Università degli Studi di Napoli Federico II
Scienze e Tecniche dell'Edilizia - L23
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

Appunti di Algebra e Geometria

Codice - MAT 03 - 6CFU

IVANO D'APICE

Professore

PROF. MAURIZIO BRUNETTI
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

25 Nov 2023

Abstract

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione inviare mail a:
ivanodapice@hotmail.com.

Contents

Chapter 1

Introduzione

Lecture 1: Richiami

1.1 Insiemi

25 Nov. 12:11

Partiamo col dire che nel vasto spettro degli insiemi troviamo anche quelli numerici. Questi insiemi si dicono infiniti perché racchiudono al loro interno elementi che continuano ad incrementare o/e decrementare all'infinito. Vediamo ora i vari insiemi numerici che potremo incontrare nel corso:

Definizione 1.1.1 (Numeri Naturali)**.** L'insieme $\mathbb{N}$ comprende al suo interno tutti i numeri non negativi

Esempio. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, +\infty\}$

Definizione 1.1.2 (Numeri Interi)**.** L'insieme $\mathbb{Z}$ comprende al suo interno tutti i numeri negativi e positivi compreso quello nullo

Esempio. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \ldots, \pm\infty\}$

Definizione 1.1.3 (Numeri Razionali)**.** L'insieme $\mathbb{Q}$ comprende al suo interno tutti i numeri interi e comprende la notazione del tipo $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \land n \in \mathbb{N}$

Esempio. $\mathbb{Q} = \{-\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{5}, 1.5\overline{3}, 1.23(\frac{111}{90}), \frac{88}{1}, \ldots\}$

Definizione 1.1.4 (Numeri Reali)**.** L'insieme $\mathbb{R}$ comprende quei numeri che possono essere rappresentati con notazione decimale senza per forza essere del tipo $\frac{m}{n}$

Esempio. $\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, e^4\}$

Quindi possiamo dire che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
Per ricordare più facilmente questi insiemi possiamo ripensarli come:
$\mathbb{N}$(Naturali), $\mathbb{Z}$(Zero), $\mathbb{Q}$(Quoziente), $\mathbb{R}$(reali)

1.1.1 N-ple, R^n

Identifichiamo ora un nuovo ente $[(a, b)]$ individuato da due oggetti a e b non necessariamente distinti, e dall'ordine dei due. Un buon esempio potrebbe essere quello degli scacchi dove la posizione di una casella è identificata da due valori $[(n, x)]$.[1]
Possiamo definire adesso un nuovo insieme che è quello di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ definito da numeri razionali.

Esempio. Un insieme $\mathbb{R}^2$ potrebbe essere $v = (2, \sqrt{6.4}), \in \mathbb{R}^2$

Nota. In $\mathbb{R}^2$ ci sono anche particolari combinazioni che prendono il nome di **Diagonale Principale** e **Diagonale Secondaria**.

Esempio.

$$v = (x,x)\text{: Diagonale Principale (i due elementi sono uguali)}$$
$$v = (x, -x)\text{: Diagonale Secondaria (un elemento è l'opposto dell'altro)}$$

Oltre all'insieme $\mathbb{R}^2$ ci sono poi tutta una serie incrementale di insiemi fino ad arrivare alla ennupla $\mathbb{R}^n$ che ha un numero di elementi virtualmente infinito. L'insieme di $\mathbb{R}^n, n > 2$ viene chiamato spazio euclideo mentre i suoi elementi $(x_1, x_2, ..., x_n, x \in \mathbb{R})$ vengono chiamati punti o vettori.
Possiamo usare gli spazi $\mathbb{R}$ per rappresentare graficamente dei riferimenti. $\mathbb{R}^1$ ci permette di orientarci su una retta mentre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente per visualizzare figure piane e solidi.

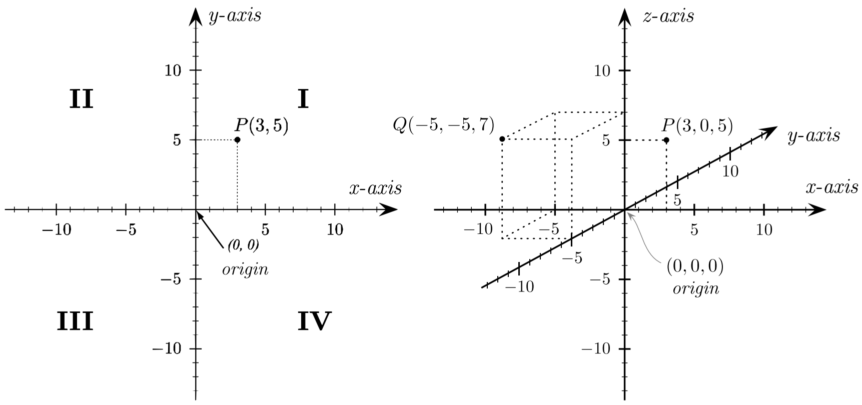

Figure 1.1: Coordinate degli assi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

[1] Coordinate Scacchiera

Adesso possiamo usare lo spazio $\mathbb{R}^2$ per fare un esercizio. Avremo due vettori $q = (3,5) \land p = (5,3)$ e vogliamo visualizzare il vettore $s = \frac{1}{2}q + 2p$. Per fare ciò, si usa un metodo grafico chiamato punta-coda, dove mettiamo i nostri vettori in successione connettendo l'inizio di uno alla fine dell'altro.

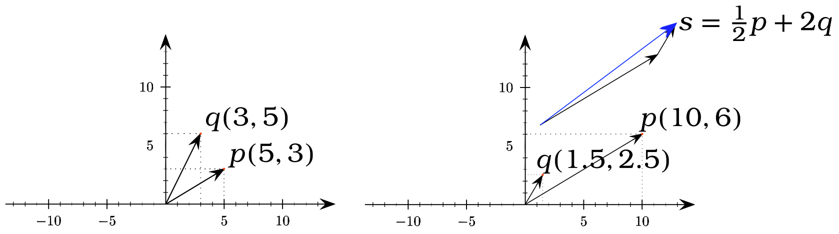

Figure 1.2

1.2 Proprietà

1.2.1 Somma

Definizione 1.2.1. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (a, b) \in \mathbb{R}$

La somma è un'operazione interna, dato che gli addendi e il risultato dell'operazione si trovano nello stesso insieme.

Nota.

1. Elemento neutro: $(a_1, a_2) + (0,0) = (0,0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
2. Opposto: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0,0), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
3. P. Associativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), \in \mathbb{R}^2$
$$[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) = (a_1, a_2)[(b_1, b_2) + (c_1, c_2)]$$
4. P. Commutativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$$

Una struttura algebrica del tipo $(\mathbb{R}^2, +)$ se gode delle precedenti proprietà da 1 a 4 viene chiamata **Gruppo Abeliano**

1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione 1.2.2. $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \dagger a, b \in \mathbb{R}$

Nota.

