Электромагнитные колебания в нелинейных средах[1]

Мурашко И. В.

[1]Санкт Петербургский Государственный Политехнический Университет

Оглавление

1 Введение **7**
1.1 Поляризация и восприимчивость вещества 8
1.2 Нелинейность 9
1.2.1 Квадратичные по полю эффекты нелинейности . . . 9
1.2.2 Кубичные по полю эффекты нелинейности 10
1.3 Дисперсия 12
1.4 Заключение 12

2 Нелинейная поляризация среды **15**
2.1 Поляризация и восприимчивость вещества 15
2.2 Феноменологическое описание восприимчивостей 17
2.2.1 Общие свойства восприимчивостей 19
2.3 Классические модели обеспечивающие существование нелинейной восприимчивости 20
2.3.1 Ангармонизм свободного электрона 20
2.3.2 Ангармонизм связанного электрона 23
2.4 Фоторефракция 25
2.4.1 Процесс формирования голографических решеток в ФРК 27
2.4.2 Решение системы уравнений, описывающей процесс формирования поля пространственного заряда . . . 32
2.4.3 Стационарный режим записи 40
2.5 Заключение 41

3 Нелинейные оптические явления в среде с квадратичной нелинейностью **43**
3.1 Генерация второй гармоники. Метод малого параметра . . 44
3.1.1 Нулевой порядок теории возмущений 45
3.1.2 Первый порядок теории возмущений 45
3.1.3 Полное прошедшее поле ВГ 51

3.2 Генерация второй гармоники. Метод медленно меняющихся амплитуд. Генерация субгармоник 53
3.2.1 Работа нелинейно-оптического удвоителя частоты при синхронизме 57
3.2.2 Работа нелинейно-оптического удвоителя частоты в отсутствие синхронизма 58
3.2.3 Влияние поглощения на процесс генерации ВГ . . . 59
3.2.4 Параметрический процесс down-конверсии 60
3.3 Общая задача о параметрическом трехволновом взаимодействии в нелинейных средах с квадратичной нелинейностью 62
3.3.1 Интегралы движения для системы медленно меняющихся амплитуд 63
3.3.2 Основные параметрические трехволновые процессы 65
3.4 Заключение 65

4 Самовоздействие 67
4.1 Двухволновое взаимодействие света в фоторефрактивных кристаллах 67
4.1.1 Постановка задачи и вывод основных уравнений . . 67
4.1.2 Процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии света в ФРК 71
4.1.3 Нестационарные механизмы записи голографических решеток в ФРК 72
4.1.4 Фенинг 73
4.2 Обращение волнового фронта в ФРК 74
4.2.1 Постановка задачи об обращениие волнового фронта в схеме двойного некогерентного обращающего зеркала 74
4.2.2 Пороговые условия в модели ДНОЗ 75
4.2.3 Другие схемы обращения волнового фронта 77
4.3 Заключение 77

5 Нелинейные оптические явления в диспергирующей среде 79
5.1 Явление самоиндуцированной прозрачности. Оптический импульс в двухуровневой среде. Уравнение sine-Gordon . . 80
5.2 Заключение 87

6 Задачи для самостоятельной работы 89
6.1 Задачи 89

6.2 Темы для докладов 89

Глава 1

Введение

Свойства света и законы его взаимодействия с веществом привлекают внимание исследователей уже более двух тысяч лет. Именно по этой причине к середине XX века оптика была хорошо и детально разработанной главой физики. Согласующиеся выводы были получены как на уровне экспериментальных результатов, так и на уровне электромагнитной теории Максвелла и квантовой теории.

Всем хорошо известны основные законы распространения света и его взаимодействия со средой:

- прямолинейное распространение света,
- отражение и преломление света на границе сред,
- независимость пучков света, распространяющихся в среде,
- линейное поглощение света в прозрачных средах,
- трансформация частоты света в красную область при его рассеянии.

Однако в середине XX века оказалось, что эти законы справедливы лишь в весьма распространенном, но предельном случае света малой интенсивности. При большой интенсивности света, которая сейчас достигается использованием излучения лазеров, эти законы не имеют места. Дело в том, что интенсивность света, излучаемого импульсным лазером, на очень много порядков величины превышает интенсивность любых источников света, которые существовали в долазерную эпоху. Так, например, интенсивность света от стандартной спектральной лампы (например, ртутной) порядка $1\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, интенсивность излучения стандартного им-

пульсного лазера порядка $10^{10}\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, а в случае современного сверхмощного лазера $10^{20}\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$. Для сравнения: атомная интенсивность имеет порядок $10^{16}\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ (это интенсивность излучения, напряженность электрического поля которого равна атомной напряженности $5 \cdot 10^9 \frac{\text{В}}{\text{см}}$).

Можно указать на две основные причины, обусловливающие различие результатов взаимодействия с веществом света малой и большой интенсивности. Во-первых, помимо однофотонных процессов, определяющих взаимодействие на микроскопическом уровне при малой интенсивности света, при большой интенсивности главную роль играют многофотонные процессы. Во-вторых, при большой интенсивности возникают эффекты самовоздействия, заключающиеся в изменении исходных свойств вещества под действием распространяющегося в нем света. В отличие от линейного характера взаимодействия, характерного для света малой интенсивности, при большой интенсивности взаимодействие носит нелинейный характер. Отсюда и возникли современные термины линейная и нелинейная оптика, соответствующие оптике малой и большой интенсивности света.

Сейчас ясно, что есть две различные оптики: классическая (линейная) оптика, описывающая распространение в прозрачных средах света малой интенсивности, и новая (нелинейная) оптика, описывающая распространение света при большой его интенсивности.

1.1 Поляризация и восприимчивость вещества

Для описания распространения ЭМВ в среде будем использовать следующие уравнения Максвела:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right],$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\vec{H}\right)}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где P - поляризация среды (дипольный момент единицы объема) предполагается функцией от поля E и, следовательно, может быть разложен в ряд по этому полю:

$$\vec{P} = \vec{P_{\text{Л}}} + \vec{P_{\text{НЛ}}} = \chi^{(1)}\vec{E} + \chi^{(2)}\vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)}\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \cdots \tag{1.2}$$

В выражении (1.2) мы выделили линейную и нелинейную части поляризации по полю.

Перепишем первое уравнение (1.1) следующим образом

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\right) + 4\pi\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{P_{\text{нл}}}, \tag{1.3}$$

где σ - проводимость, $\varepsilon = \left(1 + 4\pi\chi^{(1)}\right)$ - диэлектрическая проницаемость.

Взяв операцию rot от обеих частей второго уравнения (1.1), с учетом (1.3) имеем

$$\Delta\vec{E} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - 4\pi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P_{\text{нл}}}. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.2) и (1.4) помогут нам понять какие основные эффекты могут наблюдаться при прохождении сильного электромагнитного поля через вещество.

При классификации нелинейных эффектов различают прежде всего параметрические и непараметрические.

В случае параметрических эффектов в результате взаимодействия излучения с веществом вещество не меняет своей внутренней энергии. В качестве примеров можно привести генерацию второй гармоники лазерного излучение, самодифракцию.

В случае непараметрических эффектов в результате взаимодействия излучения с веществом изменяется внутренняя энергия вещества. Типичным примером является вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР).

В дальнейшем мы будем иметь дело прежде всего с парамметрическими нелинейными эффектами. Классификацию нелинейных эффектов мы будем производить по двум основным признакам: нелинейность и дисперсия. Нелинейность у нас будет прежде всего квадратичная и кубичная, в зависимости от того в какой степени входит поле в разложение (1.2). Учет дисперсии представляет собой отказ от локальности (пространственной и временной). Т. о. нелинейная поляризация при учете дисперсии определяется параметрами среды и полей не только в данный момент времени и в данной точке пространства но и в другие моменты времени (прошлое - причинность) и в других точках пространства.

1.2 Нелинейность

1.2.1 Квадратичные по полю эффекты нелинейности

Предположим, что в среде действует электромагнитное поле

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{-i\omega t} + c.c.$$

Тогда в поляризации среды P (1.2) появятся члены следующего вида:

$$P_2 e^{-2i\omega t}.$$

Откуда с учетом (1.4) в результирующем поле $\vec{E}$ появятся члены $\sim e^{-2i\omega t}$, т. н. генерация второй гармоники. Первая работа по генерации второй гармоники излучения рубинового лазера была выполнена в 1961 г. Франкеном.

Важность - возможность получать генерацию оптического излучения на новых частотах. В классическом случае частота излучения оптического квантового генератора света определяется частотами перехода между разными энергетическими уровнями активного вещества. Таким образом частота генерации света зависит от свойств вещества. Вместе с тем для разных целей необходимо обеспечить генерацию мощного излучения в определенной области спектра. В качестве примера можно привести установку цветного лазерного телевидения. Для создания полного цвета, как известно, нам нодо иметь лазеры излучающие в трех областях света: красной, зеленой и синей. Если для первых двух существуют мощные лазеры, то для третей (синей) такой лазер найти сложно и поэтому используют мощный лазер с излучением в ИК области спектра и спомощью генерации второй гармоники получают лазерное излучение в синей области спектра.

Кроме генерации второй гармоники возможны и другие эффекты. Если в среде имеются две волны такие что

$$\vec{E} = \vec{E_1} e^{i\omega t} + \vec{E_2} e^{-i\omega t},$$

то среди членов результирующего поля появляется член вида $E_1 E_2$, т. н. оптическое выпрямление. Частным случаем нелинейных явлений вторго порядка является такой, когда в среде имеется одно постоянное и одно переменное поле - эффект Поккельса, похоже единственный из нелинейных эффектов, наблюдавшихся в XIX веке.

1.2.2 Кубичные по полю эффекты нелинейности

Переходя к рассмотрению кубичных по полю нелинейных эффектов сразу можно увидеть генерацию третей гармоники лазерного излучения. Нелинейная оптика интересна прежде всего разнообразием эффектов, причем само это разнообразие проявляется если взглянуть на саму проблему немного под другим углом зрения, что мы сейчас и сделаем.

Записывая кубичнуя поляризацию в виде:

$$P^3_{\text{НЛ}} = \chi EEE$$

и вспоминая что

$$1 + 4\pi P_{\text{Л}} = \varepsilon E,$$

можно записать

$$1 + 4\pi P^3_{\text{нл}} = \varepsilon_{\text{эфф}} E,$$

где $\varepsilon_{\text{эфф}} \sim \chi EE$. Вспомнив линейную оптику можно заключить, что среда в этом случае действует как некая динамическая линза при этом сам световой пучок самофокусируется, т. е. его интенсивность убывает при удалении от оси.

Еще один эффект почти идентичный по сути рассмотренному выше называется эффектом фоторефракции. Данный эффект лежит в основе новой области нелинейной оптики - динамической голографии.

Прежде всего в кратце рассмотрим сами принципы голографии: имеются два световых пучка $E_{\text{пр}}$ и $E_{\text{оп}}$, падающих на записывающую среду. Изменение диэлектрической проницаемости (показателя преломления)

$$\varepsilon \sim I = \left| E_{\text{пр}} + E_{\text{оп}} \right|^2,$$

откуда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E_{\text{пр}} E^*_{\text{оп}} e^{i\left(\vec{K}_{\text{оп}} - \vec{K}_{\text{пр}}\right)\vec{r}} + c.c.$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{р}} e^{i\vec{K}\vec{r}} + c.c.$$

При освещении $E_{\text{оп}}$ восстанавливается $E_{\text{пр}}$. $P^3_{\text{нл}}$ позволяет записывать динамические голограммы. Что это может нам дать? Презде всего это динамическое распознование оптических образов (можно привести схему).

Другим известным человечеству прибором способным осуществлять динамическое распознование образов, причем не только оптических является мозг человека и животных.

Следует отметить ряд свойств, которые присущи как мозгу так и оптическим голограммам.

1. Паралельная обработка информации - в отличии от ЭВ устройств в которых информация обрабатывается последовательно. В результате мозг может эффективно осуществлять распознование образов, но с трудом может заниматься сложными вычислительными задачами, которые требуют последовательной обработки

2. Записываются не конкретные образы, а взаимосвязи между ними, т. н. ассоциативная память

3. Присуще свойства памяти - забывают те образы которые редко используются

4. Колосальная информационная емкость

Все изложенное выше позволяет строить на базе данных нелинейных сред так называемые оптические нейронные сети - устройства, которые могут моделировать различные аспекты работы мозга.

Другим классом устройств динамической голографии являются устройства обращения волнового фронта.

Обычное зеркало (рис.)

Динамическое зеркало (рис.)

Данные устройства могут использоваться для коррекции волновых фронтов внутри резонаторов лазеров.

Лазеры на динамических решетках в которых нелинейный кристалл используется в качестве активной среды.

1.3 Дисперсия

Распространение ЭМК в диспергирующих средах, где различные скорости распространения различных спектральных компонент ЭМП определяют ряд интересных нелинейных эффектов.

Особый интерес представляют особенности распространения коротких оптических импульсов в диспергирующей среде. Нелинейность среды способствует усилению крутизны оптических импульсов, дисперсия способствует расползанию данного импульса. Таким образом при одинаковых порядках нелинейности и дисперсии мы имеем возможность создавать устойчивые короткие оптические импульсы, т. н. солитоны. При этом имеется возможность управлять формой импульса и степенью его сжатия.

1.4 Заключение

За три десятилетия, в течение которых бурно развивалась нелинейная оптика, накоплено много данных, позволяющих реализовать ряд нелинейно-оптических процессов, существенных для различных областей науки и практики. Возникновение нелинейной оптики представляет собой интересный и поучительный пример развития науки. Нелинейная оптика возникла как следствие появления лазеров, то есть революции в технике источников света. Качественный скачок от долазерных источников света

к лазерным дал в руки экспериментаторов источники нового типа с экстремально большой интенсивностью излучения. Совершенно новые возможности эксперимента стимулировали теоретиков. В тесном контакте эксперимента и теории за несколько лет появилась новая область оптики - нелинейная оптика. Количество исследований, посвященных взаимодействию интенсивного света с веществом, экспоненциально возрастало. Среди пионеров и основоположников нелинейной оптики было много выдающихся ученых: лауреат Нобелевской премии профессор Н. Бломберген, профессор Р. Хохлов, профессор С. Ахманов и многие другие.

За три десятилетия нелинейная оптика достигла уровня детально развитой главы физики. Нелинейная оптика дала много приложений в различные направления: в спектроскопию, физику атомов и молекул, физику плазмы и физику твердого тела. Нелинейная оптика нашла многочисленные применения и в экологии, технике, медицине, связи и других направлениях технического прогресса.

В настоящее время продолжается прогресс в физике и технике лазеров, систематически увеличивается предельная интенсивность лазерного излучения, расширяется спектр частот, на которых достигаются экстремально большие интенсивности излучения. Это обусловливает дальнейшее развитие нелинейной оптики, в рамках которой за последние годы получены новые, очень важные результаты, и вскоре можно ожидать обнаружения новых фундаментальных явлений.

Глава 2

Нелинейная поляризация среды

2.1 Поляризация и восприимчивость вещества

Широко известны эффекты при которых реакция среды на внешнее поле - нелинейная функция поля. Простейший пример постоянное электрическое поле в сигнетоэлектриках. Сложнее обстоит дело с высоко частотным полем. Высокочастотная поляризация обусловлена обычно движением электронов в атомах. Кроме внешнего поля там действует еще внутренее поля атома E_a. Поэтому имеет смысл раскладывать реакцию среды на внешнее поле E в виде ряда по степеням $\frac{E}{E_a}$.

В рамках электродинамики сплошных будем рассматривать отклик вещества на внешнее ЭМ поле $\vec{E}$ проницаемостью $\hat{\varepsilon}$ и восприимчивостями $n-$ого порядка $\hat{\chi}^{(n)}$.

Пусть в веществе распространяется плоская монохроматическая волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} + c.c. \tag{2.1}$$

тогда поляризация среды $\vec{P}\left(\vec{E}\right)$ (дипольный момент единицы объема) может быть представлен в виде ряда по степеням поля E (2.1):

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right) = \chi\left(\vec{E}\right)\vec{E} =$$
$$= \hat{\chi}^{(1)} \cdot \vec{E} + \hat{\chi}^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \hat{\chi}^{(3)} \vdots \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \ldots \tag{2.2}$$

В предположении сходимости этот ряд может быть представлен в общем виде

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\chi}^{(m)} m \left\{ \vdots \vec{E}^m \right. \tag{2.3}$$

где члены ряда представляют собой свертки тензоров $\hat{\chi}^{(m)}$ порядка $(m+1)$ описывающих восприимчивости $m-$ ого порядка с соответствующими комбинациями векторов напряженностей электрического поля $\vec{E}$.

Принцип суперпозиции. Фундаментальным отличием распространения ЭМ волн через нелинейную среду является невыполнение принципа суперпозиции, являющегося основополающим принципом линейной оптики.

Действительно, если в нелинейной среде распространяется ЭМ поле с дискретным спектром:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\sum_{i}\left(E_0^{(i)}exp\left(-i\omega_i t+i\vec{k}_i\vec{r}\right)\right)+c.c.$$

тогда полная поляризация будет содержать не только фурье компоненты действующей силы ω_i, как для линейной поляризации, но и компоненты на комбинационных частотах $\omega_j \pm \omega_k$, $2\omega_i$, $\omega_i-\omega_i=0$.

Прежде чем двигаться дальше зададим себе вопрос о возможности наблюдения нелинейных эффектов. Иначе говоря, актуальны ли последующие члены (нелинейные) в разложении (2.2).

Динамика электрона в атоме определяется двумя полями: внутриатомным полем и полем световой волны. Сделаем сравнительные оценки этих полей. Типичная напряженность собственных полей в той области пространства где находятся электроны

$$E_a \cong \frac{e}{a_0^2},$$

где $a_0=\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\approx 5\cdot 10^{-9}$см - боровский радиус.

$$E_a \approx 1.0\cdot 10^9 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Типичное поле генерируемое лазером

$$E_L \approx 1.0\cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Таким образом $\frac{E_L}{E_a}\approx 10^{-2}$.

Из этой оценки можно сделать два вывода:

1. Это соотношение достаточно велико чтобы его учитывать, т. е. необходимо учитывать высшие по этому параметру члены ряда разложения поляризации (первые)

2. Это еще малый параметр и следует ожидать быстрой сходимости ряда (2.2, 2.3) для $\vec{P}\left(\vec{E}\right)$

2.2 Феноменологическое описание восприимчивостей

Некоторые общие свойства нелинейных восприимчивостей можно выяснить не прибегая к рассмотрению конкретных модельных систем.

