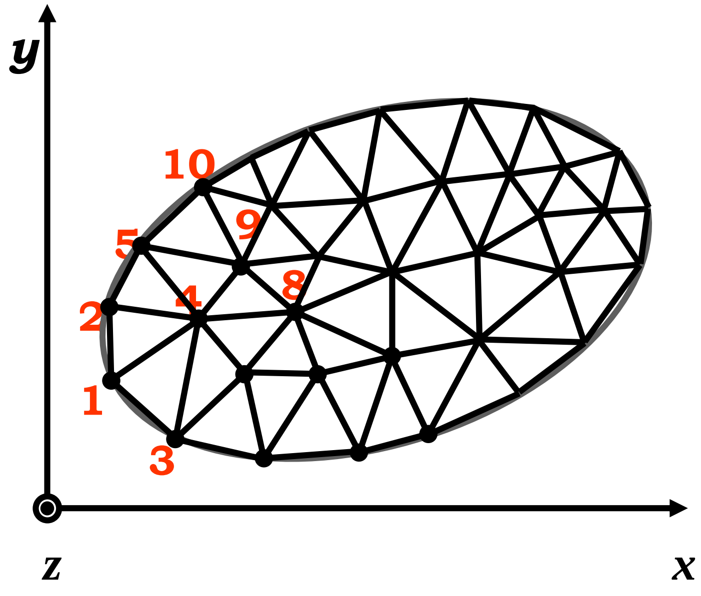
Método dos Elementos Finitos

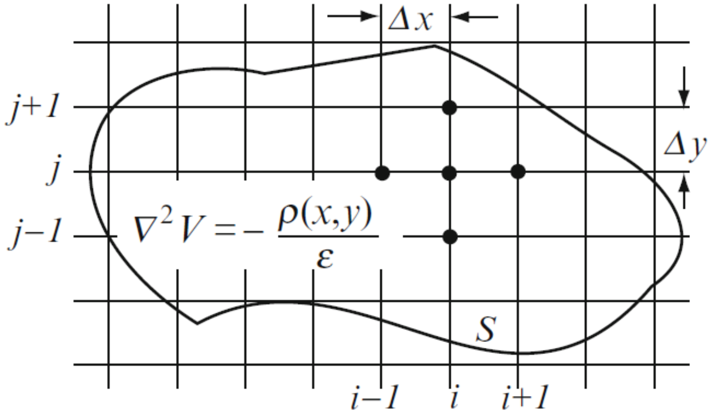
Eletrostática

e

Magnetostática

Elementos Finitos x Diferenças Finitas





Problemas Lineares e **não lineares**

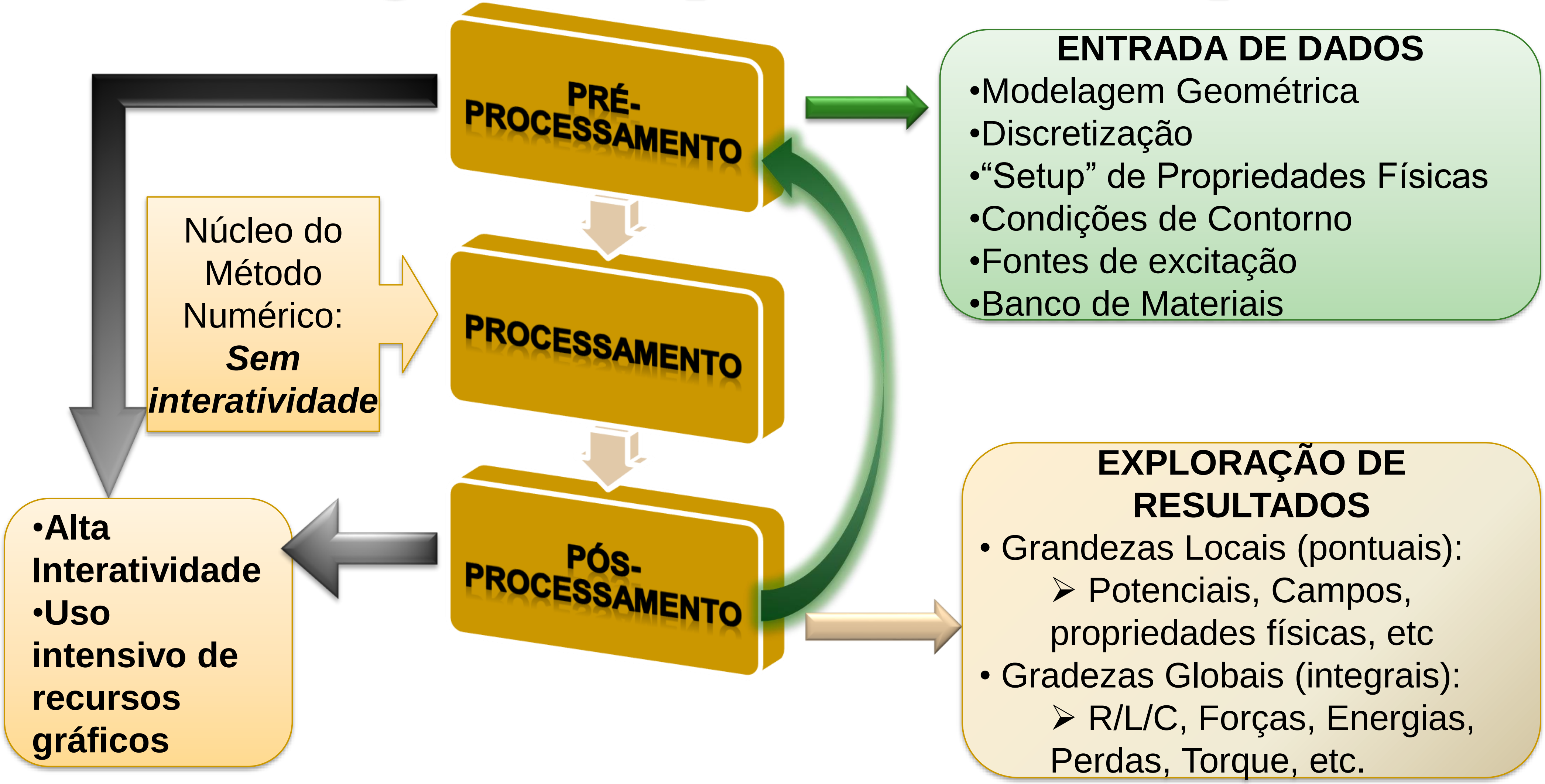
Sem restrição à geometria

Problemas Lineares

Geometria regular

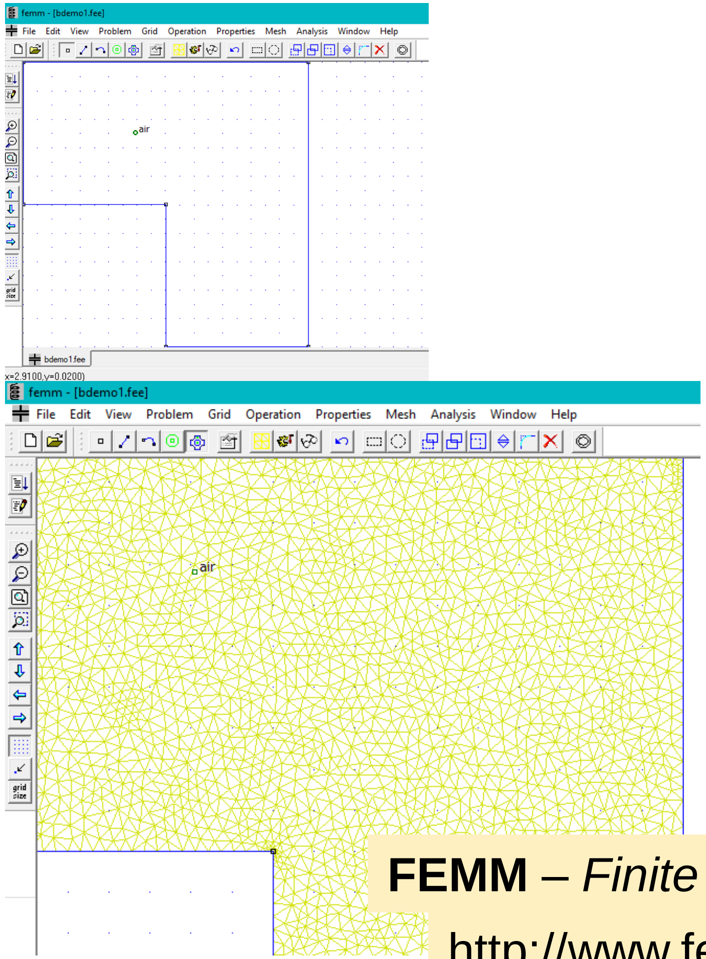
AMBOS NECESSITAM QUE O DOMÍNIO DE ESTUDO SEJA TRUNCADO.

