\vec{k}+\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r})} = 1$ , согласно условию (3.8), а остальными членами с осциллирующими множителями пренебрегалось.

Обозначим

$$M^{(i)} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)}) ds \right\rangle, \quad (3.11)$$

тогда

$$A_{1c}^{(i)} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^z A_{1s} M^{(i)} dz'.$$

Дифференцируя по  $z$ , получим

$$\frac{\partial A_{1c}^{(i)}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M^{(i)}.$$

Во втором случае вспомогательное поле :  $\vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1 \vec{r})}$ . Запишем прежде всего лемму Лоренца (1.33) для этого случая:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_0^z dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1^*) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_1^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_1^* \vec{E}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

и опять же область интегрирования изображена на рис. 3.5. Первое слагаемое интеграла в правой части (3.12), учитывая усреднение по ансамблю, можно вычислить по аналогии с (3.10):

$$\begin{aligned} \left\langle \int_S \left[ \vec{H}_1 \vec{e}_1^* \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} ds \right\rangle &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\langle \int_S A_{1s} \left[ \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1 \right] \vec{e}_1^* \right]_n ds \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\langle \int_S \left( A_{1s} \left[ \vec{e}_1 \left[ \vec{e}_1^* \frac{\vec{k}_1}{k_1} \right] \right]_n \right) ds \right\rangle = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_1 A_{1s}. \end{aligned}$$

Учитывая, что второе слагаемое удвоит данный результат, для (3.12) можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c} \sum_i \int_0^z A_{1c}^{(i)} dz' \left\langle \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_1^* \vec{e}_2^{(i)*}) ds \right\rangle + \\ + \frac{i\omega}{c} \int_0^z A_{1f} dz' \left\langle \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) ds \right\rangle = -2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_1 A_{1s}. \end{aligned}$$

Обозначив через

$$M_{1f} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_1) ds \right\rangle, \quad (3.13)$$

окончательно, после дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial A_{1s}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{1f} M_{1f}^* + \sum_i A_{1c}^{(i)} M^{(i)*} \right\}.$$

Для нахождения третьей компоненты поля  $E_1$  выберем в качестве вспомогательного поля в (1.33) поле, свободно распространяющееся в направлении  $-\vec{k}_2$  без источников и имеющее распределение поля на  $S$  обращенное к  $\vec{e}_{1f} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ , т. е.  $\vec{e}_{1f}^* e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ . Действуя по аналогии с (2.11 - 2.13), можно записать:

$$\frac{\partial A_{1f}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M_{1f}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1s}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{1f} M_{1f}^* + \sum_i A_{1c}^{(i)} M^{(i)*} \right\}, \\ \frac{\partial A_{1c}^{(i)}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M^{(i)}, \\ \frac{\partial A_{1f}}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A_{1s} M_{1f}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.3.2. Поля падающие на кристалл справа

Рассмотрим теперь поле  $E_2$ . Опять же применим лемму Лоренца (1.33) для этого случая. Область интегрирования изображена на рис. 3.6.

В качестве эквивалентного тока выберем:

$$\vec{j}_{eq} = i\vec{E}_{2\Delta\varepsilon} \frac{\omega}{4\pi}, \quad (3.15)$$

где возмущение диэлектрической проницаемости  $\Delta\varepsilon$  определяется соотношением (3.6)

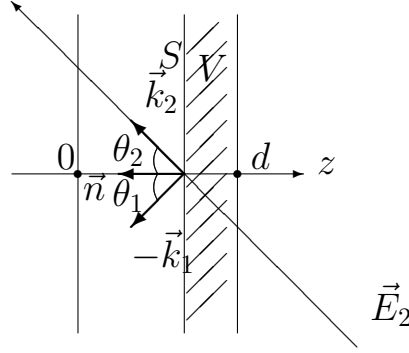


Рис. 3.6. Лемма Лоренца(волны падающие справа)

В качестве поля (a) в (1.33) примем поле  $\vec{E}_2$  в виде разложения (3.5) с источником  $\vec{j}_{eq}$  в виде (3.15), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно  $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ ,  $\vec{e}_d^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$ ,  $\vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$  и  $\vec{e}_{2f}^* e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$  -обращенные по отношению к искомым полям.

Например для нахождения соотношения, описывающего динамику развития амплитуды поля  $A_{2d}$ , примем в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_d^* e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  - поле имеющее распределение  $\vec{e}_d^*$  и направленное по  $-\vec{k}_2$ , т. е. против направления распространения рассеянного поля  $\vec{E}_{2d}$ . Лемма Лоренца при этом дает:

$$\frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_d^*) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} dv = \frac{4\pi}{c} \int_z^d dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_d^*) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_2 \vec{e}_d^* \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_d^* \vec{E}_2 \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\}. \quad (3.16)$$

Область интегрирования изображена на рис. 3.6.

Для нахождения интеграла в правой части (3.16), будем считать волны квазиплоскими и пользоваться соотношением (1.39).

Если воспользоваться условиями нормировки (3.2) и нулевого среднего для фенинга (3.3) при усреднении по ансамблю, то для усредненного

по ансамблю первого слагаемого во второй части (3.16) имеем:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_S [\vec{H}_2 \vec{e}_d^*]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} ds \right\rangle &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_i \int_S A_{2s}^{(i)} \left\langle \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_2^{(i)} \right] \vec{e}_d^* \right]_n \right\rangle ds + \\
&+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{2c} \left\langle \left[ \left[ \frac{\vec{k}_1}{k_1} \vec{e}_1^* \right] \vec{e}_d^* \right]_n \right\rangle e^{i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}} ds + \\
&+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{2d} \left\langle \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_d \right] \vec{e}_d^* \right]_n \right\rangle ds + \\
&+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S A_{2f} \left\langle \left[ \left[ \frac{\vec{k}_2}{k_2} \vec{e}_{2f} \right] \vec{e}_d^* \right]_n \right\rangle e^{i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}} ds = \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_i A_{2s}^{(i)} \left\langle \int_S \left[ \vec{e}_d^* \left[ \vec{e}_2^{(i)*} \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n ds \right\rangle + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2d} \left\langle \int_S \left[ \vec{e}_d^* \left[ \vec{e}_d \frac{\vec{k}_2}{k_2} \right] \right]_n ds \right\rangle = \\
&= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 \left\{ A_{2s}^{(i)} \left\langle \int_S (\vec{e}_d^* \vec{e}_2^{(i)*}) ds \right\rangle + A_{2d} \left\langle \int_S (\vec{e}_d^* \vec{e}_d) ds \right\rangle \right\} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta_2 A_{2d}.
\end{aligned}$$

При выводе данного соотношения пренебрегалось быстро осциллирующими членами, что позволило исключить из рассмотрения слагаемое с множителем  $e^{i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \vec{r}}$ . Кроме того при раскрытии векторных произведений использовалось очевидное тождество :  $(\vec{k}_2 \vec{e}_2) = 0$ .

Второе слагаемое в правой части (3.16) удвоит данный результат и таким образом в правой части (3.16) имеем

$$\int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_2 \vec{e}_d^* \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_d^* \vec{E}_2 \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\} = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2d}.$$

Остается рассмотреть объемный интеграл в правой части (3.16). Для этого воспользуемся соотношением (3.15) для эквивалентных токов. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi i\omega}{c} \frac{1}{4\pi} \int_z^d dz' \left\langle \int_S ds_{\Delta} \varepsilon \left( \vec{E}_2 \vec{e}_d^* \right) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\rangle = \\
&= \frac{i\omega}{c} \int_z^d \left\{ A_{2c} \left\langle \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_1^* \vec{e}_d^*) ds \right\rangle + A_{2f} \left\langle \int_S \varepsilon_m (\vec{e}_{2f} \vec{e}_d^*) ds \right\rangle \right\} dz' =
\end{aligned}$$

$$= -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2d}.$$

При проведении данных выкладок сохранялись только те члены, для которых

$$e^{i((\vec{k} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r})} = 1,$$

согласно условию (3.8), а остальными членами с осциллирующими множителями пренебрегалось.