5. P. distributiva: $\forall \beta \in \mathbb{R} \land \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$

$$\beta[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \beta(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$

6. P. distributiva: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \land \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$

$$(\beta + \delta)(a_1, a_2) = \beta(a_1, a_2) + \delta(a_1, a_2)$$

7. P. Associativa: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \land \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$

$$\beta\gamma(a_1, a_2) = \beta[\gamma(a_1, a_2)] = (\beta\gamma)(a_1, a_2)$$

8. Elemento neutro: $1(a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Chapter 2

Vettori e Matrici

Lecture 2: Spazi vettoriali

Sia $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ una struttura algebrica (ovvero un insieme non vuoto su cui sono definite delle operazioni), dove $+$ è interna e $\cdot$ è una moltiplicazione di un vettore per uno scalare, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ si chiama **spazio vettoriale** (e gli elementi di $\mathbb{R}^2$ vettori) se valgono le precedenti 8 proprietà. 9 Sep. 08:00

Esempio (Spazi Vettoriali). $\mathbb{R}[x] \cong$ Polinomi a coefficienti reali ad un'incognita.

$P_1(x) = 3 - x + x^3 + P_2(x) = 5x - \frac{7}{2}x^4$

$$\begin{array}{l} 3 - x \;\; + x^3 \qquad\quad + \\ \;\; + 5x \qquad\; - \frac{7}{2}x^4 = \\ 3 + 4x + x^3 - \frac{7}{2}x^4 \end{array}$$

$\frac{1}{3}P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3$

Definizione 2.0.1 (combinazione lineare). Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n, \in V$. Un vettore del tipo $\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \dots + \beta_n\underline{v}_n, \beta \in \mathbb{R}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

Esempio. $3(1,3) + \frac{1}{2}(0,4) + (-1,-1) = (3,9) + (0,2) + (-1,-1) = (2,10)$, questi elementi di $\mathbb{R}^2 = (2,10)$ sono combinazione lineare di $(1,3), (0,4), (-1,-1)$ scegliendo $(\beta_1 = 3, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = 1)$

Esempio (spazi vettoriali).
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ (Spazio vettoriale dei vettori)
$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x_1, x_2], \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (Spazio vettoriale dei polinomi)
$M_{n \times m}, n \wedge m \in \mathbb{N}$ (Spazio vettoriale delle matrici)
$\{G\}$ (Spazio vettoriale dell'elemento nullo)

Esempio (elementi neutri negli spazi vettoriali).

$\mathbb{R}^2 = \underline{0} \Rightarrow (0,0)$

$\mathbb{R}^4 = \underline{0} \Rightarrow (0,0,0,0)$

$M_{3\times3} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.1 Proprietà valide negli spazi vettoriali

Proposizione 2.1.1. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \beta \in \mathbb{R}, \beta 0 = 0$

Dimostrazione.

$\beta\underline{0} = \beta(\underline{0}+\underline{0}) = \beta\underline{0} + \beta\underline{0}$

$\beta\underline{0} = \beta\underline{0} + \beta\underline{0}$, esiste l'opposto di $\beta\underline{0}$ e lo chiamiamo OPP

$\beta\underline{0} + OPP = (\beta\underline{0} + \beta\underline{0}) + OPP$

$\underline{0} = \beta\underline{0} + (\beta\underline{0} + OPP)$

$\underline{0} = \beta\underline{0} + \underline{0} \rightarrow \beta\underline{0} = \underline{0}$

Proposizione 2.1.2. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} \cdot 0 = 0$

Dimostrazione.

$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v}(0+0) = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$

$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$, esiste l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ e lo chiamiamo OPP

$\underline{v} \cdot 0 + OPP = (\underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0) + OPP$

$0 = \underline{v} \cdot 0 + (\underline{v} \cdot 0 + OPP)$

$0 = \underline{v} \cdot 0 + 0 \rightarrow \underline{v} \cdot 0 = 0$

Proposizione 2.1.3. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ è $(-1)\underline{v}$

Dimostrazione.

$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 0$

$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = 0$, per la proposizione III.2

Proposizione 2.1.4. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $k \cdot \underline{v} = \underline{0}$, se $k = 0$ o $\underline{v} = \underline{0}$

Dimostrazione.
Se $k = 0$ è vera per la proposizione III.2
Se $k \neq 0, \exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \frac{1}{k} \cdot \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$ Per la proposizione III.1
$1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\underline{v} = \underline{0}$

Proposizione 2.1.5. In uno spazio vettoriale $V \in \mathbb{R}$ se $\exists \underline{v} \neq 0$ allora V contiene infiniti vettori

Dimostrazione.
$1\underline{v}, 2\underline{v}, 3\underline{v}, \ldots, n\underline{v}$ facciamo vedere che sono a due a due distinte
$h \cdot \underline{v} = k \cdot \underline{v}$
$(h \cdot \underline{v}) + (-1k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$
$(h - k)\underline{v} = \underline{0}$
$h - k = \underline{0}$ Per la proposizione III.4
$h = k$

Proposizione 2.1.6. In uno spazio vettoriale V qualunque, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$, $0 \in < \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n >$

Dimostrazione.
$\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n : \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n = 0$
$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$

Nota. Con il simbolo $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n >$ o con $\beta(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ indichiamo l'insieme delle combinazioni lineari di $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ cioè l'insieme $\{\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n / \beta_i \in \mathbb{R}\}$

Esempio.
$(0,4) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>?$
Si, infatti basta scegliere $\beta_1 \wedge \beta_3 = 0, \beta_2 = 1$

$(-1,-3) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>?$
Si, $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{2}$

$(-5,8) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>?$
$(-5,8) = \beta_1(2,6) + \beta_2(0,4) + \beta_3(-7,2) = (2\beta_1 - 7\beta_3, 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3)$

$$\begin{cases} -5 = 2\beta_1 \quad\quad\quad - 7\beta_3 \\ 8 = 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 \end{cases}$$

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

In generale, l'insieme delle combinazioni lineari $<\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n> \subseteq V$. Quindi ogni vettore di V è combinazione lineare di $<\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n>$ e si dice che $<\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n>$ sono **generatori** di V.

Esempio.
$\underline{v}_1 = (1,2,0,3), \underline{v}_2 = (\pi, e, 0, -55), \underline{v}_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^4$?
No perché: $\beta_1(1,2,0,3) + \beta_2(\pi, e, 0, -55) + \beta_3(\log_2 3, \sin 8, 0, 0)/\beta_i \in \mathbb{R}$
$(0,0,1,0)$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ (In ogni vettore, il terzo elemento è 0, e qualcosa per 0 fa sempre 0)

Esempio. $P_1(x) = 3 - x^4, P_2(x) = x + 77x^7$
$x^8 \in <P_1(x), P_2(x)>$?
No perché non contiene polinomi di grado maggiore a 7.

