

---

**Università degli Studi di Napoli Federico II**  
Scienze e Tecniche dell'Edilizia - L23  
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

## Appunti di Algebra e Geometria

Codice - MAT 03 - 6CFU

IVANO D'APICE

### **Professore**

PROF. MAURIZIO BRUNETTI  
**Università degli Studi di Napoli Federico II**  
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

25 Nov 2023

### Abstract

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione inviare mail a:

[ivanodapice@hotmail.com](mailto:ivanodapice@hotmail.com).

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Insiemi . . . . .	2
1.2	Proprietà . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Vettori e Matrici</b>	<b>6</b>
2.1	Proprietà valide negli spazi vettoriali . . . . .	7
2.2	Dipendenza lineare . . . . .	10
2.3	Teorema di caratterizzazione dei sistemi di vettori linearmente dipendenti . . . . .	11
2.4	Basi di uno spazio vettoriale . . . . .	12
2.5	Teorema di caratterizzazione delle basi . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Sottospazi Vettoriali</b>	<b>19</b>
3.1	Complemento Algebrico . . . . .	21
3.2	Rango di una Matrice . . . . .	23
3.3	Minore di una matrice . . . . .	23
3.4	Orlati di una Matrice . . . . .	24

# Chapter 1

## Introduzione

### Lecture 1: Richiami

#### 1.1 Insiemi

25 Nov. 12:11

Partiamo col dire che nel vasto spettro degli insiemi troviamo anche quelli numerici. Questi insiemi si dicono infiniti perché racchiudono al loro interno elementi che continuano ad incrementare o/e decrementare all'infinito. Vediamo ora i vari insiemi numerici che potremo incontrare nel corso:

**Definizione 1.1.1 (Numeri Naturali).** L'insieme  $\mathbb{N}$  comprende al suo interno tutti i numeri non negativi

**Esempio.**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, +\infty\}$

**Definizione 1.1.2 (Numeri Interi).** L'insieme  $\mathbb{Z}$  comprende al suo interno tutti i numeri negativi e positivi compreso quello nullo

**Esempio.**  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots, \pm \infty\}$

**Definizione 1.1.3 (Numeri Razionali).** L'insieme  $\mathbb{Q}$  comprende al suo interno tutti i numeri interi e comprende la notazione del tipo  $\frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

**Esempio.**  $\mathbb{Q} = \{-\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{5}, 1.5\bar{3}, 1.23(\frac{111}{90}), \frac{88}{1}, \dots\}$

**Definizione 1.1.4 (Numeri Reali).** L'insieme  $\mathbb{R}$  comprende quei numeri che possono essere rappresentati con notazione decimale senza per forza essere del tipo  $\frac{m}{n}$

**Esempio.**  $\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, e^4\}$

Quindi possiamo dire che  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Per ricordare più facilmente questi insiemi possiamo ripensarli come:

$\mathbb{N}$ (Naturali),  $\mathbb{Z}$ (Zero),  $\mathbb{Q}$ (Quoziente),  $\mathbb{R}$ (reali)

### 1.1.1 N-ple, $\mathbb{R}^n$

Identifichiamo ora un nuovo ente  $[(a, b)]$  individuato da due oggetti  $a$  e  $b$  non necessariamente distinti, e dall'ordine dei due. Un buon esempio potrebbe essere quello degli scacchi dove la posizione di una casella è identificata da due valori  $[(n, x)]$ .<sup>1</sup>

Possiamo definire adesso un nuovo insieme che è quello di  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$  definito da numeri razionali.

**Esempio.** Un insieme  $\mathbb{R}^2$  potrebbe essere  $v = (2, \sqrt{6.4}), \in \mathbb{R}^2$

**Nota.** In  $\mathbb{R}^2$  ci sono anche particolari combinazioni che prendono il nome di **Diagonale Principale** e **Diagonale Secondaria**.

**Esempio.**

$v = (x, x)$ : Diagonale Principale (i due elementi sono uguali)

$v = (x, -x)$ : Diagonale Secondaria (un elemento è l'opposto dell'altro)

Oltre all'insieme  $\mathbb{R}^2$  ci sono poi tutta una serie incrementale di insiemi fino ad arrivare alla ennupla  $\mathbb{R}^n$  che ha un numero di elementi virtualmente infinito. L'insieme di  $\mathbb{R}^n, n > 2$  viene chiamato spazio euclideo mentre i suoi elementi  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x \in \mathbb{R})$  vengono chiamati punti o vettori.

Possiamo usare gli spazi  $\mathbb{R}$  per rappresentare graficamente dei riferimenti.  $\mathbb{R}^1$  ci permette di orientarci su una retta mentre  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  rispettivamente per visualizzare figure piane e solidi.

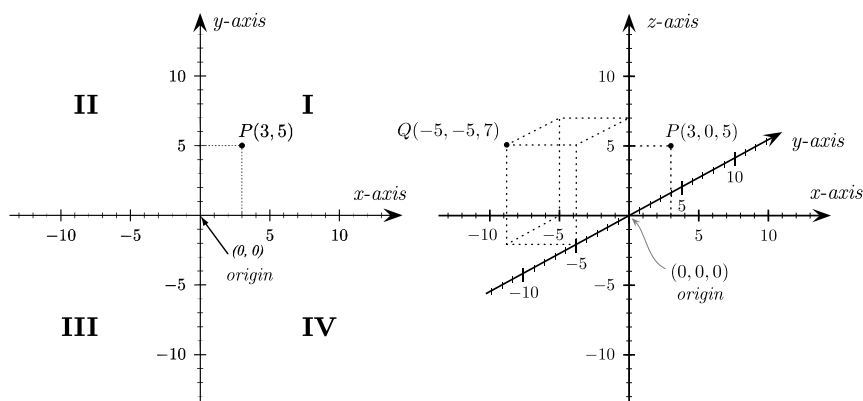


Figure 1.1: Coordinate degli assi in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$

<sup>1</sup>Coordinate Scacchiera

Adesso possiamo usare lo spazio  $\mathbb{R}^2$  per fare un esercizio. Avremo due vettori  $q = (3, 5)$  e  $p = (5, 3)$  e vogliamo visualizzare il vettore  $s = \frac{1}{2}q + 2p$ . Per fare ciò, si usa un metodo grafico chiamato punta-coda, dove mettiamo i nostri vettori in successione connettendo l'inizio di uno alla fine dell'altro.

