Regresión logística binaria

Probabilidad 2
Grupo: 9043

Por: Jorge Iván Reyes Hernández

Ejercicio

En 1986, el transbordador espacial Challenger explotó durante el despegue, matando a los siete astronautas que iban a bordo. La explosión fue el resultado de un fallo en la junta tórica, la rotura de un anillo de goma que sella las partes de la nave. Se cree que el accidente fue causado por el clima inusualmente frío (31^oF o 0 ^{o}C) en el momento del lanzamiento, ya que hay razones para creer que las probabilidades de fallo de la junta tórica aumentan a medida que la temperatura disminuye
Los datos sobre los lanzamientos anteriores del transbordador espacial y los fallos de las juntas tóricas figuran en el conjunto de datos challenger proporcionado con el paquete mcsm. La primera columna corresponde a los indicadores de fallo y_i y la segunda a la temperatura correspondiente x_i $(1 \leq i \leq 24)$

1. Ajuste este conjunto de datos con una regresión logística, donde

$$\mathbb{P}(Y_i = 1|x_i) = p(x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_\circ x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

Deduce los estimadores máximo verosimiles para β_0 y β_1.

Solución

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ el conjunto de datos e $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $y_i \in \{0, 1\}$ el conjunto de varibles respuesta.
En nuestro problema

$$\begin{gathered} x_i : \text{temperatura} \\ y_i : \text{indicador de fallo} \end{gathered}$$

Como las covariables x_i son $1-$dimensional, el modelo propuesto es

$$p_i = p_i(\vec{\beta}) = \mathbb{P}(y_i = 1 | x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

con $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$ el vector de parámetros.
Como las variables respuesta son binarias, podemos considerarlas como ensayos Bernoulli:

$$Y_i | X_i = x_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$$

donde, por hipótesis, estamos considerando que la probabilidad de éxito de los ensayos es p_i, dada por el modelo de regresión logística. Entonces

$$f_{Y|X}(Y_i | X_i = x_i) = p_i^{y_i}(1 - p_i)^{1 - y_i}$$

por lo que la función de verosimilitud es

$$f_{Y|X}(Y_1 | X_1 = x_1, \ldots, Y_n | X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y|X}(Y_i | X_i = x_i) = \prod p_i^{y_i}(1 - p_i)^{1 - y_i}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{\beta}) = \prod p_i^{y_i}(1 - p_i)^{1 - y_i}$$

El estimador máximo verosimil de $\vec{\beta}$ es

$$\hat{\beta}_{ML} = \arg\max_{\vec{\beta} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}(\vec{\beta})$$

Para encontrar los valores usaremos el paquete statsmodels de Python

Cargamos las librerias a usar

In [2]:

```
from io import StringIO
import requests

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
import scipy.stats as stats
import statsmodels.api as sm
```

Bajamos los datos de internet

In [3]:
```python
url = 'https://raw.githubusercontent.com/stedy/Machine-Learning-with-R-datasets/master/c
s = requests.get(url).text

dataset = pd.read_csv(StringIO(s))
dataset
```

Out[3]:

	o_ring_ct	distress_ct	temperature	pressure	launch_id
0	6	0	66	50	1
1	6	1	70	50	2
2	6	0	69	50	3
3	6	0	68	50	4
4	6	0	67	50	5
5	6	0	72	50	6
6	6	0	73	100	7
7	6	0	70	100	8
8	6	1	57	200	9
9	6	1	63	200	10
10	6	1	70	200	11
11	6	0	78	200	12
12	6	0	67	200	13
13	6	2	53	200	14
14	6	0	67	200	15
15	6	0	75	200	16
16	6	0	70	200	17
17	6	0	81	200	18
18	6	0	76	200	19
19	6	0	79	200	20
20	6	0	75	200	21
21	6	0	76	200	22
22	6	1	58	200	23

In [4]:
```python
# Preprocesamiento
dataset.replace(2, 1, inplace=True)
dataset['distress_ct'][20] = 1

dataset
```

