

Tecnica delle Costruzioni

UniNA
Ivano D'Apice
@sonoivano

Indice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introduzione | 2 |
| 2 | Richiami | 3 |
| 2.1 | Travi continue, taglio e momento | 3 |
| 2.2 | Metodo delle Forze | 5 |
| 2.3 | Metodo degli Spostamenti | 20 |

Capitolo 1

Introduzione

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione inviare una mail alla seguente casella postale. Link: ivanodapice@icloud.com. Grazie mille e buono studio!

Capitolo 2

Richiami

Alcuni dei primi concetti da ricordare sono:

- * **Corpo in Equilibrio:**

Una struttura in cui la sommatoria delle forze agenti è uguale a 0.

- * **Metodi di risoluzione di strutture**

Metodo delle forze, metodo degli spostamenti, eq. statica, plv.

2.1 Travi continue, taglio e momento

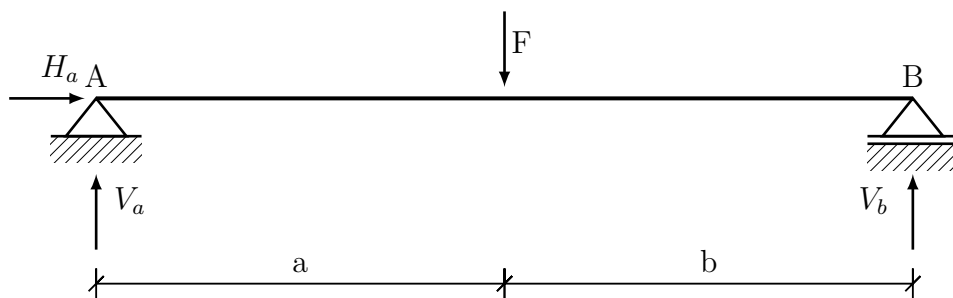


Figura 2.1: Trave appoggiata-appoggiata.

Cominciamo a parlare di questa trave appoggiata-appoggiata. Abbiamo una forza F in mezzeria che sarà equilibrata dalle altre 2 forze Verticali V_a e V_b . La forza orizzontale H_a è nulla perché appunto è una trave continua e non ci sono lavori orizzontali. Se facciamo una equazione di equilibrio troveremo i seguenti dati:

$$\Sigma V = 0,$$

$$V_a + V_b - F = 0$$

$$\Sigma H = 0,$$

$$H_a = 0$$

$$\Sigma M_a = 0,$$

$$F \cdot a - V_b \cdot l = 0$$

Da cui possiamo ricavare $V_a = F - V_b$ e $V_b = \frac{F \cdot a}{a + b}$. Nel caso in cui $a = 1$ e $b = 1$ avremo $V_b = \frac{F \cdot 1}{2}$

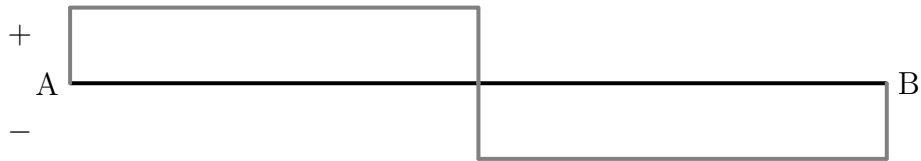


Figura 2.2: Taglio.

Come possiamo vedere dall'esempio [2.2], il diagramma del taglio della trave [2.1] è positivo per convenzione quando mettendoci in un generico concio avremo le forze disposte in questo modo:

$\uparrow \square \downarrow$

In presenza di forze, allora, il diagramma presenterà un salto. In situazioni di forze concentrate (carichi) invece, avremo un andamento lineare.

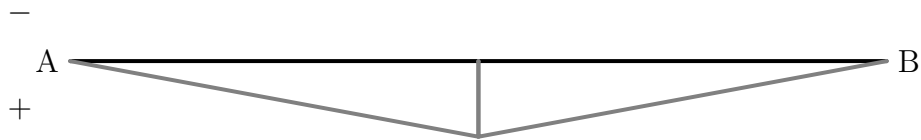


Figura 2.3: Momento Flettente.