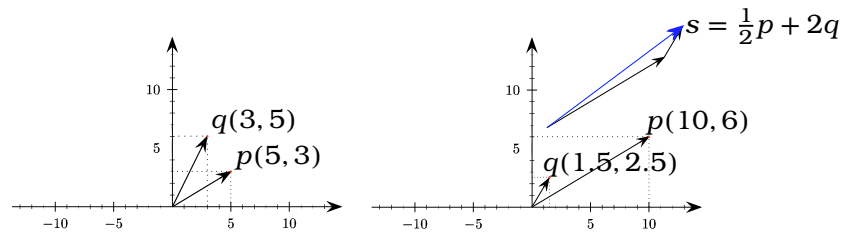


Figure 1.2

## 1.2 Proprietà

### 1.2.1 Somma

**Definizione 1.2.1.**  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (a, b) \in \mathbb{R}$

La somma è un'operazione interna, dato che gli addendi e il risultato dell'operazione si trovano nello stesso insieme.

**Nota.**

1. Elemento neutro:  $(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$
2. Opposto:  $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0, 0), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$
3. P. Associativa:  $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

$$[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) = (a_1, a_2) + [(b_1, b_2) + (c_1, c_2)]$$

4. P. Commutativa:  $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$$

Una struttura algebrica del tipo  $(\mathbb{R}^2, +)$  se gode delle precedenti proprietà da 1 a 4 viene chiamata **Gruppo Abelian**

## 1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

**Definizione 1.2.2.**  $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \quad \dagger \quad a, b \in \mathbb{R}$

**Nota.**

5. P. distributiva:  $\forall \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\beta[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \beta(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$

6. P. distributiva:  $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(\beta + \delta)(a_1, a_2) = \beta(a_1, a_2) + \delta(a_1, a_2)$$

7. P. Associativa:  $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\beta \gamma(a_1, a_2) = \beta[\gamma(a_1, a_2)] = (\beta \gamma)(a_1, a_2)$$

8. Elemento neutro:  $1(a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

## Chapter 2

# Vettori e Matrici

### Lecture 2: Spazi vettoriali

Sia  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  una struttura algebrica (ovvero un insieme non vuoto su cui sono definite delle operazioni), dove  $+$  è interna e  $\cdot$  è una moltiplicazione di un vettore per uno scalare,  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  si chiama **spazio vettoriale** (e gli elementi di  $\mathbb{R}^2$  vettori) se valgono le precedenti 8 proprietà. 9 Sep. 08:00

**Esempio (Spazi Vettoriali).**  $\mathbb{R}[x] \cong$  Polinomi a coefficienti reali ad un'incognita.

$$P_1(x) = 3 - x + x^3 + P_2(x) = 5x - \frac{7}{2}x^4$$

$$\begin{aligned} & 3 - x + x^3 + \\ & + 5x - \frac{7}{2}x^4 = \\ & 3 + 4x + x^3 - \frac{7}{2}x^4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3$$

**Definizione 2.0.1 (combinazione lineare).** Siano  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ . Un vettore del tipo  $\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n, \beta \in \mathbb{R}$  è combinazione lineare dei vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

**Esempio.**  $3(1, 3) + \frac{1}{2}(0, 4) + (-1, -1) = (3, 9) + (0, 2) + (-1, -1) = (2, 10)$ , questi elementi di  $\mathbb{R}^2 = (2, 10)$  sono combinazione lineare di  $(1, 3), (0, 4), (-1, -1)$  scegliendo  $(\beta_1 = 3, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = 1)$

**Esempio (spazi vettoriali).**

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$  (Spazio vettoriale dei vettori)

$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x_1, x_2], \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  (Spazio vettoriale dei polinomi)

$M_{n \times m}, n \wedge m \in \mathbb{N}$  (Spazio vettoriale delle matrici)

$\{G\}$  (Spazio vettoriale dell'elemento nullo)



**Esempio** (elementi neutri negli spazi vettoriali).

$$\mathbb{R}^2 = \underline{0} \Rightarrow (0, 0)$$

$$\mathbb{R}^4 = \underline{0} \Rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

$$M_{3 \times 3} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.1 Proprietà valide negli spazi vettoriali

**Proposizione 2.1.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale qualunque,  $\forall \beta \in \mathbb{R}, \beta \underline{0} = \underline{0}$

**Dimostrazione.**

$$\beta \underline{0} = \beta (\underline{0} + \underline{0}) = \beta \underline{0} + \beta \underline{0}$$

$$\beta \underline{0} = \beta \underline{0} + \beta \underline{0}, \text{ esiste l'opposto di } \beta \underline{0} \text{ e lo chiamiamo } OPP$$

$$\beta \underline{0} + OPP = (\beta \underline{0} + \beta \underline{0}) + OPP$$

$$\underline{0} = \beta \underline{0} + (\beta \underline{0} + OPP)$$

$$\underline{0} = \beta \underline{0} + \underline{0} \rightarrow \beta \underline{0} = \underline{0}$$

**Proposizione 2.1.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale qualunque,  $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} \cdot \underline{0} = \underline{0}$

**Dimostrazione.**

$$\underline{v} \cdot \underline{0} = \underline{v}(\underline{0} + \underline{0}) = \underline{v} \cdot \underline{0} + \underline{v} \cdot \underline{0}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{0} = \underline{v} \cdot \underline{0} + \underline{v} \cdot \underline{0}, \text{ esiste l'opposto di } \underline{v} \cdot \underline{0} \text{ e lo chiamiamo } OPP$$

$$\underline{v} \cdot \underline{0} + OPP = (\underline{v} \cdot \underline{0} + \underline{v} \cdot \underline{0}) + OPP$$

$$\underline{0} = \underline{v} \cdot \underline{0} + (\underline{v} \cdot \underline{0} + OPP)$$

$$\underline{0} = \underline{v} \cdot \underline{0} + \underline{0} \rightarrow \underline{v} \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