Out[4]:

	o_ring_ct	distress_ct	temperature	pressure	launch_id
0	6	0	66	50	1
1	6	1	70	50	1

2	6	0	69	50	3
3	6	0	68	50	4
4	6	0	67	50	5
5	6	0	72	50	6
6	6	0	73	100	7
7	6	0	70	100	8
8	6	1	57	200	9
9	6	1	63	200	10
10	6	1	70	200	11
11	6	0	78	200	12
12	6	0	67	200	13
13	6	1	53	200	14
14	6	0	67	200	15
15	6	0	75	200	16
16	6	0	70	200	17
17	6	0	81	200	18
18	6	0	76	200	19
19	6	0	79	200	20
20	6	1	75	200	21
21	6	0	76	200	22
22	6	1	58	200	23

Una vez preprocesados, nos quedamos con los datos que nos interesan: temperatura e indicador de fallo

In [5]:
```
dataset['temperature']
```

Out[5]:
```
0     66
1     70
2     69
3     68
4     67
5     72
6     73
7     70
8     57
9     63
10    70
11    78
12    67
13    53
14    67
15    75
16    70
17    81
18    76
19    79
20    75
21    76
```

```
22    58
Name: temperature, dtype: int64
```

In [6]:
```
dataset['distress_ct']
```

Out[6]:
```
0     0
1     1
2     0
3     0
4     0
5     0
6     0
7     0
8     1
9     1
10    1
11    0
12    0
13    1
14    0
15    0
16    0
17    0
18    0
19    0
20    1
21    0
22    1
Name: distress_ct, dtype: int64
```

In [9]:
```
X = np.array(dataset['temperature']).reshape(-1,1)
y = np.array(dataset['distress_ct']).reshape(-1,)
```

In [10]:
```
X
```

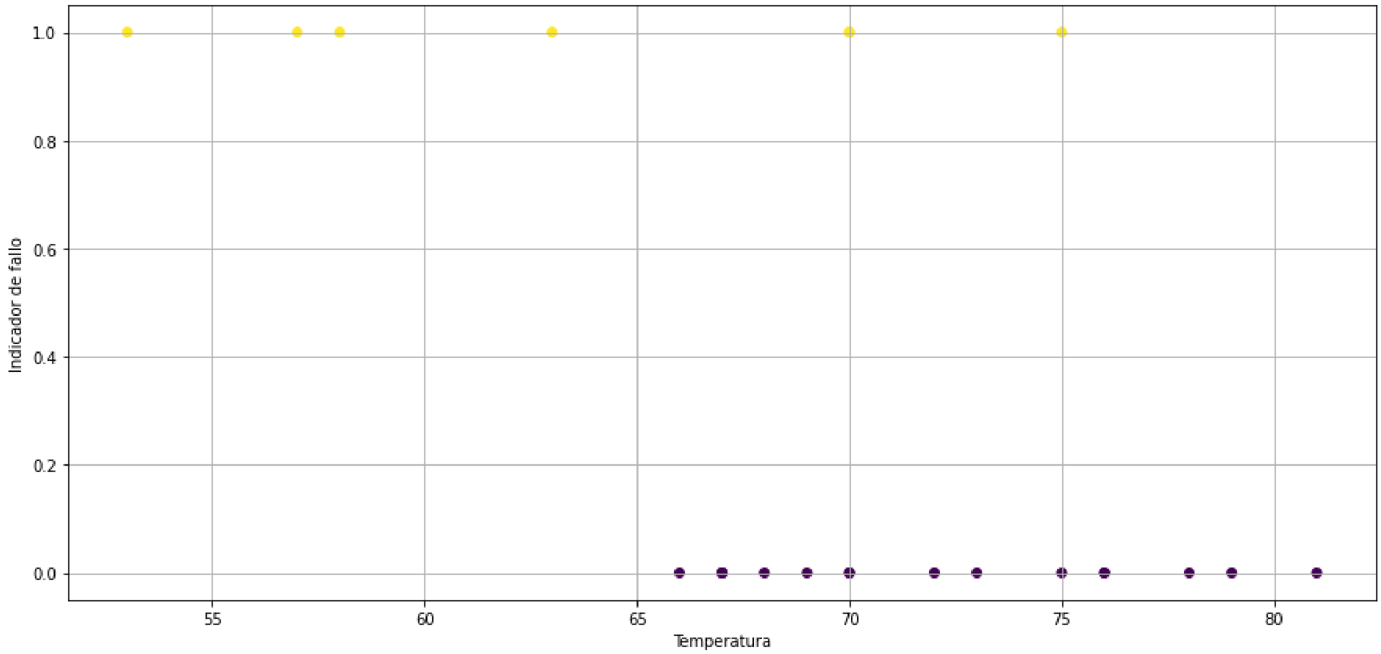
Out[10]:
```
array([[66],
       [70],
       [69],
       [68],
       [67],
       [72],
       [73],
       [70],
       [57],
       [63],
       [70],
       [78],
       [67],
       [53],
       [67],
       [75],
       [70],
       [81],
       [76],
       [79],
       [75],
       [76],
       [58]])
```