Прежде всего разложим нелинейную поляризацию P в ряд по степеням поля E

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r},t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r},t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r},t) + \dots \tag{2.4}$$

В общем случае учету пространственной и временной дисперсии отвечает следующая связь между α компонентой вектора $\vec{P}^{(n)}$ и компонентами вектора поля $\vec{E}$

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(n)} = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int_{-\infty}^{t} dt_3 \dots \int_{-\infty}^{t} dt_n \cdot \\ \cdot \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_3 \dots \int d^3 r_n \cdot \\ \cdot \Upsilon^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}(\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3 \dots \vec{r}_n, t-t_1, t-t_2, t-t_3, \dots t-t_n) \cdot \\ \cdot E_\beta(\vec{r}_1,t_1)\, E_\gamma(\vec{r}_2,t_2)\, E_\delta(\vec{r}_3,t_3) \dots E_\nu(\vec{r}_n,t_n). \end{aligned} \tag{2.5}$$

В выражении 2.5 учтен принцип причинности ограничивающий интегрирование только прошлым. Кроме того процессы предполагались стационарными (нет выделенного момента времени). Если принебречь нелокальностью (пространственной дисперсией),

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}(\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3 \dots \vec{r}_n, t-t_1, t-t_2, t-t_3, \dots t-t_n) = \\ = \Upsilon^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}(\vec{r},,t-t_1, t-t_2, t-t_3, \dots t-t_n) \prod_{i=1}^{n} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \end{aligned}$$

и ввести новые обозначения

$$\tau_i = t - t_i,$$

то получим для 2.5

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(n)}(\vec{r},t) = \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau_3 \dots \int_0^{\infty} d\tau_n \cdot \\ \cdot \Upsilon^{(n)}_{\alpha\beta\gamma\dots\nu}(\vec{r},\tau_1,\tau_2,\tau_3,\dots\tau_n) \cdot \\ \cdot E_\beta(\vec{r},t-\tau_1)\, E_\gamma(\vec{r},t-\tau_2)\, E_\delta(\vec{r},t-\tau_3) \dots E_\nu(\vec{r},t-\tau_n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Вместе с тем временной дисперсией в (2.6) мы не пренебрегаем. Временная дисперсия характеризует собой как бы память нелинейной системы, состояние и свойства которой зависят от предыстории. Уже простое

введение понятия частоты означает использование информации о поведении возмущения в течении некоторого времени до настоящего момента. С другой стороны память является наиболее общим типом временной дисперсии, учитывающей не только частотные характеристики сигнала но и его длительность и геометрию.

Для Фурье-образа нелинейной поляризации

$$P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r},t)\,e^{i\omega t}dt$$

имеем из 2.6

$$\begin{aligned}P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_3\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_n\cdot\\ \cdot\delta\left(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3-\ldots-\omega_n\right)\cdot\\ \cdot E_{\beta}(\vec{r},\omega_1)\,E_{\gamma}(\vec{r},\omega_2)\,E_{\delta}(\vec{r},\omega_3)\ldots E_{\nu}(\vec{r},\omega_n)\cdot\\ \cdot\int_0^{\infty}d\tau_1\int_0^{\infty}d\tau_2\int_0^{\infty}d\tau_3\ldots\int_0^{\infty}d\tau_n\Upsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}^{(n)}(\vec{r},\tau_1,\tau_2,\tau_3,\ldots\tau_n)\cdot\\ \cdot\exp\left(i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2+i\omega_3\tau_3+\ldots+i\omega_n\tau_n\right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Введем следующее обозначение

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}^{(n)}(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n)=\\ =\delta\left(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3-\ldots-\omega_n\right)\cdot\\ \cdot\int_0^{\infty}d\tau_1\int_0^{\infty}d\tau_2\int_0^{\infty}d\tau_3\ldots\int_0^{\infty}d\tau_n\Upsilon_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu}^{(n)}(\vec{r},\tau_1,\tau_2,\tau_3,\ldots\tau_n)\cdot\\ \cdot\exp\left(i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2+i\omega_3\tau_3+\ldots+i\omega_n\tau_n\right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

С учетом (2.8) связь между поляризацией и полем (2.7) перепишется как

$$\begin{aligned}P_{\alpha}^{(n)}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_3\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_n\cdot\\ \cdot\hat{\chi}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}^{(n)}(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n)\cdot\\ \cdot E_{\beta}(\vec{r},\omega_1)\,E_{\gamma}(\vec{r},\omega_2)\,E_{\delta}(\vec{r},\omega_3)\ldots E_{\nu}(\vec{r},\omega_n).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Эта формула - обобщение обычной линейной связи

$$P_{\alpha}(\vec{r},\omega)=\hat{\chi}_{\alpha,\beta}E_{\beta}(\vec{r},\omega)$$

2.2.1 Общие свойства восприимчивостей

Получим из (2.8) и (2.9) некоторые общие свойства восприимчивостей:

1. Из вещественности ЭМ полей и поляризации следует унивесальное свойство восприимчивостей:

$$\hat{\chi}^{(n)*}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}\left(\vec{r},-\omega,-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3,\ldots,\omega_n\right) \hat{\chi}^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}\left(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n\right). \tag{2.10}$$

Доказательство:
Воспользуемся тем свойством вещественных функций, что их фурье - образы удовлетворяют следующему соотношению

$$f(-\omega)=f^*(\omega)$$

Действительно из (2.9):

$$P^{(n)*}_{\alpha}\left(\vec{r},\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_3\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_n\cdot \cdot\hat{\chi}^{(n)*}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}\left(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n\right)\cdot \cdot E^*_{\beta}\left(\vec{r},\omega_1\right)E^*_{\gamma}\left(\vec{r},\omega_2\right)E^*_{\delta}\left(\vec{r},\omega_3\right)\ldots E^*_{\nu}\left(\vec{r},\omega_n\right).$$

С учетом

$$\vec{P}^{(n)*}_{\alpha}\left(\vec{r},\omega\right)=P^{(n)}_{\alpha}\left(\vec{r},-\omega\right)$$

и

$$E^*_{\beta}\left(\vec{r},\omega_i\right)=E_{\beta}\left(\vec{r},-\omega_i\right)$$

имеем

$$P^{(n)}_{\alpha}\left(\vec{r},-\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_3\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_n\cdot \cdot\hat{\chi}^{(n)*}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}\left(\vec{r},+\omega,+\omega_1,+\omega_2,+\omega_3,\ldots,+\omega_n\right)\cdot \cdot E_{\beta}\left(\vec{r},-\omega_1\right)E_{\gamma}\left(\vec{r},-\omega_2\right)E_{\delta}\left(\vec{r},-\omega_3\right)\ldots E_{\nu}\left(\vec{r},-\omega_n\right).$$

0 Откуда с заменой переменных

$$\omega\to-\omega,\quad \omega_i\to-\omega_i$$

$$P^{(n)}_{\alpha}\left(\vec{r},\omega\right)=(-1)^{n+n}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_2\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_3\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_n\cdot \cdot\hat{\chi}^{(n)*}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\nu}\left(\vec{r},-\omega,-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3,\ldots,-\omega_n\right)\cdot \cdot E_{\beta}\left(\vec{r},\omega_1\right)E_{\gamma}\left(\vec{r},\omega_2\right)E_{\delta}\left(\vec{r},\omega_3\right)\ldots E_{\nu}\left(\vec{r},\omega_n\right) \tag{2.11}$$

Сравнивая (2.9) и (2.11) можно сделать вывод о справедливости (2.10)

2. Перестановачная симметрия по всем индексам кроме первого с соответствующей перестановкой частотных аргументов. Например для квадратичной нелинейности:

$$\hat{\chi}^{(2)}_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2\right)=\hat{\chi}^{(2)}_{\alpha,\gamma,\beta}\left(\vec{r},\omega,\omega_2,\omega_1\right) \tag{2.12}$$

(Задача)

3. Симметрия по всем индексам в среде без поглощения - соотношения Клеймана. Например для квадратичной нелинейности:

$$\hat{\chi}^{(2)}_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\vec{r},\omega,\omega_1,\omega_2\right)=\hat{\chi}^{(2)}_{\beta,\alpha,\gamma}\left(\vec{r},\omega_1,\omega,\omega_3\right)=\hat{\chi}^{(2)}_{\gamma,\beta,\alpha}\left(\vec{r},\omega_3,\omega_2,\omega\right)=\ldots \tag{2.13}$$

(Задача)

4. Коэффициенты Миллера (для квадратичной нелинейности):

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\hat{\chi}^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\omega_0=\omega_1+\omega_2)}{\hat{\chi}^{(1)}_{\alpha\alpha}(\omega_0)\hat{\chi}^{(1)}_{\beta\beta}(\omega_1)\hat{\chi}^{(1)}_{\gamma\gamma}(\omega_2)}\approx 10^{-6}CGSE \tag{2.14}$$

2.3 Классические модели обеспечивающие существование нелинейной восприимчивости

Рассмотрим в дальнейшем некоторые классические модели обеспечивающие возниконовение нелинейной восприимчивости.

2.3.1 Ангармонизм свободного электрона

Пусть на электрон или другую заряженную частицу действует плоская монохроматическая ЭМ волна, линейно поляризованная вдоль оси x и имеющая волновой вектор параллельный оси z.

$$\vec{E}=(E_x,0,0)\,;\quad \vec{H}=(0,H_y,0)\,;\quad E_x=H_y=E;$$

$$e<0.$$

Тогда система уравнений движения электрона будет иметь следующий вид:

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}=\frac{e}{m_e}\left(E_x-\frac{1}{c}\dot{z}H_y\right)=\frac{e}{m_e}\left(1-\frac{1}{c}\dot{z}\right)E,$$

$$\ddot{z}+2\gamma\dot{z}=\frac{e}{m_e c}\dot{x}E, \tag{2.15}$$

где γ - феменологическое затухание (затухание осцилирующего движения электронов).

Поле в точке нахождения частицы имеет вид

$$E = E_x(z,t) = ReE_{1,0}exp\left(ikz(t) - i\omega t\right) = H_y(z,t)$$

Предположим что продольное смещение z при движении частицы мало. Тогда в уравнении движения для координаты x полагаем $z = 0$. Это означает что мы работаем с дипольным приближением.

Будем искать решение в виде ряда, отдельные члены которого - результат метода последовательных приближений

$$\vec{r} = \vec{r}^{(1)} + \vec{r}^{(2)} + \ldots = \vec{r}_0^{(1)}e^{-i\omega t} + \vec{r}_0^{(2)}e^{-2i\omega t} + \ldots + c.c., \tag{2.16}$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$.

Первое приближение

Получим уравнение для $x_0^{(1)}$ предполагая $z_0^{(1)} = 0$. Последнее по сути означает дипольность первого приближения. Тогда амплитуда движения заряда по оси x определяется соотношением

$$x_0^{(1)} = -\frac{e/m_e}{\omega^2 + 2i\omega\gamma}E_1 \tag{2.17}$$

Отсюда тензор линейной поляризуемости свободного электрона, связанный со смещением заряда через определение дипольного момента $\vec{d}^{(1)} = e\vec{r}_0^{(1)} = \alpha\vec{E}_1$ имеет вид

$$\alpha_{ij}\left(\omega\right) = -\frac{e^2}{m_e\omega\left(\omega + 2i\gamma\right)} \tag{2.18}$$

Для перехода от линейной поляризуемости отдельного электрона к линейной восприимчивости газа свободных электронов учтем их объемную концентрацию N

$$\hat{\chi}^{(1)} = \alpha N$$

Сделаем оценку поляризуемости свободного электрона при $\omega \gg \gamma$. Из (2.18) следует

$$\alpha = -\frac{e^2}{m_e\omega^2} = -r_e\frac{\lambda}{2\pi}^2$$

Естественным образом линейная поляризуемость имет вид и смысл некоторого объема куда входит комбинация длины волны и классический радиус электрона $r_e = \frac{e^2}{m_ec^2} \approx 3 \cdot 10^{-13}$см. Если в качестве длины волны

взять длину волны соответствующую потенциалу ионизации атома водорода $U_i = 13.6eV$ $\lambda_0 = \frac{1}{R} \approx 10^{-5}$см, где $R = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3 c}$ атомный маштаб энергии - Ридберг.

Тогда $\alpha = 4a_0^3 \approx 6 \cdot 10^{-25}$см^3, т. е. поляризуемость свободного электрона в УФ диапазоне имеет порядок объема атома водорода.

Второе приближение

Теперь в левой части уравнений (2.15) берем $r^{(2)}$, а в правой $r^{(1)}$. И уравнение движения второго порядка имеет вид

$$\ddot{z}^{(2)} + 2\gamma\dot{z}^{(2)} = \frac{eE}{m_e c}\dot{x}^{(1)} \tag{2.19}$$

Сила Лоренца, стоящая в правой части (2.19), определяется следующим соотношением

$$\begin{aligned} F_z^{(2)} = \frac{e}{c}\dot{x}^{(1)}(t)E(t) = \frac{e}{c}\left(-i\omega {x_0}^{(1)} e^{-i\omega t} + c.c.\right)\left(E_{1,0}e^{-i\omega t} + c.c.\right) = \\ = \frac{e}{c}\left(\frac{i\omega e E_1 E_1^*}{\left(\omega^2 + 2i\omega\gamma\right) m_e} - \frac{i\omega e E_1 E_1^*}{\left(2i\omega\gamma - \omega^2\right) m_e}\right) + \\ + \frac{e}{c}\left(\frac{i\omega e E_1 E_1}{\left(\omega^2 + 2i\omega\gamma\right) m_e} e^{-2i\omega t} - \frac{i\omega e E_1^* E_1^*}{\left(\omega^2 - 2i\omega\gamma\right) m_e} e^{2i\omega t}\right) \end{aligned}$$

Она-то и вызывает ангармонизм в динамике свободного электрона (в ней присутствует осцилирующий член с удвоенной частотой). Амплитуда колебаний на на удвоенной частоте 2ω задается следующим соотношением

$$F_{z_0}^{(2)} = \frac{e}{c}\frac{i\omega e E_1 E_1}{\left(\omega^2 + 2i\omega\gamma\right) m_e} = \frac{ie^2 E_1^2}{c m_e \left(\omega + 2i\gamma\right)}. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в (2.19) получим для амплитуды колебаний на удвоенной частоте

$$z_0^{(2)} = \frac{e^2 E_1^2}{2ic m_e^2 \omega \left(\omega + 2i\gamma\right)\left(2\omega + 2i\gamma\right)} = \frac{1}{e}\beta E_1^2, \tag{2.21}$$

где β - нелинейная поляризуемость. Откуда естественный переход к нелинейной (квадратичной) восприимчивости

$$\hat{\chi}^{(2)} = \frac{e^3 N}{2m_e^2 c\omega \left(\omega + 2i\gamma\right)\left(2\omega + 2i\gamma\right)},$$

где N - объемная концентрация электронов.

Сделаем оценку β в приближении $\omega \gg \gamma$:

$$|\beta| \approx \frac{e^3}{m_e^2 c\omega^3} = \left(\frac{ec/\omega}{m_e c^2}\right)\alpha = \frac{\alpha}{E_{NL}^{free}}$$

где параметр E_{NL}^{free} - нелинейное поле - это характерная амплитуда поля, при которой линейный и квадратичный отклик одинаковы , т. е. $z^{(2)} = x^{(1)}$.

При $\lambda = \lambda_0$ имеем:

$$E_{NL}^{free} \approx 10^9 CGSE = 3 \cdot 10^{11} \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

2.3.2 Ангармонизм связанного электрона

Модель ангармонического осцилятора

Пусть частица (электрон) находится в следующем потенциале

$$V(x) = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x^2 - eEx - \frac{1}{3} m_e x^3 \eta,$$

где η - это малый параметр, описывающий отклонение формы потенциальной ямы от параболы.

Уравнение движения заряда (электрона) в таком потенциале имеет следующий вид:

$$\hat{D}x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m_e} E + \eta x^2 \tag{2.22}$$

Здесь затухание γ введено руками.

Пусть внешнее поле $\vec{E}$ имеет бигармонический вид

$$E = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c.$$

Решение будем искать по теории возмущений в виде ряда по малому параметру ангармонизма

$$x(t) = \sum_m x^{(m)}(t), \text{где} \quad x^{(m)} \approx \eta^{m-1} \text{и} \quad m = 1, 2, 4, 8, \ldots \tag{2.23}$$

Подставив (2.23) в (2.22) и приравнивая слагаемые одного порядка малости, итерациямиполучим уравнения для компонент смещения разных порядков малости:

$$\hat{D}x^{(1)} = \frac{e}{m_e} E, \quad \hat{D}x^{(2m)} = \eta \left(x^{(m)}\right)^2.$$

Первый порядок

В первом порядке для смещения имеем

$$x^{(1)} = x_1^{(1)} e^{-i\omega_1 t} + x_2^{(1)} e^{-i\omega_2 t} + c.c.$$

Тогда

$$x_n^{(1)} = \frac{e}{m_e D(\omega_n)} E_n,$$

где $D(\omega_n) = \omega_0^2 - \omega_n^2 - i2\gamma\omega_n = D^*(-\omega_n)$

Дипольный момент по определению равен

$$d_n = ex_n = \alpha(\omega_n) E_n,$$

тогда линейная поляризуемость связанного электрона определяется выражением

$$\alpha(\omega_n) = \frac{e^2}{m_e D(\omega_n)} \tag{2.24}$$

Переход от поляризуемости к восприимчивости в простейшем случае связан с аддитивным сложением поляризуемостей отдельных атамов: $\hat{\chi}^{(1)} = \alpha(\omega) N$

Второй порядок

Во втором порядке теории возмущений возникают спектральные (Фурье) компоненты смещения с частотами 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 \pm \omega_2$. Рассмотрим в отклике (в смещении) поправку второго порядка x_3 на частоте $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$

$$x_3^{(2)} = \frac{\eta x_1^{(1)} x_2^{(1)}}{D(\omega_3)} = \frac{1}{e} \beta(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) E_1 E_2,$$

где квадратичная поляризуемость

$$\beta(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \frac{\eta e^3}{m_e^2 D(\omega_3) D(\omega_2) D(\omega_1)} \tag{2.25}$$

Для перехода к квадратичной восприимчивости имеем $\hat{\chi}^{(2)} = \beta N$.

На этой модели несложно проверить соотношения (2.10 - 2.14). Для (2.14)

$$\beta(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \sim \eta \alpha(\omega_3) \alpha(\omega_2) \alpha(\omega_1),$$

тогда $\hat{\chi}^{(2)} \sim n(\omega_3) n(\omega_2) n(\omega_1)$. Важно что это соотношение справедливо с единой константой для всех кристаллов в области их прозрачности.

Расчет нелинейного поля для связанного электрона

Сначала сделаем оценку величины ангармонизма. Пусть при смещении $x = a_0$ линейная сила $eE_0 = m_e\omega_0^2 a_0$, где E_0 - характерное внутриатомное поле, и нелинейная сила $\eta m_e a_0^2$ сравниваются. Тогда параметр ангармонизма имеет вид

$$\eta = \frac{\omega_0^2}{a_0}.$$

Тогда для оценки нелинейного поля имеем:

$$\alpha E_{NL}^{bound} = \beta \left(E_{NL}^{bound}\right)^2,$$

откуда

$$E_{NL}^{bound} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда

$$E_{NL}^{bound} \sim \frac{e^2}{m_e D}\frac{m_e^2 D^3}{\eta e^3} = \frac{m_e D^2}{e\eta} = \frac{m_e\omega_0^2 a_0}{e} = E_0,$$

и окончательно

$$E_{NL}^{bound} \sim E_0$$

чего и следовало ожидать.

2.4 Фоторефракция

Нелинейный отклик отдельного атома или молекулы на поле электромагнитной волны - не единственная причина нелинейных оптических эффектов.

В качестве простейшего примера можно привести т. н. среды с тепловой нелинейностью. В таких средах под действием интенсивности падающего света увеличивается температура, что ведет к изменению объема. Изменение объема, в свою очередь, изменяет поляризацию единицы объема.

$$I \uparrow \Longrightarrow T \uparrow \Longrightarrow \Delta n,$$

где n - показатель преломления вещества. Следовательно

$$\Delta n \sim \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)\Delta T$$

$$\Delta T \sim I \Longrightarrow \Delta n \sim \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right) I.$$

Таким образом имеем что под воздействием падающего света меняется показатель преломления вещества. При этом изменение показателя преломления прямо пропорционально интенсивности падающего света:

$$\Delta n \sim I. \tag{2.26}$$

Среды в которых выполняется (2.26) будем в дальнейшем называть фоторефрактивными средами. Как несложно проверить - фоторефрактивные среды - нелинейные оптические среды с кубичной нелинейностью (доп. задание для студентов).

Электронные механизмы нелинейности можно отличить от фоторефрактивных прежде всего по времени установления нелинейного отклика и его релаксации, которые для фоторефрактивных сред обычно - больше.