**Proposizione 2.1.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale qualunque, l'opposto di  $\underline{v} \cdot \underline{0}$  è  $(-1)\underline{v}$

**Dimostrazione.**

$$\underline{v} + (-1)\underline{v} = \underline{0}$$

$$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1 - 1)\underline{v} = \underline{0} \cdot \underline{v} = \underline{0}, \text{ per la proposizione III.2}$$

**Proposizione 2.1.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale qualunque,  $k \cdot \underline{v} = \underline{0}$ , se  $k = 0$  o  $\underline{v} = \underline{0}$

**Dimostrazione.**

Se  $k = 0$  è vera per la proposizione III.2

Se  $k \neq 0$ ,  $\exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \frac{1}{k} \cdot \underline{0}$$

$$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \underline{0} \text{ Per la proposizione III.1}$$

$$1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\underline{v} = \underline{0}$$

**Proposizione 2.1.5.** In uno spazio vettoriale  $V \in \mathbb{R}$  se  $\exists \underline{v} \neq 0$  allora  $V$  contiene infiniti vettori

**Dimostrazione.**

$1\underline{v}, 2\underline{v}, 3\underline{v}, \dots, n\underline{v}$  facciamo vedere che sono a due a due distinte

$$h \cdot \underline{v} = k \cdot \underline{v}$$

$$(h \cdot \underline{v}) + (-1k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$$

$$(h - k)\underline{v} = \underline{0}$$

$$h - k = \underline{0} \text{ Per la proposizione III.4}$$

$$h = k$$

**Proposizione 2.1.6.** In uno spazio vettoriale  $V$  qualunque,  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ ,  $0 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$

**Dimostrazione.**

$$\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n : \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n = 0$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

**Nota.** Con il simbolo  $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$  o con  $\beta(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$  indichiamo l'insieme delle combinazioni lineari di  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  cioè l'insieme  $\{\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_n \underline{v}_n / \beta_i \in \mathbb{R}\}$

**Esempio.**

$$(0, 4) \in \langle (2, 6), (0, 4), (-7, 2) \rangle ?$$

Si, infatti basta scegliere  $\beta_1 \wedge \beta_3 = 0, \beta_2 = 1$

$$(-1, -3) \in \langle (2, 6), (0, 4), (-7, 2) \rangle ?$$

Si,  $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{2}$

$$(-5, 8) \in \langle (2, 6), (0, 4), (-7, 2) \rangle ?$$

$$(-5, 8) = \beta_1(2, 6) + \beta_2(0, 4) + \beta_3(-7, 2) = (2\beta_1 - 7\beta_3, 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3)$$

$$\begin{cases} -5 = 2\beta_1 & -7\beta_3 \\ 8 = 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 \end{cases}$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$$

In generale, l'insieme delle combinazioni lineari  $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle \subseteq V$ . Quindi ogni vettore di  $V$  è combinazione lineare di  $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$  e si dice che  $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$  sono **generatori** di  $V$ .

**Esempio.**

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 0, 3), \underline{v}_2 = (\pi, e, 0, -55), \underline{v}_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0)$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  generano  $\mathbb{R}^4$ ?

No perché:  $\beta_1(1, 2, 0, 3) + \beta_2(\pi, e, 0, -55) + \beta_3(\log_2 3, \sin 8, 0, 0)/\beta_i \in \mathbb{R}$

$(0, 0, 1, 0)$  non è combinazione lineare di  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  (In ogni vettore, il terzo elemento è 0, e qualcosa per 0 fa sempre 0)

**Esempio.**  $P_1(x) = 3 - x^4, P_2(x) = x + 77x^7$ 

$$x^8 \in \langle P_1(x), P_2(x) \rangle ?$$

No perché non contiene polinomi di grado maggiore a 7.

**Esempio.**  $(1, 3) \in \mathbb{R}^2$  genera  $\mathbb{R}^2$ ?

No, perché:  $\{\beta(1, 3)/\beta_i \in \mathbb{R}\} = \{(\beta, 3\beta)/\beta \in \mathbb{R}\}$

$\beta = 1 \rightarrow (1, 3)$  non possiamo generare  $(1, 1)$

**Esempio.**  $(1, 0), (0, 1)$  generano  $\mathbb{R}^2$ ?

Si, perché:  $(a, b) = ?(1, 0) + ?(0, 1) = \beta_1(1, 0) + \beta_2(0, 1) = (\beta_1, \beta_2)$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle \in \mathbb{R}^2$$

**Esempio.**  $(1, 0), (0, 1), (55, \frac{1}{2})$  generano  $\mathbb{R}^2$ ?

Si, perché:  $(a, b) = ?(1, 0) + ?(0, 1) + ?(55, \frac{1}{2}) = \beta_1(1, 0) + \beta_2(0, 1) + \beta_3(55, \frac{1}{2})$

$$\langle (1, 0), (0, 1), (55, \frac{1}{2}) \rangle \in \mathbb{R}^2$$

Come vediamo, se un insieme di vettori ha cardinalità minore della dimensione dello spazio a cui appartengono, allora possiamo immediatamente concludere che l'insieme assegnato non è un sistema di

generatori (come visto nel caso polinomiale precedente).<sup>1</sup> Mentre più avanti, con il concetto di dimensione di spazio vettoriale, sarà più facile capire come verificare se un insieme è generatore.

**Nota.** Se ad un insieme di generatori se ne aggiunge un altro, l'insieme risultante è anch'esso un generatore. Cioè se  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  genera  $V$  allora anche  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}$  diventa generatore.