Дифференцируя правую часть данного соотношения по  $z$  несложно окончательно получить:

$$\frac{\partial A_{2d}}{\partial z} = \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \{A_{2c} M_d^* + A_{2f} M_{fd}^*\}.$$

Здесь через  $M_d$  обозначено

$$M_d = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_d) ds \right\rangle, \quad (3.17)$$

а через  $M_{fd}$

$$M_{fd} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{2f}^* \vec{e}_d) ds \right\rangle, \quad (3.18)$$

Для нахождения амплитуды поля  $i$ -ой моды резонатора  $\vec{E}_{2s}^{(i)}$  будем использовать в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_2^{(i)*} e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})}$  - поле имеющее распределение обращенное к  $i$ -ой моде резонатора:  $\vec{e}_2^{(i)*}$  и направленное по  $-\vec{k}_2$ , т. е. против направления распространения моды. Действуя по аналогии с вышеизложенным запишем лемму Лоренца для этого случая

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2^{(i)*}) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_z^d dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_2^{(i)*}) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_2 \vec{e}_2^{(i)*} \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} - \left[ \vec{h}_2^{(i)*} \vec{E}_2 \right]_n e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$



Усредняя (3.19) по ансамблю и воспользовавшись соотношением (3.15) для эквивалентных токов имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \frac{i\omega}{4\pi} \int_z^d dz' \left\langle \int_S ds_{\Delta} \varepsilon \left( \vec{E}_2 \vec{e}_2^{(i)*} \right) e^{i(\vec{k}_2 \vec{r})} \right\rangle = \\ & = \frac{i\omega}{c} \int_z^d \left\{ A_{2c} \left\langle \int_S \varepsilon_m \left( \vec{e}_1^* \vec{e}_2^{(i)*} \right) ds \right\rangle + A_{2f} \left\langle \int_S \varepsilon_m \left( \vec{e}_{2f} \vec{e}_2^{(i)*} \right) ds \right\rangle \right\} dz' = \\ & = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2s}^{(i)}. \end{aligned}$$

При этом было учтено соотношение (3.2), в частности условие нормировки мод резонатора.

Введя следующее обозначение:

$$M_{2f}^{(i)} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_{2f}^* \vec{e}_2^{(i)} \right) ds \right\rangle, \quad (3.20)$$

можно окончательно записать:

$$\frac{\partial A_{2s}^{(i)}}{\partial z} = \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2c} M^{(i)*} + A_{2f} M_{2f}^{(i)*} \right\}.$$

Для нахождения амплитуды поля обращенной волны  $\vec{E}_{2c}$ , используем в качестве вспомогательного поля  $\vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$ . Лемма Лоренца при этом дает:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} dv &= \frac{4\pi}{c} \int_z^d dz' \int_S ds (\vec{j}_{eq} \vec{e}_1) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} = \\ &= \int_S ds \left\{ \left[ \vec{H}_2 \vec{e}_1 \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} - \left[ \vec{e}_1 \vec{E}_2 \right]_n e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Область интегрирования изображена на рис. 3.6. Действуя по аналогии с изложенным выше, усредняя выражение (3.21), несложно получить:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \frac{i\omega}{4\pi} \int_z^d dz' \left\langle \int_S ds_{\Delta} \varepsilon \left( \vec{E}_2 \vec{e}_1 \right) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\rangle = \\ & = \frac{i\omega}{c} \sum_i \int_z^d A_{2s}^{(i)} dz' \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)} \right) ds \right\rangle + \frac{i\omega}{c} \int_z^d A_{2d} dz' \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_1 \vec{e}_d \right) ds \right\rangle = \\ & = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2c}, \end{aligned}$$

или же после дифференцирования -

$$\frac{\partial A_{2c}}{\partial z} = \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2d} M_d + \sum_i A_{2s}^{(i)} M^{(i)} \right\},$$

По аналогии с изложенным выше можно получить соотношение для амплитуды фенинга.

В качестве вспомогательного поля примем  $\vec{e}_{2f}^* e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})}$ . Усредняя по ансамблю выражение для леммы Лоренца, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \frac{i\omega}{4\pi} \int_z^d dz' \left\langle \int_S ds \Delta \varepsilon \left( \vec{E}_2 \vec{e}_{2f}^* \right) e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} \right\rangle = \\ & = \frac{i\omega}{c} \left\{ \sum_i \int_z^d A_{2s}^{(i)} \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_{2f}^* \vec{e}_2^{(i)} \right) ds \right\rangle dz' + \int_z^d A_{2d} \left\langle \int_S \varepsilon_m^* \left( \vec{e}_{2f}^* \vec{e}_d \right) ds \right\rangle dz' \right\} = \\ & = -2 \cos \theta_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_{2f}, \end{aligned}$$

или же после дифференцирования -

$$\frac{\partial A_{2f}}{\partial z} = \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2d} M_{fd} + \sum_i A_{2s}^{(i)} M_{2f}^{(i)} \right\},$$

Таким образом окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{2c}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2d} M_d + \sum_i A_{2s}^{(i)} M^{(i)} \right\}, \\ \frac{\partial A_{2s}^{(i)}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2c} M^{(i)*} + A_{2f} M_{2f}^{(i)*} \right\}, \\ \frac{\partial A_{2d}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2c} M_d^* + A_{2f} M_{fd}^* \right\}, \\ \frac{\partial A_{2f}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{2c \cos \theta_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left\{ A_{2d} M_{fd} + \sum_i A_{2s}^{(i)} M_{2f}^{(i)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Смена знака в этих выражениях связана с тем что волна  $E_2$  распространяется в сторону противоположную распространению  $E_1$

### 3.3.3. Вывод уравнений для среды

По аналогии с выводом уравнений среды для двойного некогерентного отражающего зеркала будем исходить из общего уравнения (2.19)

Опять же - сохраним в правой части (2.19) только члены зависящие от  $r$  по закону  $e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}}$ , учтя что,  $\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}=0$ . В результате для правой части (2.19) получим:

$$\begin{aligned} & (\vec{E}_1\vec{E}_1^*) + (\vec{E}_2\vec{E}_2^*) = \\ & = \left( \sum_i \left\{ A_{1s}A_{1c}^{(i)*} (\vec{e}_1\vec{e}_2^{(i)}) \right\} + A_{1s}A_{1f}^* (\vec{e}_1\vec{e}_{1f}^*) \right) e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}} + \\ & \quad + \left( \sum_i \left\{ A_{2s}^{(i)}A_{2c}^* (\vec{e}_2\vec{e}_1) \right\} + A_{2d}A_{2c}^* (\vec{e}_d\vec{e}_1) \right) e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}} + \\ & \quad + \left( \sum_i \left\{ A_{2s}^{(i)}A_{2f}^* (\vec{e}_2^{(i)}\vec{e}_{2f}^*) \right\} + A_{2d}A_{2f}^* (\vec{e}_d\vec{e}_{2f}^*) \right) e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\vec{r}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в пренебрежении быстро осциллирующими членами имеем следующее уравнение для  $\varepsilon_m$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 - i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) \varepsilon_m = \\ & -i\Gamma \sum_i \frac{A_{1s}A_{1c}^{(i)*} + A_{2s}^{(i)}A_{2c}^*}{I_0} (\vec{e}_1\vec{e}_2^{(i)*}) - \\ & -i\Gamma \frac{A_{1s}A_{1f}^*}{I_0} (\vec{e}_1\vec{e}_{1f}^*) - \Gamma \sum_i \frac{A_{2s}^{(i)}A_{2f}^*}{I_0} (\vec{e}_2^{(i)}\vec{e}_{2f}^*) - \\ & -i\Gamma \frac{A_{2d}A_{2c}^*}{I_0} (\vec{e}_d\vec{e}_1) - i\Gamma \frac{A_{2d}A_{2f}^*}{I_0} (\vec{e}_d\vec{e}_{2f}^*) - i\Gamma m_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

С другой стороны нам удобно иметь в дальнейшем дело с уравнением для  $\varepsilon_m^*$ . Объединяя (3.23), (3.11), (3.13), (3.20), (3.17) и (3.18) окончательно имеем