Modelagem Computacional - Etapas

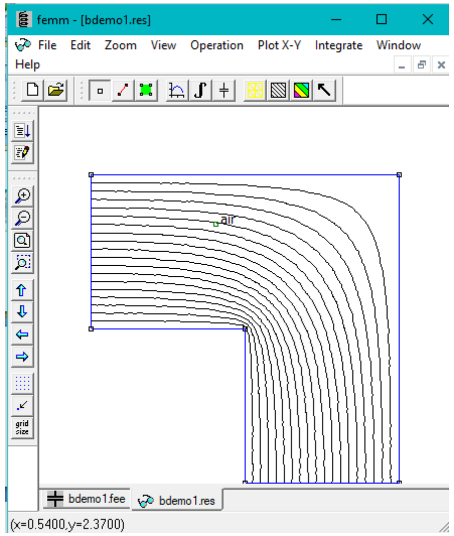


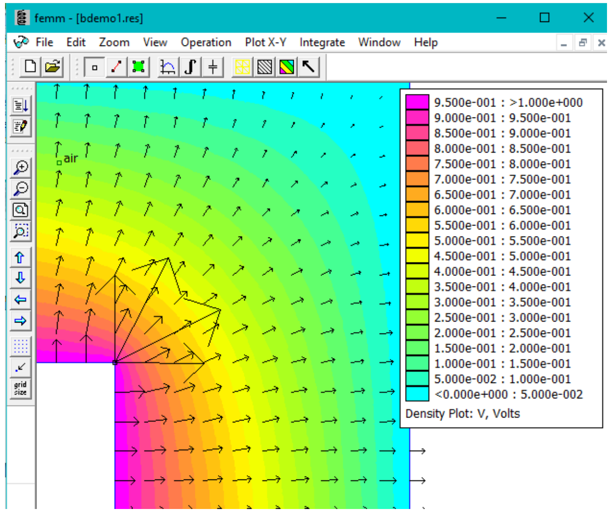
Método dos Elementos Finitos

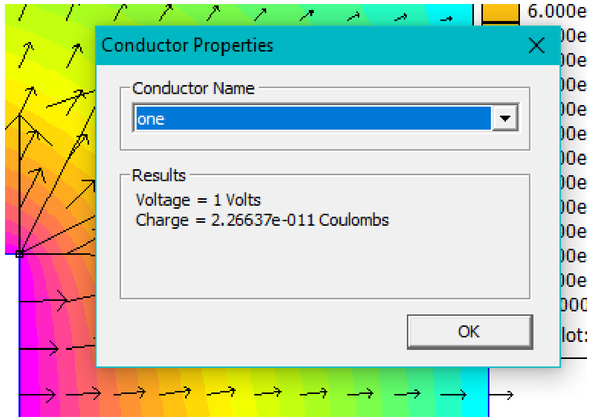
Pré-processamento



Pós-Processamento





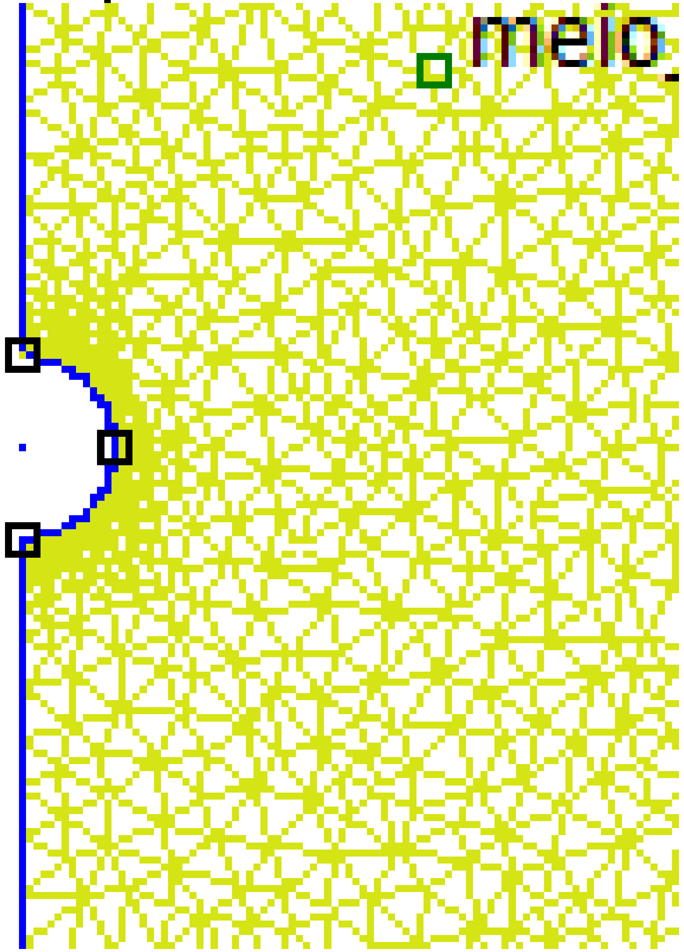


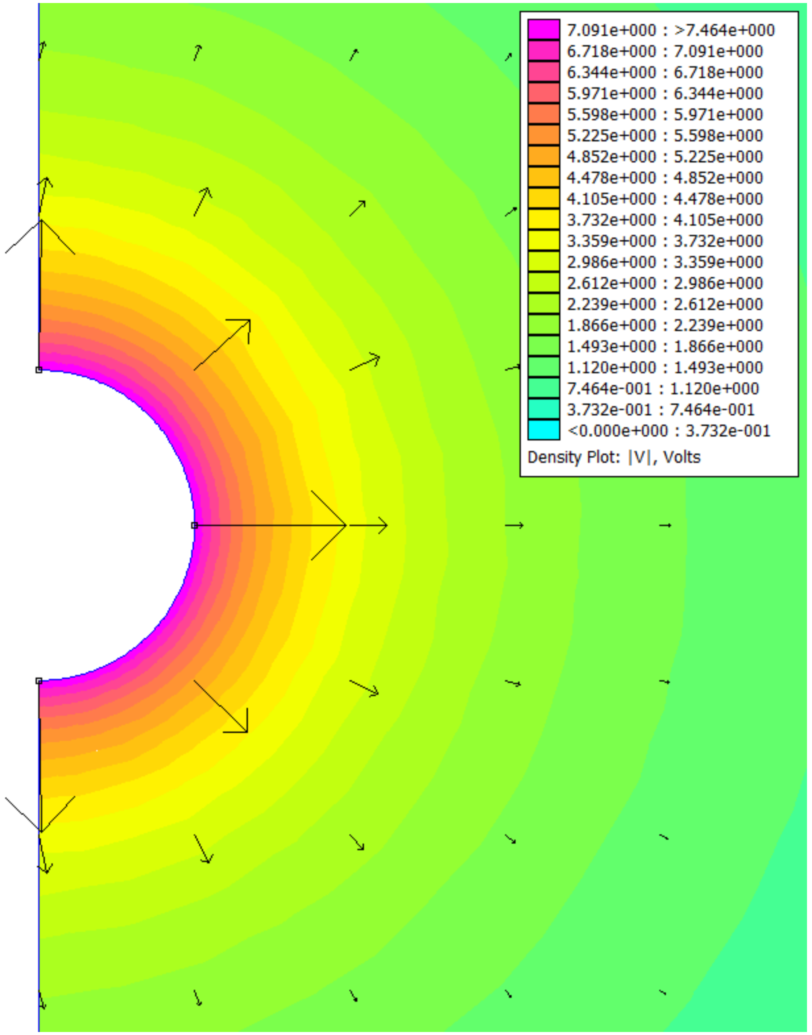
FEMM – *Finite Element Method Magnetics*