**Dimostrazione.** Per ipotesi  $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \subseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle \subseteq V$   
 Dato che  $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$  è incluso in  $V$  e include  $V$ , allora  $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle = V$

**Esempio.**

In  $\mathbb{R}^3$ ,  $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$  generano  $\mathbb{R}^3$

In  $\mathbb{R}^1$ ,  $(1)$  genera  $\mathbb{R}^1$

In  $\mathbb{R}^n$ ,  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1)$  generano  $\mathbb{R}^n$

In  $\{G\}$ ,  $G$ (vettore nullo) genera  $\{G\}$

Un **Sistema di vettori** è un insieme in cui contano l'ordine degli elementi e anche le eventuali ripetizioni, e si indica così:  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

**Esempio.**

$\{(1, 0), (0, 1), (3, 5)\}$  3 elementi

$\{(1, 0), (1, 0), (3, 5)\}$  2 elementi  $= \{(1, 0), (3, 5)\} = \{(3, 5), (1, 0)\}$

$[(1, 0), (0, 1), (3, 5)]$  3 elementi

$[(1, 0), (1, 0), (3, 5)]$  3 elementi  $\neq [(1, 0), (3, 5)] \neq [(3, 5), (1, 0)]$

**Nota.**  $\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \underline{v}_2 = (0, 44, 44), \underline{v}_3 = (2, 4, 6)$

Esistono varie combinazioni lineari per esprimere gli elementi soprastanti come vettore nullo. Un metodo banale è porre  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0 \rightarrow 0 \cdot (1, 2, 3), 0 \cdot (0, 44, 44), 0 \cdot (2, 4, 6)$

Un altro modo sarebbe porre  $\beta_1 = -2, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

## 2.2 Dipendenza lineare

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  si dice **linearmente dipendente** se e soltanto se  $[0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_n]$  non è l'unico modo per esprimere  $\underline{0}$  come combinazione lineare di  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  Si dice **linearmente indipendente** se e soltanto se  $[0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_n]$  è l'unico modo per esprimere  $\underline{0}$  come combinazione lineare di  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

**Proposizione 2.2.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale qualunque e  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  contiene almeno una coppia di vettori proporzionali, il sistema è linearmente dipendente.

**Esempio.**

$[(2, 4), (4, 8)] = \underline{0}$

essendo  $(4, 8)$  il doppio di  $(2, 4)$  basta porre  $\beta_1$  uguale a -2

$[-2 \cdot (2, 4) + 1 \cdot (4, 8)] = (0, 0)$

<sup>1</sup>youmath

**Esempio.**  $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & \cos \delta \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 10^4 & 10^7 \\ 10^{-31} & 10^0 \end{bmatrix}$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  è linearmente dipendente perché se ci facciamo caso, qualsiasi valore di  $\beta$  mettiamo davanti a  $\underline{v}_2$  il risultato sarà sempre un vettore con elementi nulli, mentre per  $\underline{v}_1$  e  $\underline{v}_3$  basta porre il coefficiente di beta uguale a 0.

**Esempio.**  $[(1, 0), (0, 1)]$  è linearmente indipendente perché gli unici coefficienti di beta possibili sono 0

**Esempio.**  $[(1, 0), (0, 1), (3, 5)]$  è linearmente dipendente perché  $(3, 5)$  è proporzionale a  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$

Un modo per esprimere il vettore nullo è:  $-3(1, 0) + [-5(0, 1)] + 1(3, 5)$

## 2.3 Teorema di caratterizzazione dei sistemi di vettori linearmente dipendenti

**Teorema 2.3.1.**  $[v_1, \dots, v_n]$  lin. dipendenti  $\iff$  Almeno un vettore è combinazione lineare degli altri

**Dimostrazione** (da destra a sinistra).

Se  $\underline{v}_n \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1} \rangle$

$$\underline{v}_n = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{n-1} \underline{v}_{n-1}$$

$$0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{n-1} \underline{v}_{n-1} + (-1) \underline{v}_n \implies [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n] \text{ linearmente dipendenti}$$

**Dimostrazione** (da sinistra a destra).

Per ipotesi  $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$  non tutti nulli tale che  $0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$

$$\text{se } \beta_n \neq 0 \implies \underline{v}_n = \frac{1}{\beta_n} (-\beta_1 \underline{v}_1, \dots, -\beta_{n-1} \underline{v}_{n-1}) = (-\frac{\beta_1}{\beta_n}) \underline{v}_1 + \dots + (-\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}) \underline{v}_{n-1}$$

**Corollario 2.3.1.**  $[\underline{v}_1, \underline{v}_2]$  linearmente dipendenti  $\iff$  Almeno un vettore è combinazione lineare dell'altro  $\iff$  sono proporzionali

**Esempio.**  $[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}]$  non sono proporzionali  $\implies$  linearmente indipendenti

**Esercizio.** Sia  $P_1(x) = x^{29} + x^9 + x^{2023}$

Determinare  $P_2(x), P_3(x)$  tali che:  $[P_1(x), P_2(x)]$  lin. indipendenti e  $[P_1(x), P_3(x)]$  lin. dipendenti

$P_2(x)$  basta che non sia proporzionale a  $P_1(x)$ :  $P_2(x) = 2$

$P_3(x)$  basta che sia proporzionale a  $P_1(x)$ :  $P_3(x) = 0$  oppure  $P_3(x) = 2x^{29} + 2x^9 + 2x^{2023}$

**Osservazione.**  $\underline{v} \in V$

$\underline{v}$  è linearmente dipendente se  $\underline{v} = \underline{0}$

infatti  $\beta \underline{v} = \beta \underline{0} = \underline{0}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{v}$  è linearmente indipendente se  $\underline{v} \neq \underline{0}$

infatti  $\beta \underline{v} = \underline{0} \iff \beta = 0$

$V = \mathbb{R}$	Lin. indipendenti	Generatori
$[(1, 0)]$	SI	NO
$[(1, 0), (0, 1)]$	SI	SI
$[(1, 0), (0, 1), (0, 5)]$	NO	SI
$[(1, 0), (3, 0)]$	NO	NO



Figure 2.1: Insiemi dei sistemi vettoriali

## 2.4 Basi di uno spazio vettoriale

Un sistema ordinato  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  si dice base di  $V$  se i vettori sono linearmente indipendenti e generano  $V$ .

**Nota.**

$[(1, 0), (0, 1)]$  base canonica di  $\mathbb{R}^2$

$[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$  base canonica di  $\mathbb{R}^3$

$\{G\} = \{0\}$  Non ha basi, perché i vettori sono linearmente dipendenti ( $n \cdot G = 0 / \forall n \in \mathbb{R}$ )

$P[x]$  Non ha basi, perché non è finitamente generato

Data una base, per trovarne una nuova, basta cambiare l'ordine dei vettori contenuti in essa, oppure sostituire qualche vettore con uno proporzionale **non nullo**.