Esempio. $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ genera $\mathbb{R}^2$?
No, perché: $\{\beta(1,3)/\beta_i \in \mathbb{R}\} = \{(\beta, 3\beta)/\beta \in \mathbb{R}\}$
$\beta = 1 \rightarrow (1,3)$ non possiamo generare $(1,1)$

Esempio. $(1,0),(0,1)$ generano $\mathbb{R}^2$?
Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) = (\beta_1, \beta_2)$
$<(1,0),(0,1)> \in \mathbb{R}^2$

Esempio. $(1,0),(0,1),(55,\frac{1}{2})$ generano $\mathbb{R}^2$?
Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) + ?(55,\frac{1}{2}) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) + \beta_3(55,\frac{1}{2})$
$<(1,0),(0,1),(55,\frac{1}{2})> \in \mathbb{R}^2$

Come vediamo, se un insieme di vettori ha cardinalità minore della dimensione dello spazio a cui appartengono, allora possiamo immediatamente concludere che l'insieme assegnato non è un sistema di generatori (come visto nel caso polinomiale precedente).[1] Mentre più avanti, con il concetto di dimensione di spazio vettoriale, sarà più facile capire come verificare se un insieme è generatore.

Nota. Se ad un insieme di generatori se ne aggiunge un altro, l'insieme risultante è anch'esso un generatore. Cioè se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ genera V allora anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}$ diventa generatore.

Dimostrazione. Per ipotesi $V =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > \quad \subseteq \quad < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} > \quad \subseteq \quad V$
Dato che $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} >$ è incluso in V e include V, allora $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} >$ è V

Esempio.
In $\mathbb{R}^3$, $(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)$ generano $\mathbb{R}^3$
In $\mathbb{R}^1$, (1) genera $\mathbb{R}^1$
In $\mathbb{R}^n$, $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), (0,0,\dots,1)$ generano $\mathbb{R}^n$
In $\{G\}$, G(vettore nullo) genera $\{G\}$

Un **Sistema di vettori** è un insieme in cui contano l'ordine degli elementi e anche le eventuali ripetizioni, e si indica così: $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

Esempio.
$\{(1,0),(0,1),(3,5)\}$ 3 elementi
$\{(1,0),(1,0),(3,5)\}$ 2 elementi $= \{(1,0),(3,5)\} = \{(3,5),(1,0)\}$
$[(1,0),(0,1),(3,5)]$ 3 elementi
$[(1,0),(1,0),(3,5)]$ 3 elementi $\neq [(1,0),(3,5)] \neq [(3,5),(1,0)]$

Nota. $\underline{v}_1 = (1,2,3), \underline{v}_2 = (0,44,44), \underline{v}_3 = (2,4,6)$
Esistono varie combinazioni lineari per esprimere gli elementi soprastanti come vettore nullo. Un metodo banale è porre $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0 \longrightarrow 0 \cdot (1,2,3), 0 \cdot (0,44,44), 0 \cdot (2,4,6)$
Un altro modo sarebbe porre $\beta_1 = -2, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

2.2 Dipendenza lineare

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ si dice **linearmente dipendente** se e soltanto se $[0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_n]$ non è l'unico modo per esprimere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$
$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ Si dice **linearmente indipendente** se e soltanto se $[0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_n]$ è l'unico modo per esprimere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

Proposizione 2.2.1. Sia V uno spazio vettoriale qualunque e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ contiene almeno una coppia di vettori proporzionali, il sistema è linearmente dipendente.

Esempio.
$[(2,4),(4,8)] = \underline{0}$
essendo $(4,8)$ il doppio di $(2,4)$ basta porre β_1 uguale a -2
$[-2 \cdot (2,4) + 1 \cdot (4,8)] = (0,0)$

[1] youmath

Esempio. $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & \cos\delta \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 10^4 & 10^7 \\ 10^-31 & 10^0 \end{bmatrix}$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente perché se ci facciamo caso, qualsiasi valore di β mettiamo davanti a $\underline{v}_2$ il risultato sarà sempre un vettore con elementi nulli, mentre per $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ basta porre il coefficiente di beta uguale a 0.

Esempio. $[(1,0),(0,1)]$ è linearmente indipendente perché gli unici coefficienti di beta possibili sono 0

Esempio. $[(1,0),(0,1),(3,5)]$ è linearmente dipendente perché $(3,5)$ è proporzionale a $(1,0)$ e $(0,1)$
Un modo per esprimere il vettore nullo è: $-3(1,0) + [-5(0,1)] + 1(3,5)$

2.3 Teorema di caratterizzazione dei sistemi di vettori linearmente dipendenti

Teorema 2.3.1. $[v_1, \ldots, v_n]$ lin. dipendenti $\iff$ Almeno un vettore è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione (da destra a sinistra).
Se $\underline{v}_n \in < \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1} >$
$\underline{v}_n = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{n-1}\underline{v}_{n-1}$
$0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{n-1}\underline{v}_{n-1} + (-1)\underline{v}_n \implies [\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]$ linearmente dipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra).
Per ipotesi $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n$ non tutti nulli tale che $0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n$
se $\beta_n \neq 0 \implies \underline{v}_n = \frac{1}{\beta_n}(-\beta_1 \underline{v}_1, \ldots, -\beta_{n-1}\underline{v}_n - 1) = (-\frac{\beta_1}{\beta_n})\underline{v}_1 + \ldots + (-\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n})\underline{v}_{n-1}$

Corollario 2.3.1. $[\underline{v}_1, \underline{v}_2]$ linearmente dipendenti $\iff$ Almeno un vettore è combinazione lineare dell'altro $\iff$ sono proporzionali

Esempio. $[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}]$ non sono proporzionali $\implies$ linearmente indipendenti

Esercizio. Sia $P_1(x) = x^{29} + x^9 + x^2 023$

Determinare $P_2(x), P_3(x)$ tali che: $[P_1(x), P_2(x)]$ lin. indipendenti e $[P_1(x), P_3(x)]$ lin. dipendenti
$P_2(x)$ basta che non sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_2(x) = 2$
$P_3(x)$ basta che sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_3(x) = 0$ oppure $P_3(x) = 2x^{29} + 2x^9 + 2x^2 023$

Osservazione. $\underline{v} \in V$

$\underline{v}$ è linearmente dipendente se $\underline{v} = \underline{0}$
infatti $\beta \underline{v} = \beta \underline{0} = \underline{0}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{v}$ è linearmente indipendente se $\underline{v} \neq \underline{0}$
infatti $\beta \underline{v} = \underline{0} \iff \beta = 0$