Явление фоторефракции было обнаружено в 1966 г. при изучении прохождения достаточно мощного лазерного излучения через электрооптические кристаллы $LiNbO_3$, $LiTaO_3$ и некоторые другие. Оказалось, что под воздействием лазерного излучения изменялся показатель преломления кристалла, что приводило к искажению волнового фронта луча. Таким образом луч света портил изначально высокое оптическое качество кристалла - появлялась неоднородность показателя преломления в освещенном участке. Данный факт послужил основанием для первоначального названия эффекта - optical damage (оптическое повреждение). Однако вскоре обратили внимание и на положительные стороны эффекта. Появились предложения о его практическом использовании. В дальнейшем само явление получило название фоторефракции.

Довольно быстро была выявлена физическая суть эффекта фоторефракции в электрооптических кристаллах, состоящая в следующем: под воздействием падающего на кристалл света электроны переносятся в зону проводимости, далее под воздействием процессов диффузии и дрейфа они переносятся в другие места, где захватываются на ловушки. В результате в кристалле образуется неоднородное распределение пространственного заряда, а следовательно, и поля. В силу того факта, что рассматриваемые кристаллы обладают электрооптическим эффектом, в кристалле образуется неоднородное распределение показателя преломления, таким образом производится запись изображения.

Далее говоря о фоторефракции мы будем иметь в виду такие фоточувствительные среды в которых фоторефрактивный эффект обусловлен электрооптическим эффектом на внутренних электрических полях. А сами такие среды будем называть фоторефрактивными кристаллами (ФРК).

Поскольку при фоторефракции изменение показателя преломления является обратимым, то фоторефрактивные кристаллы стали рассматриваться как реверсивные светочувствительные среды.

Вместе с процессами записи голографических решеток представляет интерес процесс дифракции световых пучков на этих самых решетках, что вместе составляет явление самодифракции. Наиболее простой и наиболее изученной здесь является задача о самодифракции двух плоских волн в ФРК.

Далее мы выведем уравнения, описывающие динамику возникновения голографических решеток в ФРК.

2.4.1 Процесс формирования голографических решеток в ФРК

Как на то указывалось выше, процесс формирования поля пространственного заряда условно можно разделить на три составляющие, которые происходят одновременно и, следовательно, уравнения их описывающие, должны решаться совместно: генерации свободных носителей заряда; переноса свободных носителей заряда; формирование поля пространственного заряда. Рассмотрим эти составляющие подробнее. При этом будем предполагать, что свободными носителями заряда являются электроны.

Фоточувствительные центры в ФРК

Задача о возбуждении фотоэлектронов и захвате их на примесные центры является одной из самых главных частей в более общей задаче о формировании поля пространственного заряда. Не смотря на это данная задача в данный момент еще не полностью изучена и мы можем располагать более-менее достоверными данными только для отдельных типов кристаллов.

Совершенно ясно, что важнейшим требованием обеспечивающим формирование поля пространственного заряда, является наличие примесных центров в запрещенной зоне кристалла - доноров, которые обеспечивают появление фотоэлектронов при освещении кристалла. Кроме того, необходимо присутствие центров захвата электронов - глубоких ловушек. В простейшем случае, и донорами и ловушками являются ионы одного и того же типа атомов, но в различном валентном состоянии.

Особую роль играют ионы железа Fe^{2+} и Fe^{3+}. Эта примесь считается важнейшей для таких типов кристаллов, как $LiNbO_3$, $KNbO_3$, $BaTiO_3$

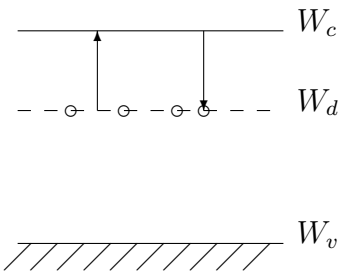

Рис. 2.1: Энергетическая схема ФРК W_c - зона проводимости, W_d - уровень примесных центров (доноров), W_c - валентная зона. Стрелками указаны оптические переходы и процессы рекомбинации подвижных электронов

и др. [11]. При освещении кристалла происходит поглощение света примесями Fe^{2+}, осуществляется дальнейшая ионизация иона с образованием $Fe^{3+}+e$. Электрон уходит из освещенной области пока не будет захвачен ловушкой, в частности, другим ионом Fe^{3+}.

Для важных с практической точки зрения кристаллов BTO ($Bi_{12}TiO_{20}$) и BSO ($Bi_{12}SiO_{20}$) однозначных представлений о наиболее важном типе фотоактивных центров пока нет.

В дальнейшем, прежде всего, мы будем рассматривать именно эти типы кристаллов. В качестве доноров, будем считать что присутствуют некоторые примесные центры N, а в качестве ловушек - ионизированный вариант примесных центров N^+.

Процессы генерации и рекомбинации свободных носителей заряда

Как указывалось выше, падающий на кристалл луч света возбуждает в освещенной области кристалла фотоэлектроны. При этом возбуждение происходит с примесных центров, N. Рекомбинация проходит на ловушки N^+ (см. рис 2.1). Обозначим через N_D - концентрацию всех примесей в кристалле (N_D - величина постоянная для данного кристалла), через N_D^+ - концентрацию ионизированных доноров (они же - ловушки).

Скорость "генерации"ловушек (она же - скорость генерации фотоэлектронов) пропорциональна концентрации доноров $N_D - N_D^+$ и интенсивности падающего света I. Коэффициент пропорциональности s назы-

вается сечением фотоионизации.

Скорость рекомбинации электронов пропорциональна концентрации ловушек N_D^+ и концентрации свободных носителей заряда (электронов в нашем случае) n. Коэффициент пропорциональности обозначим через γ_R (так называемая константа рекомбинации).

Объединяя вышеизложенное можно записать:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = sI\left(N_D - N_D^+\right) - \gamma_R n N_D^+, \tag{2.27}$$

При выводе данного соотношения не учитывалась так называемая "темновая"(тепловая) генерация носителей заряда.

Процессы переноса свободных носителей заряда

В дальнейшем при рассмотрении процессов переноса свободного заряда будем учитывать только дрейф (см. рис.2.3) и диффузию электронов (см. рис.2.2). Это означает, что мы пренебрегаем в частности фотовольтаическим эффектом[1]. Данное пренебрежение возможно в силу малости фотовольтаического эффекта для рассматриваемых типов кристаллов.

Для описания процессов переноса носителей заряда запишем два уравнения. Первое, так называемое уравнение баланса, описывает изменение концентрации носителей заряда за счет процессов генерации - рекомбинации, а также за счет переноса носителей

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla j. \tag{2.28}$$

Следующее - уравнение для тока в котором учитывается перенос зарядов посредством диффузионного и дрейфового механизмов

$$j = e\mu n E + D\nabla n, \tag{2.29}$$

$$E = E_0 + E_{sc}, \tag{2.30}$$

где обозначено через μ - подвижность электронов, D - коэффициент диффузии. Электрическое поле E, определяемое соотношением (2.30) состоит из двух частей: постоянного поля E_0, определяемого внешними условиями и искомого поля пространственного заряда E_{sc}.

[1]при фотовальтаическом эффекте плотность тока j пропорцианальна интенсивности падающего света, то есть $j \sim I$

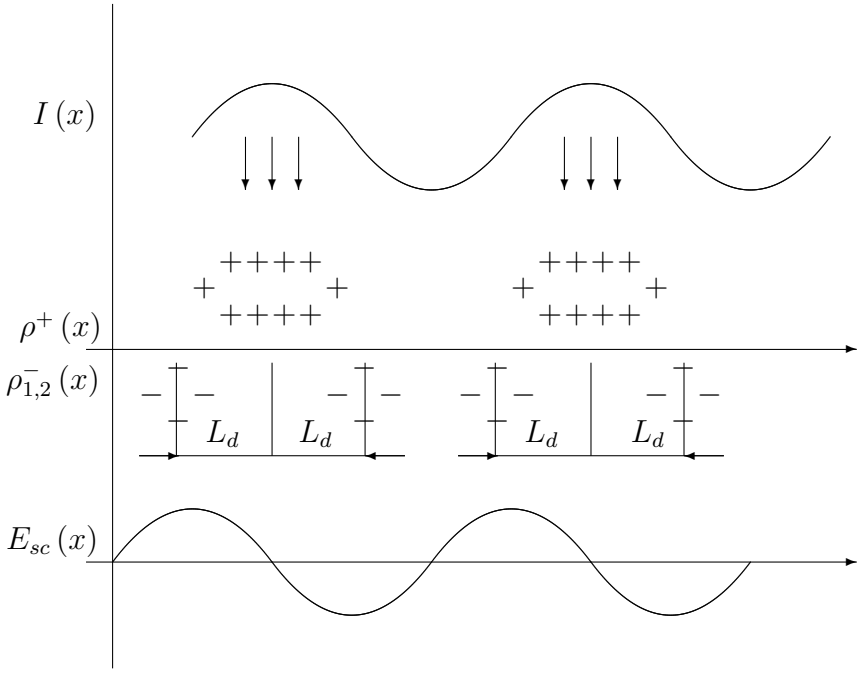

Рис. 2.2: Формирование решеток заряда и электрического поля в случае диффузионного механизма записи

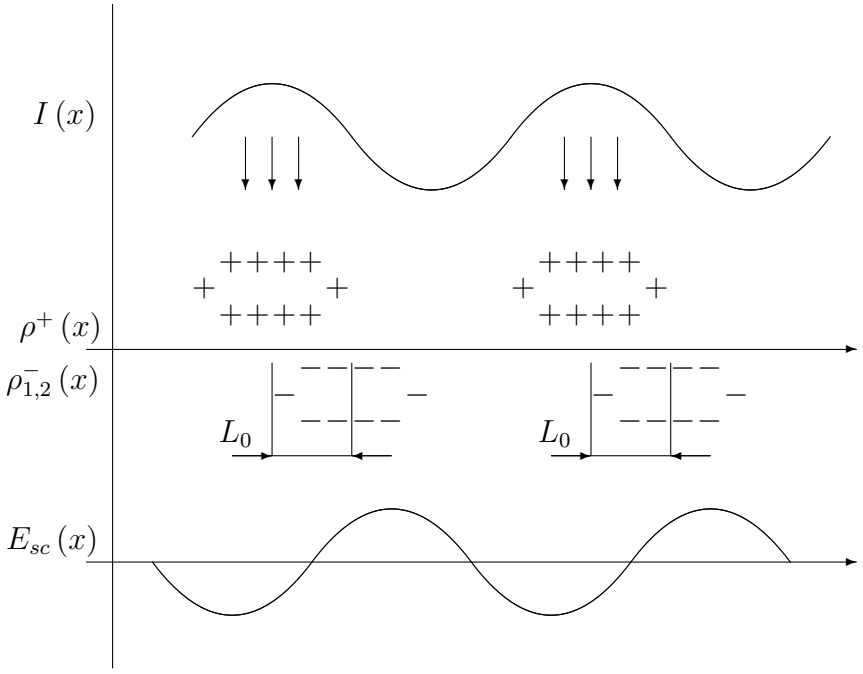

Рис. 2.3: Формирование решеток заряда и электрического поля в случае дрейфового механизма записи

Процесс формирования поля пространственного заряда

Процесс формирования поля пространственного заряда описывается уравнением Пуассона

$$\nabla E = -\frac{4\pi e}{\varepsilon}\left(n + N_A - N_D^+\right), \tag{2.31}$$

в левой части которого записана суммарная плотность заряда. Через N_A обозначена концентрация отрицательных зарядов (акцепторов).

В темновых условиях некоторая часть примесных центров свободна от электронов, т. е. $N_D^+\big|_{I=0} \neq 0$ Компенсирующие акцепторные уровни полностью заполнены электронами, так чтобы в темновых условиях компенсировать N_D^+, т. е. $N_D^+\big|_{I=0} = N_A$. Так в частности для кристаллов BSO: $N_D = 10^{19}\text{см}^{-3}$ [13] , $N_A = 10^{16}\text{см}^{-3}$ [14]

Линейный электрооптический эффект в ФРК

Важнейшим механизмом фоторефракции, обеспечивающим формирование голографических решеток, является электрооптический эффект. С точки зрения кристаллооптики в основе электрооптического эффекта лежит зависимость компонент тензора диэлектрической непроницаемости $\check{a}_{ij}$ ($\check{a} = \varepsilon^{-1}$) от приложенного электрического поля E если связь линейна, то этот эффект носит название эффекта Поккельса или линейного электрооптического эффекта. Если связь квадратична - то данное явление носит название эффекта Керра. В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно эффект Поккельса. Необходимым условием для существования эффекта Поккельса является отсутствие центра инверсии в кристалле. Линейная связь обычно записывается в виде

$$\delta\check{a}_{ij} = \sum_k r_{ijk}E_k,$$

где r_{ijk} - тензор электрооптических коэффициентов. При этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости для кубических кристаллов

$$\delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon^2 \sum_k r_{ijk}E_k$$

В дальнейшем мы будем предполагать линейную связь и считать

$$\delta\varepsilon = \alpha E. \tag{2.32}$$

Система уравнений, описывающая процесс формирования голографических решеток в ФРК

Как на то указывалось выше уравнения (2.27 - 2.31) должны решаться совместно, т. о. система уравнений, описывающая процесс формирования голографических решеток в ФРК выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = sI\left(N_D - N_D^+\right) - \gamma_R n N_D^+,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla j,$$

$$j = e\mu n E + D\nabla n,$$

$$\nabla E = -\frac{4\pi e}{\varepsilon}\left(n + N_A - N_D^+\right), \qquad E = E_0 + E_{sc},$$

$$\delta\varepsilon = \alpha E.$$

$$N_A = N_D^+\Big|_{I=0}, \qquad N_D = const|_t, \qquad N_A = const|_t. \tag{2.33}$$

В заключение имеет смысл привести численные значения параметров, используемых в описанных выше уравнениях (см. табл. 2.1).

2.4.2 Решение системы уравнений, описывающей процесс формирования поля пространственного заряда

В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать что кристалл освещается двумя плоскими волнами(см. рис 2.4):

$$E\left(\overrightarrow{r}\right) = E_1 e^{i\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{r}} + E_2 e^{i\overrightarrow{k}_2\overrightarrow{r}}$$

Как видно мы предполагаем что поляризация обоих плоских волн одинакова.

Суммарная интенсивность падающего света:

$$I = \left|E\left(\overrightarrow{r}\right)\right|^2 = \left|E_1 e^{i\overrightarrow{k}_1\overrightarrow{r}} + E_2 e^{i\overrightarrow{k}_2\overrightarrow{r}}\right|^2,$$

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	BSO	$BaTiO_3$
Диэлектрическая проницаемость	ε	-	56	4300
Концентрация доноров	N_D	см^{-3}	10^{19}	-
Концентрация акцепторов	N_A	см^{-3}	10^{16}	$2 \cdot 10^{16}$
Сечение фотоионизации	s	см^2	$1.6 \cdot 10^{-19}$	-
Коэффициент рекомбинации	γ_R	$\frac{\text{см}^3}{\text{с}}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-8}$
Подвижность	μ	$\frac{\text{см}^2}{\text{В}\cdot\text{с}}$	0.03	0.5
Электрооптический коэффициент	α	$\frac{\text{см}}{\text{В}}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.1: Параметры материалов BSO и $BaTiO_3$

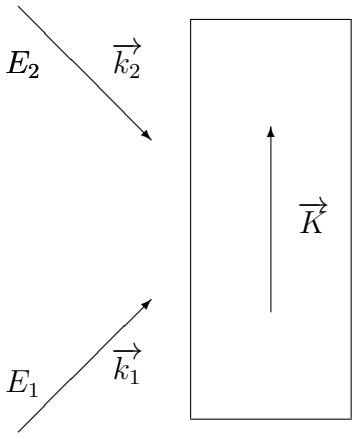

Рис. 2.4: Постановка задачи

т. е.

$$I\left(\overrightarrow{r}\right) = I_0\left(1 + m\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + m^*\left(K\right)e^{-i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}}\right),$$

где через I_0 обозначено

$$I_0 = \left|E_1 + E_2\right|^2$$

и через $m\left(K\right)$ обозначена глубина модуляции светового поля

$$m\left(K\right) = \frac{E_{k_1}E^*_{k_2}}{I_0}, \qquad \overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}_1 - \overrightarrow{k}_2$$

Далее представляется удобным использовать следующую комплексную форму записи электрического поля

$$E\left(\overrightarrow{r}\right) = E_0 + E_{sc}\left(\overrightarrow{r}\right) = E_0 + E_{sc}\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.,$$

а также других величин входящих в рассматриваемую систему уравнений

$$n\left(\overrightarrow{r}\right) = n_0 + \check{n}\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.,$$

$$j\left(\overrightarrow{r}\right) = j_0 + \check{j}\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.,$$

$$N^+_D\left(\overrightarrow{r}\right) = N^+_{D0} + \check{N}^+_D\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.,$$

$$N_D\left(\overrightarrow{r}\right) = N_{D0} + \check{N}_D\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.,$$

$$N_A\left(\overrightarrow{r}\right) = N_{A0} + \check{N}_A\left(K\right)e^{i\overrightarrow{K}\overrightarrow{r}} + c.c.$$

В дальнейшем будем полагать $\left|m\left(K\right)\right| \ll 1$, при этом $\left|\check{n}\left(K\right)\right| \ll \left|n_0\right|$ и $\left|\check{N}^+_D\left(K\right)\right| \ll \left|N^+_{D0}\right|$. Данное предположение справедливо, в частности, когда перекачка энергии между исходными плоскими волнами не слишком велика.

Решение для нулевого порядка малости

Прежде всего получим выражение для n_0. Для этого запишем (2.27) в случае нулевого порядка :

$$\frac{\partial N^+_{D0}}{\partial t} = sI_0\left(N_{D0} - N^+_{D0}\right) - \gamma_R n_0 N^+_{D0}.$$

Уравнение (2.28) запишем как

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial N^+_{D0}}{\partial t}.$$

Из последнего соотношения исключен член $\frac{\partial j_0}{\partial x}$ в силу того что $j_0 = const_x$.

Таким образом

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = sI_0\left(N_{D0} - N_{D\,0}^{+}\right) - \gamma_R n_0 N_{D\,0}^{+}.$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения оказывается удобным сделать дополнительное предположение о квазистационарном распределении электронов в зоне проводимости, отвечающем распределению по образцу электрического поля $E\left(\overrightarrow{r}\right)$ в рассматриваемый момент времени, при котором написанное выше соотношение переходит в

$$sI_0\left(N_{D0} - N_{D\,0}^{+}\right) = \gamma_R n_0 N_{D\,0}^{+}.$$

Возможность такого предположения связана с тем, что среднее время жизни электрона в зоне проводимости фоторефрактивного кристалла $\tau \approx 10^{-6} - 10^{-9}$ с., поэтому среднее время установления стационарного распределения $n\left(\overrightarrow{r}\right)$, для заданных $I\left(\overrightarrow{r}\right)$ и $E\left(\overrightarrow{r}\right)$ оказывается, как правило, намного меньшим времени записи голограммы, т. е. характерного времени заметного изменения $E_{sc}\left(\overrightarrow{r}\right)$

Таким образом

$$n_0 = \frac{sI_0\left(N_{D0} - N_{D\,0}^{+}\right)}{\gamma_R N_{D\,0}^{+}}. \tag{2.34}$$

Учитывая очевидное соотношение $n_0 = const_x$, имеем

$$n_0 + N_{A0} - N_{D\,0}^{+} = 0, \tag{2.35}$$

откуда

$$n_0 = \frac{sI_0\left(N_{D0} - n_0 - N_{A0}\right)}{\gamma_R\left(n_0 + N_{A0}\right)}.$$

Учитывая [10], где сделана оценка для $n_0 = 10^9 - 10^{12}$ см$^{-3}$. Вспомнив, что для кристаллов BSO: $N_D = 10^{19}$см$^{-3}$, $N_A = 10^{16}$см$^{-3}$ имеем

$$n_0 \ll N_{D0} - N_{A0}, \qquad n_0 \ll N_{A0} \tag{2.36}$$

несложно окончательно записать

$$n_0 = \frac{sI_0\left(N_{D0} - N_{A0}\right)}{\gamma_R N_{A0}}. \tag{2.37}$$

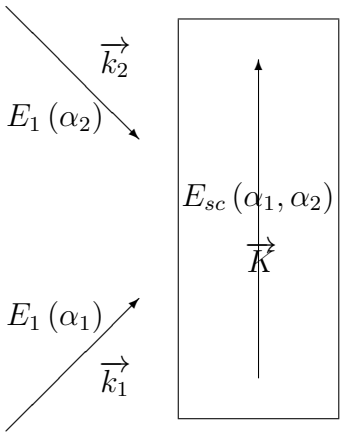

Рис. 2.5: Запись синусоидальной решетки в ФРК

Решение для первого порядка малости

В дальнейшем предполагается получить выражение для $E_{sc}(K)$, при этом будет предполагаться малость соответствующих величин $|\check{m}(K)| \ll 1$, $|\check{n}(K)| \ll |n_0|$, $\left|\check{N}_D(K)\right| \ll |N_{D0}|$ и $\left|\check{N}_D^+(K)\right| \ll \left|N_{D0}^+\right|$, так что в уравнениях будем пренебрегать членами квадратичными по малому параметру m ($\check{n}$, $\check{N}_D$, $\check{N}_D{}^+$). Кроме того в целях удобства будем считать, что вектор $\overrightarrow{K}$, соответствующий рассматриваемым плоским волнам, направлен вдоль оси OX (см. рис 2.5).