A differenza del taglio, quando abbiamo una forza il diagramma del momento presenterà un punto angoloso o cuspidi. Se ad esempio avremo una forza molto piccola da non far cambiare il segno al taglio avremo solo un punto angoloso. Con forze grandi tali da cambiare segno invece ci saranno le condizioni per verificare una cuspidi. Convenzionalmente avremo valori positivi per forze generanti tali momenti sul concio infinitesimo:

$\circ \square \circ$

2.2 Metodo delle Forze

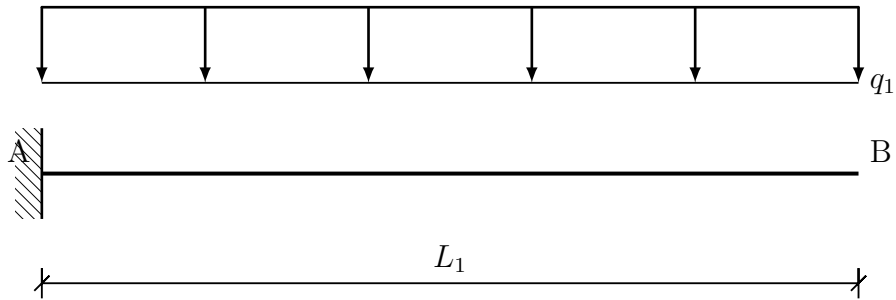


Figura 2.4: Trave a sbalzo.

Iniziamo con un esempio classico. La [2.4] è una trave a sbalzo con un estremo libero e un incastro. Sul tronco della trave inoltre è stato applicato un carico q_1 . In questo caso il corpo sarà isostatico dal $3t - s = 3 - 3 = 0$. Ora calcoliamo le reazioni che genera l'incastro nella trave con le equazioni della statica.

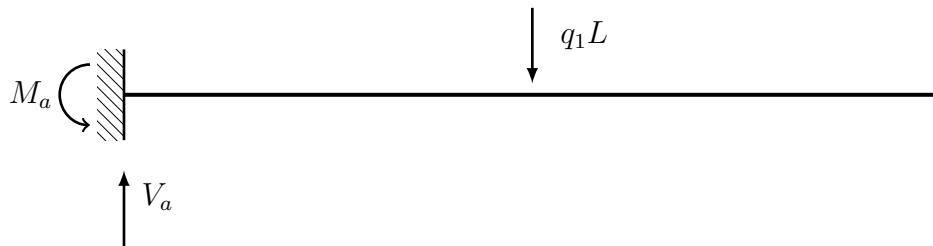


Figura 2.5: Reazioni.

$$\Sigma V = 0, \quad -V_a + q_1 L = 0$$

$$\Sigma M_a = 0, \quad -\frac{qL^2}{2} + M_a = 0$$

Vediamo che sia V_a che M_a sono di calcoli banali. Cosa succede però se alla stessa trave aggiungiamo un vincolo rendendola così 1 volta iperstatica?

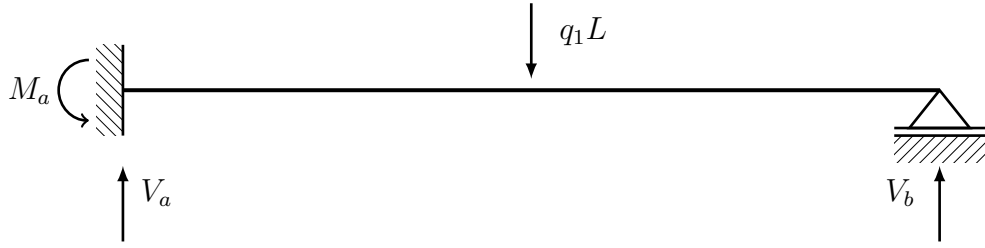


Figura 2.6: Trave incastrata-appoggiata.

$$\Sigma V = 0, \quad q_1 L - R_a - R_b = 0$$

$$\Sigma M_a = 0, \quad -\frac{qL^2}{2} + M_a + R_b L = 0$$

Queste di sopra sono due equazioni in tre incognite che ci daranno ∞^1 risultati. Pertanto è impossibile, o molto laborioso, trovare l'unica soluzione

congruente al nostro sistema che ha nell'incastro condizioni di

$$V_a = 0, \varphi_a = 0 \text{ e nel carrello } V_b = 0.$$

Tratteremo questa struttura staticamente indefinita rimuovendo un vincolo e aggiungendo una forza fittizia.

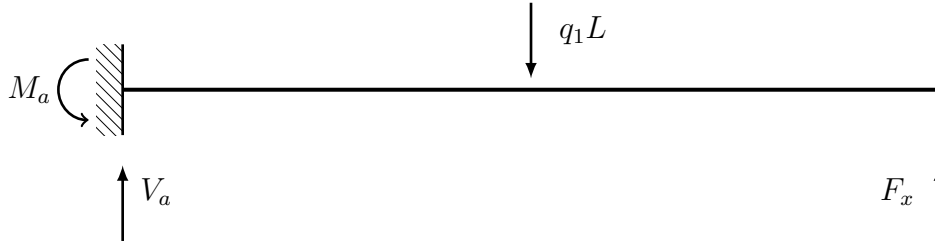


Figura 2.7: Trave dopo soppressione del vincolo carrello.