$V = \mathbb{R}$	Lin. indipendenti	Generatori
$[(1,0)]$	SI	NO
$[(1,0),(0,1)]$	SI	SI
$[(1,0),(0,1),(0,5)]$	NO	SI
$[(1,0),(3,0)]$	NO	NO

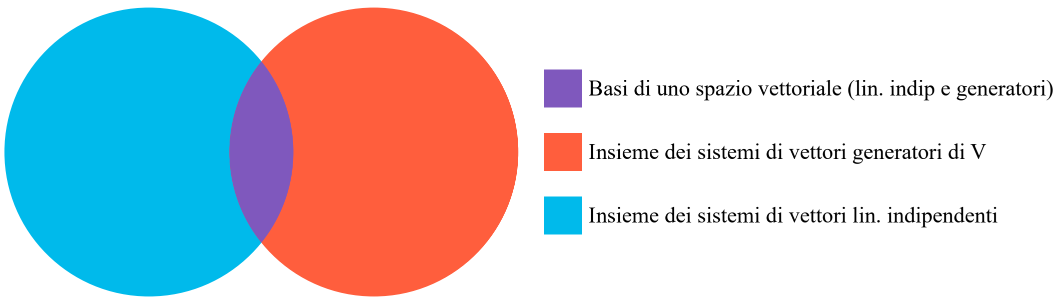

Figure 2.1: Insiemi dei sistemi vettoriali

2.4 Basi di uno spazio vettoriale

Un sistema ordinato $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]$ si dice base di V se i vettori sono linearmente indipendenti e generano V.

Nota.
$[(1,0),(0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}$
$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}^3$
$\{G\} = \{\underline{0}\}$ Non ha basi, perché i vettori sono linearmente dipendenti $(n \cdot G = 0 / \forall n \in \mathbb{R})$
$P[x]$ Non ha basi, perché non è finitamente generato

Data una base, per trovarne una nuova, basta cambiare l'ordine dei vettori contenuti in essa, oppure sostituire qualche vettore con uno proporzionale **non nullo**.

Esempio.
$B' = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$
$B'' = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$
Queste sono due basi diverse di $\mathbb{R}^3$, dove nel secondo caso abbiamo solo cambiato l'ordine di $\underline{v}_2$ con $\underline{v}_3$
$[(0,1,0),(0,0,-1),(2023,0,0)]$
Invece qui abbiamo sia cambiato l'ordine vettoriale e sia proporzionato gli elementi con diversi coefficienti

Nota (DIP+1=DIP). Se ad un sistema linearmente dipendente si aggiunge un vettore, il sistema finale è linearmente dipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ linearmente dipendente
$\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ non tutti nulli tali che $\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$
$\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n + 0\underline{w}$
$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}]$ linearmente dipendente $\forall \underline{w} \in$V
Quindi in parole povere, se già abbiamo un sistema linearmente dipende e aggiungiamo un vettore a caso, possiamo sempre annullarlo moltiplicando per 0 e non cambia niente in termini di dipendenza

Nota (INDIP-1=INDIP). Se ad un sistema linearmente indipendente si toglie un vettore, il sistema finale è linearmente indipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}]/n \geq 1$ linearmente indipendente
Per assurdo, può essere $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-2}]/n \geq 2$ linearmente dipendente? No, in base al principio DIP+1=DIP dovrebbe essere linearmente dipendente anche il sistema di partenza

Nota (Sistema indipendente massimale). Un sistema indipendente si dice indipendente massimale, se appena si aggiunge un vettore, l'indipendenza si perde

Nota (Sistema minimale di generatori). Un sistema di generatori si dice minimale di generatori, se appena si toglie un vettore, il sistema risultante non è più generatore

2.5 Teorema di caratterizzazione delle basi

Teorema 2.5.1. Sia V uno spazio vettoriale non banale. Un sistema ordinato di vettori $B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ di V è una base ordinata se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

- $\iff$ il sistema è indipendente massimale
- $\iff$ il sistema è minimale di generatori
- $\iff$ ogni vettore di V, si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di B, in un solo modo

Dimostrazione (da destra a sinistra).
$B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ per ipotesi si sa già essere generatore, bisogna dimostrare quindi che sia linearmente indipendente. Il sistema B è linearmente indipendente, perché essendo ogni vettore esprimibile in un solo modo, anche $\underline{0}$ si può esprimere in un solo modo. Quindi B è linearmente indipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra).
$B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ è una base di V, quindi supponiamo che:
$\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \dots + \beta_n \underline{e}_n$
$\underline{v} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \dots + \gamma_n \underline{e}_n$
Sottraendo membro a membro: $\underline{0} = (\beta_1 - \gamma_1)\underline{e}_1 + \dots + (\beta_n - \gamma_n)\underline{e}_n$
Essendo per ipotesi, linearmente indipendente: $\beta_1 - \gamma_1 = 0, \beta_n - \gamma_n = 0$

Proposizione 2.5.1.
$B \;= [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \swarrow$
$\quad (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$B' = [(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)] \swarrow$
$\quad (a,b,c) = b(0,1,0) + c(0,0,1) + a(1,0,0)$

$B'' = [(0,1,0),(0,0,-1),(2023,0,0)] \swarrow$
$\quad (a,b,c) = b(0,1,0) - c(0,0,-1) + \frac{a}{2023}(2023,0,0)$

In qualunque spazio vettoriale V che possegga una base, un vettore $\underline{v}$ si può esprimere come: $\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \dots + \beta_n \underline{e}_n$. I coefficienti $\beta_1, \dots, \beta_n$ individuano univocamente $\underline{v}$ e prendono anche il nome di componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base B.

Esempio. $\underline{v} = (3,10,2023) \in \mathbb{R}^2$
Le componenti di $\underline{v}$ rispetto a B sono $(3,10,2023) \swarrow$
$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (3,10,2023)$
$\mathbf{3}(1,0,0) + \mathbf{10}(0,1,0) + \mathbf{2023}(0,0,1) = (3,10,2023)$

Le componenti di $\underline{v}$ rispetto a B' sono $(10,2023,3) \swarrow$
$b(0,1,0) + c(0,0,1) + a(1,0,0) = (3,10,2023)$
$\mathbf{10}(0,1,0) + \mathbf{2023}(0,0,1) + \mathbf{3}(1,0,0) = (3,10,2023)$

Le componenti di $\underline{v}$ rispetto a B'' sono $(10,-2023,\frac{3}{2023}) \swarrow$
$b(0,1,0) + c(0,0,-1) + \frac{a}{2023}(2023,0,0) = (3,10,2023)$
$\mathbf{10}(0,1,0) - \mathbf{2023}(0,0,-1) + \frac{\mathbf{3}}{2023}(2023,0,0) = (3,10,2023)$