**Esempio.**

$B' = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$

$B'' = [(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)]$

Queste sono due basi diverse di  $\mathbb{R}^3$ , dove nel secondo caso abbiamo solo cambiato l'ordine di  $\underline{v}_2$  con  $\underline{v}_3$

$[(0, 1, 0), (0, 0, -1), (2023, 0, 0)]$

Invece qui abbiamo sia cambiato l'ordine vettoriale e sia proporzionato gli elementi con diversi coefficienti

**Nota (DIP+1=DIP).** Se ad un sistema linearmente dipendente si aggiunge un vettore, il sistema finale è linearmente dipendente

**Dimostrazione.**  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  linearmente dipendente

$\exists \beta_1, \dots, \beta_n$  non tutti nulli tali che  $\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$

$\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n + 0 \underline{w}$

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}]$  linearmente dipendente  $\forall \underline{w} \in V$

Quindi in parole povere, se già abbiamo un sistema linearmente dipendente e aggiungiamo un vettore a caso, possiamo sempre annullarlo moltiplicando per 0 e non cambia niente in termini di dipendenza

**Nota (INDIP-1=INDIP).** Se ad un sistema linearmente indipendente si toglie un vettore, il sistema finale è linearmente indipendente

**Dimostrazione.**  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}]/n \geq 1$  linearmente indipendente

Per assurdo, può essere  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-2}]/n \geq 2$  linearmente dipendente? No, in base al principio

DIP+1=DIP dovrebbe essere linearmente dipendente anche il sistema di partenza

**Nota (Sistema indipendente massimale).** Un sistema indipendente si dice indipendente massimale, se appena si aggiunge un vettore, l'indipendenza si perde

**Nota (Sistema minimale di generatori).** Un sistema di generatori si dice minimale di generatori, se appena si toglie un vettore, il sistema risultante non è più generatore

## 2.5 Teorema di caratterizzazione delle basi

**Teorema 2.5.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale non banale. Un sistema ordinato di vettori  $B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$  di  $V$  è una base ordinata se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

- $\iff$  il sistema è indipendente massimale
- $\iff$  il sistema è minimale di generatori
- $\iff$  ogni vettore di  $V$ , si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di  $B$ , in un solo modo

**Dimostrazione (da destra a sinistra).**

$B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$  per ipotesi si sa già essere generatore, bisogna dimostrare quindi che sia linearmente indipendente. Il sistema  $B$  è linearmente indipendente, perché essendo ogni vettore esprimibile in un solo modo, anche  $\underline{0}$  si può esprimere in un solo modo. Quindi  $B$  è linearmente indipendente

**Dimostrazione** (da sinistra a destra).

$B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$  è una base di  $V$ , quindi supponiamo che:

$$\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \dots + \beta_n \underline{e}_n$$

$$\underline{v} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \dots + \gamma_n \underline{e}_n$$

$$\text{Sottraendo membro a membro: } \underline{0} = (\beta_1 - \gamma_1) \underline{e}_1 + \dots + (\beta_n - \gamma_n) \underline{e}_n$$

Essendo per ipotesi, linearmente indipendente:  $\beta_1 - \gamma_1 = 0, \beta_n - \gamma_n = 0$

**Proposizione 2.5.1.**

$$B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \checkmark$$

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

$$B' = [(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)] \checkmark$$

$$(a, b, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + a(1, 0, 0)$$

$$B'' = [(0, 1, 0), (0, 0, -1), (2023, 0, 0)] \checkmark$$

$$(a, b, c) = b(0, 1, 0) - c(0, 0, -1) + \frac{a}{2023}(2023, 0, 0)$$

In qualunque spazio vettoriale  $V$  che possenga una base, un vettore  $\underline{v}$  si può esprimere come:  
 $\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \dots + \beta_n \underline{e}_n$ . I coefficienti  $\beta_1, \dots, \beta_n$  individuano univocamente  $\underline{v}$  e prendono anche il nome di componenti di  $\underline{v}$  rispetto alla base  $B$ .

**Esempio.**  $\underline{v} = (3, 10, 2023) \in \mathbb{R}^3$

Le componenti di  $\underline{v}$  rispetto a  $B$  sono  $(3, 10, 2023)$  ✓

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (3, 10, 2023)$$

$$3(1, 0, 0) + 10(0, 1, 0) + 2023(0, 0, 1) = (3, 10, 2023)$$

Le componenti di  $\underline{v}$  rispetto a  $B'$  sono  $(10, 2023, 3)$  ✓

$$b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + a(1, 0, 0) = (3, 10, 2023)$$

$$10(0, 1, 0) + 2023(0, 0, 1) + 3(1, 0, 0) = (3, 10, 2023)$$

Le componenti di  $\underline{v}$  rispetto a  $B''$  sono  $(10, -2023, \frac{3}{2023})$  ✓

$$b(0, 1, 0) + c(0, 0, -1) + \frac{a}{2023}(2023, 0, 0) = (3, 10, 2023)$$

$$10(0, 1, 0) - 2023(0, 0, -1) + \frac{3}{2023}(2023, 0, 0) = (3, 10, 2023)$$

**Esempio.**  $B = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} \right]$

Calcolare le componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$  rispetto a  $B$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varpi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta - 2\delta \\ \lambda & 55\varpi \end{pmatrix}$$

Quindi  $\beta = 1, \beta - 2\delta = 2, \lambda = 3, 55\varpi = 4$

$$\beta = 1, \delta = -\frac{1}{2}, \lambda = 3, \varpi = \frac{4}{55}$$



**Esempio.** Data la base  $B' = [(1, 2), (3, 4)]$  di  $\mathbb{R}^2$  calcolare il vettore di componenti  $(5, 8)$   
 $\underline{v} = 5(1, 2) + 8(3, 4) = (5, 10) + (24, 32) = (29, 42)$

**Definizione 2.5.1.** Il determinante è una funzione che ha per dominio una matrice quadrata  
 $\det = M_{n \times n} \Rightarrow \mathbb{R}$