Запишем уравнения для первого порядка малости. Уравнение (2.27) запишется в этом случае в виде:

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m\left(N_D - N_{D0}^+\right) - \gamma_R \check{n} N_{D0}^+ - sI_0 \check{N}_D^+ + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R n_0 \check{N}_D^+,$$

Откуда с учетом (2.35)

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m\left(N_D - n_0 - N_{A0}\right) + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R \check{n}\left(n_0 + N_{A0}\right) - sI_0 \check{N}_D^+ - \gamma_R n_0 \check{N}_D^+,$$

далее вспомнив про (2.36) окончательно получаем

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = sI_0 m\left(N_D - N_{A0}\right) + sI_0 \check{N}_D - \gamma_R \check{n} N_{A0} - \left(sI_0 + \gamma_R n_0\right)\check{N}_D^+. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.28) перепишем в виде

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} + iK\frac{1}{e}\check{j}. \quad (2.39)$$

Уравнение (2.29) в виде

$$\check{j} = e\mu n_0 E_{sc} + e\mu \check{n} E_0 + iKeD\check{n}. \tag{2.40}$$

В дальнейшем имеет смысл рассмотреть ситуацию при которой до момента времени $t = 0$ кристалл не освещался, так что

$$I|_{t<0} = 0,$$

откуда с учетом (2.33) и , очевидного в данной ситуации соотношения,

$$\check{n}|_{t<0} = 0$$

имеем

$$\check{n} + \check{N}_A - \check{N}_D^+\Big|_{t<0} = 0.$$

Перепишем уравнение (2.31) в виде

$$iKE_{sc} = -\frac{4\pi e}{\varepsilon}\left(\check{n} - \check{N}_D^+\right), \tag{2.41}$$

или с учетом (2.39) в виде

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{e\varepsilon}\check{j}. \tag{2.42}$$

Концентрацию акцепторных примесей $\check{N}_A$ в (2.42) можно учесть с помощью начального условия

$$E_{sc}|_{t=0} = 0.$$

Вводя следующие обозначения

$$\tau_R = \frac{1}{\gamma_R N_{A0}}$$

и

$$\tau_I = \frac{1}{sI_0 + \gamma_R n_0},$$

запишем с учетом (2.37) выражение (2.38) в виде

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = \frac{(m + m_0)\, n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{N}_D^+}{\tau_I}, \tag{2.43}$$

где

$$m_0 = \frac{\check{N}_D}{N_{D0} - N_{A0}}.$$

Далее из (2.41) несложно получить

$$\check{N}_D^+ = iK\frac{\varepsilon}{4\pi e}E_{sc} + \check{n}$$

и, обозначая

$$E_q = \frac{4\pi e N_{A0}}{\varepsilon K\left(1 + \frac{N_{A0}}{N_{D0}-N_{A0}}\right)}, \tag{2.44}$$

окончательно получим из (2.43)

$$\frac{\partial \check{N}_D^+}{\partial t} = \frac{(m+m_0)\,n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_I} - i\frac{n_0}{\tau_R}\frac{E_{sc}}{E_q}, \tag{2.45}$$

Подставив (2.45) и (2.40) в (2.39), можно получить уравнение для $\check{n}$

$$\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = \frac{(m+m_0)\,n_0}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_R} - \frac{\check{n}}{\tau_I} - i\frac{n_0}{\tau_R}\frac{E_{sc}}{E_q} + i\frac{n_0}{\tau_E}\frac{E_{sc}}{E_0} + i\frac{\check{n}}{\tau_E} - \frac{\check{n}}{\tau_D},$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau_E &= \frac{1}{K\mu E_0}, \\ \tau_D &= \frac{1}{K^2 D}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Снова учитывая предположение о квазистационарности распределения свободных носителей заряда в зоне проводимости, т. е. предполагая что $\frac{\partial \check{n}}{\partial t} = 0$ имеем для $\check{n}$

$$\check{n} = \frac{\tau}{\tau_R} n_0 \left(m + m_0 + iE_{sc}\left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q}\right)\right), \tag{2.47}$$

где введены следующие обозначения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_D} - i\frac{1}{\tau_E},$$

и

$$E_m = \frac{\gamma_R N_{A0}}{K\mu}. \tag{2.48}$$

Подставим теперь (2.40) в (2.42)

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu n_0}{\varepsilon}\left(E_{sc} + \frac{\check{n}}{n_0}E_0 + i\frac{\check{n}}{n_0}E_D\right),$$

Обозначение	Формула	Ед. изм.	BSO	$BaTiO_3$
τ_R	$\tau_R = \frac{1}{\gamma_R N_{A0}}$	с	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$
E_m		$\frac{\text{В}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{K}$	$0.66 \cdot 10^7$	$0.5 \cdot 10^9$
E_q		$\frac{\text{В}}{\text{см}^2} \cdot \frac{1}{K}$	$1.0 \cdot 10^6$	$0.28 \cdot 10^5$

Таблица 2.2: Некоторые параметры эволюционного уравнения поля пространственного заряда E_{sc} для материалов BSO и $BaTiO_3$, K - волновой вектор

где обозначено

$$E_D = \frac{KD}{\mu}. \tag{2.49}$$

Записав

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{4\pi\mu n_0}{\varepsilon} \tag{2.50}$$

и обозначив

$$\tau_{eff} = \tau_m \frac{\tau_R}{\tau}, \tag{2.51}$$

с учетом (2.47) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = &- (m + m_0)(E_0 + iE_D) - \\ &- E_{sc}\left(1 + (E_0 + iE_D)\left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Очень часто рассматривают задачу, в которой внешние поля E_0 и E_D малы, так что

$$E_0 \ll E_m, E_q$$

и

$$E_D \ll E_m, E_q$$

Для этого случая,

$$\tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = - (m + m_0)(E_0 + iE_D) - E_{sc}. \tag{2.53}$$

На основании данных таблицы 2.1 можно подсчитать параметры, которые входят в соотношение 2.52. Результаты представлены в таблице 2.2.

2.4.3 Стационарный режим записи

Особый интерес представляет стационарный режим записи решеток поля пространственного заряда E_{sc} при котором

$$\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = 0. \tag{2.54}$$

При этом имеет смысл рассмотреть два предельных случая:

- $E_0, E_D \ll E_m, E_q$
- $E_0, E_D \gg E_m, E_q$

В первом случае E_{sc}^{st} определяется из (2.53) и (2.54) следующим соотношением

$$E_{sc}^{st} = -\left(m + m_0\right)\left(E_0 + iE_D\right). \tag{2.55}$$

В этом случае стационораное поле пространсвенного заряда определяется величиной внешних полей.

Во втором случае, прежде заметим, что как следует из таблицы 2.2, в частности для кристаллов $BaTiO_3$:

$$E_m \gg E_q,$$

так что

$$\frac{1}{E_m} \ll \frac{1}{E_q}. \tag{2.56}$$

Откуда с учетом (2.52) и (2.54) находим

$$E_{sc}^{st} = \left(m + m_0\right) E_q. \tag{2.57}$$

Соотношение (2.57) говорит о том что максимально возможное поле пространственного заряда определяется параметрами кристалла и не зависит от внешних условий, в частности от приложенного внешнего поля. Действительно с учетом очевидных соотношений

$$m_0 \ll 1$$

и

$$m \ll 1$$

имеем из (2.44)

$$E_{sc}^{st} \ll E_q \approx \frac{4\pi e N_{A0}}{\varepsilon K}.$$

Это соотношение отражает очевидный факт, что в ФРК с ограниченной концентрацией ловушек максимальная амплитуда зарядовой решетки не может превосходить eN_{A0} - откуда в соответствии с уравнением Пуассона (2.31) максимальная амплитуда решетки поля оказывается ограниченной величиной

$$\frac{4\pi eN_{A0}}{\varepsilon K}.$$

2.5 Заключение

В заключение приведем краткую сводку результатов полученных в данной главе:

- Поляризация среды - дипольный момент единицы объема является реакцией среды на внешнее электромагнитное воздействие.
- Поляризация среды может быть представлена в виде ряда по внешнему полю.
- Существует два подхода к описанию нелинейных восприимчивостей: феноменологический (общий подход) и расмотрение конкретных можельных систем.
- При рассмотрении модели электрона в некоторой потенциальной яме нами был получен важный результат: линейный и квадратичный отклики среды имеют одинаковый порядок когда внешнее воздействие имеет порядок внутриатомного поля
- Существует особый класс сред - фоторефрактивные кристаллы в которых реакция среды на внешнее электромагнитное поле обусловлена электрооптическим эффектом на внутренних электрических полях. В результате время отклика в этом случае намного больше чем когда реакция среды обусловлена нелинейным откликом отдельного атома или молекулы.

В качестве материала для этой главы (кроме тех источников что указаны прямо в тексте) использовались

- [9] - для всего кроме фоторефрактивных материалов
- [1] - феноменологическое описание восприимчивостей и нелинейная восприимчивость газа свободных электронов
- [4, 16] - фоторефрактивные материалы

Глава 3

Нелинейные оптические явления в среде с квадратичной нелинейностью

В предыдущих лекциях шла речь о локальных параметрах вещества описывающих нелинейный отклик вещества на внешнее ЭМ поле. Грубо говоря мы описывали через восприимчивости дипольный момент (линейный и нелинейный), наводимый в веществе полем некоторой напряженности. Теперь мы попробуем описать как будет переизлучать нелинейная среда возбуждаемая бегущей ЭМ волной и имеющая размеры много большие длины волны.

Зададим накачку (волну падающую на нелинейный кристалл) в следующем виде (с различными вариациями возможных обозначений):

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_1\left(\vec{k},\omega\right) \equiv \vec{E}_1(\omega) \equiv \vec{E}_1^{(inc)} \equiv \vec{e_1} A_1^{(inc)} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}$$

Это поле возбуждает в нелинейном кристалле длиной l локальную нелинейную поляризацию второго порядка

$$\vec{P}^{NL}(2\omega) = \hat{\chi}^{(n)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{E}_1(\omega)\,\vec{E}_1(\omega)$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать что нелинейная среда занимает верхнее полупространство: $z > 0$.

Естественным образом в дальнейшем мы будем опираться на систему уравнений Максвела, которая имеет нелинейность в материальных уравнениях.

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$
$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}^{(L)} + 4\pi\vec{P}^{(NL)}. \tag{3.1}$$

Иногда для решения задачи используется общий вид системы (3.1), однако чаще представляется удобным использовать ее частное представление, часто называемое волновым уравнением.

В системе (3.1) с нелинейными материальными уравнениями фигурирует некоторе полное ЭМ поле $\left\{\vec{E}, \vec{H}\right\}$, а не просто поле накачки $\vec{E}^{(inc)}$, падающее на нелинейный кристалл из линейной среды. Для этого полного поля $\vec{E}\left(\vec{r}, t\right)$ мы имеем следующее волновое уравнение:

$$rotrot\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P^{(L)}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P^{NL)}}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.2}$$

3.1 Генерация второй гармоники. Метод малого параметра

Уравнение (3.2) - нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которое мы будем решать на первом этапе по методу теории возмущений.

Отличие полного поля $\vec{E}$ от падающего $\vec{E}^{(inc)}$ связано с наличием $\vec{P}^{(NL)}$. Параметром малости будет у нас следующая величина $\mu \sim \frac{P^{(NL)}}{P^{(L)}}$. Можно показать что $\mu \ll 1$. Действительно, справедливы следующие соотношения и оценки:

$$P^{(NL)} \sim \hat{\chi}^{(2)}E^2, \quad \hat{\chi}^{(2)} \sim \frac{1}{E_0},$$

где E_0 - характерное внутриатомное поле.

$$P^{(L)} \sim \hat{\chi}^{(1)}E, \quad \hat{\chi}^{(1)} \sim 1.$$

Тогда имеем

$$\frac{P^{(NL)}}{P^{(L)}} \sim \frac{E}{E_0} \ll 1.$$

Итак ищем решение для нелинейного волнового уравнения (3.2) в области $z > 0$ в следующем виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_1\mu^0 + \vec{E}_2\mu^1 + \vec{E}_3\mu^2 + \ldots = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\mu + \vec{E}_3\mu^2 + \ldots \tag{3.3}$$

Подставим решение вида (3.3) в (3.2) и сгрупируем члены одинаковой степени по малому параметру μ.

3.1.1 Нулевой порядок теории возмущений

Группировка членов нулевого порядка (т. е. при μ^0) по малому параметру μ дает обычное волновое уравнение линейной оптики для поля накачки $\vec{E}_1(\vec{r},t)$:

$$\Delta\vec{E}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{E}_1 + 4\pi\vec{P}_1^{\,(L)}\right) = 0,$$

где

$$\vec{P}_1^{\,(L)}(\omega) = \hat{\chi}^{(1)}(\omega)\,\vec{E}_1(\omega),$$

и окончательно

$$\Delta\vec{E}_1 - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2} = 0.$$

Сшивание решений этого волнового уравнения для двух полупространств $z > 0$ и $z < 0$ дает нам результат известный как формулы Френеля. Учет формул Форенеля, т. е. решения линейной оптики является необходимым этапом решения задачи в целом.

3.1.2 Первый порядок теории возмущений

Группировка членов первого порядка (т. е. при μ) по малому параметру μ дает неоднородное волновое уравнение для поля $\vec{E}_2(\vec{r},t)$:

$$\Delta\vec{E}_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{E}_2 + 4\pi\vec{P}_2^{\,(L)}\right) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_2^{\,(NL)}}{\partial t^2},$$

где $\vec{P}_2^{\,(L)}(2\omega) = \hat{\chi}^{(1)}(2\omega)\,\vec{E}_2(2\omega)$ – линейная поляризация на частоте второй гармоники (ВГ), а нелинейная поляризация $\vec{P}_2^{\,(NL)}(2\omega) = \hat{\chi}^{(2)}(2\omega) : \vec{E}_1(\omega)\,\vec{E}_1(\omega)$ определяется полем $\vec{E}_1(\vec{r},t)$, полученным в нулевом приближении. Окончательно в области $z > 0$ имеем:

$$\Delta\vec{E}_2(2\omega) - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_2(2\omega)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}_2^{\,(NL)}(2\omega)}{\partial t^2}. \tag{3.4}$$

Правая часть уравнения (3.4) содержит нелинейные источники однозначно заданные полем накачки внутри кристалла. Как известно из линейной оптике это преломленное поле. Таким образом нелинейная поляризация однозначно определяется прошедшим (transmit) полем

$$\vec{E}_1(\omega) \equiv \vec{E}_1^{\,(tr)}(\omega) = \vec{e_1}^{(tr)} A_1^{(tr)}(\omega)\exp\left\{-i\left(\omega t - \vec{k}_1^{(tr)}\vec{r}\right)\right\}.$$

Таким образом для нелинейной поляризации в первом порядке теории возмущений можно записать -

$$\vec{P}_2^{\,(NL)}(2\omega) = \\ = \hat{\chi}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{e_1}^{(tr)}\vec{e_1}^{(tr)}\left(A_1^{(tr)}\right)^2 \exp\left\{-i\left(2\omega t - 2\vec{k}_1^{(tr)}\vec{r}\right)\right\} = \\ = \vec{p}P_0 \exp\left\{-i\left(2\omega t - \vec{k}_p\vec{r}\right)\right\}. \quad (3.5)$$

В (3.5) модуль волнового вектора нелинейной поляризации определяется следующим соотношением:

$$\left|\vec{k}_p\right| = \left|2\vec{k}_1^{(tr)}\right| = \frac{2\varepsilon^{1/2}(\omega)\,\omega}{c} = \frac{2\omega n(\omega)}{c},$$

а орт нелинейной полризации $\vec{p}$ сверткой:

$$\vec{p} = \hat{\chi}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{e_1}^{(tr)}\vec{e_1}^{(tr)}.$$

Следует отметить что в методе теории возмущений решение для нулевого приближения $\vec{E}_1$ задано и не менятся при взаимодействии с ЭМ полями более высоких порядков: $\vec{E}_2, \ldots$. Таким образом можно выделить основной недостаток данного метода решения задачи о генерации второй гармоники - в нем не выполняется закон сохранения энергии.

Будем искать решение уравнения (3.5) в следующем виде:

$$\vec{E}_2(\omega) = \left\{\vec{E}_2^{(free)} + \vec{E}_2^{(ind)}\right\} + \vec{E}_2^{(ref)}. \quad (3.6)$$

Слагаемые в фигурных скобках - представляют собой решение в полуплоскости $z > 0$ т. е. в нелинейном кристалле. $\vec{E}_2^{(free)}$ - решение однородного уравнения, т. е. уравнения с нулевой нелинейной поляризацией. $\vec{E}_2^{(ind)}$ - частное решение уравнения (3.5) в полуплоскости $z > 0$ (ind - induced). Вместе с тем наше решение должно быть непрерывным что приводит к появлению третьего слагаемого $\vec{E}_2^{(ref)}$. Это слагаемое представляет собой отраженное (ref - reflected) ЭМ поле в полуплоскости $z < 0$. Это поле возникает, с точни зрения математики, ввиду необходимости удовлетворить граничные условия в $z = 0$ (наше решение должно быть непрерывным, в том числе при $z = 0$).