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) \varepsilon_m^* =$$

$$\begin{aligned}
& +i\Gamma \sum_i \frac{A_{1s}^* A_{1c}^{(i)} + A_{2s}^{(i)*} A_{2c}}{I_0} (\vec{e}_1^* \vec{e}_2^{(i)}) + \\
& +i\Gamma \frac{A_{1s}^* A_{1f}}{I_0} (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) + \Gamma \sum_i \frac{A_{2s}^{(i)*} A_{2f}}{I_0} (\vec{e}_2^{(i)*} \vec{e}_{2f}) + \\
& +i\Gamma \frac{A_{2d}^* A_{2c}}{I_0} (\vec{e}_d^* \vec{e}_1^*) + i\Gamma \frac{A_{2d}^* A_{2f}}{I_0} (\vec{e}_d^* \vec{e}_{2f}) + i\Gamma m_0^*, \\
& M^{(i)} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)}) ds \right\rangle, \\
& M_{1f} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{1f}^* \vec{e}_1) ds \right\rangle, \\
& M_{2f}^{(i)} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{2f}^* \vec{e}_2^{(i)}) ds \right\rangle, \\
& M_d = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_1 \vec{e}_d) ds \right\rangle, \\
& M_{fd} = \left\langle \int_S \varepsilon_m^* (\vec{e}_{2f}^* \vec{e}_d) ds \right\rangle. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Если уравнение (3.24) домножить на  $\vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)}$ , проинтегрировать по  $S$  и усреднить по ансамблю (при этом исчезнут интегралы в которые входит  $\vec{e}_f$ , т. к.  $\langle \vec{e}_f \rangle = 0$ ), то придем к уравнению для величины  $M^{(i)}$ , которая входит в систему уравнений (3.14, 3.22):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M^{(i)} = i\Gamma B^{(i)} \frac{A_{1s}^* A_{1c}^{(i)} + A_{2s}^{(i)*} A_{2c}}{I_0} + \frac{M_0^{(i)}}{\tau_{eff}},$$

где введены следующие обозначения:

$$B^{(i)} = \int_S (\vec{e}_1^* \vec{e}_2^{(i)*}) (\vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)}) ds.$$

и

$$M_0^{(i)} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_2^{(i)}) m_0^* ds$$

Здесь  $B^{(i)}$  - величина, определяемая известными распределениями полей, а  $M_0^{(i)}$  - определяет начальную затравку.

Чтобы вывести уравнение для  $M_{1f}$  нужно домножить уравнение (3.24) на  $(\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*)$  и усреднить по ансамблю. При этом следует учитывать,

что  $\vec{e}_{1f}$  зависит от  $t$  и от  $z$ . При усреднении по ансамблю можно считать, что  $\langle \vec{\varepsilon}_m^* \left( \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_{1f}^*}{\partial t} \right) \rangle = 0$  и что  $\vec{e}_{1f}$  и  $\vec{e}_{2f}$  не коррелируют, что эквивалентно пренебрежению обращенным фенингом, тогда  $\langle \int_S (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_{2f}^*) (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) ds \rangle = 0$ , и в результате имеем:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f} = i\Gamma C_1 \frac{A_{1s}^* A_{1f}}{I_0} + \frac{M_{1f_0}}{\tau_{eff}},$$

где

$$C_1 = \left\langle \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) (\vec{e}_1^* \vec{e}_{1f}) ds \right\rangle.$$

$C_1$  зависит от времени и координаты, но так как выполняются условия нормировки (3.2), то эта зависимость не очень сильная. При расчетах мы будем считать эту величину постоянной. Кроме того для начальной затравки имеем

$$M_{1f_0} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_{1f}^*) m_0^* ds.$$

Аналогичным образом можно получить уравнение для  $M_{2f}^{(i)}$ . Для этого домножим уравнение (3.24) на  $(\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_{2f}^*)$  и усредним полученное по ансамблю. В результате получим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f}^{(i)} = i\Gamma C_2^{(i)} \frac{A_{2s}^{(i)*} A_{2f}}{I_0} + \frac{M_{2f_0}^{(i)}}{\tau_{eff}},$$

где коэффициент перекрытия  $C_2^{(i)}$  определяется следующим выражением

$$C_2^{(i)} = \left\langle \int_S (\vec{e}_2^{(i)*} \vec{e}_{2f}) (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_{2f}^*) ds \right\rangle,$$

а начальная затравка -

$$M_{2f_0}^{(i)} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_2^{(i)} \vec{e}_{2f}^*) m_0^* ds.$$

Чтобы вывести уравнение для  $M_d$ , нужно домножить уравнение (3.24) на  $(\vec{e}_1 \vec{e}_d)$  и усреднить по ансамблю. При этом следует учитывать, что  $\vec{e}_d$

зависит от  $t$ . При усреднении по ансамблю можно считать, что

$$\left\langle \bar{\varepsilon}_m^* \left( \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_d}{\partial t} \right) \right\rangle = 0,$$

так что в результате имеем:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_d = i\Gamma C_d \frac{A_{2c} A_{2d}^*}{I_0} + \frac{M_{d_0}}{\tau_{eff}},$$

где

$$C_d = \left\langle \int_S (\bar{e}_1^* \vec{e}_d^*) (\vec{e}_1 \vec{e}_d) ds \right\rangle$$

и

$$M_{d_0} = i\alpha E_D \int_S (\vec{e}_1 \vec{e}_d) m_0^* ds.$$

Здесь  $C_d$  зависит от времени, но так как выполняются условия нормировки (3.2), то эта зависимость не очень сильная. При расчетах мы будем считать эту величину постоянной.

И, наконец, для того чтобы получить уравнение для  $M_{fd}$  - домножим уравнение (3.24) на  $(\bar{e}_{2f}^* \vec{e}_d)$  и усреднить по ансамблю. При этом опять же следует учитывать, что  $\vec{e}_d$  и  $\vec{e}_{2f}$  зависят от  $t$ . При усреднении по ансамблю можно считать, что  $\left\langle \bar{\varepsilon}_m^* \left( \vec{f}_f^{(2)*} \frac{\partial \vec{e}_d}{\partial t} \right) \right\rangle = 0$  и  $\left\langle \bar{\varepsilon}_m^* \left( \frac{\partial \vec{f}_f^{(2)*}}{\partial t} \vec{e}_d \right) \right\rangle = 0$  так что в результате имеем:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{fd} = i\Gamma C_{fd} \frac{A_{2f} A_{2d}^*}{I_0} + \frac{M_{fd_0}}{\tau_{eff}},$$

где

$$C_{fd} = \left\langle \int_S (\vec{e}_{2f} \vec{e}_d^*) (\bar{e}_{2f}^* \vec{e}_d) ds \right\rangle$$

и

$$M_{fd_0} = i\alpha E_D \int_S (\bar{e}_{2f}^* \vec{e}_d) m_0^* ds.$$

### 3.3.4. Окончательный вид уравнений

Окончательный вид уравнений для полулинейного генератора выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M^{(i)} &= i\Gamma B^{(i)} \frac{A_{1s}^* A_{1c}^{(i)} + A_{2s}^{(i)*} A_{2c}}{I_0} + \frac{M_0^{(i)}}{\tau_{eff}}, \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{1f} &= i\Gamma C_1 \frac{A_{1s}^* A_{1f}}{I_0} + \frac{M_{1f_0}}{\tau_{eff}}, \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{2f}^{(i)} &= i\Gamma C_2^{(i)} \frac{A_{2s}^{(i)*} A_{2f}}{I_0} + \frac{M_{2f_0}^{(i)}}{\tau_{eff}}, \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_d &= i\Gamma C_d \frac{A_{2c} A_{2d}^*}{I_0} + \frac{M_{d_0}}{\tau_{eff}}, \\
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{eff}} \left( 1 + i \frac{E_D}{E_q} \right) \right) M_{fd} &= i\Gamma C_{fd} \frac{A_{2f} A_{2d}^*}{I_0} + \frac{M_{fd_0}}{\tau_{eff}}. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

где коэффициенты перекрытия удовлетворяют следующим соотношениям

$$B = \text{const}|_t < 1, C_1 = \text{const}|_t < 1, C_2^{(i)} = \text{const}|_t < 1,$$

$$C_d = \text{const}|_t < 1, C_{fd} = \text{const}|_t < 1,$$

а

$$M_0^{(i)} = \text{const}|_t, M_{1f_0} = \text{const}|_t, M_{2f_0}^{(i)} = \text{const}|_t,$$

$$M_{d_0} = \text{const}|_t, M_{fd_0} = \text{const}|_t,$$

представляют собой постоянные во времени затравочные решетки.