http://www.femm.info/wiki/HomePage

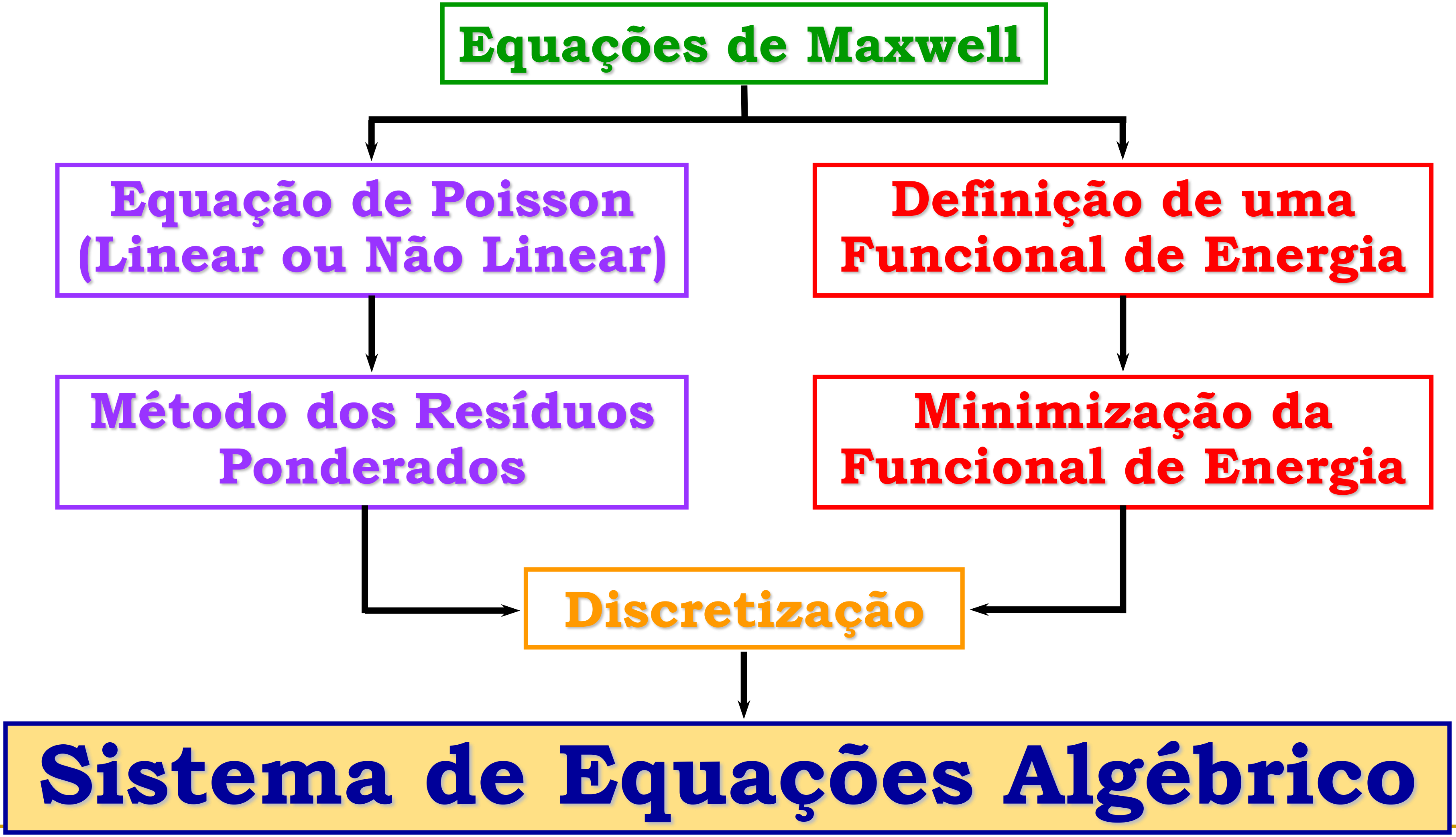
Método dos Elementos Finitos

Exemplo: esfera enterrada





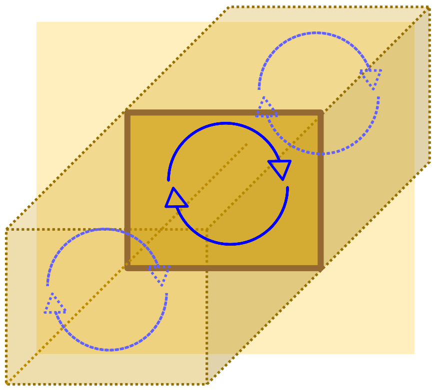
Formulações Clássicas do M.E.F.

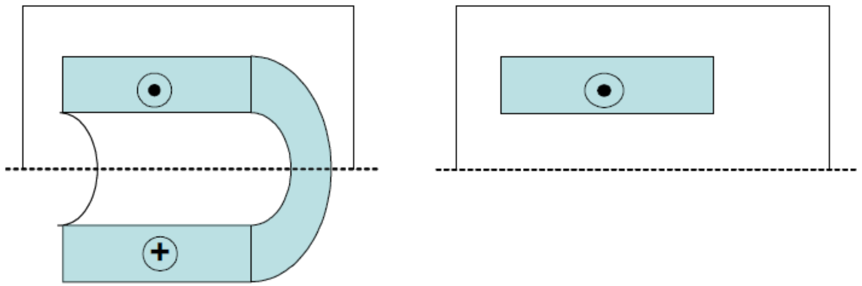


Método dos Elementos Finitos -

Formulação Alternativa para a Engenharia Elétrica

- Baseada na resolução da forma integral das Equações de Maxwell
- Referência: J. R. Cardoso (2017) *Electromagnetics through the Finite Element Method. (A Simplified Approach using Maxwell's Equations)* CRC Press
- *Problemas passíveis de modelagem bidimensional (2D): simetria plana ou axissimétrica (simetria de revolução).*





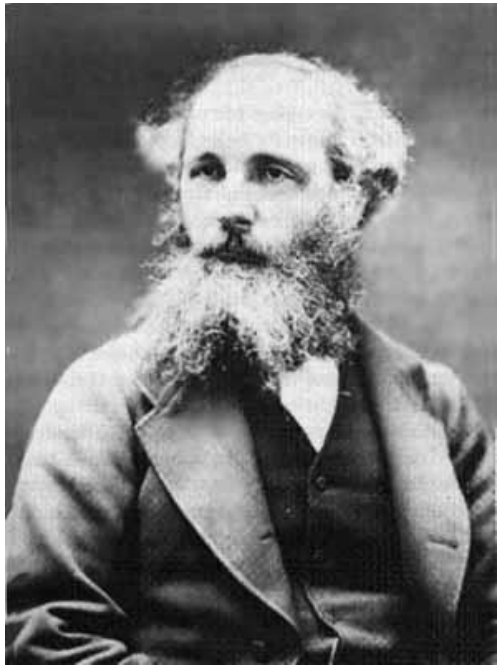
Equações de Maxwell

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_\Sigma \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho \cdot d\tau$$



(1831 - 1879)

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

Regime Estacionário

- **Eletrostática**

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\oint_\Sigma \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, d\tau}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

- **Magnetostática**

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$$

$$\oint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

Potenciais

Métodos Numéricos, como o M.E.F., requerem o uso de funções contínuas!