Прежде всего определимся с решением однородного уравнения, которое можно искать в виде свободной волны -

$$\vec{E}_2^{(free)} = \vec{e}_2^{(free)} A_2^{(free)} \exp\left\{-i\left(2\omega t - \vec{k}_2^{(free)}\vec{r}\right)\right\}. \quad (3.7)$$

В данном решении требуют определения орт поляризации $\vec{e}_2^{(free)}$, амплитуда $A_2^{(free)}$ и волновой вектор $\vec{k}_2^{(free)}$. При этом для волнового вектора

необходимо определить только его направление, т. к. его модуль определяется следующим дисперсионным соотношением:

$$\left|\vec{k}_2^{(free)}\right| = \frac{\varepsilon^{1/2}(2\omega)}{c}(2\omega). \tag{3.8}$$

На то она и "свободная волна" - закон дисперсии для нее однозначно определяется частотой (в нашем случае - 2ω). Выражение (3.8) можно также, и вполне естественно, получить если подставить (3.7) в однородное уравнение для (3.4):

$$\Delta\vec{E}_2(2\omega) - \frac{\varepsilon(2\omega)}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_2(2\omega)}{\partial t^2} = 0.$$

Намного просче обстоят дела с частным решением (3.4). Действительно предположим следующий вид решения для $\vec{E}_2^{(ind)}$:

$$\vec{E}_2^{(ind)} = \vec{e}_2^{(ind)} A_2^{(ind)} \exp\left\{-i\left(2\omega t - \vec{k}_2^{(ind)}\vec{r}\right)\right\}. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.4), получим прежде всего для орта поляризации

$$\vec{e}_2^{(ind)} = \vec{p} = \hat{\chi}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega) : \vec{e_1}^{(tr)}\vec{e_1}^{(tr)}.$$

Волновой вектор индуцированной волны также совпадает с волновым ветором нелинейной поляризации

$$\vec{k}_2^{(ind)} = 2\vec{k}_1^{(tr)}. \tag{3.10}$$

Для амплитуды $A_2^{(ind)}$ после подстановки имеем:

$$A_2^{(ind)}\left\{-k_p^2 + \frac{\varepsilon(2\omega)}{c^2}(2\omega)^2\right\} = -\frac{4\pi}{c^2}(2\omega)^2 P_0^{(NL)},$$

где

$$k_p^2 = \left|\vec{k}_p\right|^2 = \frac{\varepsilon(\omega)(2\omega)^2}{c^2}.$$

Таким образом

$$A_2^{(ind)} = \frac{4\pi P_0^{(NL)}}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}. \tag{3.11}$$

Таким образом для индуцированной волны (частного решения) мы знаем все: волновой вектор, амплитуду и поляризацию.

Для нахождения остающихся неизвестными параметров нашего решения предположим что рассматриваемая среда изотропна, таким образом поляризация всех ЭМ полей в решении (3.6) одинакова:

$$\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{e}_2^{(ind)} \uparrow\uparrow \vec{e}_2^{(free)} \uparrow\uparrow \vec{e}_2^{(ref)}. \tag{3.12}$$

Для нахождения направлений волновых векторов воспользуемся граничными условиями (ГУ):

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(free)} + \vec{E}_2^{(ind)}\Big|_{z=+0} &= \vec{E}_2^{(ref)}\Big|_{z=-0}, \\ \vec{H}_2^{(free)} + \vec{H}_2^{(ind)}\Big|_{z=+0} &= \vec{H}_2^{(ref)}\Big|_{z=-0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Рассмотрим прежде всего первое уравнение системы (3.13) которое с учетом фазовых множителей записывается как:

$$\left(A_2^{(free)} \exp\left\{-i\left(2\omega t - k_{2_x}^{(free)} x\right)\right\} + A_2^{(ind)} \exp\left\{-i\left(2\omega t - k_{2_x}^{(ind)} x\right)\right\}\right)\Big|_{z=+0} = \\ = A_2^{(ref)} \exp\left\{-i\left(2\omega t - k_{2_x}^{(ref)} x\right)\right\}\Big|_{z=-0} \tag{3.14}$$

При этом в (3.14) мы пренебрегли поляризацией в силу (3.12).

Наличие фазовых множителей означает что ГУ должны выполняться в любой точке границы раздела в любой момент времен. В результате из (3.14) с учетом (3.10) получаем:

$$k_{p_x} = k_{2_x}^{(ind)} = k_{2_x}^{(free)} = k_{2_x}^{(ref)} = 2k_{1_x}^{(tr)} = 2k_{1_x}^{(ref)} = 2k_{1_x}^{(inc)}.$$

Направление распространения свободной волны ВГ

Для тангециальной компоненты волнового вектора свободной волны имеем -

$$k_{2_x}^{(free)} = 2k_{1_x}^{(tr)},$$

откуда следует что:

$$k_2^{(free)} sin\theta_2^{(free)} = 2k_1^{(tr)} sin\theta_1^{(tr)}$$

или

$$\frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(2\omega)}sin\theta_2^{(free)} = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}sin\theta_1^{(tr)}.$$

Таким образом

$$\frac{sin\theta_2^{(free)}}{sin\theta_1^{(tr)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(2\omega)}} \equiv \frac{n(\omega)}{n(2\omega)}.$$

В среде с нормальной дисперсией

$$\varepsilon(2\omega) > \varepsilon(\omega).$$

Таким образом в такой среде "преломленная" волна ВГ идет круче к нормали чем преломленная волна накачки:

$$\theta_2^{(free)} < \theta_1^{(tr)}.$$

Направление распространения отраженной волны ВГ

Для тангециальной компоненты волнового вектора отраженной волны имеем -

$$k_{2_x}^{(ref)} = 2k_{1_x}^{(ref)},$$

откуда следует что:

$$k_2^{(ref)} sin\theta_2^{(ref)} = 2k_1^{(ref)} sin\theta_1^{(ref)}$$

или

$$\frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(2\omega)} sin\theta_2^{(ref)} = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} sin\theta_1^{(ref)}.$$

Таким образом

$$\frac{sin\theta_2^{(ref)}}{sin\theta_1^{(ref)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(2\omega)}} \equiv \frac{n(\omega)}{n(2\omega)}.$$

При отсутствии дисперсии, например в вакууме,

$$\varepsilon(2\omega) = \varepsilon(\omega)$$

и тогда отраженная волна второй гармоники будет коллинеарна отраженной волне первой гармоники:

$$\theta_2^{(ref)} = \theta_1^{(ref)}.$$

Если же линейная среда обладает нормальной дисперсией - тогда "отраженная" волна ВГ идет круче к нормали чем отраженная волна накачки:

$$\theta_2^{(ref)} < \theta_1^{(ref)}.$$

Амплитуды волн участвующих во взаимодействии

При получении выражений для амплитуд мы будем рассматривать случай нормального падения, что упрощает геометрические факторы. Таким образом будем предполагать что волновой вектор направле по оси z.

В качестве заготовки получим связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в рассматриваемом нами случае нормального падения. Для плоской волны имеем:

$$\left[\vec{k}\vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{H}.$$

Для отраженной волны в силу того что волновой вектор $\vec{k}$ направлен противоположно оси OZ это соотношение трансформируется в

$$\frac{\omega}{c}H_x = -k_z E_y.$$

Поскольку $k_z = \left|\vec{k}\right|$ имеем

$$H_x = -\sqrt{\varepsilon}E_y \tag{3.15}$$

Рассмотрим теперь граничные условия для амплитуд игнорируя экспоненциальный множитель который теперь не важен:

$$E_{2y}|_{z=+0} = E_{2y}|_{z=-0}\,,$$

$$H_{2x}|_{z=+0} = H_{2x}|_{z=-0}\,.$$

Подставим теперь в эти соотношения решения ВГ в верхнем и нижнем полупространствах: Из первого соотношения мы получим следующее -

$$A_2^{(ref)} = A_2^{(free)} + A_2^{(ind)}. \tag{3.16}$$

Из второго граничного условия с учетом связи (3.15):

$$\sqrt{\varepsilon_1(2\omega)}A_2^{(ref)} = -\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)}A_2^{(free)} - \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}A_2^{(ind)}.$$

Исключая $A_2^{(free)}$ из этих двух уравнений получим

$$\left(\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)}\right)A_2^{(ref)} = \left(\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} - \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}\right)A_2^{(ind)},$$

откуда с учетом (3.11) окончательно имеем:

$$A_2^{(ref)} = \frac{-4\pi P^{(NL)}}{\left(\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} + \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)}\right)\left(\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)}\right)}. \tag{3.17}$$

Знак минус в (3.17) означает, что фаза отраженной ВГ противоположна фазе нелинейной поляризации.

Зная амплитуды отраженной $A_2^{(ref)}$ и индуцированных $A_2^{(ind)}$ компонет ВГ из соотношения (3.16) можно определить амплитуду свободной волны ВГ в среде $A_2^{(free)}$:

$$A_2^{(free)} = \frac{4\pi P^{(NL)}}{\varepsilon(2\omega) - \varepsilon(\omega)} - \\ - \frac{4\pi P^{(NL)}}{\left(\sqrt{\varepsilon_2(\omega)} + \sqrt{\varepsilon_2(2\omega)}\right)\left(\sqrt{\varepsilon_2(2\omega)} + \sqrt{\varepsilon_1(2\omega)}\right)}. \tag{3.18}$$

Таким образом мы получили все параметры всех трех волн составляющих полное решение для нелинейного волнового уравнения (3.2) при его решении методом теории возмущений.

3.1.3 Полное прошедшее поле ВГ

Рассмотрим полное прошедщее поле ВГ, т. е. ту часть решения (3.6) которая распространяется в нелинейном кристалле $\vec{E}^{(trnsmitted)}(2\omega)$:

$$\vec{E^{(tr)}}(2\omega) = \vec{E^{(free)}}(2\omega) + \vec{E^{(ind)}}(2\omega)$$

или же расписывая поля

$$\vec{E^{(tr)}}(2\omega) = \vec{p}\left(A_2^{(free)} exp\left\{i\left(2\omega t - k_2^{(tr)}(2\omega)\, z\right)\right\} + A_2^{(ind)} exp\left\{i\left(2\omega t - 2k_1^{(tr)}(\omega)\, z\right)\right\}\right).$$

Таким образом суммарное поле прошедшей волны ВГ в нелиненом кристалле - сумма двух полей с разными амплитудами и фазовыми множителями и может рассматриваться как некоторая интерференционная картина: некоторое поле с медленно изменяющейся амплитудой:

$$\vec{E^{(tr)}}(2\omega) = \vec{p} A_2^{(tr)}(z)\, exp\left\{i\left(2\omega t - k_2^{(tr)}(2\omega)\, z\right)\right\},$$

где зависящая от координаты амплитуда задается следующим соотношением:

$$A_2^{(tr)}(z) = A_2^{(ind)} exp\left\{i\left(k_2^{(tr)}(2\omega) - 2k_1^{(tr)}(\omega)\right) z\right\} + A_2^{(free)} = \\ = A_2^{(ref)} + \frac{4\pi P^{(NL)}\left[exp\left\{i\left(k_2^{(tr)}(2\omega) - 2k_1^{(tr)}(\omega)\right) z\right\} - 1\right]}{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(2\omega)}. \tag{3.19}$$

Введем понятие фазовой растройки

$$\left|\vec{\Delta}\right| = \left|\vec{k_2} - 2\vec{k_1}\right| = \Delta = \frac{2\omega}{c}\left(n(2\omega) - n(\omega)\right)$$

Случай выполнения фазового синхронизма

В случае

$$\Delta \to 0$$

справедливо

$$exp\left(i\Delta z\right) - 1 \to i\Delta z.$$

Тогда для амплитуды суммарного поля прошедшей ВГ имеем:

$$A_2^{(tr)} = A_2^{(ref)} - \frac{i8\pi\omega P^{(NL)} z}{c\left(\sqrt{\varepsilon\left(\omega\right)} + \sqrt{\varepsilon\left(2\omega\right)}\right)}.$$

Таким образом интенсивность прошедшего поля можно записать в этом случае как

$$I_2^{(tr)} \sim I_2^{(ref)} + Bz^2$$

где B некоторая константа. Т. е. эта интенсивность растет с растоянием. Т. е. чем больше размеры кристалла - тем эффективнее генерация ВГ.

Случай невыполнения фазового синхронизма

Во втором случае положим

$$\Delta \neq 0, A_2^{(ref)} = 0.$$

В этом случае

$$I_2^{(tr)} = \frac{16\pi^2\left[P^{(NL)}\right]^2}{\left|\varepsilon\left(\omega\right) - \varepsilon\left(2\omega\right)\right|} 4sin^2\left(\frac{\Delta\cdot z}{2}\right) \tag{3.20}$$

Максимум интенсивности задается соотношением

$$I_{2_{max}}^{(tr)} = \frac{64\pi^2\left[P^{(NL)}\right]^2}{\left|\varepsilon\left(\omega\right) - \varepsilon\left(2\omega\right)\right|}$$

Для осцилирующей зависимости(3.20) некоторым характерным пространственным маштабом является l_{coh} - когерентная длина

$$l_{coh} = \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{k_2 - 2k_1},$$

тогда если ввести длину волны в вакууме λ_0, с учетом

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

имеем

$$l_{coh} = \frac{\lambda_0}{4\left[n\left(2\omega\right) - n\left(\omega\right)\right]}.$$

Для рубинового лазера $\lambda_0 = 700$нм в кварце для кторого $n_2 - n_1 \sim 0.01$ - $l_{coh} \sim 17$мкм.

3.2 Генерация второй гармоники. Метод медленно меняющихся амплитуд. Генерация субгармоник

При решении нелинейного волнового уравнения методом малого параметра можно заметить следующую особенность решения - медленно меняющаяся амплитуда и быстро изменяющийся экспоненциальный множитель. Это позволяет развить новый подход к решению данного уравнения, который позволит нам избавиться от производных второго порядка и перейти к более простой системе в которую входят только уравнения первого порядка в частных производных.

Одномерное волновое уравнение с которым мы будем иметь дело имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом мы взяли уравнение (3.2) в котором оставили только одну продольную координату.

Расмотрим частный случай когда полное поле является суммой двух взаимодействующих плоских монохроматических волн (в общем случае таких волн должно быть три) волны накачки и волны ВГ:

$$\vec{E} = \vec{E_1}(\omega) + \vec{E_2}(2\omega) = \\ = \vec{p_1} A_1(\mu z)\, exp\{i(\omega t - k_1 z)\} + \vec{p_2} A_2(\mu z)\, exp\{i(2\omega t - k_2 z)\}. \quad (3.21)$$

Амплитуды поля $A_1(\mu z)$ и $A_1(\mu z)$ в (3.21) имеют маштаб пространственных изменений порядка $l \gg \lambda$. Под поляризацией в волновом уравнении подразумевается полная поляризация

$$\vec{P} = \vec{P}^{(L)} + \vec{P}^{(NL)}$$

где

$$\vec{P}^{(NL)} = \vec{P}^{(NL)}(\omega) + \vec{P}^{(NL)}(2\omega).$$

Тогда система связанных уравнений для компонент полного поля имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E_1}}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2}\vec{E_1} + \frac{4\pi(\omega)^2}{c^2}\vec{P}^{(NL)}(\omega) = 0, \\ \frac{\partial^2 \vec{E_2}}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon(2\omega)(2\omega)^2}{c^2}\vec{E_2} + \frac{4\pi(2\omega)^2}{c^2}\vec{P}^{(NL)}(2\omega) = 0. \quad (3.22)$$

Ограничемся квадратичной восприимчивостью и для простоты перейдем к скалярному виду полей, тогда для нелинейной поляризации от полного поля имеем:

$$P^{(NL)} = \hat{\chi}^{(2)} E^2 = \hat{\chi}^{(2)} \left\{ E_1 + E_1^* + E_2 + E_2^* \right\}^2 .$$

Это выражение имеет много слагаемых, которые дадут различные комбинации частот для нелинейного члена, однако для нас актуальны следующие члены нелинейной поляризации:

$$P^{(NL)} (2\omega) = \hat{\chi}^{(2)} (2\omega = \omega + \omega) E_1^2 + c.c.,$$
$$P^{(NL)} (\omega) = \hat{\chi}^{(2)} (\omega = 2\omega - \omega) E_2 E_1^* + c.c.$$

Теперь система (3.22) для компонент поля имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} + k_1^2 \vec{E_1} + \frac{4\pi (\omega)^2}{c^2} \hat{\chi}^{(2)} (\omega) E_2 E_1^* = 0, \\ &\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} + k_2^2 \vec{E_2} + \frac{16\pi (\omega)^2}{c^2} \hat{\chi}^{(2)} (2\omega) E_1^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

При этом учитывалось что

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon (\omega)}\omega}{c}.$$

Будем искать решения в виде:

$$E_1 (z,t) = A_1 (\mu z) \, exp \left\{ i (\omega t - k_1 z) \right\},$$
$$E_2 (z,t) = A_2 (\mu z) \, exp \left\{ i (2\omega t - k_2 z) \right\}.$$

Подставим данный вид решения в систему (3.23) и воспользуемся следующими заготовками

$$\frac{\partial E_{1,2}}{\partial z} = \mu \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} exp \left\{ i (\omega t - k_{1,2} z) \right\} - i k_{1,2} E_{1,2},$$
$$\frac{\partial^2 E_{1,2}}{\partial z^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial z^2} exp \left\{ i (\omega t - k_{1,2} z) \right\} -$$
$$-i k_{1,2} \mu \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} exp \left\{ i (\omega t - k_{1,2} z) \right\} -$$
$$-i k_{1,2} \left[\mu \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} exp \left\{ i (\omega t - k_{1,2} z) \right\} - i k_{1,2} E_{1,2} \right].$$

После подстановки подобных выражений в (3.23) и сгруппировав члены при разных степенях μ мы получим, что члены с μ^0 занулятся. Члены с μ^2 мы отбрасываем как малые - в результате получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} + \frac{i2\pi\omega^2\hat{\chi}^{(2)}(\omega)}{c^2 k_1} A_2 A_1 e^{-i\Delta z} = 0, \\ \frac{dA_2}{dz} + \frac{i8\pi\omega^2\hat{\chi}^{(2)}(2\omega)}{c^2 k_2} A_1^2 e^{i\Delta z} = 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

где как и раньше

$$\Delta = 2k_1 - k_2.$$

Для нас важнейшим следствием проведенных упрошений является отсутствие вторых производных - это прямое следствие пренебрежения членами порядка μ^2.

Амплитуды взаимодействующих волн - комплексные величины которые могут быть записаны в следующем виде

$$A_{1,2} = A_{10,20} e^{i\phi_{1,2}},$$

где A_{10}, A_{20} - действительные амплитуды, а ϕ_1, ϕ_2 - фазы.

Система уравнений (3.24), будучи записана для действительных амплитуд приобретает следующий вид (уравнения Хохлова):

$$\begin{aligned} \frac{dA_{10}}{dz} + \sigma_1 A_{20} A_{10} sin\Phi = 0, \\ \frac{dA_{20}}{dz} - \sigma_2 A_{10}^2 sin\Phi = 0, \\ \frac{d\Phi}{dz} - \Delta + \left(2\sigma_1 A_{20} - \sigma_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}}\right) cos\Phi = 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{i2\pi\omega^2\hat{\chi}^{(2)}(\omega)}{c^2 k_1}, \\ \sigma_2 = \frac{i8\pi\omega^2\hat{\chi}^{(2)}(2\omega)}{c^2 k_2}, \\ \Phi = 2\phi_1 - \phi_2 + \Delta z. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Рассмотрим выражения для σ_1 и σ_2, в которых мы можем приравнять $\hat{\chi}^{(2)}(2\omega)$ и $\hat{\chi}^{(2)}(\omega)$ потому что согласно перестановочным правилам

для квадратичной восприимчивости, всегда найдутся компоненты тензора для которых

$$\hat{\chi}^{(2)}_{ijk}(2\omega) = \hat{\chi}^{(2)}_{jki}(\omega).$$

Действительно

$$\hat{\chi}^{(2)}_{ijk}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \hat{\chi}^{(2)}_{jki}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2),$$

откуда при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ имеем $\hat{\chi}^{(2)}(2\omega) = \hat{\chi}^{(2)}(\omega) = \hat{\chi}$. Тогда

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{n_{1,2}},$$

где σ - некоторая константа:

$$\sigma = \frac{i4\pi\hat{\chi}\omega}{c}$$

Покажем теперь, что в отличии от метода малого параметра закон сохранения энергии сейчас выполняется. Для этого домножим первое и второе уравнения системы (3.25) соответственно на $A_{10}\sigma_2$ и $A_{20}\sigma_1$ и сложим их:

$$\frac{d}{dz}\left(\sigma_2 A_{10}^2 + \sigma_1 A_{20}^2\right) = 0,$$

откуда

$$\sigma_2 A_{10}^2 + \sigma_1 A_{20}^2 = const,$$

или же

$$n_1 A_{10}^2 + n_2 A_{20}^2 = const.$$

Тогда для потока энергии:

$$P_{1,2} = \frac{cn_{1,2}}{8\pi} A_{10,20}^2$$

имеем

$$P_1 + P_2 = const.$$

Введем в систему уравнений Хохлова (3.25) поглощение (вводится руками из соображений здравого смысла)

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{10}}{dz} + \delta_1 A_{10} + \sigma_1 A_{20} A_{10} sin\Phi = 0,\\
\frac{dA_{20}}{dz} + \delta_2 A_{20} - \sigma_2 A_{10}^2 sin\Phi = 0,\\
\frac{d\Phi}{dz} - \Delta + \left(2\sigma_1 A_{20} - \sigma_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}}\right) cos\Phi = 0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где $\delta_{1,2}$ - коэфициенты поглощения на соответствующих частотах.