Для полей падающих на кристалл слева:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{1s}}{\partial z} &= -iD \left\{ A_{1f} M_{1f}^* + \sum_i A_{1c}^{(i)} M^{(i)*} \right\}, \\
\frac{\partial A_{1c}^{(i)}}{\partial z} &= -iD A_{1s} M^{(i)}, \\
\frac{\partial A_{1f}}{\partial z} &= -iD A_{1s} M_{1f}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Для полей падающих на кристалл справа (поле в резонаторе)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{2c}}{\partial z} &= iD \left\{ A_{2d} M_d + \sum_i A_{2s}^{(i)} M^{(i)} \right\}, \\
\frac{\partial A_{2s}^{(i)}}{\partial z} &= iD \left\{ A_{2c} M^{(i)*} + A_{2f} M_{2f}^{(i)*} \right\}, \\
\frac{\partial A_{2d}}{\partial z} &= iD \left\{ A_{2c} M_d^* + A_{2f} M_{fd}^* \right\}, \\
\frac{\partial A_{2f}}{\partial z} &= iD \left\{ A_{2d} M_{fd} + \sum_i A_{2s}^{(i)} M_{2f}^{(i)} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

В (3.26, 3.27) по аналогии с (2.31, 2.32) в целях удобства полагалось, что  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , так что  $D = \frac{\omega}{c} \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ .

Особые слова следует сказать о граничных условиях. Для полей, падающих на кристалл слева:

$$\begin{aligned}
A_{1s}|_{z=0} &= A_{1s_0}, \\
A_{1c}^{(i)}|_{z=0} &= 0, \\
A_{1f}|_{z=0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Справа картина несколько иная:

$$\begin{aligned}
A_{2s}^{(i)}|_{z=d} &= r A_{1c}^{(i)}|_{z=d}, \\
A_{2c}|_{z=d} &= 0, \\
A_{2d}|_{z=d} &= r A_{1f}|_{z=d}, \\
A_{2f}|_{z=d} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

где  $r$  - коэффициент отражения от зеркала. Очевидно что для  $r$  справедлива следующая оценка

$$r < 1.$$

Кроме потерь при отражении от зеркала, которые обычно составляют величину порядка  $1 \div 10\%$ , мы запишем в  $r$  и другие потери, как то потери в



самом резонаторе, потери при отражении части светового пучка от граней кристалла и т. п. С учетом данных предположений представляется возможным использовать для  $r$  следующую оценку  $r \approx 0.1$ .

### 3.4. Численные расчеты модели полулинейного генератора

Действуя по аналогии с расчетами ДНОЗ, будем полагать, что все интенсивности световых пучков входящие в систему уравнений (3.25, 3.26, 3.27) отнормированы на величину интенсивности падающего слева на кристалл лазерного пучка. Таким образом мы положим в дальнейшем для  $A_{1s_0}$  из граничных условий (3.29)

$$|A_{1s_0}|^2 = 1.$$

Оценки основных параметров кристалла  $\Gamma$ ,  $E_D$ ,  $E_q$ ,  $\tau_{eff}$  и  $D$  оставим прежними.

Экспериментальные исследования говорят о том что работа схемы полулинейного генератора отличается крайней неустойчивостью. В, частности, в стационарном режиме генерации наблюдаются устойчивые периодические колебания интенсивности обращенной волны. Вместе с тем, теоретическое исследование (численный расчет) данной схемы представляет собой довольно трудную задачу. Прежде всего это связано с большим количеством параметров системы уравнений, описывающей работу полулинейного генератора. При этом зависимость динамики генерации обращенной волны от данных параметров носит очень сложный характер. При некоторых значениях параметров в обращенную волны переходит вся энергия волны накачки. Рассмотрение подобных случаев представляется нам физи-

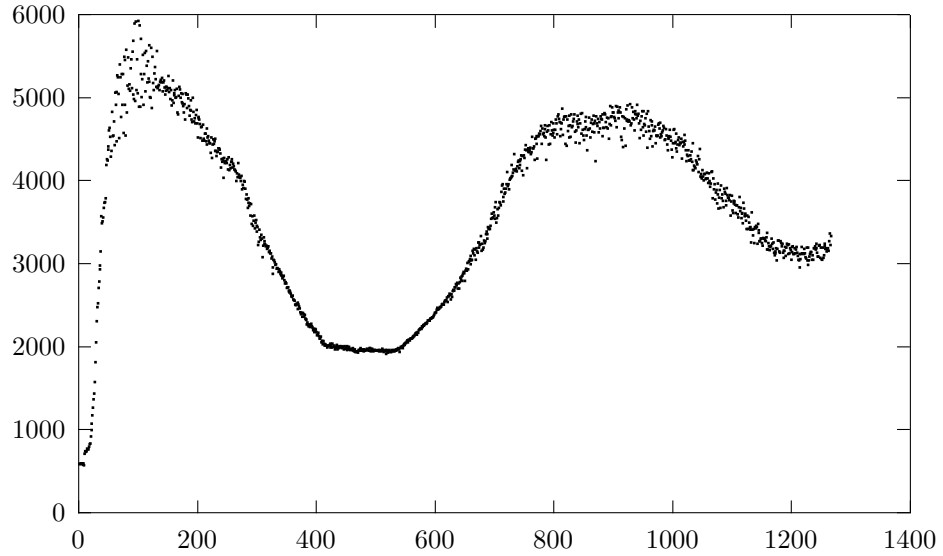


Рис. 3.7. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полулинейного генератора. Зависимость интенсивности обращенной волны от времени (шаг по времени - 0.1 с.). Экспериментальные данные.

чески необоснованным. Поэтому при расчетах мы выбрали то множество параметров системы, результаты расчета при которых наиболее соответствуют экспериментально наблюдаемым кривым роста обращенной волны в схеме полулинейного генератора (см. рис 3.7).

Прежде всего мы ограничились в наших расчетах случаем когда затравки для решеток рассеянная волна — фенинг и рассеянная волна — обращенная волна малы, так что:

$$M_{d_0} \approx M_{fd_0} \sim 1.0 \cdot 10^{-8} \div 1.0 \cdot 10^{-9}.$$

При больших затравках  $M_{d_0}$  оказалось, что большая часть сильного фенинга идущего слева  $E_{1f}$  (то что после отражения от зеркала становится рассеянным светом  $E_d$ ) переходит в обращенную волну  $E_{2c}$ . Это приводит к быстрому росту решеток  $M_0^{(i)}$  и, как результат, полной перекачке энергии исходного лазерного пучка  $E_{1s_0}$  в обращенную волну  $E_{2c}$ . При больших на-

чальных затравках  $M_{fd_0}$  происходит перекачка энергии в фенинг  $E_{2f}^{(i)}$  энергия которого, в дальнейшем при дифракции на решетках  $M_{2f}^{(i)}$  переходит в моды резонатора  $E_{2s}^{(i)}$  что опять же приводит к быстрому росту решеток  $M_0^{(i)}$ .

Для различных мод будут выбираться различные затравки  $M_0^{(i)}$  и различные коэффициенты перекрытия  $B^{(i)}$ . Мы будем рассматривать, в основном, случай двух мод резонатора. При этом будем предполагать что первая мода выделена по коэффициенту перекрытия, а вторая по затравке:

$$B^{(0)} = 1.0, B^{(1)} = 0.8,$$

$$M_0^{(0)} = 2.0 \cdot 10^{-9}, M_0^{(1)} = 1.0 \cdot 10^{-6}.$$

Для затравок фенинга мы выберем значения в пределах

$$M_{1f} \approx M_{2f}^{(i)} \sim 1.0 \cdot 10^{-5} \div 3.0 \cdot 10^{-5}.$$

Кроме того для коэффициента отражения  $r$  будут выбираться значения  $r \approx 0.1$ .

Кривая роста обращенной волны представлена на рис. 3.8 Для сравнения с экспериментально наблюдаемой картиной мы выбрали на рис. 3.8 участок между  $55 \div 100\tau_{eff}$  см. рис. 3.9 Как видно, качественным образом эта картина совпадает с экспериментально наблюдаемой картиной (см. рис. 3.7).