- **Eletrostática**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

- **Magnetostática**

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

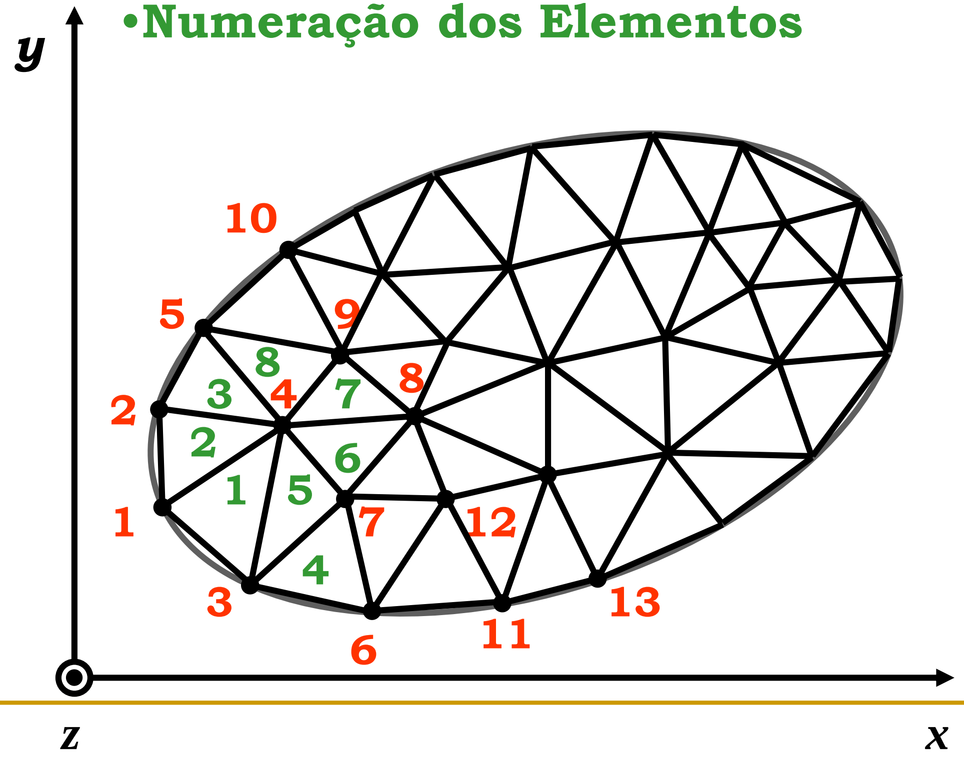
$$\Downarrow$$

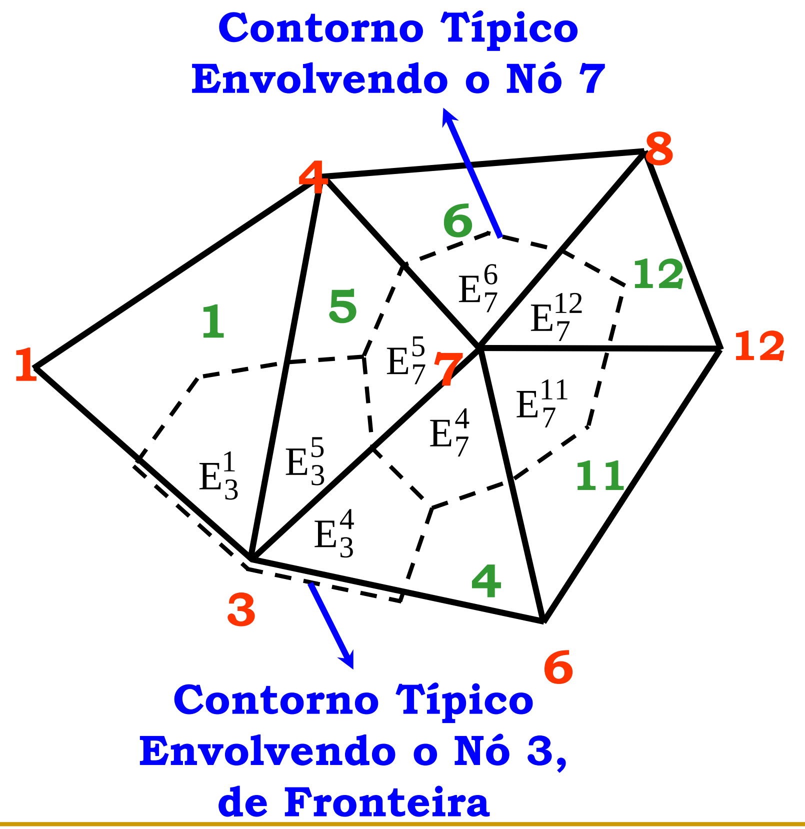
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Regiões de Controle

Suportes geométricos convenientemente escolhidos sobre os quais serão aplicadas as leis de Gauss (Eletrostática) e Ampère (Magnetostática)

- **Numeração dos Nós**
- **Numeração dos Elementos**





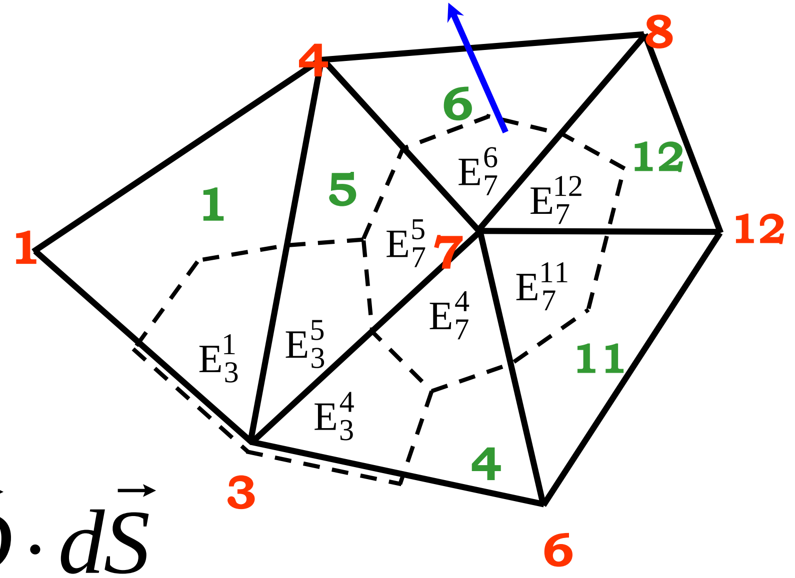
Eletrostática – “Superfície” de Controle

*Aplicação da **Lei de Gauss** a cada **NÓ** da malha de Elementos finitos*

$$E_M^N$$

Contribuição do triângulo N ao fluxo em torno do nó M

Contorno Típico Envolvendo o Nó 7

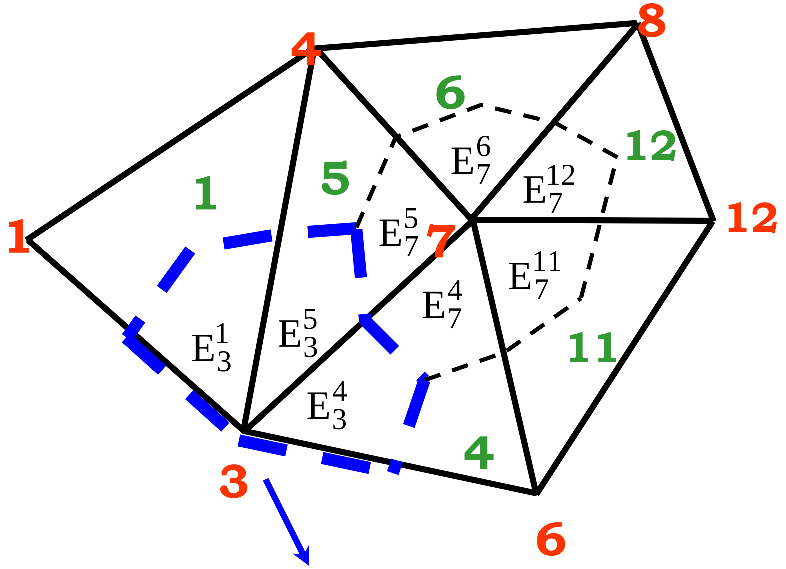


$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

A superfície “gaussiana” corresponde ao contorno 7 indicado, multiplicado pelo comprimento do domínio (normal à figura).

Expressão válida para qualquer Nó “interno”

Superfícies de Controle - Nós de fronteira



$$E_3^1 + E_3^5 + E_3^4 = \oint_{\Sigma_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Contorno Típico Envolvendo o Nó 3, de Fronteira

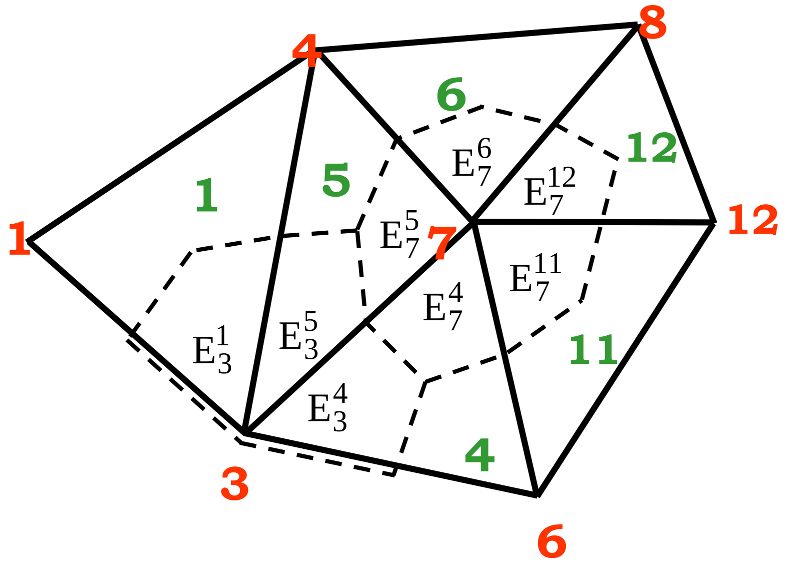
Válido para qualquer Nó na fronteira

“Assemblagem”

Aplica-se a Lei de Gauss para todos os nós da malha de Elementos Finitos

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} Q_i^e$$

Mas como calcular os E_i^e's ?