Esempio. $B = [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}]$
Calcolare le componenti del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ rispetto a B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varpi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta - 2\delta \\ \lambda & 55\varpi \end{pmatrix}$$

Quindi $\beta = 1, \beta - 2\delta = 2, \lambda = 3, 55\varpi = 4$
$\beta = 1, \delta = -\frac{1}{2}, \lambda = 3, \varpi = \frac{4}{55}$

Esempio. Data la base $B' = [(1,2),(3,4)]$ di $\mathbb{R}^2$ calcolare il vettore di componenti $(5,8)$
$\underline{v} = 5(1,2) + 8(3,4) = (5,10) + (24,32) = (29,42)$

Definizione 2.5.1. Il determinante è una funzione che ha per dominio una matrice quadrata
$\det = M_{n\times n} \Longrightarrow \mathbb{R}$
Calcolo del determinante di una matrice quadrata:
$n = 1 \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{1,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}$
$n = 2 \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (a_{1,1}\cdot a_{2,2}) - (a_{1,2}\cdot a_{2,1})$

si può anche capire meglio visualizzando l'operazione come una croce:
$$\begin{tikzcd} a_{1,1} \arrow[dr] & a_{1,2} \\ a_{2,1} \arrow[ur] & a_{2,2} \end{tikzcd}$$

Proposizione 2.5.2 (Prima proprietà elementare dei determinanti)**.** Data una matrice $M_{n\times n}, \forall n \in \mathbb{N}$ scambiando due righe o due colonne, il determinante cambia segno

Corollario 2.5.1. Se la matrice ha due righe o due colonne uguali, $\det = 0$

Dimostrazione. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0$

Sono state invertite la prima e la terza riga, quindi essendo 0 l'unico numero che moltiplicato per -1 assume lo stesso valore, è l'unica soluzione accettabile

Lemma 2.5.1 (Steinitz)**.** Sia V uno spazio vettoriale avente $[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ come base, e sia $S = [\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m]$ un sistema di vettori di V. Se $m > n$, il sistema S è linearmente dipendente.
Sia $[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ una base di V e sia $S = [\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_h]$ un sistema linearmente indipendente, allora $h \leq n$

Esempio. $S = [(1,2,3),(\pi,\pi^2,\pi^3),(5,50,500),(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6})] \in \mathbb{R}^3$
$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}^3$
Il sistema S è linearmente dipendente, per il 2.5.1

Teorema 2.5.2 (Equipotenza delle basi)**.** Per potenza di un insieme finito si intende il numero dei suoi elementi. Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

Dimostrazione.

hp $B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n], \quad B' = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m]$ basi di V

th $m = n$

B è una base, B' in particolare è indipendente $\implies m \leqslant n$ Per il 2.5.1
B' è una base, B in particolare è indipendente $\implies n \leqslant m$ Per il 2.5.1
Quindi $m = n$

Esercizio. $S = [(1, 2, 3, 4), (\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)]$ genera $\mathbb{R}^4$?
S genera $\mathbb{R}^4$ se $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \;\; \exists \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tali che:
$(a, b, c, d) = \beta(1, 2, 3, 4) + \delta(\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)$ S è indipendente (Lemma di Steinitz 2.5.1), S non è una base (Teor. equipotenza delle basi 2.5.2) $\longrightarrow$ S non è un generatore

Osservazione.
$[(1, 2, 3), (1, 1, 1)]$ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ per il 2.5.2
$[(1, 2, 3), (0, 1, 1), (5, 55, 0), (8, 8, 8)]$ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ perché per il 2.5.1 sono linearmente dipendenti
$[(1, 2, 3), (0, 1, 1), (5, 55, 0)]$ Se sono linearmente indipendenti allora sono una base di $\mathbb{R}^3$.
Come verificarlo?
Se det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 55 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ allora è lin. indipendente

Proposizione 2.5.3 (Dimensione di uno spazio vettoriale)**.**
La **dimensione di uno spazio vettoriale** finitamente generato è uguale al **numero di vettori che contiene una base** (ovvero <u>linearmente indipendenti</u>)

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\} \\ n^\circ & \text{di vettori contenuti in una sua base se } V \neq \{\underline{0}\} \end{cases}$$

Perché $V \neq \{\underline{0}\}$ (finitamente generato) contiene una base?
Hp: $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]$ generano V

- Se il sistema è minimale di generatori, allora è una base; altrimenti esistono $n-1$ vettori che generano V
- Iterando il ragionamento (togliendo i vettori superflui) si arriva ad una base di V

Esempio.
$\dim \mathbb{R} = 1$
$\dim \mathbb{R}^2 = 2$
$\dim \mathbb{R}^n = n$
$\dim\{\underline{0}\} = 0$
$\dim M_{n\times m} = n \times m$

Lemma 2.5.2 (conseguenza del lemma di Steinitz)**.** Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e $\dim V = n > 0$

- Se $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ è indipendente, allora è anche generatore
- Se $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ è generatore, allora è anche indipendente

Dimostrazione (INDIP=GEN)**.**
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ indipendente
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}]$ è dipendente per ogni w 2.5.1
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è indipendente massimale
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è una base $\longrightarrow$ indipendente e generatore

Dimostrazione (GEN=INDIP)**.**
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è generatore di $\mathbb{R}^3$
è per forza minimale, perché altrimenti $\mathbb{R}^3$ avrebbe una base con meno di 3 vettori
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è una base
indipendente e generatore

Proposizione 2.5.4 (seconda proprietà elementare dei determinanti)**.**

$$\beta \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \beta \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}; \beta \det \left(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\right) = \det \left(\beta \underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\right)$$

Corollario 2.5.2. Se in una matrice quadrata troviamo due righe o due colonne proporzionali, il determinante è uguale a 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ \pi & e & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0 \text{ perché } \underline{a}^3 = 0\underline{a}^1 = 0\underline{a}^2 = 0\underline{a}^4 \text{(Colonne)}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \det B = -2$$

$$\det(5B) = \det \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 25 \cdot (-2) = -50$$

Corollario 2.5.3. $A \in M_{n \times m}$ e $\beta \in \mathbb{R} \longrightarrow \det(\beta A) = \beta^n \det A$

Proposizione 2.5.5 (terza proprietà elementare dei determinanti).

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} \text{(vale anche per le colonne)}$$

Esempio. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Teorema 2.5.3 (Dipendenza lineare e matrici).

$V = \mathbb{R}^n$ se $[\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n]$ è linearmente indipendente e quindi se e solo se $\det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \cdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \neq 0$

Dimostrazione (da dx a sx, n=4).

Se $[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4]$ è linearmente dipendente, allora, almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri [teorema di caratterizzazione], quindi supponiamo che $\underline{v}_4 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \gamma\underline{v}_3$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ (\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2)\gamma\underline{v}_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma\underline{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha\underline{v}_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \beta\underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma\underline{v}_3 \end{pmatrix} = 0$$

Corollario 2.5.4 (relativo alla terza proprietà).