Прежде всего интересно выяснить как данная картина меняется с изменением коэффициента  $\Gamma$ . Соответствующее семейство кривых представлено на рис. 3.10. Как видно, выходу на стационарный режим предшествует некоторый установившийся режим, “площадка”, длительность которой увеличивается с уменьшением коэффициента нелинейной связи  $\Gamma$ . При этом

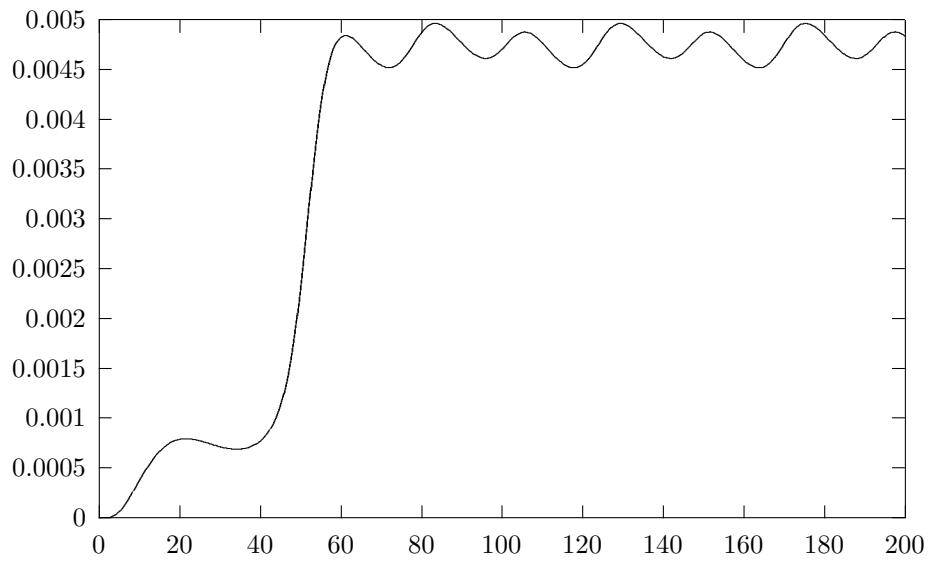


Рис. 3.8. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора.

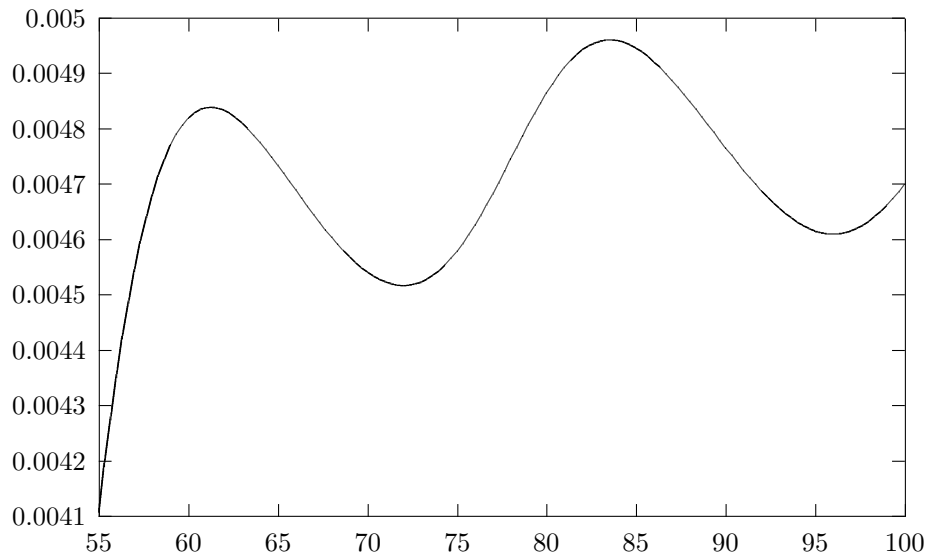


Рис. 3.9. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Детальный участок  $55 \div 100\tau_{eff}$ . Полная картина изображена на рис. 3.8

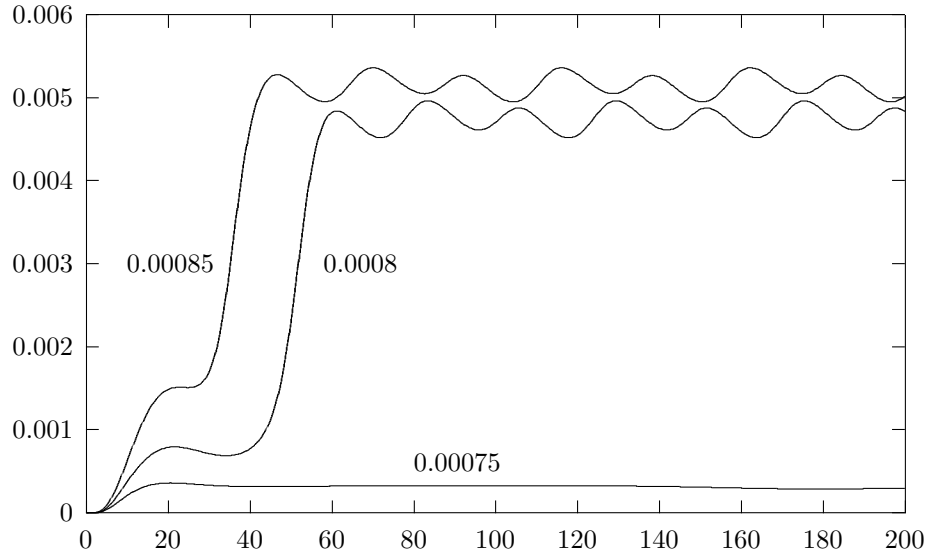


Рис. 3.10. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полуперейного генератора. Цифрами обозначены значения  $\Gamma$  для разных кривых семейства. Случай с  $\Gamma = 0.0008$  изображен на рис. 3.8

при малых  $\Gamma$ , нижняя кривая на рис. 3.10 выхода на стационарный режим не происходит, мало того заметно уменьшение интенсивности обращенной волны с ростом времени при  $t > 150 \cdot \tau_{eff}$ . При этом интерес представляет случай когда длительность “площадки” велика. Для этого посмотрим динамику роста обращенной волны при  $\Gamma = 0.00077$  (см. рис. 3.11).

Выяснить причину возникновения “площадки” можно посмотрев динамику изменения мод резонатора в этом случае (см. рис. 3.12). Откуда видно, что площадка соответствует установившемуся режиму второй моды (номер - 1), которая имеет большую затравку  $M_0^{(1)} = 1.0 \cdot 10^{-6}$ , но меньший коэффициент перекрытия  $B^{(1)} = 0.8$ . Т. е. данная мода быстро растёт, но ее уровень в стационарном режиме, за счет меньшего коэффициента перекрытия, мал.

Данная картина наблюдается и при проведении экспериментов с полу-

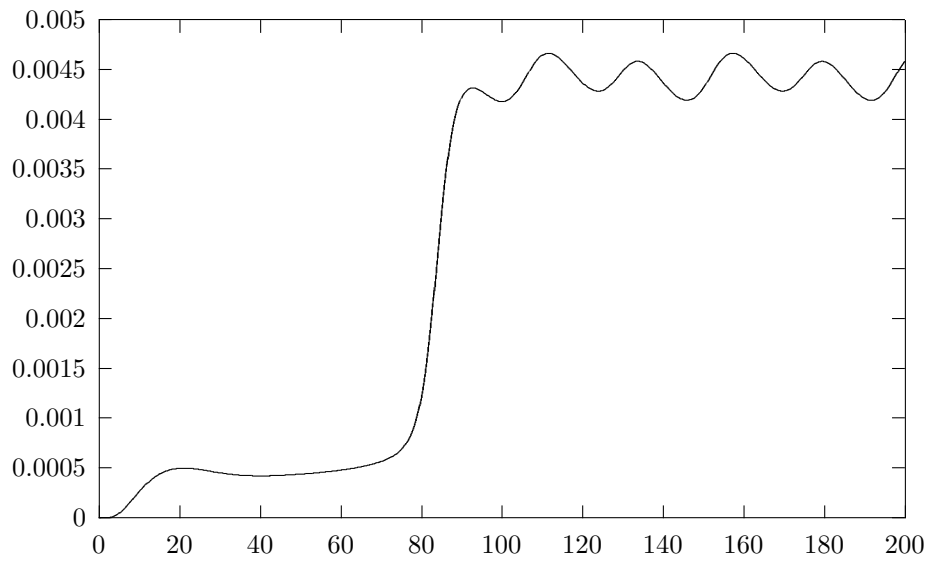


Рис. 3.11. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Случай малого коэффициента  $\Gamma = 0.00077$ .