Aproximação Linear do Potencial (V)

- Em cada elemento da malha de E.F. adota-se uma aproximação linear para o potencial
- Para minimizar o erro dessa aproximação, pode-se diminuir o tamanho dos triângulos

$$V(x,y)=\sum_{i=1}^{3}N_i(x,y)\times V_i$$

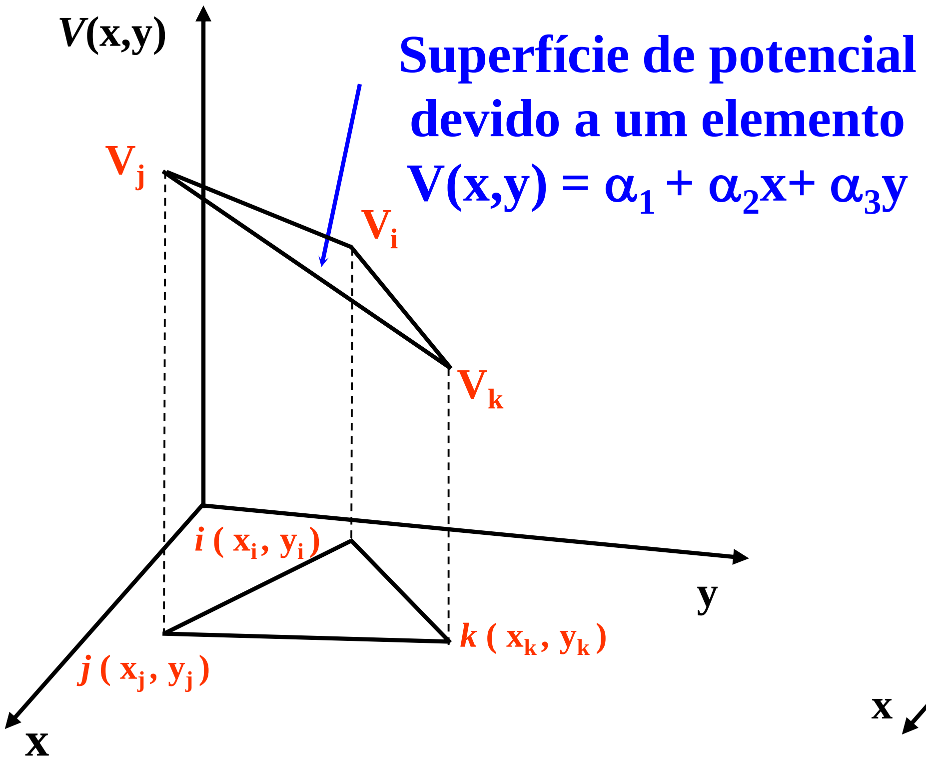
A aproximação linear do potencial no interior de um elemento genérico é tomada como uma soma ponderada dos potenciais nos vértices (nós) do triângulo

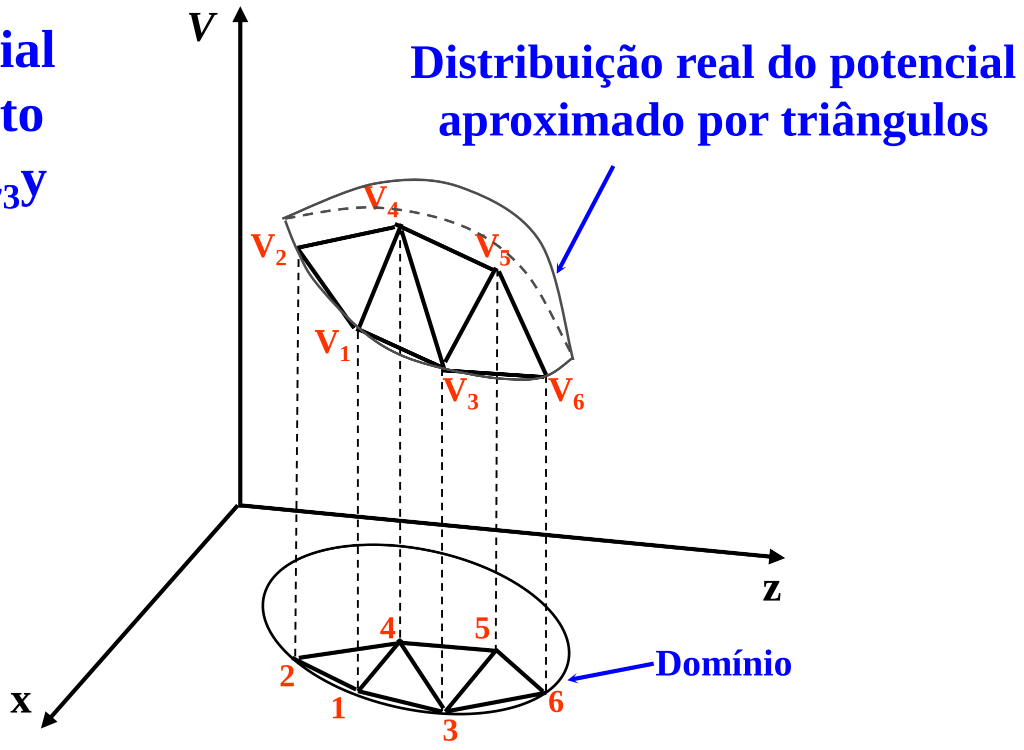
Funções de ponderação da aproximação: $N_i\ (x,y)$ → ***Funções de Forma do elemento***

❖ ***"Funções de Forma"*** do elemento → funções adimensionais linearmente independ. → polinômios

❖ Potenciais nos nós da malha de Elem. Finitos→ V_i's→ parâmetros da interpolação linear

Aproximação do Potencial Escalar Elétrico no Elemento

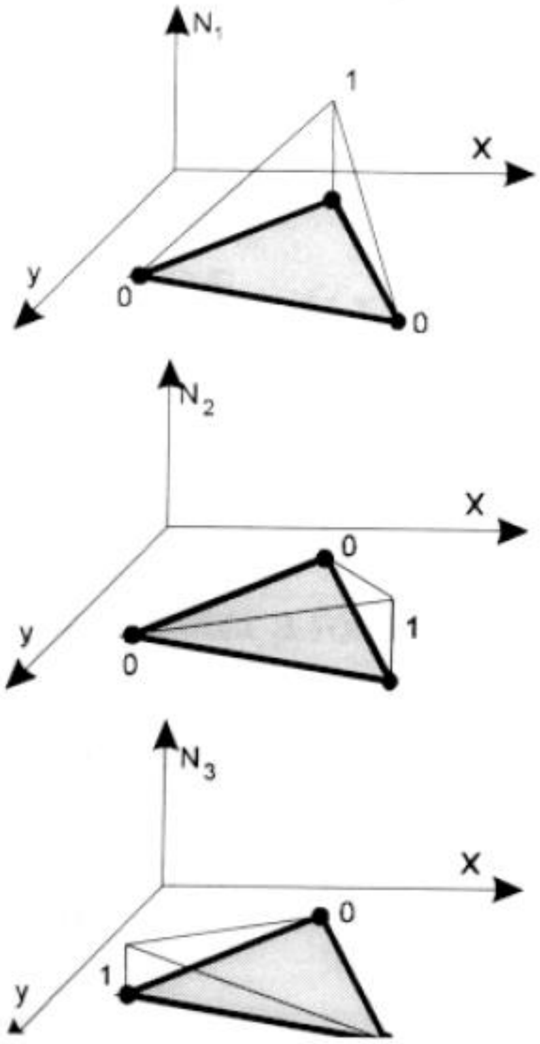




Funções de Forma

$$N_i(x,y)$$

Propriedades:



1. $N_i(x_j,y_j) = \delta_{ij}$ (=1, p/ $i=j$; =0 p/ $i\neq j$)
2. $\sum_{i=1,2,3} N_i(x_j,y_j) = 1$

Funções de Forma em 2 dimensões

Em 2D, polinômio de 1ª ordem: equação do plano → $N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$

$$\begin{cases} N_i\left(x_i, y_i\right) = p_i + q_i x_i + r_i y_i = 1 \\ N_i\left(x_j, y_j\right) = p_i + q_i x_j + r_i y_j = 0 \\ N_i\left(x_k, y_k\right) = p_i + q_i x_k + r_i y_k = 0 \end{cases}$$

3 equações e 3 incógnitas (*p_i*, *q_i* *e* *r_i*)

Funções de Forma para triângulos (2D)

$$N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$$

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

$$2\Delta \rightarrow 2 \times \acute{A}rea\ do\ Tri\hat{a}ngulo$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j; & b_i = y_j - y_k; & c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k; & b_j = y_k - y_i; & c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i; & b_k = y_i - y_j; & c_j = x_j - x_i \end{cases}$$