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta\underline{a}_i \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \text{(stessa formula anche per le colonne)}$$

Dimostrazione. $\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta\underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \beta\underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + 0 = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$

Esempio. $\det\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 2,-1,5,5 \\ 0,2,3,4 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 0,-5,-1,-3 \\ 0,2,3,6 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix}$

Abbiamo trasformato $\underline{a}_2$ in $\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1$ per far diventare $\underline{a}_4 = 0$

Chapter 3

Sottospazi Vettoriali

Lecture 3: Spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale, se $S \subseteq V$ si dice che S è un sottospazio di V se e solo se S con le operazioni creditate da V è uno spazio vettoriale 9 Sep. 08:00

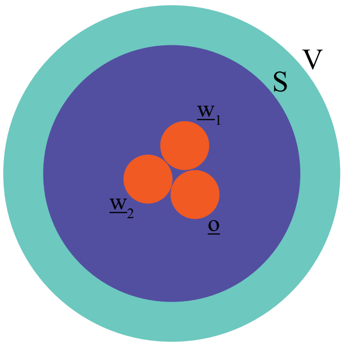

Figure 3.1: Sottospazio Vettoriale

Definizione 3.0.1. S è un sottopazio di V se:
A: $\forall \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S - \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S$
B: $\forall a \in \mathbb{R}, \underline{w}_1 \in S - a\underline{w}_1 \in S$
Quindi dobbiamo verificare che la somma e il prodotto siano operazioni interne

Esempio.
$S_1 = \{(c, c^2)/c \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$(0, 0) \in S_1$
$(2, 4) \in S_1$
$(1, 1) \in S_1$
$(2, 4) + (1, 1) = (3, 5) \notin S_1$ Non è soddisfatta la (A) e quindi S_1 non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\diamond$
$S_2 = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$
$(0, 0) \notin S_2$ quindi S_2 non è un sottospazio

$\diamond$

$S_3 = \mathbb{R}^2 - \{6, 9\}$

$(0, 0) \in S_3$

$(-6, -9) \in S_3$

$(-1) \cdot (-6, -9) = (6, 9) \notin S_3$ Non è soddisfatta la (B)

$\diamond$

$S_4 = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{Z}\}$

$(6, 9) \in S_4$

$\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\pi} \cdot (6, 9) = (\frac{6}{\pi}; \frac{9}{\pi}) \notin S_4$ Non è soddisfatta la (B)

$\diamond$

$S_5 = \{(\frac{n}{\pi}; \frac{2n}{\pi})/ - 1000 < n < 1000, n \in \mathbb{Z}\}$

$(0, 0) \in S_5$ Se ha 2001 elementi quindi non è uno spazio vettoriale perché non è infinito

$\diamond$

$S_6 = \{P(x)\} \subseteq \mathbb{R}[x]$

A: $xq_1(x) + xq_2(x) = x(q_1(x) + q_2(x))$

B: $a(xq(x)) = x(aq(x))$

$S_6 = \{xq(x)/q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$, S_6 è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

$\diamond$

$S_7 = \{\underline{0}\} = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, S_7 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

Ogni spazio vettoriale V contiene il sottospazio nullo: $\{\underline{0}\}$

Proposizione 3.0.1.

Comunque scelti $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$

$S =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >= \{a\underline{v}_1 + \dots + a\underline{v}_n/a_i \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V

infatti: $(a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n) + (\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + \beta_n)\underline{v}_n \in S$, Quindi (A) è verificata.

$a(\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a\beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a\beta_n)\underline{v}_n \in S$, Quindi (B) è verificata.

Esempio.

Determinare la dimensione del sottospazio $<\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}>= S$

$S = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}/a \in \mathbb{R}\}$ linearmente indipendente perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ solo se $a = 0$ e genera anche S

Quindi una sua base è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim S = 1$

Nota. Potevamo anche dire che essendo S composto da un solo elemento, deve avere necessariamente dimensione uguale a 1, essendo diverso da $\underline{0}$

Esempio.
Calcolare la dimensione del sottospazio dei polinomi $< x^{2024} >= \{ax^{2024}/a \in \mathbb{R}\} \Longmapsto \dim = 1$

Proposizione 3.0.2.
$\forall \underline{v} \neq \underline{0}$ in un qualsiasi spazio vettoriale V si ha che:
$< \underline{v} >= \{a\underline{v}/a \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V di dimensione 1, e una sua base è $[\underline{v}]$
$\diamond$
$T =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k > \subseteq V$
(T è un sottospazio di V)
(T ha dimensione $\leqslant ak$)

- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono indipententi, allora sono anche una base di T e quindi $\dim T = k$
- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono dipendenti, allora non sono una base, quindi non sono minimali di generatori e così una base di T contiene meno di k vettori. Di conseguenza $\dim T < k$

$\diamond$
$T_n = \{$Polinomi di grado $\leqslant n\}$, $\dim T_n = n + 1$
$T_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3/a_i \in \mathbb{R}\} =< x^0, x^1, x^2, x^3 > \mapsto [1, x^1, x^2, x^3]$ è indipendente e quindi $\dim T_3 = 4$

Sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ di dimensione $1000 = T_{999} = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{999}x^{999}/a \in \mathbb{R}\}$
BASE= $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{999}]$

Proposizione 3.0.3.
A: Se W è un sottospazio di V e $\dim V = n$ allora $\dim W \leqslant \dim V$
B: Se $\dim W = \dim V \mapsto W = V$

Dimostrazione (A). Per il lemma di Steinitz, più di n vettori dentro W sono linearmente dipendenti, di conseguenza, un sistema indipendente massimale in W non può contenere più di n vettori.

Dimostrazione (B). Siano $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ vettori indipendenti di W (una base di W), $[\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{v}] \forall \underline{v} \in V$, $n + 1$ vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n, per il lemma di Steinitz sono linearmente dipendenti, allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ è indipendente massimale in V e di conseguenza genera V

Vediamo adesso alcuni sottospazi di $\mathbb{R}^2$, ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$):
W sottospazio di $\mathbb{R}^2$
$\dim W = 0$ Esiste un solo sottospazio: $W = \{(0, 0)\}$
$\dim W = 1$ Tutti i sottospazi del tipo: $< \underline{v} > \forall \underline{v} \neq \underline{0}$
$\dim W = 2$ Esiste un solo sottospazio: $W = \mathbb{R}^2$

3.1 Complemento Algebrico

Si chiama complemento algebrico di posto (i, j) il numero reale A_{ij} elevando -1 alla $i{+}j$ e moltiplicandolo per il determinante della matrice che si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathrm{coef}_{1,1}(A) & \dots & \mathrm{coef}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{coef}_{n,1}(A) & \dots & \mathrm{coef}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$A_{2,1} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = -1(3 \cdot 7 - 1 \cdot 6) = -1(21 - 6) = -15$$

$$A_{1,3} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 1(-5) = -5$$

Teorema 3.1.1 (4° Teorema di Laplace)**.** Il determinante di una matrice quadrata A, è la somma dei prodotti degli elementi di una linea (ruga o colonna) di A moltiplicati per i loro componenti algebrici.