Calcolo del determinante di una matrice quadrata:

$$n = 1 \Rightarrow \det(a_{1,1}) = a_{1,1}$$

$$n = 2 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (a_{1,1} \cdot a_{2,2}) - (a_{1,2} \cdot a_{2,1})$$

si può anche capire meglio visualizzando l'operazione come una croce:

$$\begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array}$$

**Proposizione 2.5.2** (Prima proprietà elementare dei determinanti). Data una matrice  $M_{n \times n}, \forall n \in \mathbb{N}$  scambiando due righe o due colonne, il determinante cambia segno

**Corollario 2.5.1.** Se la matrice ha due righe o due colonne uguali,  $\det = 0$

**Dimostrazione.**  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$

Sono state invertite la prima e la terza riga, quindi essendo 0 l'unico numero che moltiplicato per -1 assume lo stesso valore, è l'unica soluzione accettabile

**Lemma 2.5.1** (Steinitz). Sia  $V$  uno spazio vettoriale avente  $[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$  come base, e sia  $S = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m]$  un sistema di vettori di  $V$ . Se  $m > n$ , il sistema  $S$  è linearmente dipendente.  
 Sia  $[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$  una base di  $V$  e sia  $S = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h]$  un sistema linearmente indipendente, allora  $h \leq n$

**Esempio.**  $S = [(1, 2, 3), (\pi, \pi^2, \pi^3), (5, 50, 500), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})] \in \mathbb{R}^3$   
 $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$  base canonica di  $\mathbb{R}^3$   
 Il sistema  $S$  è linearmente dipendente, per il 2.5.1

**Teorema 2.5.2** (Equipotenza delle basi). Per potenza di un insieme finito si intende il numero dei suoi elementi. Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

### Dimostrazione.

hp  $B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ ,  $B' = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m]$  basi di  $V$

th  $m = n$

$B$  è una base,  $B'$  in particolare è indipendente  $\Rightarrow m \leq n$  Per il 2.5.1

$B'$  è una base,  $B$  in particolare è indipendente  $\Rightarrow n \leq m$  Per il 2.5.1

Quindi  $m = n$

**Esercizio.**  $S = [(1, 2, 3, 4), (\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)]$  genera  $\mathbb{R}^4$ ?

$S$  genera  $\mathbb{R}^4$  se  $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \exists \beta, \delta \in \mathbb{R}$  tali che:

$(a, b, c, d) = \beta(1, 2, 3, 4) + \delta(\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)$   $S$  è indipendente (Lemma di Steinitz 2.5.1),

$S$  non è una base (Teor. equipotenza delle basi 2.5.2)  $\rightarrow S$  non è un generatore

### Osservazione.

$[(1, 2, 3), (1, 1, 1)]$  Non è una base di  $\mathbb{R}^3$  per il 2.5.2

$[(1, 2, 3), (0, 1, 1), (5, 55, 0), (8, 8, 8)]$  Non è una base di  $\mathbb{R}^3$  perché per il 2.5.1 sono linearmente dipendenti

$[(1, 2, 3), (0, 1, 1), (5, 55, 0)]$  Se sono linearmente indipendenti allora sono una base di  $\mathbb{R}^3$ .

Come verificarlo?

Se  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 55 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$  allora è lin. indipendente

### Proposizione 2.5.3 (Dimensione di uno spazio vettoriale).

La **dimensione di uno spazio vettoriale** finitamente generato è uguale al **numero di vettori che contiene una base** (ovvero linearmente indipendenti)

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\} \\ n^\circ & \text{di vettori contenuti in una sua base se } V \neq \{\underline{0}\} \end{cases}$$

Perché  $V \neq \{\underline{0}\}$  (finitamente generato) contiene una base?

Hp:  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  generano  $V$

- Se il sistema è minimale di generatori, allora è una base; altrimenti esistono  $n - 1$  vettori che generano  $V$

- Iterando il ragionamento (togliendo i vettori superflui) si arriva ad una base di  $V$

### Esempio.

$$\dim \mathbb{R} = 1$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim\{\underline{0}\} = 0$$

$$\dim M_{n \times m} = n \times m$$

**Lemma 2.5.2** (conseguenza del lemma di Steinitz). Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato e  $\dim V = n > 0$

- Se  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  è indipendente, allora è anche generatore
- Se  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  è generatore, allora è anche indipendente

**Dimostrazione (INDIP=GEN).**

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  indipendente

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}]$  è dipendente per ogni  $\underline{w}$  2.5.1

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  è indipendente massimale

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  è una base  $\rightarrow$  indipendente e generatore

**Dimostrazione (GEN=INDIP).**

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  è generatore di  $\mathbb{R}^3$

è per forza minimale, perché altrimenti  $\mathbb{R}^3$  avrebbe una base con meno di 3 vettori

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$  è una base

indipendente e generatore

**Proposizione 2.5.4** (seconda proprietà elementare dei determinanti).

$$\beta \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \beta \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}; \beta \det (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \det (\beta \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

**Corollario 2.5.2.** Se in una matrice quadrata troviamo due righe o due colonne proporzionali, il determinante è uguale a 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ \pi & e & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0 \text{ perché } \underline{a}^3 = 0\underline{a}^1 = 0\underline{a}^2 = 0\underline{a}^4 (\text{Colonne})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \det B = -2$$

$$\det(5B) = \det \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 25 \cdot (-2) = -50$$

**Corollario 2.5.3.**  $A \in M_{n \times m}$  e  $\beta \in \mathbb{R} \rightarrow \det(\beta A) = \beta^n \det A$

**Proposizione 2.5.5** (terza proprietà elementare dei determinanti).

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} \quad (\text{vale anche per le colonne})$$

**Esempio.**  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Teorema 2.5.3** (Dipendenza lineare e matrici).

$V = \mathbb{R}^n$  se  $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$  è linearmente indipendente e quindi se e solo se  $\det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \neq 0$

**Dimostrazione** (da dx a sx,  $n=4$ ).

Se  $[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4]$  è linearmente dipendente, allora, almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri [teorema di caratterizzazione], quindi supponiamo che  $\underline{v}_4 = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \gamma \underline{v}_3$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ (\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \gamma \underline{v}_3) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma \underline{v}_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha \underline{v}_1 \end{pmatrix} &+ \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \beta \underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma \underline{v}_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