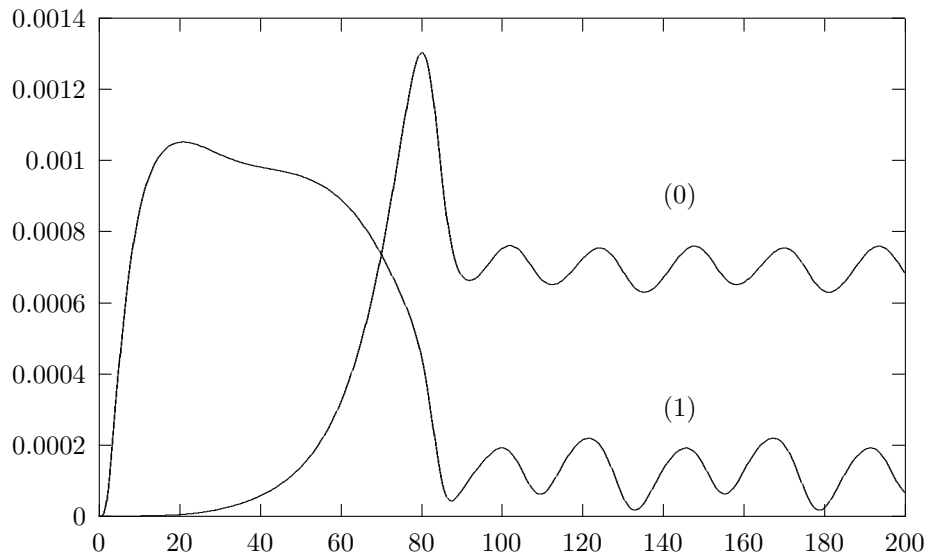


Рис. 3.12. Зависимость интенсивности мод резонатора на выходе из кристалла от времени. Цифрами обозначены номера мод. Случай малого коэффициента  $\Gamma = 0.00077$ .

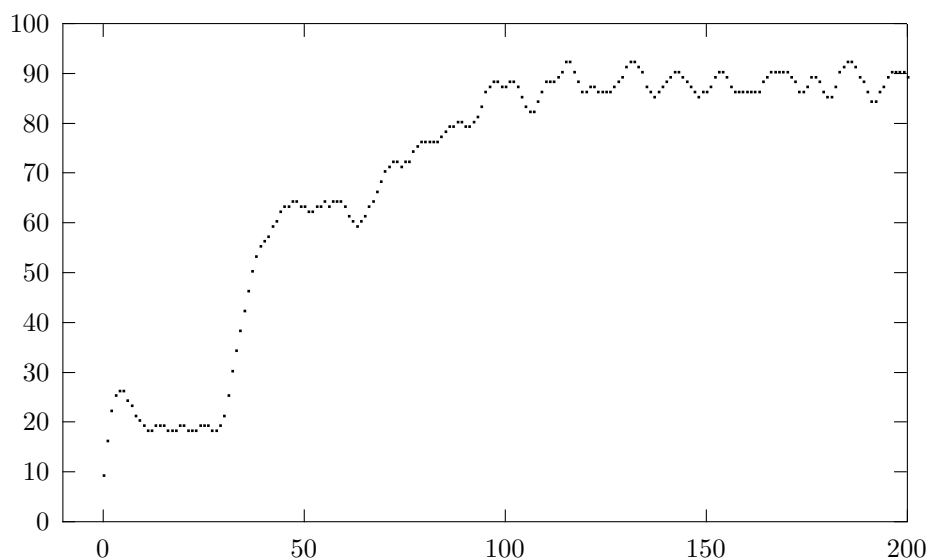


Рис. 3.13. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Зависимость интенсивности обращенной волны от времени (шаг по времени - 0.1 сек.). Экспериментальные данные. Присутствует “площадка” в начальный момент генерации обращенной волны.

линейным генератором (см. рис. 3.13, 3.14 и 3.15). При этом возможны различные варианты: одна “площадка” перед установившимся режимом (см. рис. 3.14), две “площадки” (см. рис. 3.13). Кроме того возможны осциллирующие колебания как в установившемся режиме, так и на “площадке” (см. рис. 3.15).

Интерес представляет также зависимость динамики генерации обращенной волны от величины начальной затравки  $M_0^{(i)}$ . Соответствующее семейство изображено на рис. 3.16. Затравки изменялись в два раза по сравнению со случаем изображенным на рис. 3.8. Нижняя кривая рис. 3.16 соответствует уменьшенной в два раза затравке. Затравка уменьшалась в два раза и для  $M_0^{(0)}$ , и для  $M_0^{(1)}$ . Таким образом видно, что в общем случае стационарный уровень зависит от величины начальной затравки.

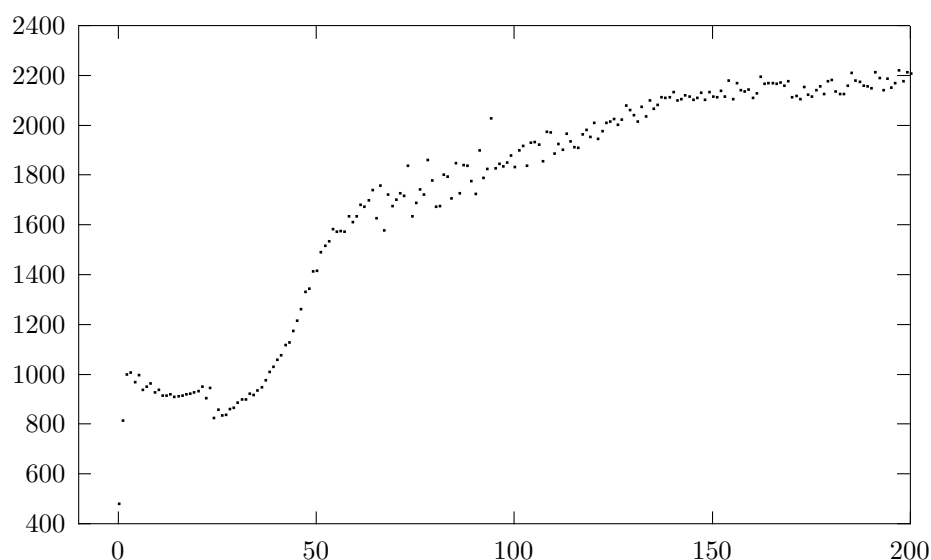


Рис. 3.14. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Зависимость интенсивности обращенной волны от времени (шаг по времени - 0.1 сек.). Экспериментальные данные. Присутствует “площадка” в начальный момент генерации обращенной волны.

Особый интерес представляет случай когда в резонаторе выделена только одна мода, и как при этом изменится динамика роста обращенной волны. Если оставить одну моду при тех же параметрах системы что брались для случая двух мод, то стационарный уровень обращенной волны будет слишком мал. Для получения более приближенных к реальности данных приходится увеличивать коэффициент  $\Gamma$ . На рис. 3.17 представлена кривая роста обращенной волны для случая одной моды и  $\Gamma = 0.0016$  (увеличен в два раза). Параметры моды  $B^{(0)}$  и  $M_0^{(0)}$  оставлены прежними, а мода (1) исключена из рассмотрения. Как видно в данном случае отсутствуют периодические колебания в установившемся режиме, а также “площадка”, предшествующая стационарному режиму.



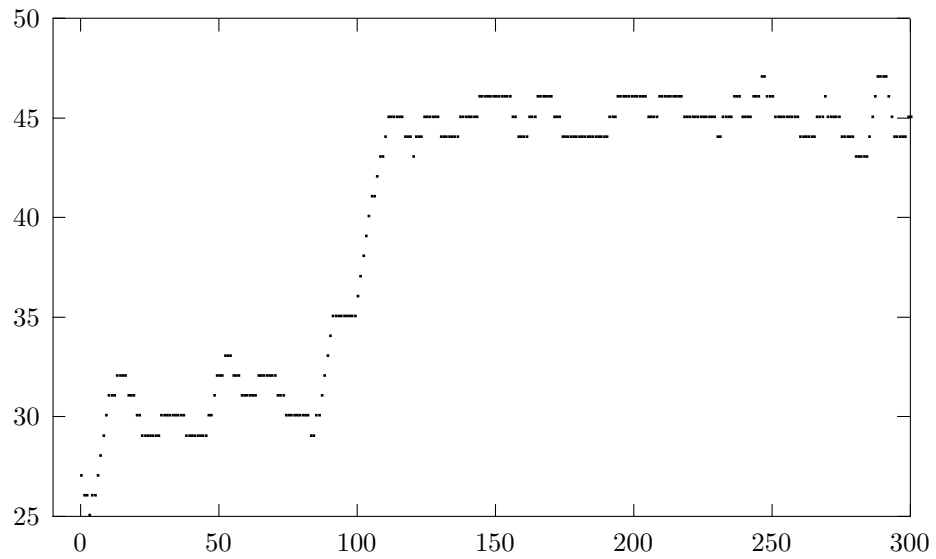


Рис. 3.15. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Зависимость интенсивности обращенной волны от времени (шаг по времени - 0.1 сек.). Экспериментальные данные. Присутствует “площадка” в начальный момент генерации обращенной волны. Осциллирующие колебания присутствуют как на “площадке”, так и в установившемся режиме.