3.2.1 Работа нелинейно-оптического удвоителя частоты при синхронизме

Пусть выполняется условие фазового синхронизма

$$\vec{\Delta} = 2\vec{k_1} - \vec{k_2} \approx 0.$$

Кроме того положим что у нас отсутвует поглощение как на частоте ВГ так и на частоте накачки $\delta_{1,2} = 0$. Зададим следующие граничные условия

$$\begin{aligned} A_{10}|_{z=0} &= A_1(0), \\ A_{20}|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Расмотрим третье уравнение Хохлова вблизи границы $z \to 0$:

$$\frac{d\Phi}{dz} - \Delta + \left(2\sigma_1 A_{20} - \sigma_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}}\right) cos\Phi = 0.$$

При $A_{20} \to 0$ выражение $\sigma_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}} \to \infty$. Таким образом при $\Delta = 0$ чтобы сохранить конечность решения фаза вблизи границы должна быстро изменятся так чтобы $cos\Phi \to 0$. Таким образом третье уровнение довольно быстро (уже при малых z) устанавливает фазу $\Phi = 2\phi_1 - \phi_2$ равной $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ независимо от его начального значения. Таким образом в дальнейшем мы можем позабыть о фазе считая ее оптимальной - $\frac{\pi}{2}$.

Для амплитуд будем решать следующую систему в предположении $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{10}(z)}{dz} + \sigma A_{20}(z) A_{10}(z) &= 0, \\ \frac{dA_{20}(z)}{dz} - \sigma A_{10}^2(z) &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

с граничными условиями (3.28)

Учитывая условие $A_{10}^2(z) + A_{20}^2(z) = A_{10}^2(0)$, второе уравнение системы (3.29) можно записать в виде:

$$\frac{dA_{20}(z)}{dz} = \sigma \left(A_{10}^2(0) - A_{10}^2(z)\right).$$

В результате решение представляется в виде гиперболических функций:

$$\begin{aligned} A_{20}(z) &= A_{10}(0)\, th\left(\sigma A_{10}(0)\, z\right), \\ A_{10}(z) &= A_{10}(0)\, sech\left(\sigma A_{10}(0)\, z\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Качественно зависимоти (3.30) могут быть представленны в следующем виде: FIX ME!!! (add picture).

Одним из характерных параметров является толщина нелинейного кристалла при которой зависимости (3.30) пересекаются: так называемая нелинейная длина:

$$L^{(NL)} = \frac{2}{\sigma A_{10}}. \tag{3.31}$$

При $z = L^{(NL)}$ в излучение ВГ преобразуется 70% мощности излучения накачки.

3.2.2 Работа нелинейно-оптического удвоителя частоты в отсутствие синхронизма

Расмотрим как и ранее случай отсутствия поглощения, но теперь положим, что $\Delta \neq 0$. При наличии фазовой расстройки оптимальная фаза $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ будет сохранться не по всей длине. В-принципе для данного случая надо решать совместно все 3 уравнения (3.25), но мы ограничимся так называемым приближением заданного поля. Т. е. будем предполагать, что

$$A_{10}(z) \approx A_{10}(0),$$
$$A_{20}(z) \ll A_{10}(z).$$

В этом случае система (3.25) приобретает следующий вид:

$$\frac{dA_{20}}{dz} - \sigma_2 A_{10}^2 sin\Phi = 0,$$
$$\frac{d\Phi}{dz} - \Delta - \sigma_2 \frac{A_{10}^2}{A_{20}} cos\Phi = 0.$$

Для аплитуды поля ВГ можно записать:

$$A_{20}(z) = \sigma_2 A_{10}^2 \int_0^z sin\Phi dz,$$

с учетом чего уравнение для фазы приобретает следующий вид

$$\frac{d\Phi}{dz} = \Delta + \frac{cos\Phi}{\int_0^z sin\Phi dz} = 0.$$

На границе нелинейной среды будем предполагать как и раньше $\Phi = \frac{\pi}{2}$, затем фаза из-за растройки будет меняться. Решение будем искать в виде:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha z,$$

где α - неизвестный параметр подлежащий определению. Подставляя такой вид решения в уравнение получаем:

$$\alpha = \Delta - \frac{sin\alpha z}{\frac{1}{\alpha} sin\alpha z} = \Delta - \alpha$$

или

$$\alpha = \frac{\Delta}{2}.$$

Это означает, что закон изменения фазы имеет вид:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} z.$$

Зная этот закон мы можем найти закон изменения амплитуды:

$$A_{20}(z) = \sigma_2 A_{10}^2 \int_0^z cos\left(\frac{\Delta}{2} z\right) dz = \frac{2\sigma_2 A_{10}^2}{\Delta} sin\left(\frac{\Delta}{2} z\right). \tag{3.32}$$

Этот закон мы уже получали ранее (3.20) методом малого параметра. Наше решение справедливо при любом z пока $A_{20,max} \ll A_{10}$. Подчеркнем, что это ограничение не на сам метод ММА, а лишь на данный случай приближения заданного поля.

Проведем оценку максимальной амплитуды волны ВГ, которую она достигает при прохождении по кристаллу растояния порядка $l_{coh} = \frac{\pi}{2}$. В этом случае:

$$A_{20,max} = \frac{2\sigma A_{10}^2}{\Delta} = \frac{2\sigma A_{10}^2}{\pi} l_{coh}.$$

Тогда условия применимости приближения задоного поля записывается в виде

$$\frac{2\sigma A_{10}^2}{\pi} l_{coh} \ll A_{10}$$

или

$$l_c oh \ll L_{(NL)},$$

где $L_{(NL)}$ задается соотношением (3.31). Таким образом мы также установили границы применимости метода малого параметра.

3.2.3 Влияние поглощения на процесс генерации ВГ

Будем считать для простоты, что у нас реализуется синхронный режим генерации ВГ. Таким образом фаза устанавливается оптимальной на границе и дальше не меняется:

$$\Phi(z) = \Phi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае можно рассматривать только второе уравнение системы (3.27), которое при оптимальной фазе имеет вид:

$$\frac{dA_{20}}{dz} + \delta_2 A_{20} = \sigma_2 A_{10}^2. \tag{3.33}$$

Рассмотрим следующую граничную задачу (приближение заданного поля):

$$A_{10}|_{z=0} \neq 0,$$
$$A_{20}|_{z=0} = 0,$$
$$A_{10} = const_z.$$

Если $\delta_2 = 0$ то решение уравнения (3.33) имеет вид:

$$A_{20}(z) = \sigma_2 A_{10}^2(0)\, z, \tag{3.34}$$

таким образом амплитула ВГ растет линейностью и коэффициент этого линейного роста определяется нелинейностью среды - σ_2, наличием на входе излучения накачки - $A_{10}(0) \neq 0$ и не зависит от того есть ли на входе излучение ВГ.

Если учесть поглощение на частоте ВГ, то решение уравнения (3.33) будет :

$$A_{20}(z) = \sigma_2 A_{10}^2(0)\, \frac{1 - exp(-\delta_2 z)}{\delta_2}. \tag{3.35}$$

Следует отметить следующие принципиальные особенности процесса генерации ВГ (или более обще - up-конверсии) вытекающие из (3.34 и 3.35).

- Процесс генерации ВГ имеет место при сколь угодно малой накачке $A_{10}(0)$, иными словами это не пороговый процесс
- Процесс генерации ВГ не требует волны ВГ на входе: $A_{20}(0) = 0$.

3.2.4 Параметрический процесс down-конверсии

Кроме процесса “слияния” двух фотонов накачки в один фотон ВГ или фотон суммарной(разностной) частоты (up-конверсия) на квадратичной нелинейности возможен обратный процесс распада одного фотона накачки в два фотона (down-конверсия) или генерация субгармоник.

Рассмотрим задачу генерации субгармоники пока без учета поглощения на частоте накачки, т. е. пусть $\Delta = 0$, $\delta_1 = 0$ и пусть амплитуды волны на частоте ω и 2ω на границе ненулевые: $A_{10,20}|_{z=0} \neq 0$. И под

конец будем предполагать что волна накачки (в данном случае волна ВГ) много больше сигнала субгармоники $A_{20}|_{z=0} \gg A_{10}|_{z=0}$. Для такого выбора параметров актуальными будут уравнения для аплитуды "слабой" волны $A_{10}(z)$ и фазы $\Phi(z)$. Рассмотрим уравнение для амплитуды в предполажении заданного поля $A_{20}(z) = A_{20}(0)$:

$$\frac{dA_{10}(z)}{dz} = -\sigma_1 A_{20}(0) A_{10}(z) sin\Phi(z). \tag{3.36}$$

Из уравнения (3.36) видно, что знак производной определяется фазой. Рост слабого сигнала субгармоники в поле сильной волны накачки имеет место при

$$\frac{dA_{10}(z)}{dz} > 0,$$

т. е. когда $sin\Phi < 0$. В оптимальном случае когда производная максимальна - $\Phi = -\frac{\pi}{2}$. Вполнее естественно что фаза не будет держаться оптимальной, но мы рассмотрим начальный участок пока фаза оптимальна. В этом случае (3.36) преобразуется в

$$\frac{dA_{10}(z)}{dz} = \sigma_1 A_{20}(0) A_{10}(z),$$

а решение дает закон параметрического уселения в прозрачной нелинейной среде:

$$A_{10}(z) = A_{10}(0) exp(\sigma_1 A_{20}(0) z). \tag{3.37}$$

Из (3.37) видна важная особенность down-конверсии: ненулевого решения и нарастания субгармоники не будет, если на вход не подать начального сигнала $A_{10}(0)$ субгармоники. И это принципиальное отличие от процесса up-конверсии, рассмотренного ранее.

Другое принципиальное отличие дает учет поглащения на частоте субгармоники. В этом случае уравнение для амплитуды субгармоники имеет вид -

$$\frac{dA_{10}(z)}{dz} = -\sigma_1 A_{20}(0) A_{10}(z) - \delta_1 A_{10}(z),$$

а его решение из (3.37) трансвормируется в

$$A_{10}(z) = A_{10}(0) exp\{(\sigma_1 A_{20}(0) - \delta_1) z\}. \tag{3.38}$$

Из выражения (3.38) следует пороговый характер процесса down-конверсии: т. е. для нарастания входного сигнала необходимо чтобы накачка превзошла некоторый порог:

$$A_{20}(0) > \frac{\delta_1}{\sigma_1}.$$

Если при генерации ВГ затухание не препятствовало возбуждению ВГ, то для субгармоник оно вносит порог по мощности накачки.

3.3 Общая задача о параметрическом трехволновом взаимодействии в нелинейных средах с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим общую формулировку задачи о трех-волновом параметрическом взаимодействии на квадратичной нелинейности $\hat{\chi}^{(2)}_{ijk}$.

У нас имеется волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = 0,$$

в котором поляризация состоит из двух частей линейной и нелинейной

$$\vec{P} = \vec{P}^{(L)} + \vec{P}^{(NL)}.$$

Полное ЭМ поле имеет вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Нелинейную поляризацию будем рассматривать в виде

$$P^{(NL)} = \hat{\chi}^{(2)} E^2.$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем плоских монохроматических волн и будем полагать их частоты равными ω_1, ω_2 и ω_3 при этом $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Волновые вектора трех монохроматических волн - $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}_3$. Поляризацию всех трех волн будем как и ранее сичитать одинаковой - это позволяет нам в дальнейшем избывится от веторов.

По аналогии с тем как мы это делали ранее для генерации ВГ методом ММА, решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} E = A_1(\mu z)\, exp\{i(\omega_1 t - k_1 z)\} + \\ + A_2(\mu z)\, exp\{i(\omega_2 t - k_2 z)\} + \\ + A_3(\mu z)\, exp\{i(\omega_3 t - k_3 z)\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Подставляя вид решения (3.39) вместе с выражением для нелинейной поляризации в волновое уравнения и производя все упрощения метода медленно меняющихся амплитуд в итоге можно получить систему для медленно меняющихся действительных амплитуд трехволнового параметрического взаимодействия:

$$\frac{dA_{10}}{dz} + \delta_1 A_{10} + \sigma_1 A_{20} A_{30} sin\Phi = 0,$$

$$\frac{dA_{20}}{dz} + \delta_2 A_{20} + \sigma_2 A_{10} A_{30} sin\Phi = 0,$$
$$\frac{dA_{30}}{dz} + \delta_3 A_{30} - \sigma_3 A_{10} A_{20} sin\Phi = 0,$$
$$\frac{d\Phi}{dz} - \left|\vec{\Delta}\right| + \left(\sigma_1 \frac{A_{20} A_{30}}{A_{10}} + \sigma_2 \frac{A_{10} A_{30}}{A_{20}} - \sigma_3 \frac{A_{10} A_{20}}{A_{30}}\right) cos\Phi = 0, \qquad (3.40)$$

где

$$\vec{\Delta} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3,$$
$$\sigma_i = \frac{i2\pi\omega_i^2 \hat{\chi}^{(2)}(\omega_i)}{c^2 k_i} = \frac{2\pi\hat{\chi}^{(2)}}{c} \frac{\omega_i}{n(\omega_i)},$$
$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$
$$\Phi = \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \Delta z.$$

3.3.1 Интегралы движения для системы медленно меняющихся амплитуд

Система уравнений (3.40) в отсутствии поглощения имеет два интеграла движения. Первый описывает закон сохранения энергии, а второй - соотношения Мэнли-Роу.

Действительно при $\delta_i = 0$ система для действительных амплитуд (3.40) приобретает вид

$$\frac{dA_{10}}{dz} + \sigma_1 A_{20} A_{30} sin\Phi = 0,$$
$$\frac{dA_{20}}{dz} + \sigma_2 A_{10} A_{30} sin\Phi = 0,$$
$$\frac{dA_{30}}{dz} - \sigma_3 A_{10} A_{20} sin\Phi = 0. \qquad (3.41)$$

Закон сохранения энергии

Домножив каждое из уравнений (3.41) на необходимую комбинацию $n(\omega_i) A_{i0}$ после сложения получим

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{i=1}^{3} n(\omega_i) A_{i0}^2\right) = 2A_{10} A_{20} A_{30} sin\Phi \left(n(\omega_1)\sigma_1 + n(\omega_2)\sigma_2 - n(\omega_3)\sigma_3\right) = 0.$$

Последнее справедливо в силу

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0.$$

Теперь если в выражении

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{i=1}^{3} n\left(\omega_i\right) A_{i0}^2\right) = 0$$

обе часть домножить на $\frac{c}{8\pi}$ то получим для интенсивностей соотношение $W_1+W_2+W_3 = const$ справедливое в любом сечении z что и представляет собой закон сохранения энергии.

Соотношения Мэнли-Роу

Первое уравнение системы (3.41) домножим на $\sigma_2 A_{10}$, второе на $\sigma_1 A_{20}$ и вычтем второе из первого. В результатет имеем

$$\frac{d}{dz}\left(\sigma_2 A_{10}^2 - \sigma_1 A_{20}^2\right) = 0,$$

что означает $\sigma_2 A_{10}^2 - \sigma_1 A_{20}^2 = const_z$ или что в любом сечении справедливо

$$\frac{n_1 A_{10}^2}{\omega_1} - \frac{n_2 A_{20}^2}{\omega_2} = const_z.$$

Иными словами

$$\frac{W_1\left(z\right)}{\omega_1} - \frac{W_2\left(z\right)}{\omega_2} = const_z = \frac{W_1\left(0\right)}{\omega_1} - \frac{W_2\left(0\right)}{\omega_2},$$

что приводит к соотношению

$$\frac{W_1\left(z\right) - W_1\left(0\right)}{\omega_1} = \frac{W_2\left(z\right) - W_2\left(0\right)}{\omega_2}.$$

Или иначе

$$\frac{\Delta W_1}{\omega_1} = \frac{\Delta W_2}{\omega_2}.$$

Для другой пары уравнений получим

$$\frac{\Delta W_2}{\omega_2} = -\frac{\Delta W_3}{\omega_3}.$$

Отметим в последнем что накачка идет с другим знаком. Сопоставляя последнии два соотношения получим соотношения Мэнли-Роу для этого частного случая параметрического процесса:

$$\frac{\Delta W_1}{\omega_1} = \frac{\Delta W_2}{\omega_2} = -\frac{\Delta W_3}{\omega_3}.$$

3.3.2 Основные параметрические трехволновые процессы

Напомним какие основные параметрические трехчастотные процессы в квадратичных средах мы рассмотрели с той или иной степенью подробности.

Итак нелинейная поляризация $\vec{P}^{(NL)} = \hat{\chi}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2) : \vec{E}(\omega_1)\vec{E}(\omega_2)$ для монохроматических плоских волн $\vec{E}(\omega_1)exp\left\{i\left(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r}\right)\right\}$, $\vec{E}(\omega_2)exp\left\{i\left(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r}\right)\right\}$ и $\vec{E}(\omega_3)exp\left\{i\left(\omega_3 t - \vec{k}_3\vec{r}\right)\right\}$ ответственна за следующие процессы.

1. Генерация суммарных и разностных частот $\omega_1 \pm \omega_2 \to \omega_3$
2. При условии $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ этот процесс трансформируется либо в генерацию ВГ $\omega + \omega \to 2\omega$, либо в оптическое выпрямление $\omega - \omega \to 0$
3. Параметриеский распад фотонов, параметрическое рассеяние, параметрическое усиление $\omega_3 \to \omega_1 \pm \omega_2$; которое при выполнении условия $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ может быть названо процессом генерации субгармоники $2\omega \to \omega + \omega$
4. Электрооптический эффект, когда одно из ЭМ полей имеет нулевую частоту: $\omega + 0 \to \omega$.

3.4 Заключение

В заключение приведем краткую сводку результатов полученных в данной главе:

- Процесс генерации ВГ (процесс up-конверсии) имеет место при сколь угодно малой величине накачки, другими словами это не проговый процесс
- Процесс генерации ВГ (процесс up-конверсии) не требует волны второй гармоники на входе
- Процесс генерации субгармоник (процесс down-конверсии) в присутствии потерь - пороговый процесс
- Процесс генерации субгармоник (процесс down-конверсии) требует волны субгармоники на входе

В качестве материала для этой главы (кроме тех источников что указаны прямо в тексте) использовались

- [9] - основной материал
- [2] - дополнительный материал
- [3] - дополнительный материал

Глава 4

Самовоздействие

4.1 Двухволновое взаимодействие света в фоторефрактивных кристаллах

Рассмотрение свойств фоторефрактивных кристаллов, будет не полным без задачи о взаимодействии двух плоских волн в ФРК, которая с одной стороны является достаточно изученной, а с другой - позволяет нам рассмотреть важные процессы перекачки энергии. Кроме того с задачей двухволнового взаимодействия света в ФРК, в частности с процессами перекачки энергии при взаимодействии двух плоских волн - связано объяснение такого основополагающего свойства ФРК, как фенинг.