**Corollario 2.5.4** (relativo alla terza proprietà).

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \quad (\text{stessa formula anche per le colonne})$$

**Dimostrazione.**  $\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + 0 = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$

**Esempio.**  $\det \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, -1, 5, 5 \\ 0, 2, 3, 4 \\ 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 0, -5, -1, -3 \\ 0, 2, 3, 6 \\ 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix}$

Abbiamo trasformato  $\underline{a}_2$  in  $\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1$  per far diventare  $\underline{a}_4 = 0$

## Chapter 3

# Sottospazi Vettoriali

### Lecture 3: Spazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale, se  $S \subseteq V$  si dice che  $S$  è un sottospazio di  $V$  se e solo se  $S$  con le operazioni 9 Sep. 08:00 creditate da  $V$  è uno spazio vettoriale

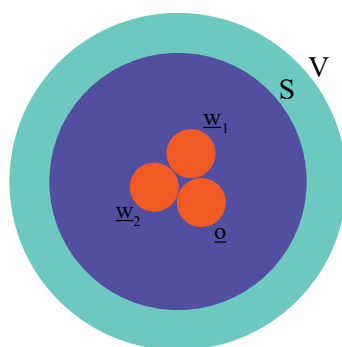


Figure 3.1: Sottospazio Vettoriale

**Definizione 3.0.1.**  $S$  è un sottospazio di  $V$  se:

A:  $\forall \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S - \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S$

B:  $\forall a \in \mathbb{R}, \underline{w}_1 \in S - a\underline{w}_1 \in S$

Quindi dobbiamo verificare che la somma e il prodotto siano operazioni interne

**Esempio.**

$$S_1 = \{(c, c^2) / c \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(0, 0) \in S_1$$

$$(2, 4) \in S_1$$

$$(1, 1) \in S_1$$

$$(2, 4) + (1, 1) = (3, 5) \notin S_1 \text{ Non è soddisfatta la (A) e quindi } S_1 \text{ non è sottospazio di } \mathbb{R}^2$$

◇

$$S_2 = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$$

$$(0, 0) \notin S_2 \text{ quindi } S_2 \text{ non è un sottospazio}$$

◇

$$S_3 = \mathbb{R}^2 - \{6, 9\}$$

$$(0, 0) \in S_3$$

$$(-6, -9) \in S_3$$

$$(-1) \cdot (-6, -9) = (6, 9) \notin S_3 \text{ Non è soddisfatta la (B)}$$

◇

$$S_4 = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$(6, 9) \in S_4$$

$$\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}, \frac{1}{\pi} \cdot (6, 9) = (\frac{6}{\pi}; \frac{9}{\pi}) \notin S_4 \text{ Non è soddisfatta la (B)}$$

◇

$$S_5 = \{(\frac{n}{\pi}; \frac{2n}{\pi}) / -1000 < n < 1000, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$(0, 0) \in S_5 \text{ Se ha 2001 elementi quindi non è uno spazio vettoriale perché non è infinito}$$

◇

$$S_6 = \{P(x)\} \subseteq \mathbb{R}[x]$$

$$A: xq_1(x) + xq_2(x) = x(q_1(x) + q_2(x))$$

$$B: a(xq(x)) = x(aq(x))$$

$$S_6 = \{xq(x)/q(x) \in \mathbb{R}[x]\}, S_6 \text{ è un sottospazio di } \mathbb{R}[x]$$

◇

$$S_7 = \{\underline{0}\} = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2, S_7 \text{ è un sottospazio di } \mathbb{R}^2$$

Ogni spazio vettoriale  $V$  contiene il sottospazio nullo:  $\{\underline{0}\}$

### Proposizione 3.0.1.

Comunque scelti  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$

$S = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{a\underline{v}_1 + \dots + a\underline{v}_n / a_i \in \mathbb{R}\}$  è un sottospazio di  $V$

infatti:  $(a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n) + (\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + \beta_n)\underline{v}_n \in S$ ,

Quindi (A) è verificata.

$a(\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a\beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a\beta_n)\underline{v}_n \in S$ , Quindi (B) è verificata.

### Esempio.

Determinare la dimensione del sottospazio  $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rangle = S$

$S = \{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \}$  linearmente indipendente perché  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  solo se  $a = 0$  e genera anche  $S$

Quindi una sua base è  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim S = 1$

**Nota.** Potevamo anche dire che essendo  $S$  composto da un solo elemento, deve avere necessariamente dimensione uguale a 1, essendo diverso da  $\underline{0}$

### Esempio.

Calcolare la dimensione del sottospazio dei polinomi  $\langle x^{2024} \rangle = \{ax^{2024}/a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim = 1$

### Proposizione 3.0.2.

$\forall \underline{v} \neq \underline{0}$  in un qualsiasi spazio vettoriale  $V$  si ha che:

$\langle \underline{v} \rangle = \{a\underline{v}/a \in \mathbb{R}\}$  è un sottospazio di  $V$  di dimensione 1, e una sua base è  $[\underline{v}]$

◇

$T = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle \subseteq V$

( $T$  è un sottospazio di  $V$ )

( $T$  ha dimensione  $\leq k$ )

- Se  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono indipendenti, allora sono anche una base di  $T$  e quindi  $\dim T = k$

- Se  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  sono dipendenti, allora non sono una base, quindi non sono minimali di generatori e così una base di  $T$  contiene meno di  $k$  vettori. Di conseguenza  $\dim T < k$

◇

$T_n = \{\text{Polinomi di grado} \leq n\}, \dim T_n = n + 1$

$T_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3/a_i \in \mathbb{R}\} = \langle x^0, x^1, x^2, x^3 \rangle \mapsto [1, x^1, x^2, x^3]$  è indipendente e quindi  $\dim T_3 = 4$

Sottospazio di  $\mathbb{R}[x]$  di dimensione 1000 =  $T_{999} = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{999}x^{999}/a \in \mathbb{R}\}$   
 BASE =  $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{999}]$

### Proposizione 3.0.3.

A: Se  $W$  è un sottospazio di  $V$  e  $\dim V = n$  allora  $\dim W \leq \dim V$

B: Se  $\dim W = \dim V \mapsto W = V$

**Dimostrazione (A).** Per il lemma di Steinitz, più di  $n$  vettori dentro  $W$  sono linearmente dipendenti, di conseguenza, un sistema indipendente massimale in  $W$  non può contenere più di  $n$  vettori.