In [11]:
```
y
```

Out[11]:
```
array([0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
       1])
```

In [12]:
```
plt.figure(figsize=(15,7))
plt.scatter(X, y, c=y)
```

```
plt.xlabel('Temperatura')
plt.ylabel('Indicador de fallo')
plt.grid(True);
```



Creamos el vector $X = [1, \text{Temperatura}]$ y ajustamos el modelo de regresión logística usando máxima verosimilitud

In [14]:
```
X = sm.add_constant(X)
X
```

Out[14]:
```
array([[ 1., 66.],
       [ 1., 70.],
       [ 1., 69.],
       [ 1., 68.],
       [ 1., 67.],
       [ 1., 72.],
       [ 1., 73.],
       [ 1., 70.],
       [ 1., 57.],
       [ 1., 63.],
       [ 1., 70.],
       [ 1., 78.],
       [ 1., 67.],
       [ 1., 53.],
       [ 1., 67.],
       [ 1., 75.],
       [ 1., 70.],
       [ 1., 81.],
       [ 1., 76.],
       [ 1., 79.],
       [ 1., 75.],
       [ 1., 76.],
       [ 1., 58.]])
```

In [14]:
```
model = sm.Logit(y, X)
log_reg = model.fit()

log_reg.summary()
```

```
Optimization terminated successfully.
         Current function value: 0.441635
         Iterations 7
```

Out[14]:

Logit Regression Results

Dep. Variable:	y	**No. Observations:**	23
Model:	Logit	**Df Residuals:**	21
Method:	MLE	**Df Model:**	1
Date:	Mon, 25 Apr 2022	**Pseudo R-squ.:**	0.2813
Time:	19:19:09	**Log-Likelihood:**	-10.158
converged:	True	**LL-Null:**	-14.134
Covariance Type:	nonrobust	**LLR p-value:**	0.004804

	coef	std err	z	P>|z|	[0.025	0.975]
const	15.0429	7.379	2.039	0.041	0.581	29.505
x1	-0.2322	0.108	-2.145	0.032	-0.444	-0.020

Podemos ver que los estimadores máximo verosimiles son:

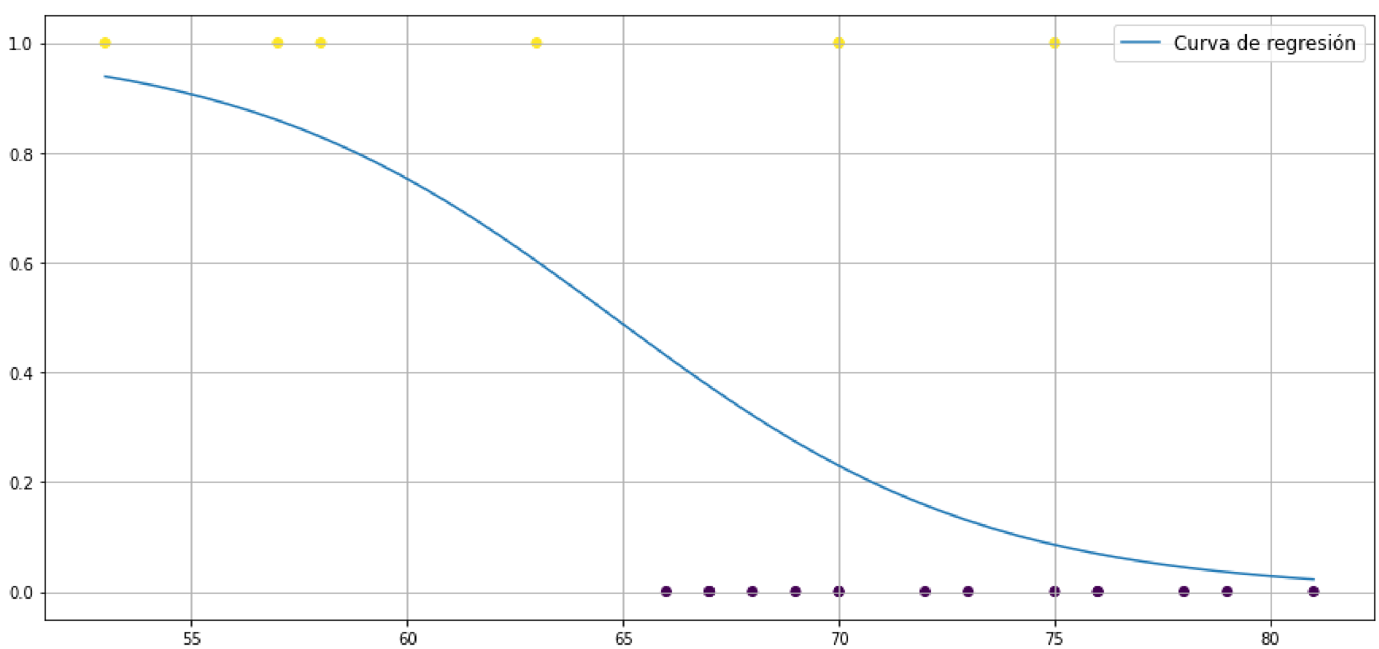
$$\hat{\beta}_{0ML} = 15.0429$$
$$\hat{\beta}_{1ML} = -0.2322$$

A continuación se muestra la gráfica de la regresión

In [17]:
```
beta0_ML = 15.0429
beta1_ML = -0.2322

x_dom = np.linspace(min(X[:,1]), max(X[:,1]))
regresion = lambda beta0, beta1: np.exp(beta0 + beta1*x_dom) / (1 + np.exp(beta0 + beta1

plt.figure(figsize=(15,7))
plt.plot(x_dom, regresion(beta0_ML, beta1_ML), label='Curva de regresión')
plt.scatter(X[:,1], y, c=y)
plt.legend(prop={'size': 12})
plt.grid(True);
```



4. Deduzca de esta muestra una estimación de la probabilidad de fallo a 60^o, 50^o y 40^o F.

Suponga que tenemos nuevos datos $X_{test} = \{40, 50, 60\}$. Queremos calcula la probabilidad de que a estas temperaturas, haya falla

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X_{test})$$

In [16]:
```
predictor = lambda x, beta0, beta1: np.exp(beta0 + beta1 * x) / (1 + np.exp(beta0 + beta

X_test = np.array([60, 50, 40])

# Predicción usando los MLEs
y_pred_ML = predictor(X_test, beta0_ML, beta1_ML)

for i in range(len(X_test)):
    print(f'Temperatura:{X_test[i]}')
    print(f'Probabilidad de fallo (Máxima verosimilitud) {y_pred_ML[i]:.3f}')
```

```
Temperatura:60
Probabilidad de fallo (Máxima verosimilitud) 0.752
Temperatura:50
Probabilidad de fallo (Máxima verosimilitud) 0.969
Temperatura:40
Probabilidad de fallo (Máxima verosimilitud) 0.997
```

Es decir

$$\mathbb{P}(y = 1 | X = 40) = 0.997$$
$$\mathbb{P}(y = 1 | X = 50) = 0.969$$
$$\mathbb{P}(y = 1 | X = 60) = 0.752$$

Lo que confirma que la probabilidad de fallo aumenta conforme disminuye la temperatura.