При выводе уравнений, описывающих процесс дифракции световых волн на динамических решетках мы будем пользоваться методом интегральных уравнений.

4.1.1 Постановка задачи и вывод основных уравнений

В задаче о двухволновом взаимодействии света в ФРК, фоторефрактивный кристалл освещается двумя плоскими волнами, падающими на кристалл с одной из его сторон (см. рис. 4.1).

Примем

$$\vec{E}_1 = A_1(z,t)\,\vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1\vec{r})}$$

и

$$\vec{E}_2 = A_2(z,t)\,\vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2\vec{r})}$$

так что общее поле освещающее ФРК

$$\vec{E} = A_1(z,t)\,\vec{e}_1 e^{-i(\vec{k}_1\vec{r})} + A_2(z,t)\,\vec{e}_2 e^{-i(\vec{k}_2\vec{r})} \tag{4.1}$$

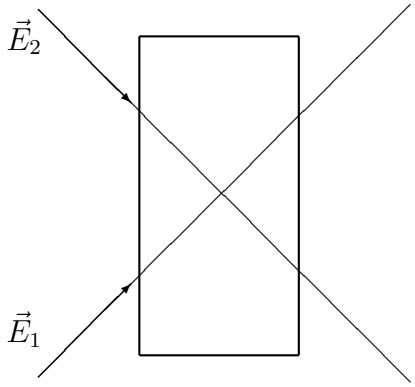

Рис. 4.1: Постановка задачи двухволнового взаимодействия света в фоторефрактивных кристаллах(общий случай)

Будем считать что источником рассеянных полей являются эквивалентные токи. Для нахождения амплитуд этих полей применим лемму Лоренца (подобным образом это делается, например, в теории возбуждения волноводов см. [17]):

$$\int\limits_S \left\{ \left[\vec{H}_a \vec{E}_b\right]_n - \left[\vec{H}_b \vec{E}_a\right]_n \right\} ds = \frac{4\pi}{c} \int\limits_V \left\{ \left(\vec{j}_a \vec{E}_b\right) - \left(\vec{j}_b \vec{E}_a\right) \right\} dv. \tag{4.2}$$

Найдем выражения, описывающие поле E. Для чего заметим, что возмущению диэлектрической проницаемости в среде $_\Delta\varepsilon$ соответствует эквивалентный ток:

$$\vec{j}_{eq} = i\vec{E}_\Delta\varepsilon \frac{\omega}{4\pi}, \tag{4.3}$$

где

$$_\Delta\varepsilon = \varepsilon_m(z,t)e^{-i(\vec{\kappa}\vec{r})} + \varepsilon_m^*(z,t)e^{i(\vec{\kappa}\vec{r})}, \tag{4.4}$$

ε_m - комплексная амплитуда решетки. Для волнового вектора решетки $\vec{\kappa}$ выполняется следующее соотношение:

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{\kappa} = 0. \tag{4.5}$$

Объем V, в этом случае, ограничен справа сечением S (см. рис.4.2). В дальнейшем будем предполагать

$$\int\limits_S (\vec{e}_1 \vec{e}_1^*) ds = \int\limits_S (\vec{e}_1 \vec{e}_2^*) ds = \int\limits_S (\vec{e}_2 \vec{e}_2^*) ds = 1, \tag{4.6}$$

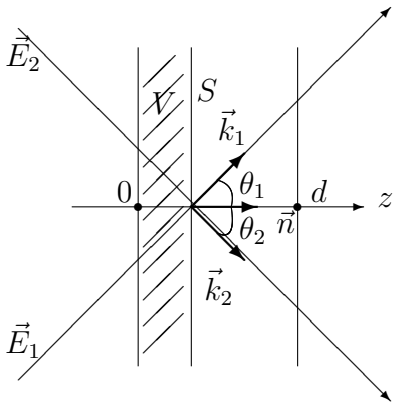

Рис. 4.2: Лемма Лоренца (взаимодействие двух плоских волн)

в частности это предполагает что световые пучки $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ имеют одну и ту же поляризацию

В качестве поля (a) в соотношении 4.2 примем поле $\vec{E}$ в виде разложения (4.1) с источником $\vec{j}_{eq}$ в виде (4.3), а в качестве произвольного вспомогательного поля (b), не имеющего источников, примем поочередно поля обращенные по отношению к искомым $\vec{e}_1^* e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}$ и $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2\vec{r})}$. В первом случае лемма Лоренца дает:

$$\frac{4\pi}{c}\int\limits_V \left(\vec{j}_{eq}\vec{e}_1^*\right) e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}dv = \frac{4\pi}{c}\int_0^z dz' \int\limits_S ds \left(\vec{j}_{eq}\vec{e}_1^*\right) e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} = \\ = \int\limits_S ds \left\{\left[\vec{H}\vec{e}_1^*\right]_n e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} - \left[\vec{h}_1^*\vec{E}\right]_n e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}\right\}. \qquad (4.7)$$

Область интегрирования изображена на рис. 4.2.

С учетом известного соотношения для плоских волн

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\frac{\vec{k}}{k}\vec{E}\right] \qquad (4.8)$$

для правой части соотношения (4.7) получим

$$\int\limits_S ds \left\{\left[\vec{H}\vec{e}_1^*\right]_n e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} - \left[\vec{h}_1^*\vec{E}\right]_n e^{i(\vec{k}_1\vec{r})}\right\} = \\ = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_S A_1 \left[\left[\frac{\vec{k}_1}{k_1}\vec{e}_1\right]\vec{e}_1^*\right]_n e^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_1)\vec{r}}ds +$$

$$+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_S A_2\left[\left[\frac{\vec{k}_2}{k_2}\vec{e}_2\right]\vec{e}_1^*\right]_n e^{-i(\vec{k}_2-\vec{k}_1)\vec{r}}ds -$$
$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_S A_1\left[\left[\frac{-\vec{k}_1}{k_1}\vec{e}_1^*\right]\vec{e}_1\right]_n e^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_1)\vec{r}}ds -$$
$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\int\limits_S A_2\left[\left[\frac{-\vec{k}_1}{k_1}\vec{e}_1^*\right]\vec{e}_2\right]_n e^{-i(\vec{k}_2-\vec{k}_1)\vec{r}}ds =$$
$$= -2cos\theta_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A_1. \qquad (4.9)$$

При выводе данного соотношения пренебрегалось быстро осциллирующими членами. Кроме того были использованы следующие очевидные соотношения

$$\left(\vec{e}_1\vec{k}_1\right) = 0,$$
$$\left.\frac{\vec{k}_1}{k_1}\right|_n = cos\theta_1$$

и было учтено соотношение (4.6).

Для левой части (4.7)

$$\frac{4\pi}{c}\int_0^z dz'\int\limits_S ds\left(\vec{j}_{eq}\vec{e}_1^*\right)e^{i(\vec{k}_1\vec{r})} =$$
$$= \frac{i\omega}{c}\int_0^z dz'\int\limits_S \varepsilon_m(z',t)\vec{e}_1^* e^{i\left(\vec{\kappa}+\vec{k}_1\right)\vec{r}}\vec{E}ds +$$
$$+\int_0^z dz'\int\limits_S \varepsilon_m^*(z',t)\vec{e}_1^* e^{-i\left(\vec{\kappa}-\vec{k}_1\right)\vec{r}}\vec{E}ds = \frac{i\omega}{c}\int_0^z dz'\varepsilon_m^*(z',t)A_2 \qquad (4.10)$$

Объединяя (4.10) и (4.9) получим

$$A_1 = \frac{-i\omega}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.\int_0^z dz'\varepsilon_m^*(z',t)A_2.$$

Действую по аналогии с изложенным выше для вспомогательного поля $\vec{e}_2^* e^{i(\vec{k}_2\vec{r})}$ можно получить

$$A_2 = \frac{-i\omega}{2cos\theta_2 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.\int_0^z dz'\varepsilon_m(z',t)A_1.$$

С учетом линейного электро-оптического эффекта (2.32) можно записать

$$\varepsilon_m(z',t) = \alpha E_{sc},$$

где через α обозначен электро-оптический коэффициент. Откуда

$$A_1 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E_{sc}^*(z',t)A_2,$$
$$A_2 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_2 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E_{sc}(z',t)A_1 \qquad (4.11)$$

4.1.2 Процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии света в ФРК

Для того чтобы рассмотреть процессы перекачки энергии при двух-волновом взаимодействии ФРК мы будем пользоваться уравнениями для стационарного режима записи поля пространственного заряда E_{sc}^{st}. Прежде всего рассмотрим систему уравнений вытекающую из соотношения (2.55) при $m \gg m_0$

$$A_1 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E_{sc}^*(z',t)A_2,$$
$$A_2 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_2 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E_{sc}(z',t)A_1,$$
$$E_{sc}^{st} = -m\left(E_0 + iE_D\right),$$
$$m = \frac{A_1^* A_2}{|A_1|^2 + |A_2|^2},$$

откуда

$$\frac{\partial |A_1|^2}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial z}A_1^* + \frac{\partial A_1^*}{\partial z}A_1 = \kappa\frac{1}{cos\theta_1}\frac{|A_1|^2|A_2|^2}{|A_1|^2 + |A_2|^2}$$
$$\frac{\partial |A_2|^2}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial z}A_2^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial z}A_2 = -\kappa\frac{1}{cos\theta_2}\frac{|A_1|^2|A_2|^2}{|A_1|^2 + |A_2|^2}$$

где

$$\kappa = \frac{\omega\alpha E_D\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{c}$$

Прежде всего стоит отметить выполнение закона сохранения энергии

$$\frac{\partial\left(cos\theta_1|A_1|^2 + cos\theta_2|A_2|^2\right)}{\partial z} = 0.$$

Кроме того перекачка энергии, как это отмечалось выше, возможна лишь для диффузионного механизма записи при котором $E_D \neq 0$.

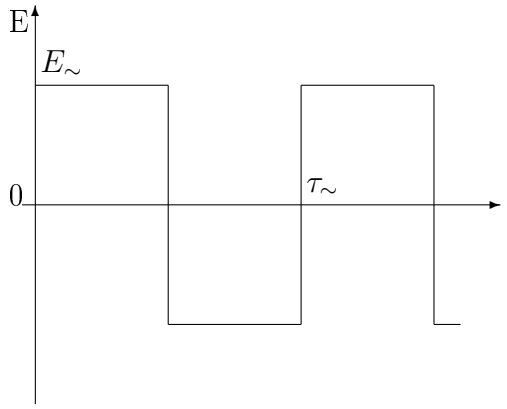

Рис. 4.3: Знакопеременное электрическое поле, используемое для нестационарной голографической записи

4.1.3 Нестационарные механизмы записи голографических решеток в ФРК

Как показано выше перекачка энергии возможна для диффузионного механизма записи при этом данный механизм целиком определяется внутренними свойствами кристалла и не зависит от внешних условий. При этом хотелось бы иметь возможность управлять эффективность перекачки с помощью внешних полей.

В ФТИ им. Иоффе (С.-Петербург) [12] был предложен нестационарный механизм записи голографических решеток в переменном электрическом поле (см. рис. 4.3) с периодом изменения $\tau_\sim$ много меньшим характерного времени формирования голограммы.

Запись голограммы в таком поле можно рассматривать как аналог диффузионного механизма записи (см. рис. 2.2). В обоих случаях происходит абсолютно симметричное расплывание заряда фотоиндуцированных электронов относительно максимумов интерференционной картины.

При этом если в случае диффузионного механизма “расплывание” фотоэлектронов вызвано обычной тепловой диффузией то в случае рассматриваемого нестационарного режима записи причиной “расплывания” фотоэлектронов является гораздо более эффективный дрейф во внешнем электрическом поле.

В дальнейшем мы будем пользоваться (2.52) в котором под диффузионным полем E_D мы будем подразумевать некоторое “эффективное” диффузионное поле.

4.1.4 Фенинг

К особому типу двухволнового рассеяния следует отнести такое свойство ФРК, как фенинг. В кратце суть эффекта такова: в результате прохождения лазерного излучения через ФРК образуется ассиметричный "веер" рассеяного света (см. рис). В основе эфекта лежит следующее: при прохождении лазерного излучения через ФРК оно рассеивается на случайных (шумовых) неоднородностях кристалла. В результате чего образуется веер рассеяного света, которой в результате самодифракции усиливается что и приводит к фенингу. Усиление шумовых компонент рассеяного излучения происходит неоднородно по угловой координате. И связано это прежде всего с зависимостью E_{sc} от угла.

Рассмотрим эту зависимость в стационарном режиме генерации

$$E_{sc}^{st}\left(1-\frac{iE_D}{E_q}\right)=-miE_D$$

$$E_{sc}^{st}=\frac{-miE_D}{1-\frac{iE_D}{E_q}}$$

Так как

$$E_D=AK,\quad E_q=\frac{BB}{K},$$

то

$$E_{sc}^{st}=\frac{-miAK}{1-iBK^2},$$

где $B=\frac{A}{BB}$. Вспоминая, что

$$K=k\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

имеем

$$\left|E_{sc}^{st}\right|=\frac{\left|\sqrt{(2)}mAk\sqrt{(1-\cos\alpha)}\right|}{|1-i2Bk^2(1-\cos\alpha)|},$$

С учетом $2Bk^2\gg 1$ можно нарисовать следующий график:

Теперь то что касается описания фенинга в уравнениях. В рамках простейшей ε модели [15], шумовые решетки приводящие к фенингу можно описать следующим уравнением

$$E_{sc}^{\varepsilon}=E_{sc_0}+E_{sc},\tag{4.12}$$

где E_{sc} определяется уравнением (2.52), а E_{sc_0} - постоянная затравка, определяемая распределением неоднородностей в кристалле.

Другие модели фенинга предполагают неоднородное распределение различных параметров кристалла, в частности примесных центров. Неоднородность распределения примесных центров учитывается в (2.52) коэффициентом m_0.

Конкретное значение параметров E_{sc_0} и m_0 довольно трудно оценить. О порядках величин можно судить лишь по внешним проявлением, в частности по уровню фенинга. Вместе с тем уровень фенинга зависит также от других параметров кристалла: полей E_D, E_0 электрооптических коэффициентов и т. п.

При этом всегда можно пересчитать E_{sc_0} в m_0, действительно, подставив (4.12) в (2.52) несложно получить

$$\tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}^{\varepsilon}}{\partial t} = -\left(m + m_0^{eff}\right)(E_0 + iE_D) - E_{sc}^{\varepsilon}\left(1 + (E_0 + iE_D)\left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q}\right)\right).$$

где

$$m_0^{eff} = m_0 - \frac{E_{sc_0}^{\varepsilon}}{E_0 + iE_D}\left(1 + (E_0 + iE_D)\left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{E_q}\right)\right).$$

Поэтому в дальнейшем учет фенинга будет осуществляться в рамках (2.52) без введения дополнительных затравочных решеток E_{sc_0}

4.2 Обращение волнового фронта в ФРК

4.2.1 Постановка задачи об обращениие волнового фронта в схеме двойного некогерентного обращающего зеркала

Наиболее общей схемой, при рассмотрении дифракции света в фоторефрактивных кристаллах, является схема в которой кристалл освещается с двух сторон взаимно-некогерентными лазерными пучками. В результате дифракции световых пучков на общих голографических решетках для световых пучков, падающих на кристалл с разных сторон - появляются световые пучки обращенные по отношению к исходным. Таким образом, данная схема является простейшим устройством обращения волнового фронта на базе ФРК.

Данная схема называется схемой двойного некогерентного обращающего зеркала (ДНОЗ) и обладает некоторыми практическими преимуществами, т. к. не требует когерентности между лазерными пучками, при этом значительно снижаются требования к юстировке и механической стабильности устройства.

В дальнейшем, при выводе соотношений описывающих процессы дифракции света в таких схемах будем пользоваться (4.11) дополненой граничными условиями.

Для полей падающих на кристалл слева имеем (4.11) с граничными условиями при $z = 0$

$$A_1 = A_1|_{z=0} + \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E_{sc}(z',t)A_2,$$
$$A_2 = A_2|_{z=0} + \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_2 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^z dz' E^*_{sc}(z',t)A_1 \qquad (4.13)$$

Для полей падающих на кристалл справа имеем по аналогии с (4.13)

$$A_3 = A_3|_{z=d} + \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_z^d dz' E_{sc}(z',t)A_4,$$
$$A_4 = A_4|_{z=d} + \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_2 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_z^d dz' E^*_{sc}(z',t)A_3 \qquad (4.14)$$

Уравнения (4.13) и (4.14) должны быть дополнены уравнениями среды, которое описывает изменение во времени общей голографической решетки E_{sc}. Для этого будем использовать уравнение (2.53). Так как в уравнениях (4.13) и (4.14) заместо $E_{sc}*$ присутствует E_{sc} будем писать сопряженное к (2.53) уравнение. При этом будем предполагать что действует только диффузионный механизм записи $E_0 = 0$ и кроме того будем предполагать в (2.53) $m_0 = 0$. коэффициент модуляции mзапишется в случае нашей задачи ДНОЗ в следующем виде

$$m = \frac{A_1A_2^* + A_3A_4^*}{I_0},$$

где $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad I_i = |A_i|^2$

В результате имеем:

$$\tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = iE_D\frac{A_1A_2^* + A_3A_4^*}{I_0} - E_{sc}. \qquad (4.15)$$

Система уравнений (4.13), (4.14) и (4.15) должна быть дополнена начальными условиями

$$E_{sc}|_{t=0} = E_{sc}^{(0)} \qquad (4.16)$$

4.2.2 Пороговые условия в модели ДНОЗ

При рассмотрении пороговых условий в модели ДНОЗ мы будем пользоваться уравнениями (4.13 - 4.15) с граничными условиями (4.16). При

этом мы будем рассматривать наиболее типичный случай когда на границах ФРК присутствует только одна плоская волна - затравка а обращенные волны возникают уже внутри кристалла, так что

$$A_1|_{z=0} = 0,$$

$$A_2|_{z=0} = A_2^{(0)},$$

$$A_3|_{z=d} = 0,$$

$$A_4|_{z=d} = A_4^{(0)}.$$

Но при этом в среде присутствует ненулевая начальная затравка

$$E_{sc}|_{t=0} = E_{sc}^{(0)} \neq 0.$$

Далее при рассмотрении пороговых условий будем рассматривать начальный момент генерации обращенных пучков, при котором справедливо приближение заданного поля:

$$A_1 \ll A_2, \quad A_3 \ll A_4.$$

В этом случае можно предполагать, что

$$A_2 = A_2^{(0)},$$

$$A_4 = A_4^{(0)},$$

а для обращенных пучков использовать уравнение вытекающие из (4.13 - 4.14)

$$A_1 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}A_2^{(0)}\int_0^z dz' E_{sc}(z',t),$$
$$A_3 = \frac{-i\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}A_4^{(0)}\int_z^d dz' E_{sc}(z',t), \tag{4.17}$$

Нашай дальнейшей задачей будет получить условия при которых внутреннее поле E_{sc} будет расти со временем в принятых нами приближения (начальный момент времени - приближение заданного поля). Кроме этого предположим, что у нас имеет место равенство интенсивностей падающих слева и справа

$$A_2^{(0)} = A_4^{(0)},$$

обозначая, далее,

$$\kappa = \frac{\omega\alpha}{2cos\theta_1 c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

получаем из (4.15)

$$\tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}}{\partial t} = E_D\kappa\frac{\int_0^d dz' E_{sc}(z',t)}{2} - E_{sc}. \tag{4.18}$$

Введем следующие обозначения

$$\gamma = E_D\kappa,$$

$$E_{sc}^{eff}(t) = \int_0^d dz' E_{sc}(z',t) = const|_z\,.$$

Очевидно, что

$$\int_0^d dz' E_{sc}^{eff}(t) = dE_{sc}^{eff}(t).$$

Таким образом интегрируя левую и правую часть (4.18) получаем

$$\tau_{eff}\frac{\partial E_{sc}^{eff}}{\partial t} = \left(\frac{\gamma d}{2} - 1\right) E_{sc}^{eff},$$

откуда

$$E_{sc}^{eff}(t) = E_{sc}^{eff}(0)e^{\left(\frac{\gamma d}{2}-1\right)\frac{t}{\tau_{eff}}} \tag{4.19}$$

Следовательно из (4.19) получим пороговые условия

$$\gamma > \gamma_{th} = \frac{2}{d} \tag{4.20}$$

Для случая $I_2 \neq I_4$ можно показать

$$\gamma > \gamma_{th} = \frac{q+1}{q-1}\cdot\frac{\ln q}{d}, \tag{4.21}$$

где $q = I_2/I_4$. Как нетрудно проверить при $I_2 = I_4$ (4.21) переходит в (4.20)

4.2.3 Другие схемы обращения волнового фронта

Полулинейный генератор

4.3 Заключение

В заключение приведем краткую сводку результатов полученных в данной главе:

- Дифракция света в ФРК может быть описана с помощью метода интегральных уравнений
- Фенинг - особый тип двухволнового рассеяния света в ФРК
- Схема двойного некогерентного обращающего зеркала (ДНОЗ) - базовая схема для обращения волнового фронта в ФРК
- Процесс генерации обращенных световых пучков в ДНОЗ имеет пороговый характер

В качестве материала для этой главы (кроме тех источников что указаны прямо в тексте) использовались

- [16] - основной материал
- [4] - дополнительный материал

Глава 5

Нелинейные оптические явления в диспергирующей среде

До сих пор при расмотрении нелинейных оптических явлений мы пренебрегали таким широко распространенным явлением как дисперсия.