Campo Elétrico e Vetor Deslocamento

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon \nabla V$$

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \times V_i$$

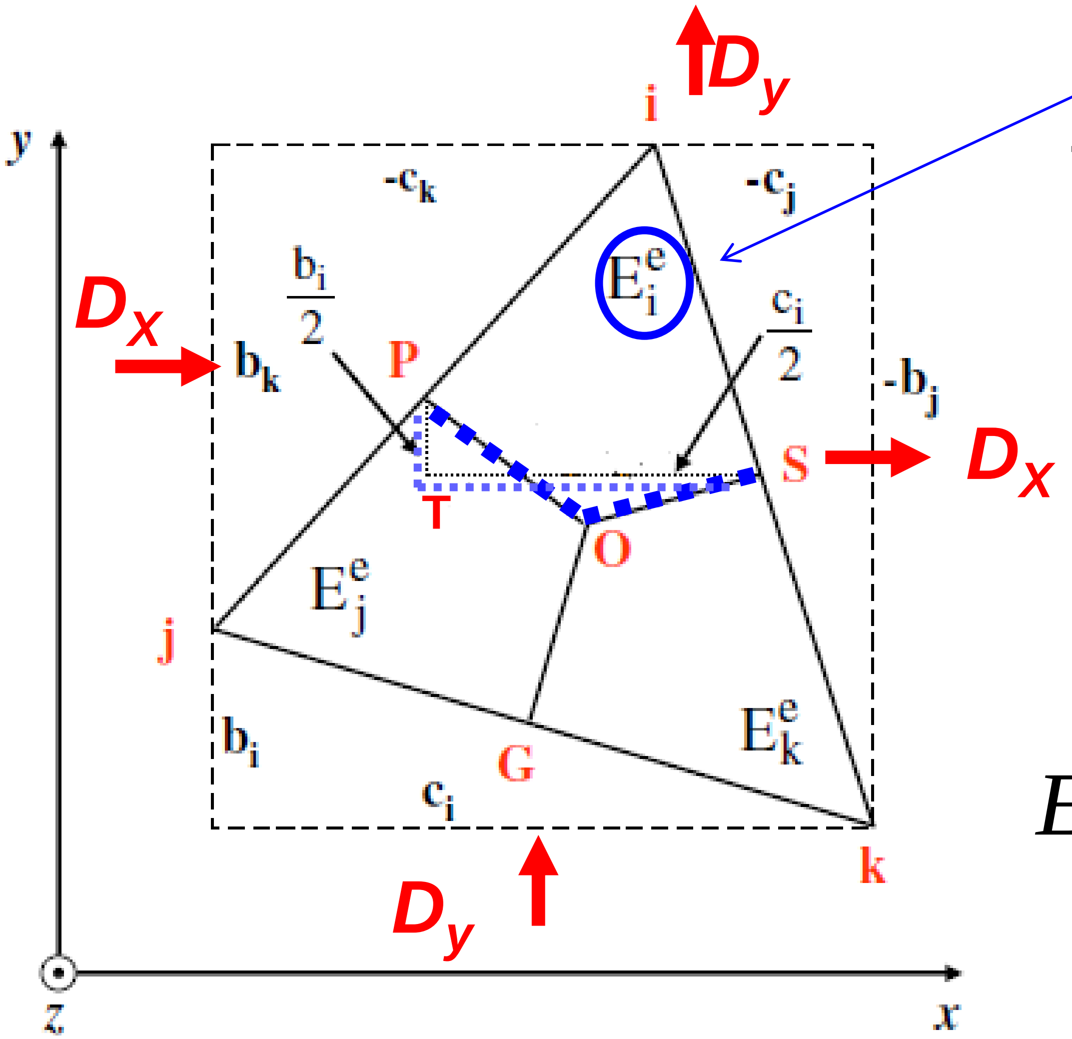
$$\vec{E} = -\nabla V = -\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{b_i\,\vec{u}_x}{2\Delta} + \frac{c_i\,\vec{u}_y}{2\Delta} \right) V_i$$

$$\vec{D} = \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(-b_i\vec{u}_x - c_i\vec{u}_y\right)}{2\Delta} V_i$$

2D: somente comp. x e y

Módulo dos dois Vetores é constante no elemento, pois V varia linearmente com x e y

Determinação de E_i^e – Elemento genérico



$$E_i^e = ?$$

Fluxo de ***D*** por $\overline{\text{POS}}$

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

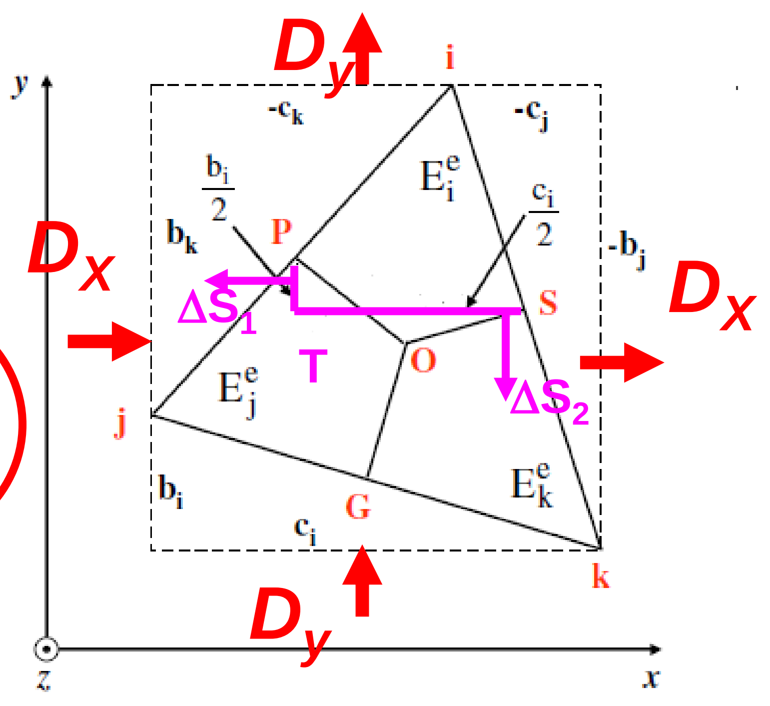
D constante no elemento

$$E_i^e = \int_{\boxed{POS}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\boxed{PTS}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Determinação de E_i^e – Elemento genérico

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_P^T \vec{D}\cdot d\vec{S}_1 + \int_T^S \vec{D}\cdot d\vec{S}_2$$

$$E_i^e = -D_x \cdot \Delta S_1 - D_y \cdot \Delta S_2$$



$$\Delta S_1 = (y_P - y_T)\times 1 = \frac{(y_j - y_k)}{2}\vec{u}_x = -\frac{b_i}{2}\vec{u}_x$$

$$\Delta \vec{S}_2 = (x_S - x_T)\times 1 = \frac{(x_k - x_j)}{2}\vec{u}_y = -\frac{c_i}{2}\vec{u}_y$$

Adotando
L = 1m

Matriz de rigidez do Elemento Triangular

$$E_i^e = \overbrace{\left[\varepsilon \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(-b_i\vec{u}_x - c_i\vec{u}_y\right)}{2\Delta} V_i\right]}^{\vec{D}} \times \left(-\frac{b_i}{2}\vec{u}_x - \frac{c_i}{2}\vec{u}_y\right)$$

$$E_i^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \times \left[(b_i b_i + c_i c_i) + (b_i b_j + c_i c_j) + (b_i b_k + c_i c_k)\right]$$

Repetindo para os nós *j* e *k*, chega-se à matriz do element *e*:

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix}$$

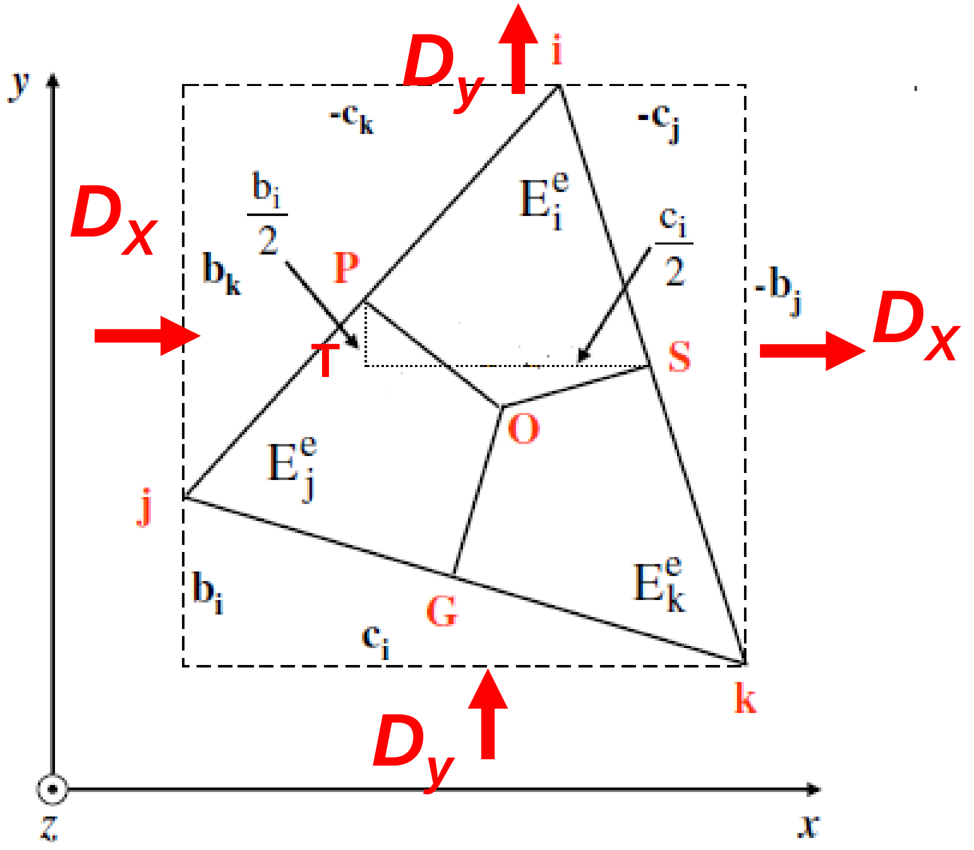
Carga nos nós

$$\sum E_i^e = \iiint_\tau \rho_V \, d\tau$$

- Para elementos suficientemente pequenos, distribui-se igualmente a carga total de cada elemento entre seus nós:

$$Q_i^e = Q_j^e = Q_k^e = \frac{\rho\Delta.L}{3}$$

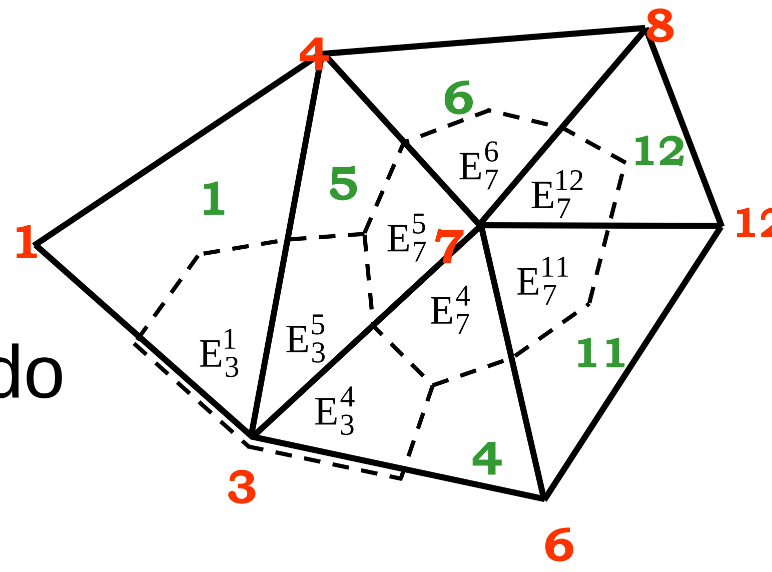
(*Comprimento do triângulo:* $L = 1$)



Sistema de Equações

- Repete-se o cálculo de E_i^e para todos os nós do domínio
- Efetua-se então a “assemblagem” (montagem) do sistema global:

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} Q_i^e$$



- Chega-se então a um sistema de ***NN*** (nº nós) equações algébricas, que deve ser resolvido para V:
  - $[K]\ [V] = [\ Q]$
  - ***Cada linha do sistema corresponde à Lei de Gauss aplicada a um determinado nó.***

Magnetostática

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

A ➔ potencial vetor magnético

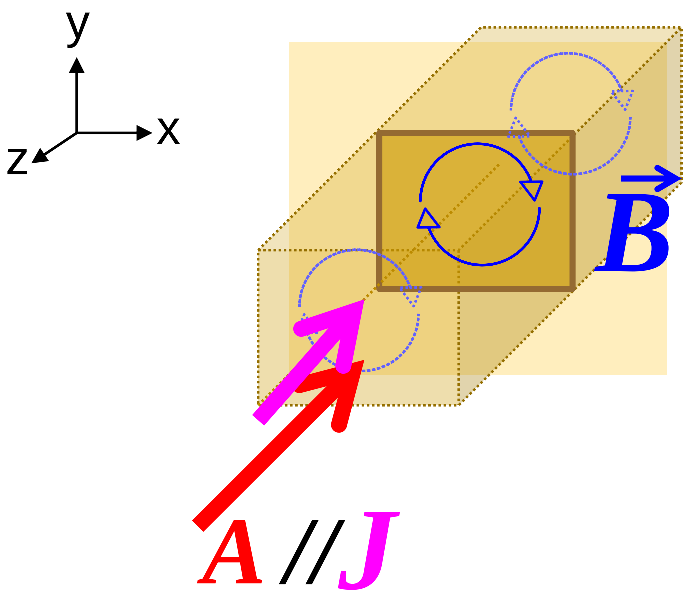
Magnetostática em 2D

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(\nu \vec{B} \right) = \vec{J}$$

Para $\vec{J} = J_z \, \hat{u}_z$

$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y$$

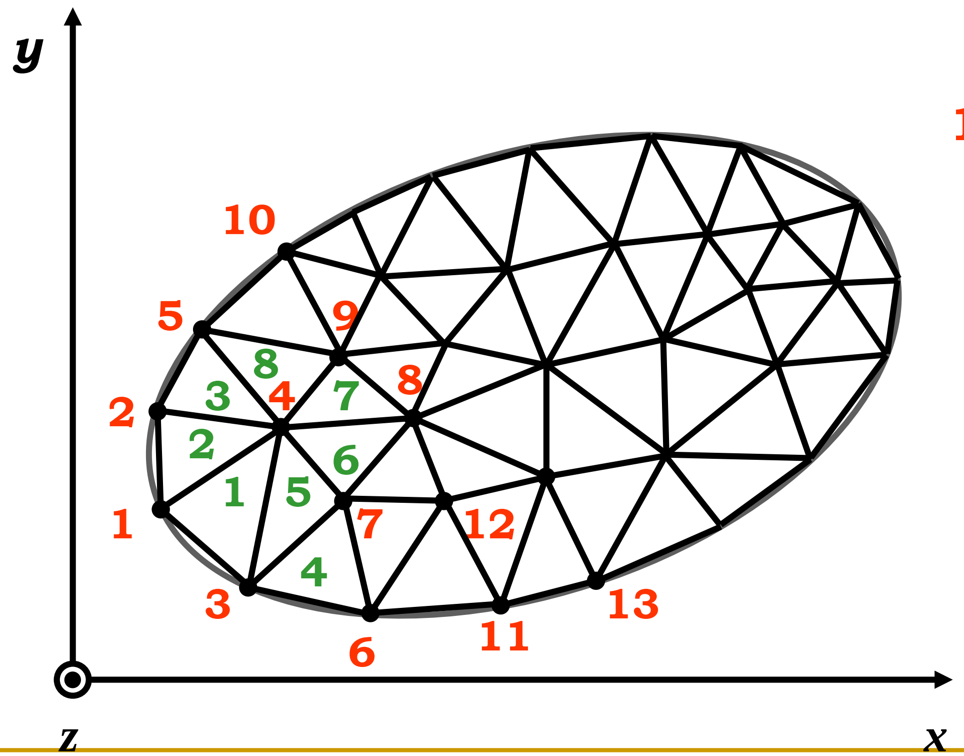
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = A_z \vec{u}_z$$



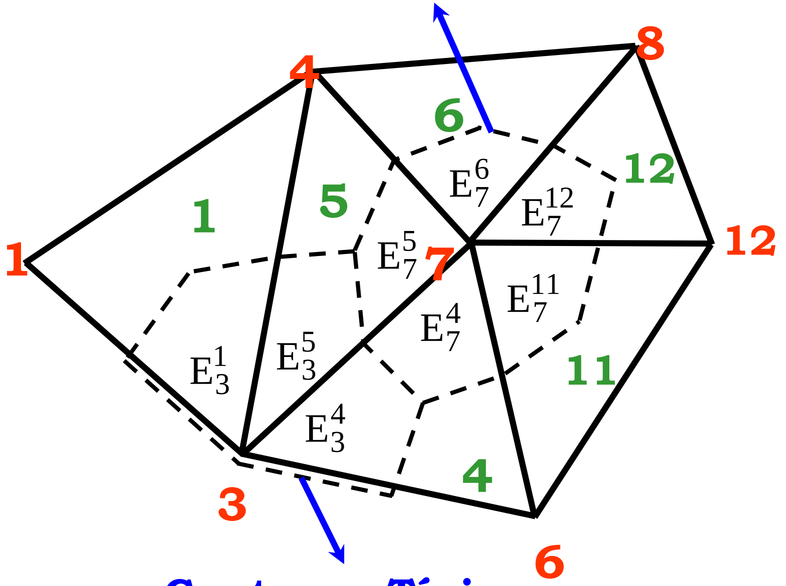
Em 2D, o POTENCIAL VETOR reduz-se a um escalar!