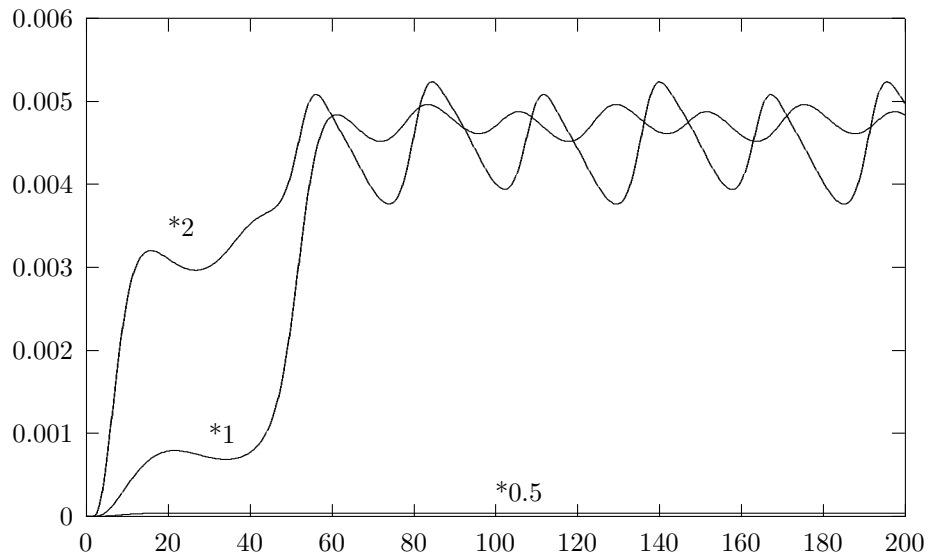


Рис. 3.16. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Цифрами обозначено во сколько раз изменялись затравки  $M_0^{(i)}$ . Случай с  $\cdot 1$  изображен на рис. 3.8

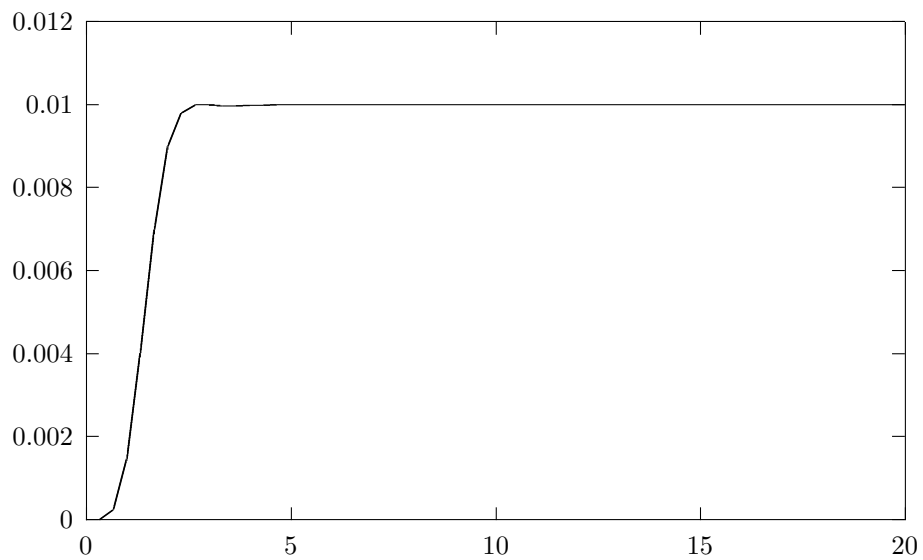


Рис. 3.17. Динамика развития генерации обращенной волны в схеме полупроводникового генератора. Случай одной моды. Коэффициент  $\Gamma$  увеличен в два раза по сравнению с рис. 3.8

## Заключение и выводы

В представленной работе построена общая модель самодифракции света в ФРК с учетом влияния фенинга. При этом дифрагирующие лазерные пучки представляются не плоскими волнами, а в более общем случае - световыми пучками со сложным распределением по угловым координатам. Данная физическая модель является наиболее близкой к действительности. На базе этой модели исследованы процессы записи голографических решеток в схеме двойного-некогерентного обращающего зеркала и схеме полулинейного генератора с большим числом поперечных мод. В схеме двойного некогерентного обращающего зеркала впервые проведены расчеты записи голографических решеток в предположении сложного характера примесей ФРК. Соответствие расчетных данных экспериментальным, позволяет сделать вывод об адекватности предложенной теоретической модели самодифракции света в ФРК.

К основным результатам работы относятся следующие:

1. Построена общая модель самодифракции света в ФРК с учетом влияния фенинга.
2. Составлены программы для расчета ДНОЗ и полулинейного генератора на базе ФРК.
3. Продемонстрировано применение данных программ для расчета временных характеристик в экспериментах на запись-стирание гологра-

фических решеток в ДНОЗ.

4. Расчеты, проведенные в рамках данной работы показали хорошее совпадение с экспериментальными данными. Расчеты позволили объяснить некоторые особенности динамики генерации обращенной волны, экспериментально наблюдаемые в ДНОЗ и полулинейном генераторе, как то осцилляции интенсивности обращенной волны в установившемся режиме ДНОЗ и полулинейного генератора, “площадка” предшествующая стационарному режиму генерации обращенной волны в схеме полулинейного генератора и т. п.
5. Показано, что модель ФРК с числом примесей больше 1 хорошо описывает экспериментально наблюдаемые процессы записи-стирания решеток в ФРК.
6. Исследована генерация в схеме полулинейного генератора с большим числом поперечных мод.
7. Показано, что экспериментально наблюдаемая “площадка”, предшествующая стационарному режиму генерации в схеме полулинейного генератора, соответствует установившемуся режиму слабо выделенной моды в случае, когда в резонаторе полулинейного генератора присутствует несколько мод.

Результаты данной работы могут быть использованы для построения оптических схем с использованием ФРК. Прежде всего это следует отнести к полученным результатам по записи — стиранию голографических решеток в ФРК. Показано, что можно различать записанные в ФРК голограм-

мы по времени выхода на стационарный режим обращенной волны в схеме ДНОЗ. Данные результаты позволяют нам строить оптические устройства распознавания оптических образов на базе ФРК. В частности, очевидно будет работать схема в которой оптические образы записываются в ФРК по схеме ДНОЗ. В качестве одного из световых пучков в ДНОЗ используется записываемый оптический образ, а в качестве второго - подаваемые под разными углами (для каждого из записываемых образов - свой угол) плоские волны. В результате, если при распознавании одновременно с неизвестным оптическим образом подавать все плоские волны, используемые при записи, то очевидно первой по времени, будет появляться обращенная плоская волна, соответствующая той, которая использовалась при записи данного оптического образа. Таким образом, по времени выхода на стационарный уровень обращенной волны в ДНОЗ можно судить о том записан или нет тот или иной оптический образ в ФРК. Кроме того в качестве дальнейшего развития данной работы следует указать на то, что расчет полулинейного генератора проводился в приближении примесей одного сорта в ФРК. При этом остались без объяснения некоторые экспериментально наблюдаемые особенности динамики генерации обращенной волны в схеме полулинейного генератора. Можно надеяться, что модель ФРК с числом примесей более 1 будет более адекватно описывать данную схему.

Благодарности автора. Экспериментальные графики, использованные в данной работе (кроме рис. 2.17, взятого из [42]), были получены на кафедре квантовой электроники СПбГТУ Никифоровым Ф. Н. и Фанкони Вильаром А. В заключение автор хочет выразить благодарность Петрунькину В. Ю., идеи которого были положены в основу данной работы. Особую

благодарность надо выразить Никифорову Ф. Н., без экспериментальных исследований которого невозможно было бы отобрать из всего громадного массива расчетных данных именно те, которые соответствуют действительности и, на основании чего, сделать основные выводы по данной работе.

В работах выполненных совместно с Никифоровым Ф. Н., Петрунькиным В. Ю. и Водоватовым И. А. автору принадлежит теоретическая часть и численные расчеты.