$\det A = a_{i,1} \cdot A_{i,1} + a_{i,2} \cdot A_{i,2} + \dots + a_{i,n} \cdot A_{i,n}$

$\det A = a_{1,j} \cdot A_{1,j} + a_{2,j} \cdot A_{2,j} + \dots + a_{n,j} \cdot A_{n,j}$

Esercizio. Verificare se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

$\underline{v}_1 = (1, 3, 1); \underline{v}_2 = (0, 1, -1); \underline{v}_3 = (5, 6, 7)$

Dato che tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contengono 3 vettori, basta verificare che sono indipendenti massimali, cioè che $\det A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (a^2 = (a^2 + a^3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Con laplace: $0 \cdot A_{2,1} + 0 \cdot A_{2,2} + (-1) \cdot (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = (+1)(13 - 20) = -7$, ovvero i coefficienti (in questo caso della seconda riga) per i complementi algebrici di A relativi sempre alla seconda riga

Dato che il determinante di A è diverso da 0: $[(1, 3, 1), (0, 1, -1), (5, 6, 7)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$

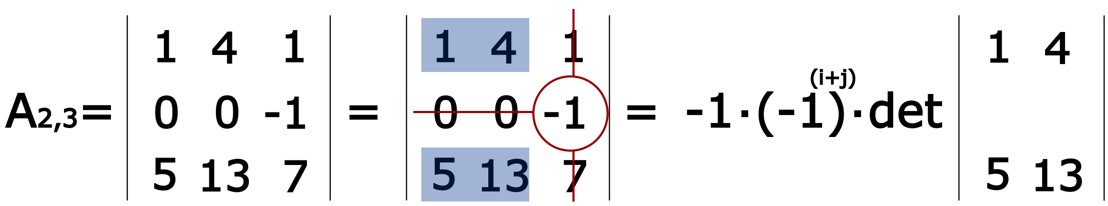

Figure 3.2: Visualizzazione grafica dell'esercizio precedente

Esercizio. Verificare se $[(1,0,1,1),(1,2,-1,0),(1,1,-1,-1),(0,1,0,4)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$
$\det\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&2&-1&0\\1&1&-1&-1\\0&1&0&4\end{pmatrix} = (a^4 = (a^4-4a)) = \det\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&2&-1&-8\\1&1&-1&-5\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ = laplace 4a riga =
$+1\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-8\\1&1&-5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&-8\\0&-1&-5\end{pmatrix}$ = laplace 1a colonna $= 2\det\begin{pmatrix}-1&-8\\-1&-5\end{pmatrix} = 2(5-8) = -6$

Si, i vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$

3.2 Rango di una Matrice

Il rango di una matrice qualsiasi è pari al numero massimo di righe indipendenti o al numero massimo di colonne indipendenti.
$A \in M_{m\times n}$, $rgA \leqslant min\{m,n\}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\-1&5&6&7\end{pmatrix} = (\underline{a}^1,\underline{a}^2,\underline{a}^3,\underline{a}^4),(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)$
$<\underline{a}^1,\underline{a}^2,\underline{a}^3,\underline{a}^4>\subseteq \mathbb{R}^3$
$<\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3>\subseteq \mathbb{R}^4$
La dimensione di $<\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3>$ è uguale alla dimensione di $<\underline{a}^1,\underline{a}^2,\underline{a}^3,\underline{a}^4>$ ed è uguale al rango della matrice.
$dim <\underline{a}^1,\underline{a}^2,\underline{a}^3,\underline{a}^4> = dim <\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3> = rg(A)$

Le matrici nulle hanno rango 0:
In ogni spazio vettoriale delle matrici $M_{m\times n}$ c'è una sola matrice di rango 0

Le matrici che hanno tutte le righe o colonne proporzionali hanno rango 1:
$A = \begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&4&0&6\\8&16&0&24\end{pmatrix}$, $rg(A) = 1$ perché tutte le righe sono proporzionali
$B = \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&1\\-1&5&6&7\end{pmatrix}$, Il rango di B è diverso da 0 perché non è una matrice nulla, diverso da 1 perché non ci sono righe o colonne proporzionali e quindi può essere 2 o 3

Se $A \in M_{m\times n}$ è quadrata, il rango massimo possibile è n; Il rango di A è il massimo: $rgA = n \iff \det A \neq 0$

3.3 Minore di una matrice

Sia A una matrice qualunque ($A \in M_{m \times n}$), si chiama minore di ordine k, il determinante di una sottomatrice quadrata che si ottiene da A, selezionando k righe e k colonne (anche non contigue).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 6 & 7 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ha minori di ordine 1,2,3,4

$\det A^{2,4}_{1,3} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 16$ che è il minore di ordine 2 della matrice A

$\det A^5_3 = \det(7) = 7$, minore di ordine 1

Esistono al massimo $m \times n$ minori di ordine 1

Numero di minori di ordine k in $A \in M_{m \times n} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

3.4 Orlati di una Matrice

Se troviamo un minore non nullo, e aggiungendo come una cornice le righe e colonne disponibili, i determinanti risultano tutti uguali a 0, allora il rango massimo sarà pari alla dimensione di quel minore.

Esercizio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il Rango della matrice A:
Come prima cosa troviamo un minore non nullo di ordine 2, ad esempio:

$$\det A^{1,2}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 3$$

Ora calcoliamo il determinante degli orlati di questo minore:

$$\text{A=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dato che tutti gli orlati hanno determinante uguale a 0 possiamo dire con certezza che il Rango di A è 2.

Esercizio. Determiniamo una base del sottospazio $\mathbb{R}^4$

$$w =< (1,2,3,-1) >< (2,0,1,1) >< (0,4,5,-3) >$$

$$\dim w = \text{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

minore di ordine 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

Calcoliamo gli orlati del minore:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 24 - 24 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = -8 + 8 = 0$$

Tutti i determinanti degli orlati sono uguali a 0, quindi il rango della matrice è 2
Una base del sottospazio è: $B_w = [(2,0,1,1),(0,4,5,-3)]$

Calcolare ora le componenti di $(1,2,3,-1)$ e $(2,0,1,1)$ rispetto a B_w

$(1,2,3,-1) = \alpha(2,0,1,1) + \beta(0,4,5,-3)$

$\begin{cases} 2\alpha = & 1 \\ 4\beta = & 2 \end{cases}$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

Esercizio. Per quali $c \in \mathbb{R}$ $\underline{v} = (2c, 4, 3c, -2) \in W$?
Per appartenere a W, dobbiamo inserire $\underline{v}$ dentro una base di W e ciò non deve cambiare il valore del rango della matrice.