Regiões de Controle -Magnetostática

- **Numeração dos Nós**
- **Numeração dos Elementos**



Contorno Típico Envolvendo o Nó 7



Contorno Típico Envolvendo o Nó 3, de Fronteira

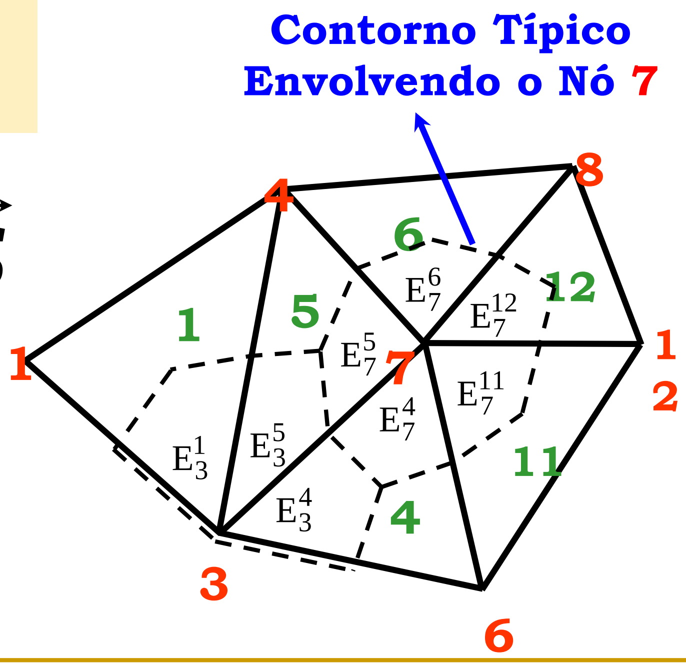
Regiões de Controle - Magnetostática

*Aplicação da **Lei de Ampère** a cada **NÓ** da malha de Elementos finitos*

$$E_M^N$$

Contribuição do triângulo **N** à ***circuitação*** de H em torno do nó **M**

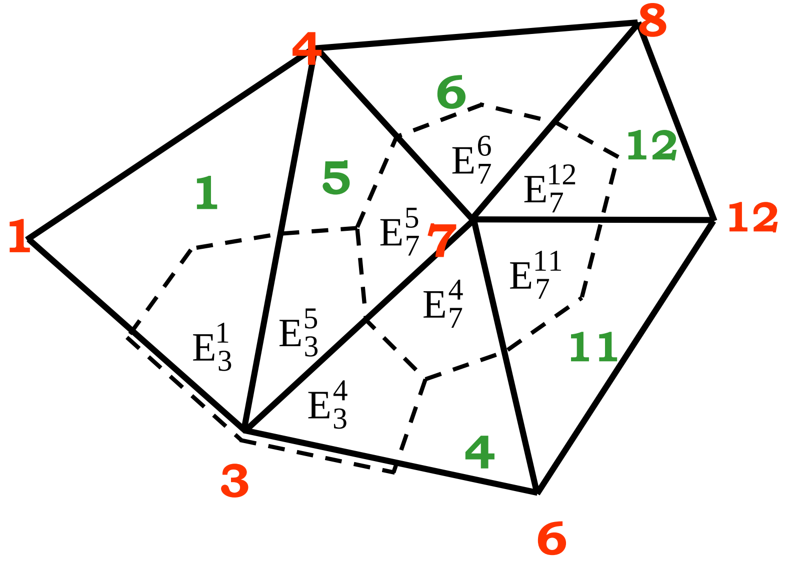
$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Assemblagem dos contornos de todos os nós

Aplica-se a Lei de Ampère para todos os nós

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} I_i^e$$



Aproximação Linear do Potencial Vetor Magnético (Wb/m)

$$A(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \times A_i$$

Campo Magnético no elemento

$$\vec{H} = \nu \vec{B} = \nu \nabla \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \nu = 1/\mu$$

$$\vec{H} = \nu \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(c_i \vec{u}_x - b_i \vec{u}_y\right)}{2\Delta} A_i$$

Assim como na Eletrostática, na Magnetostática a aproximação linear para* A *conduz a um campo magnético constante no elemento.

Determinação de E_i^e – Elemento genérico

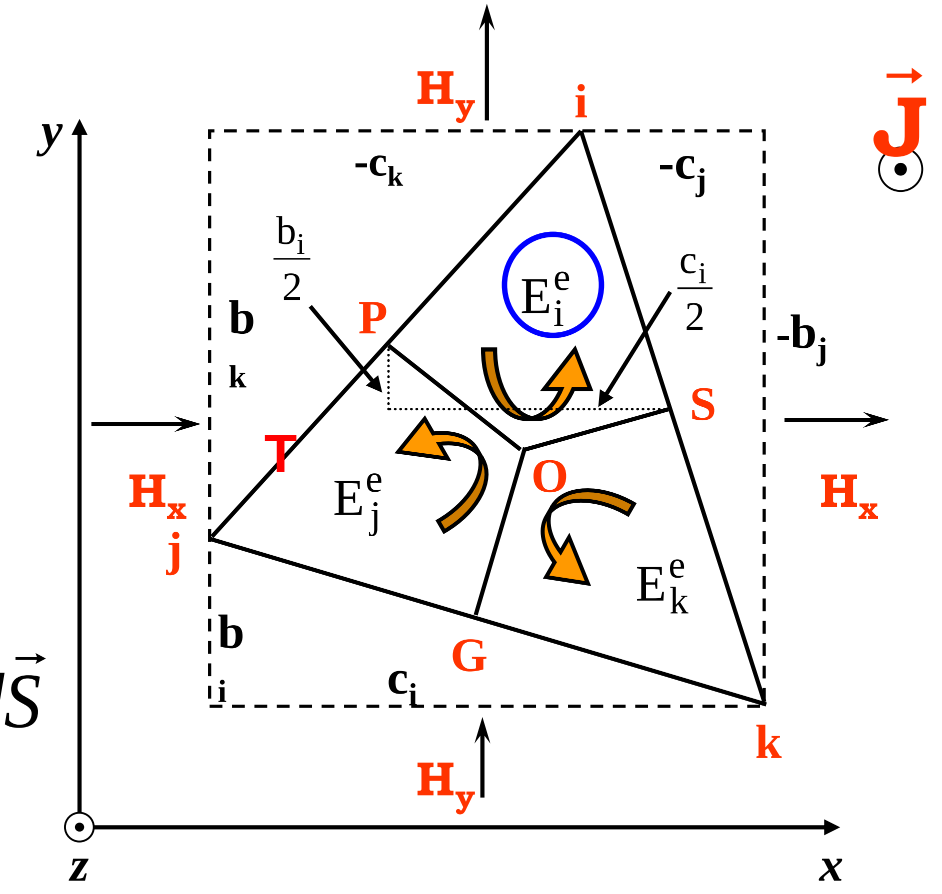
$$\int_{POS} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$\vec{H}$ é constante no elemento

$$\int_{PT} \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_{TS} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$H_y \Delta y + H_x \Delta x = \iint_{iPOS} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$H_y (y_T - y_P) + H_x (x_S - x_T) = \iint_{iPOS} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$



Matriz de rigidez do elemento

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix}$$

Corrente Elétrica no elemento

- Para elementos suficientemente pequenos, distribui-se igualmente a corrente total de cada elemento entre seus nós:

$$I_i^e = I_j^e = I_k^e = \frac{J\Delta}{3}$$

Sistema de Equações

- Repete-se o cálculo de $\boldsymbol{E_i^e}$ para todos os nós do domínio
- Efetua-se então a "assemblagem" (montagem) do sistema global: $\displaystyle\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} I_i^e$
- Chega-se então a um sistema de equações algébricas, que deve ser resolvido para $\boldsymbol{A}$:
  - $[K]\ [A] = [\ I\ ]$
- ***Cada linha do sistema corresponde à Lei de Ampère aplicada a um determinado nó.***