Вместе с тем с дисперсией связаны очень интересные и красивые физические явления.

Впервые нелинейные эффекты связанные с дисперсией начали изучать в 19 веке. Вот так описывает свои наблюдения Джон Скотт Рассел (1808 - 1882):

... Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперёд с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и чётко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей форма и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда я нагнал его, он по прежнему катился вперёд со скоростью приблизительно 8 или 9 миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около 30 футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала ...

Так в августе 1834 впервые было описано явление названное самим Расселом как волна трансляции. Сейчас мы употребляем другое название: уединённая волна (solitary wave) или солитон.

5.1 Явление самоиндуцированной прозрачности. Оптический импульс в двухуровневой среде. Уравнение sine-Gordon

Иттрий-алюминиевый гранат (Al_2O_3 с примесью ионов Yt^{+3}) представляет собой темный, непрозрачный кристалл. Но он становится прозрачным для пучка лазерного света определенной частоты и интенсивности. Это свойство пропускать мощное оптическое излучение только в некотором узком диапазоне частот называется самоиндуцированной прозрачностью (СИП). Эффект был открыт Мак-Коллом и Ханом в 1965 году (см. [18, 19]). Они экспериментально установили, что показатель преломления (то есть линеаризованное дисперсионное соотношение этого кристалла как идеального диэлектрика) имеет сингулярности на частотах, совпадающих с любой из резонансных частот его атомов. Самоиндуцированная прозрачность является чисто нелинейным эффектом, возникающим при взаимодействии диэлектрика с электрическим полем на частоте, близкой к резонансу. Начнем с физического описания самоиндуцированной прозрачности. В простейшем случае СИП диэлектрик состоит из двухуровневых атомов, каждый из которых имеет основное и возбужденное состояния. Пусть вначале атомы находятся в основном состоянии, то есть среда является аттенюатором, а не усилителем. Падающее электрическое поле, настроенное на резонансную частоту, возбуждает атомы. Такой перенос энергии от электрического поля к веществу обычно необратим и в конце концов истощает энергетический запас электрического импульса. Тем не менее можно сформировать достаточно мощный и очень короткий падающий импульс так, что фронт импульса отдает энергию (когерентно) в среду, которая запасает ее, а затем возвращает ее (когерентно) назад в импульс. Взаимодействуя с таким импульсом, атомы вещества остаются в своем основном состоянии, суммарный перенос энергии от излучения к веществу равен нулю, а импульс распространяется с постоянной (меньшей, чем скорость света) скоростью сквозь среду, которая становится как бы прозрачной. Это и есть самоиндуцированная прозрачность.

Теперь мы рассмотрим основные уравнения (уравнения Максвелла-Блоха).

Мы будем рассматривать квазиклассический случай. Электромагнитная волна будет распространяться в однородной немагнитной, электрически нейтральной среде. Нелинейность как и ранее будет возникать вследствии взаимодействия внешнего электромагнитного поля со средой. Мы будем пользоваться одномерным волновым уравнением, с которым

мы встречались ранее:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \tag{5.1}$$

где как и ранее, нелинейность входит в поляризацию P.

Электромагнитное поле будет искаться в следующем виде

$$E(z,t) = E_0(z,t)\, exp\left\{-i\left(kz - \omega_0 t + \psi(z,t)\right)\right\} + c.c. \tag{5.2}$$

Задачу будем решать методом медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{\partial E}{\partial z} \ll kE_0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} \ll \omega_0 E_0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \ll k\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \ll \omega_0 \psi.$$

Давайте теперь определим реакцию среды на такое поле:

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_0 \psi_a(\vec{r}) = E_a \psi_a(\vec{r}), \\
&\hat{H}_0 \psi_b(\vec{r}) = E_b \psi_b(\vec{r}), \\
&E_a - E_b = \hbar\omega \approx \hbar\omega_0.
\end{aligned}$$

Таким образом предполагается некоторый резонанс между характеристиками поля и среды. Волновая функция системы записывается в следующем виде

$$\psi_0(\vec{r},t) = a(\vec{r},t)\,\psi_a(\vec{r}) + b(\vec{r},t)\,\psi_b(\vec{r}). \tag{5.3}$$

Справедливы следующие условия нормировки:

$$\begin{aligned}
\int |\psi_a(\vec{r})|^2 dV = \int |\psi_b(\vec{r})|^2 dV = 1, \\
\int |\psi_0(\vec{r},t)|^2 dV = \int |a\psi_a + b\psi_b|^2 dV = |a|^2 + |b|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Уравнение для волновой функции (5.3) выглядит следующим образом:

$$\hat{H}\psi_0(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial \psi_0(\vec{r},t)}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Разность концентраций на рассматриваемых двух уровнях:

$$n_0 \int \left(|a\psi_a|^2 - |b\psi_b|^2\right) dV = n_0\left(|a|^2 - |b|^2\right). \tag{5.5}$$

где n_0 - общая концентрация электронов в рассматриваемой двухуровневой модели.

Гамильтониан в (5.4) представим в следующем виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_i,$$

где $\hat{H}_i = -\left(\vec{\hat{d}}\vec{E}\right)$ - гамильтониан взаимодействия системы атом-поле, $\vec{\hat{d}} = e\vec{r}$. Поляризация среды задается соотношением

$$P = \int \psi_0^* \hat{d} \psi_0 dV.$$

Таким образом поляризация среды задается соотношением

$$P = P_0 \left(a^* b + b^* a\right),$$
$$P_0 = -e \int \psi_a^* \vec{r} \psi_b dV,$$

где P_0 поляризуемость одного атома.

Как видно из (5.3), поведение системы полностью определяется двумя функциями $a\left(\vec{r}, t\right)$ и $b\left(\vec{r}, t\right)$. Уравнения для этих функций могут быть получены домножением (5.4) на $\psi_a^*\left(\vec{r}\right)$, $\psi_b^*\left(\vec{r}\right)$ и интегрированием по объему V:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + i\omega_a a = -iVb,$$
$$\frac{\partial b}{\partial t} + i\omega_b b = -iVa, ,$$
$$\omega_{a,b} = \frac{E_{a,b}}{\hbar},$$
$$V = -\frac{P_0}{\hbar} E\left(z, t\right). \tag{5.6}$$

Для $E\left(z, t\right)$ мы будем использовать представление в виде волнового пакета (5.2). Предположим, что данный волновой пакет движется в среде с некоторой скоростью $v < c$. В этом случае в представлении (5.2) мы должны писать вместо продольной координаты z некоторую другую величину:

$$z_E = z + vt.$$

При этом мы предполагаем что данный пакет не меняет своей формы, так что амплитуда E_0 и фаза ψ - функции от z, а не от z_E. Таким образом

$$E\left(z, t\right) = E_0\left(z, t\right) exp\left\{-i\left(kz_E - \omega_0 t + \psi\left(z, t\right)\right)\right\} + c.c. =$$
$$= E_0\left(z, t\right) exp\left\{-i\left(kz + \Delta\omega t - \omega_0 t + \psi\left(z, t\right)\right)\right\} + c.c.,$$

где $\Delta\omega = kv$ учитывает доплеровский эффект.

Решение системы (5.6) представимо в следующем виде

$$a = iv_1 exp\left\{-i\omega_a\left(t - \frac{z}{c}\right) + it\Delta\omega\right\},$$
$$b = v_2 exp\left\{-i\omega_b\left(t - \frac{z}{c}\right) - it\Delta\omega\right\},$$
$$|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1.$$

В новых переменных инверсия населенности

$$N = \frac{n}{n_0} = |v_1|^2 - |v_2|^2,$$

поляризация атома:

$$P = P_0\left[-iv_1^* v_2 exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + it\Delta\omega\right\} + c.c.\right].$$

Обозначив через

$$\Phi = kz - \omega t + \psi$$

получим для поляризации

$$P = P_0 n_0 \left[G\cos\Phi + L\sin\Phi\right],$$

где

$$G\left(\Delta\omega, z, t\right) = i\left[v_1 v_2^* e^{-i\Phi} - v_1^* v_2 e^{i\Phi}\right],$$
$$L\left(\Delta\omega, z, t\right) = -\left[v_1 v_2^* e^{-i\Phi} + v_1^* v_2 e^{i\Phi}\right].$$

Таким образом система уравнений для среды (5.6) в новых обозначениях переписывается как:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{P_0 E_0}{\hbar} N + \left(\Delta\omega + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) G,$$
$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\left(\Delta\omega + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) L,$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{P_0 E_0}{\hbar} L. \qquad (5.7)$$

Система (5.7) называется уравнениями Блоха. Система уравнений (5.1, 5.7), так называемая система уравнений Максвела-Блоха, должна решаться совместно.

Данная задача не имеет решения в квадратурах и надо чем-то пренебрегать. Мы применим столько раз нам уже помогавший метод медленно меняющихся амплитуд. Применять этот метод будем к уравнению для электромагнитного поля (5.1). С учетом

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega_0^2 P = -\omega_0^2 n_0 P_0 \left(G\cos\Phi + L\sin\Phi\right).$$

С учетом этого уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial t} + c\frac{\partial E_0}{\partial z} &= 2\pi\omega_0^2 n_0 P_0 L\left(z,t\right), \\ E_0\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) &= 2\pi\omega_0^2 n_0 P_0 G\left(z,t\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

В системе (5.8) есть два уравнения, одно для амлитуды поля, другое для фазы. Так как мы расматриваем задачу в которой форма импульса не меняется, то $G = 0$, $\psi = const_{z,t}$. Таким образом из системы (5.7) уходит второе уравнение и из системы (5.8) также уходит второе уравнение. Результат после введения новых переменных

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \frac{P_0}{\hbar} E_0, \\ \Omega^2 &= \frac{1}{\hbar} 2\pi n_0 P_0 \omega_0^2 \end{aligned}$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}}{\partial z} + c\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} &= \Omega^2 L, \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \hat{E} N, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\hat{E} L. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Из двух последних уравнений системы (5.9) следует, что

$$N^2 + L^2 = const.$$

Предполагая что в начальный момент времени все электроны находятся в каком-то одном состоянии возбужденном или невозбужденном получаем

$$N = \pm 1, \quad L = 0.$$

Можно сказать, что $+1$ соответствует случаю идеального усилителя (все частицы загнаны на верхние уровни). -1 соответствует случаю отсутствия инверсной населенности - аттенюатор.

Таким образом

$$N^2 + L^2 = 1.$$

Из последнего соотношения следует что

$$N = \pm \cos u, \quad L = \pm \sin u,$$

где $u\,(z,t)$ некоторая новая переменная. Из второго (или третьего) уравнения системы (5.9) следует

$$\hat{E} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Что можно сказать про u

$$u\,(z,t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\,\hat{E}\left(z,t'\right). \tag{5.10}$$

Таким образом u можно рассматривать как площадь под огибающей импульса.

Первое уравнение системы (5.9) перепишем произведя следующее преобразование системы координат

$$\frac{\partial}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial \tau},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\Omega}{c}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right).$$

Результат следующий

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} = \pm \sin u. \tag{5.11}$$

Уравнение (5.11) называется уравнением sine-Гордона. Знак $+$ соответствует случаю усилителя. знак $-$ - аттенюатора. Уравнение sine-Гордона (5.11) имеет решение следующего вида:

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left[exp\left(a\tau \pm \frac{\xi}{a}\right)\right], \tag{5.12}$$

где a - некоторая константа.

Исследуем устойчивость данного решения уравнения sine-Гордона для случая усилителя и случая аттенюатора. Для этого перейдем в (5.11) к переменной $\hat{E}$:

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = \pm sinu. \tag{5.13}$$

Переходя в (5.10) к пределу $t \to +\infty$ и воспользовавшись (5.12) в котором надо записать $\tau \to +\infty$ получим

$$u\left(z, t \to +\infty\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \hat{E}\left(z, t'\right) = 4\,\mathrm{arctg}(+\infty) = 2\pi.$$

Таким образом площадь под огибающей такого импульса - 2π, поэтому часто данное решение называют 2π импульсом.

Допустим теперь что площадь под огибающей чуть больше 2π:

$$u = 2\pi + \varepsilon,$$
$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда из (5.13)

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = \pm \sin\left(2\pi + \varepsilon\right) = \pm\varepsilon.$$

Таким образом в случае усилителя

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} > 0$$

площадь под огибающей продолжает увеличиваться, то есть мы имеем в этом случае не устойчивое решение. Для случая аттенюатора

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} < 0$$

площадь под огибающей уменьшается и таким образом восстанавливается решение с площадью 2π.

2π импульс в аттенюаторе устойчив, а в усилителе нет, поэтому в аттенюаторе можно ожидать появление уединенной волны, которая проходит через среду не изменяя своей формы, что и составляет явление самоиндуцированной прозрачности (FIX ME!!! add picture).

В заключение напишем вид решения для E_0:

$$E_0 = \frac{2\hbar}{P_0\tau_p} sech\left(\frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_p}\right),$$

где

$$\tau_p = \frac{1}{a\Omega}.$$

5.2 Заключение

В заключение приведем краткую сводку результатов полученных в данной главе:

- Основные особенности распространения коротких оптических импульсов в диспергирующей среде следующие: нелинейность среды способствует усилению крутизны оптических импульсов, дисперсия способствует расползанию данного импульса. Таким образом при одинаковых порядках нелинейности и дисперсии мы имеем возможность создавать устойчивые короткие оптические импульсы, т. н. солитоны.

- Свойство пропускать мощное оптическое излучение только в некотором узком диапазоне частот называется самоиндуцированной прозрачностью (СИП)

- В простейшем случае СИП диэлектрик состоит из двухуровневых атомов, каждый из которых имеет основное и возбужденное состояния. Можно сформировать достаточно мощный и очень короткий падающий импульс так, что фронт импульса отдает энергию (когерентно) в среду, которая запасает ее, а затем возвращает ее (когерентно) назад в импульс. Взаимодействуя с таким импульсом, атомы вещества остаются в своем основном состоянии, суммарный перенос энергии от излучения к веществу равен нулю, а импульс распространяется с постоянной (меньшей, чем скорость света) скоростью сквозь среду, которая становится как бы прозрачной.

- 2π импульс в аттенюаторе устойчив, а в усилителе не устойчив.

В качестве материала для этой главы (кроме тех источников что указаны прямо в тексте) использовались

- [7] - основной материал

Глава 6

Задачи для самостоятельной работы

6.1 Задачи

1. **Доказать:** Перестановачная симметрия тензора нелинейной восприимчивости по всем индексам кроме первого с соответствующей перестановкой частотных аргументов (Соотношение (2.12))

2. **Доказать для среды без потерь:** Перестановачная симметрия тензора нелинейной восприимчивости по всем индексам с соответствующей перестановкой частотных аргументов (Соотношения Клеймана (2.13))

3. **Показать** что фоторефрактивные среды - нелинейно-оптические среды с кубичной нелинейностью

4. **Что будет - проявится ли фоторефрактивный эффект** если $N_D^+\big|_{I=0} = N_A = 0$

5. **Доказать для разных интенсивностей:** Пороговые условия в модели ДНОЗ (4.21)

6.2 Темы для докладов

1. Непараметрические нелинейные оптические эффекты (например ВКР) [2]

2. Явление самофокусировки [2]

3. Влияние кристаллической структуры вещества на симметрию тензора нелинейной восприимчивости

4. Применения нелинейнооптических эффектов в технике

5. Об истории солитона [7]

Литература

[1] М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин *Классическая электродинамика* М. Наука 1985

[2] В. М. Николаев *Нелинейная оптика* Издательство ЛПИ 1982

[3] В. Д. Волосов *Специальные вопросы нелинейной оптики* Издательство ЛПИ 1986

[4] Петров М.П., Степанов С.И., Хоменко А.В. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике. - С. Петербург: Наука, 1992. 320 с.

[5] Дж. Уизем *Линейные и нелинейные волны* М. Мир, 1977

[6] *Солитоны* М. Мир, 1983. ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри М. Мир, 1977

[7] Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко *Колебания Волны Структуры* М. Физматлит, 2003. 496 с.

[8] М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков *Введение в теорию колебаний и волн* М. Наука, 1992. 456 с.

[9] http://www.shg.ru/educat/nl_opt.html Лекции по нелинейной оптике (МГУ каф. квантовой электроники)

[10] Valley G. C., Lam Ju. F. Theory of photorefractive effects in electro-optic crystals. // Topic in Applied Physics v.61 Photorefractive Materials and their applications I. Findamental phenomena, p. 75 Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988, p. 75-98.

[11] Ashkin A., Boyd G. D., Dziedzic J. M. et al. *Optically-induced refractive index inhomogeneities in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$* // Applied Physics Letters. - 1966. - v. 9, N 1. - p. 72-74.

[12] Stepanov S. I., Petrov M. P. Nonstationary holographic recording for efficient amplification and phase conjugation. // Topic in Applied Physics v.61 Photorefractive Materials and their applications I. Findamental phenomena, p. 75 Springer-Verlag Berlin Heidelberg. - 1988. - p. 263-289.

[13] Peltier M., Micheron F. Journal of Applied Physics. - 1977. - v. 48. - p. 3683.

[14] Feinberg J., Heiman D., Tanguary A. R., Hellwarth R. W. Journal of Applied Physics. - 1980. - v. 51. - p. 1297.

[15] В. В. Обуховский, Процессы фоторефрактивного рассеяния света в кристаллах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. - Киев: КГУ, 1989.

[16] И. В. Мурашко, Исследование самодифракции сложных световых пучков в фоторефрактивных кристаллах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. - Санкт-Петербург: СПбГТУ, 2001.

[17] П. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, М. : Радио и связь, 1988.

[18] McCall S.L. and Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys.Rev.Letts. 1967. V. 18. P. 908 911.

[19] McCall S.L. and Hahn E.L. Self-induced transparency // Phys.Rev. 1969. V. 183. P. 457 485.