$\text{Rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \\ 2c & 4 & 3c & -2 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2c & 4 & 3c \end{pmatrix} = 24c - 8c - 40 = 0 \to 2c - 5 = 0 \to c_1 = \frac{5}{2}$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2c & 4 & -2 \end{pmatrix} = -16 - 8c + 24 = 0 \to 8 - 8c = 0 \to c_2 = 1$

Non esiste una c che soddisfi entrambe le condizioni quindi $\nexists c \in \mathbb{R} : \underline{v} \in W$

Proposizione 3.4.1.
Sia V uno spazio vettoriale dotato di una base B. L'indipendenza del sistema $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_2]$ equivale all'indipendenza delle componenti dei vettori del sistema.

Esempio. Determinare se il sistema è indipendente o meno

$$S = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}]$$

In $M_{2\times 2}$ una base è: $[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$

Quindi le componenti dei vettori di S rispetto alla base sono:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$[(1,0,2,1),(1,1,1,-1),(1,2,3,4)]$

$\mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Se il rango della matrice è 3, allora i vettori in essa compresi sono linearmente indipendenti, altrimenti dipendenti.

Esercizio. Determinare due basi di W

$$w =< 1-x^2, 2x+x^4, x^2-x^4 >\in \mathbb{R}[x]$$

$w =< 1-x^2, 2x+x^4, x^2-x^4 >\in< 1, x, x^2, x^3, x^4 >= T_4$

Nota. $< 1, x, x^2, x^3, x^4 >$ è anche una base B_{T4}

I vettori di W secondo B_{T4} sono:
$[(1,0,-1,0,0),(0,2,0,0,1),(0,0,1,0,-1)]$

$\mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \to \mathrm{Rg} = 3$

$B_w = [1-x^2, 2x+4, x^2-x^4]$
$B'_w = [2x+4, 1-x^2, x^2-x^4]$
Qual'è il polinomio in W di componenti $(17, 10, \frac{2010}{\pi})$?
$17 \cdot (1-x^2) + 10(2x+x^4) + \frac{2010}{\pi} \cdot (x^2-x^4)$

3.5 Matrici triangolari

Le matrici triangolari sono una classe speciale di matrici quadrate che presentano una struttura ben definita.
Esistono due tipi principali di matrici triangolari:
Una matrice triangolare **superiore** è una matrice quadrata in cui tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono uguali a zero. Formalmente, una matrice quadrata U è detta triangolare superiore se:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tutti gli elementi a_{ij} per cui $i > j$ sono pari a zero.
Una matrice triangolare **inferiore** è una matrice quadrata in cui tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono uguali a zero. Formalmente, una matrice quadrata L è detta triangolare inferiore se:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tutti gli elementi a_{ij} per cui $i < j$ sono pari a zero.
Le matrici triangolari presentano diverse proprietà interessanti:

- Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.
- Il prodotto di due matrici triangolari superiori (o inferiori) è anch'esso una matrice triangolare dello stesso tipo.
- La risoluzione di sistemi lineari in cui la matrice dei coefficienti è triangolare è particolarmente efficiente, poiché si può procedere con un metodo diretto chiamato "sostituzione all'indietro" (per matrici triangolari superiori) o "sostituzione in avanti" (per matrici triangolari inferiori).

Qui si riporta un esempio di matrice triangolare superiore e inferiore 4x4

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \boxed{0} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & a_{33} & a_{34} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & a_{44} \end{pmatrix}_{4\times4} \qquad L = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{0} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4\times4}$$

3.6 Teorema di Completamento di una Base

il **teorema di completamento di una base** è uno strumento fondamentale che riguarda gli spazi vettoriali di dimensione finita. Questo teorema afferma che, dato un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale, è possibile estendere tale insieme fino a ottenere una base completa per l'intero spazio.

Questo teorema è particolarmente utile in quanto permette di costruire una base di V a partire da un sottoinsieme di vettori che sono già linearmente indipendenti. Estendere una collezione di vettori linearmente indipendenti fino a una base implica che possiamo sempre ottenere un insieme completo che genera tutto lo spazio vettoriale, mantenendo al contempo l'indipendenza lineare.

Il teorema di completamento di una base è importante in vari contesti, ad esempio:

- **Sistemi di equazioni lineari:** Aiuta a comprendere le condizioni di compatibilità e le soluzioni di sistemi lineari.
- **Teoria degli spazi vettoriali:** Permette di lavorare con spazi vettoriali parziali e completare insiemi di vettori fino a ottenere una rappresentazione completa dello spazio.
- **Diagonalizzazione e autovalori:** Facilita la costruzione di basi di autovettori in algebra lineare e applicazioni nelle trasformazioni lineari.

Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e un insieme di vettori linearmente indipendenti:

$$S = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

I vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e appartengono a $\mathbb{R}^3$, ma non formano una base per $\mathbb{R}^3$ poiché S contiene solo due vettori, mentre $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3.

Secondo il **teorema di completamento di una base**, possiamo aggiungere un ulteriore vettore linearmente indipendente a S per ottenere una base per $\mathbb{R}^3$.

1: Aggiunta di un Vettore Linearmente Indipendente

Per completare l'insieme S, scegliamo il vettore:

$$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora l'insieme

$$B = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

contiene tre vettori in $\mathbb{R}^3$, e possiamo verificare che questi vettori sono linearmente indipendenti.

2: Verifica dell'Indipendenza Lineare

Consideriamo una combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, e $\underline{v}_3$:

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa equazione si traduce nel sistema lineare:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, quindi i vettori v_1, v_2, e v_3 sono linearmente indipendenti.

Abbiamo quindi completato l'insieme iniziale $S = \{v_1, v_2\}$ aggiungendo il vettore v_3 per ottenere una base completa $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ per lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Esercizio. Esiste una base di $\mathbb{R}^5$ contenente tra gli altri

$s = [(1, 2, 0, 1, 1), (2, 4, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 0, 5)]$?

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3 \text{ ; poiché il minore } A_{123}^{345} \neq 0 \rightarrow \text{lin. indipendenti}$$

Per completare la base, aggiungiamo dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^5$ nelle colonne **non coinvolte** dal minore A_{123}^{345} (Quelle in blu)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Laplace } A_4 = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Laplace } A_4 = \det A_{123}^{345} \neq 0$$

$B = [(1, 2, 0, 1, 1), (2, 4, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 0, 5), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)]$