## Литература

1. Farhat N. H., Psaltis D., Prata A., Paek E. Optical implemenatation of the Hopfield model // Applied Optics. - 1985. - v. 24. - p. 1469-1475.
2. Lin X., Ohtsubo Ju. Optical neural networks with terminal attractors for pattern recognition. // Optical Engineering. - 1996. - v. 35, N 8. - p. 2145-2152.
3. Lu T., Wu S., Yu. T. S. Neural network model using interpattern association. // Applied Optics. - 1990. - v. 29, N 2. - p. 284-288.
4. Athale R. A., Szu H. H., Friedlander C. B.. Optical implementation of associative memory with controlled nonlinearity in the correlation domain. // Optics Letters. - 1986. - v. 11,N 7. - p. 482-484.
5. Gabor D. A. A new microscopic principle. // Nature. - 1948. - v. 161, N 4098. - p. 777-778.
6. Soffer B. H., Dunning G. J., Owechko Y., Marom E. Associative holographic memory with feedback using phase-conjugate mirrors. // Optics Letters. - 1986. - v. 11, N 2. - p. 118-120.
7. Aristov V. V. Optical memory of three-dimensional holograms. // Opt. Commun. - 1971. - v. 3, N 3. - p. 194-196.
8. Петров М.П., Степанов С.И., Хоменко А.В. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике. - С. Петербург: Наука, 1992. 320 с.

9. Eichler H. J., Gunter P., Pohl D. W. Laser-Induced Dynamic Gratings. - Berlin: Springer-Verlag, 1986. 250 p.
10. Жанузаков М. Г., Зозуля А. А., Тихончук В. Т. Устойчивость стационарных нелинейных состояний световых волн в системе двух связанных двойных отражающих зеркал на основе фоторефрактивных кристаллов. // Квантовая электроника. - 1990. - т. 17, №11. - с. 1524-1526.
11. Horowitz M., Kligler D., Fischer B. Time-dependent behavior of photorefractive two- and four-wave mixing. // Journal of the Optical Society of America B. - 1991. - v. 8, N 10. - p. 396 - 409.
12. Зозуля А. А. Влияние феннинга на характеристики самонакачивающихся систем четырехволнового смешения в фоторефрактивных средах. // Квантовая электроника. - 1992. - т. 19, №8. - с. 733 - 751.
13. Бельдюгина П. И., Мамаев А. В., Шкунов В. В. Динамика самостарта генерации в полулинейном ОВФ-зеркале с большим числом поперечных мод. // Квантовая электроника. - 1992. - т. 19, №7. - с. 691-697.
14. Бельдюгина П. И., Шкунов В. В. Динамика самостарта и порог генерации в системе двух связанных двойных ОВФ-зеркал. // Квантовая электроника. - 1994. - т. 21, №3. - с. 234-236.
15. Chen F. S. Optically induced change of refractive indices in  $LiNbO_3$  and  $LiTaO_3$ . // Journal of Applied Physics. - 1969. - v. 40, N 8. - p. 3389-3396.
16. Petrunkin V. Ju., Vodovatov I. A., Murashko I. V. An effect of fanning on the characteristics of double phase-conjugate mirror. // Proceedings of SPIE. 1999 - v. 3687. - p. 42-48.



17. Kukhtarev N.V., Markov V.B., Odulov S. G. et al. Holographic storage in electrooptic crystals. I. Steady state. // *Ferroelectrics*. - 1979. - v 22. - p. 949-960.
18. Valley G. C., Lam Ju. F. Theory of photorefractive effects in electro-optic crystals. // *Topic in Applied Physics v.61 Photorefractive Materials and their applications I. Fundamental phenomena*, p. 75 Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988, p. 75-98.
19. Valley G. C., Klein M. B. Optimal properties of photorefractive materials for optical data processing. // *Optical Engineering*. - 1983. - v.22, N 6. - p. 704-711.
20. Ashkin A., Boyd G. D., Dziedzic J. M. et al. *Optically-induced refractive index inhomogeneities in  $LiNbO_3$  and  $LiTaO_3$*  // *Applied Physics Letters*. - 1966. - v. 9, N 1. - p. 72-74.
21. Stepanov S. I., Petrov M. P. Nonstationary holographic recording for efficient amplification and phase conjugation. // *Topic in Applied Physics v.61 Photorefractive Materials and their applications I. Fundamental phenomena*, p. 75 Springer-Verlag Berlin Heidelberg. - 1988. - p. 263-289.
22. Peltier M., Micheron F. *Journal of Applied Physics*. - 1977. - v. 48. - p. 3683.
23. Feinberg J., Heiman D., Tanguary A. R., Hellwarth R. W. *Journal of Applied Physics*. - 1980. - v. 51. - p. 1297.
24. Gunter P. *Physics Reports*. - 1983. - v. 9. - p. 200.

25. В. В. Обуховский, Процессы фоторефрактивного рассеяния света в кристаллах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. - Киев: КГУ, 1989.
26. Петрунькин В.Ю., Водоватов И.А. Теория дифракции света на ультразвуке (изотропные среды). // Известия ВУЗов. Радиофизика. - 1983. - т. 26. - с. 1570.
27. Водоватов И.А., Плисс Н.С., Попова Л.П. и др. К вопросу об акустическом взаимодействии в приборах отклонения и модуляции света. // Научное приборостроение. - 1991. - N 2. - с. 165.
28. Водоватов И.А., Плисс Н.С., Попова Л.П. и др. Метод интегральных уравнений в задачах самодифракции света в нелинейных средах. // Радиотехника и электроника. - 1994. - т. 37. - с. 1939.
29. П. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, М. : Радио и связь, 1988.
30. Степанов С. И., Трофимов Г. С. Механизмы голографической записи в фоторефрактивных кристаллах со сложной структурой примесных уровней. // ЖТФ. - 1985. - т. 55, N 3. - с. 559-567.
31. Канаев И. Ф., Малиновский В. К. Рассеяние света в кольцо и дуги в кристаллах  $LiNbO_3$ . // Физика твердого тела. - 1996. - т. 38, N 10. - с. 3029-3041.
32. Zozulya A. A. Double phase-conjugate mirror is not oscillator. // Optics letters. - 1991. - v. 16, N 8. - p. 545-547.
33. Zozulya A. A., Saffman M., Anderson D. Z. Double phase-conjugate mirror:

- convention and diffraction. // Journal of the Optical Society America B. - 1995. - v. 12, N 2. - p. 255-264.
34. Zozulya A. A., Saffman M., Anderson D. Z. Propagation of Light Beams in Photorefractive Media: Fanning, Self-Bending, and Formation of Self-Pumped Four-Wave-Mixing Phase Conjugation Geometries. // Physical Review Letters. - 1994. - v. 73, N 6. - p. 818-821.
  35. Мурашко И. В. Порог генерации в модели двойного обращения. I Всероссийская научная конференция студентов-радиофизиков. Тезисы докладов. - 1997. - с. 72-74.
  36. Nikiforov F. N., Murashko I. V., Vodovатов I. A. et al. Averaged equations model for the double phase conjugation dynamics. // International scientific conference "Optics of Crystals" Mozyr, Belarus, 26-30 September, 2000, Proceeding of SPIE, 2000 (to be published).
  37. Ф.Н. Никифоров, И.В. Мурашко, И.А. Водоватов и др. Динамика двойного обращения волновых фронтов в фоторефрактивных кристаллах. // Письма в ЖТФ. - 2000. - т. 26, N 2. - с. 77-85.
  38. Nikiforov F. N., Murashko I. V., Petrun'kin V. Yu. et al. The Dynamics of Double Reversal of Wave Fronts in Photorefractive Crystals. // Technical Physics Letters. - 2000. - v. 26, N 1. - p. 81-84.
  39. Psaltis D., Brady D., Wagner K. Adaptive optical networks using photorefractive crystals. // Applied Optics. - 1988. - v. 27, N 9. - p. 1752-1759.

40. Wunsch D. C., Morris D.J. et al. Photorefractive adaptive resonans neural network. // Applied Optics. - 1993. - v. 32, N 8.
41. He Q.B., Yeh P., Gu C., Neurgaonkar R.R. Multigrating competition effects in photorefractive mutually pumped phase conjugation. // Journal of the Optical Society of America B. - 1992. - v. 9, N 1.
42. Петров М.П., Колфилд Х.Д., Мокрушина Е.В. Некогерентное двойное обращающее зеркало на  $Bi_{12}TiO_{20}$ . // Квантовая электроника. - 1992. - т. 19, N 3. - с. 289-294.
43. Cronin-Golomb M., Fisher B., Nilsen J. et al. Laser with dynamic holographic intracavity distortion correction capability. // Applied Physics Letters. - 1982. - v. 41, N 3. - p. 219-220.