**Dimostrazione (B).** Siano  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$  vettori indipendenti di  $W$  (una base di  $W$ ),  $[\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{v}] \forall \underline{v} \in V$ ,  $n + 1$  vettori in uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , per il lemma di Steinitz sono linearmente dipendenti, allora  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$  è indipendente massimale in  $V$  e di conseguenza genera  $V$

Vediamo adesso alcuni sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ , ( $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ):

$W$  sottospazio di  $\mathbb{R}^2$

$\dim W = 0$  Esiste un solo sottospazio:  $W = \{(0, 0)\}$

$\dim W = 1$  Tutti i sottospazi del tipo:  $\langle \underline{v} \rangle \forall \underline{v} \neq \underline{0}$

$\dim W = 2$  Esiste un solo sottospazio:  $W = \mathbb{R}^2$

## 3.1 Complemento Algebrico

Si chiama complemento algebrico di posto  $(i, j)$  il numero reale  $A_{ij}$  elevando  $-1$  alla  $i+j$  e moltiplicandolo per il determinante della matrice che si ottiene cancellando la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} \text{coef}_{1,1}(A) & \dots & \text{coef}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{coef}_{n,1}(A) & \dots & \text{coef}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

**Esempio.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$A_{2,1} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{5} & 6 & 7 \end{pmatrix} = -1(3 \cdot 7 - 1 \cdot 6) = -1(21 - 6) = -15$$

$$A_{1,3} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & \boxed{7} \end{pmatrix} = 1(-5) = -5$$

**Teorema 3.1.1 (4° Teorema di Laplace).** Il determinante di una matrice quadrata  $A$ , è la somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) di  $A$  moltiplicati per i loro componenti algebrici.

$$\det A = a_{i,1} \cdot A_{i,1} + a_{i,2} \cdot A_{i,2} + \dots + a_{i,n} \cdot A_{i,n}$$

$$\det A = a_{1,j} \cdot A_{1,j} + a_{2,j} \cdot A_{2,j} + \dots + a_{n,j} \cdot A_{n,j}$$

**Esercizio.** Verificare se  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$

$$\underline{v}_1 = (1, 3, 1); \underline{v}_2 = (0, 1, -1); \underline{v}_3 = (5, 6, 7)$$

Dato che tutte le basi di  $\mathbb{R}^3$  contengono 3 vettori, basta verificare che sono indipendenti massimali, cioè che  $\det A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (a^2 = (a^2 + a^3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Con laplace:  $0 \cdot A_{2,1} + 0 \cdot A_{2,2} + (-1) \cdot (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = (+1)(13 - 20) = -7$ , ovvero i coefficienti (in questo caso della seconda riga) per i complementi algebrici di  $A$  relativi sempre alla seconda riga

Dato che il determinante di  $A$  è diverso da 0:  $[(1, 3, 1), (0, 1, -1), (5, 6, 7)]$  è una base di  $\mathbb{R}^3$

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{5} & \boxed{13} & \boxed{7} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}$$

Figure 3.2: Visualizzazione grafica dell'esercizio precedente

**Esercizio.** Verificare se  $[(1, 0, 1, 1), (1, 2, -1, 0), (1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 4)]$  è una base di  $\mathbb{R}^4$



$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (a^4 = (a^4 - 4a)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{laplace 4a riga} =$$

$$+1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \text{laplace 1a colonna} = 2 \det \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = 2(5 -$$

$$8) = -6$$

Si, i vettori formano una base di  $\mathbb{R}^4$

## 3.2 Rango di una Matrice

Il rango di una matrice qualsiasi è pari al numero massimo di righe indipendenti o al numero massimo di colonne indipendenti.

$$A \in M_{m \times n}, \text{rg} A \leq \min\{m, n\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4), (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$$

$$\langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

La dimensione di  $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle$  è uguale alla dimensione di  $\langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 \rangle$  ed è uguale al rango della matrice.

$$\dim \langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 \rangle = \dim \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle = \text{rg}(A)$$

Le matrici nulle hanno rango 0:

In ogni spazio vettoriale delle matrici  $M_{m \times n}$  c'è una sola matrice di rango 0

Le matrici che hanno tutte le righe o colonne proporzionali hanno rango 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 16 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \text{rg}(A) = 1 \text{ perché tutte le righe sono proporzionali}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \text{Il rango di B è diverso da 0 perché non è una matrice nulla, diverso da 1 perché}$$

non ci sono righe o colonne proporzionali e quindi può essere 2 o 3

Se  $A \in M_{m \times n}$  è quadrata, il rango massimo possibile è n; Il rango di A è il massimo:  $\text{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

## 3.3 Minore di una matrice

Sia A una matrice qualunque ( $A \in M_{m \times n}$ ), si chiama minore di ordine k, il determinante di una sottomatrice quadrata che si ottiene da A, selezionando k righe e k colonne (anche non contigue).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 6 & 7 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ha minori di ordine } 1,2,3,4$$

$$\det A_{1,3}^{2,4} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 16 \text{ che è il minore di ordine 2 della matrice } A$$

$$\det A_3^5 = \det(7) = 7, \text{ minore di ordine 1}$$

Esistono al massimo  $m \times n$  minori di ordine 1

$$\text{Numero di minori di ordine } k \text{ in } A \in M_{m \times n} = \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$$

### 3.4 Orlati di una Matrice

Se troviamo un minore non nullo, e aggiungendo come una cornice le righe e colonne disponibili, i determinanti risultano tutti uguali a 0, allora il rango massimo sarà pari alla dimensione di quel minore.

**Esercizio.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il Rango della matrice A:

Come prima cosa troviamo un minore non nullo di ordine 2, ad esempio:

$$\det A_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 3$$

Ora calcoliamo il determinante degli orlati di questo minore:

$$A = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-3} & \boxed{2} & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{-3} & 2 & \boxed{4} \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dato che tutti gli orlati hanno determinante uguale a 0 possiamo dire con certezza che il Rango di A è 2.