Da questa nuova trave possiamo ricavare la reazione V_b tramite equazioni di **congruenza**.

$$[V_b = 0]$$

$$V_b = V_b(q_1) + V_b(x) = 0, \Rightarrow \frac{qL^4}{8EI} - \frac{xL^3}{3EI} = 0$$

$$x = \frac{3}{8}qL$$

⊠ **N.B.** I risultati relativi a $V_b(q_1), V_b(x)$ sono stati ottenuti tramite tabelle di valori noti.

il nostro nuovo sistema di equazioni sarà:

$$\begin{cases} q_1 L - R_a - R_b = 0 \\ -\frac{qL^2}{2} + M_a = 0 \\ \frac{qL^4}{8EI} - \frac{xL^3}{3EI} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ora inizieremo a trattare il vero e proprio metodo delle forze. Verrà presentato mediante questa struttura:

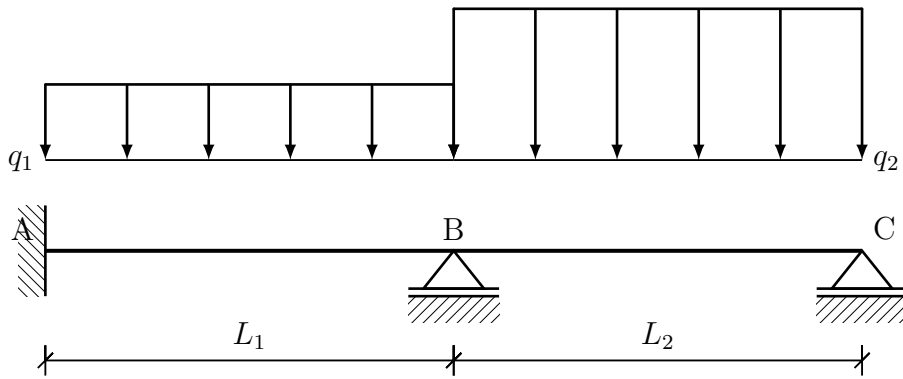


Figura 2.8

Definiamo la struttura in quanto isostatica, iperstatica o labile. Dal $3t - s$ calcoliamo come segue:

$3t - s = 3 - 5 = -2$ quindi avremo una struttura 2 volte iperstatica.

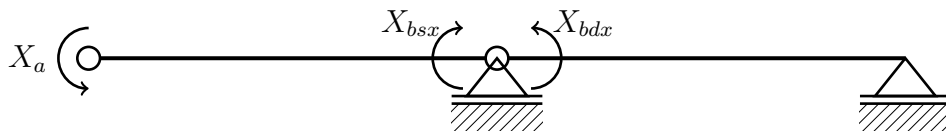


Figura 2.9

Dato che il numero di volte in cui la struttura risultava iperstatica erano 2 abbiamo declassato il vincolo incastro e creato una cerniera di distacco tra le due travi. Quindi avremo due incognite iperstatiche che saranno X_a e X_b .

Equazioni di congruenza:

$$\begin{cases} \varphi_a = 0 \\ \varphi_{bsx} = \varphi_{bdx} \end{cases} \quad (2.2)$$

Per calcolare queste due incognite dobbiamo usare dal formulario i casi notevoli come nel precedente esercizio. In questo frangente ci aiuteremo con una rappresentazione visiva dei suddetti casi.

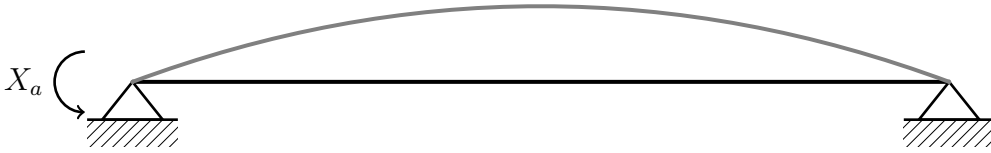


Figura 2.10: Caso X_a . Tratto AB.

$$\varphi_a(X_a) = \varphi_{bsx}(X_a) \Rightarrow \frac{X_a L_1}{3EI} - \frac{X_a L_1}{6EI}$$

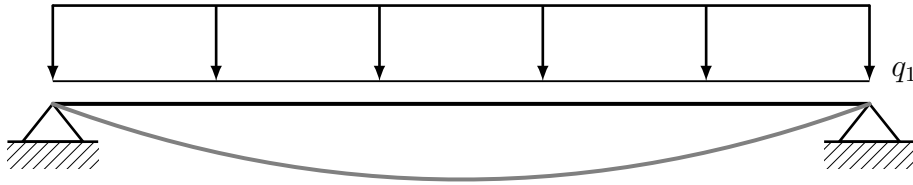


Figura 2.11: Caso q_1 . Tratto AB.

$$\varphi_a(q_1) = \varphi_{bsx}(q_1) \Rightarrow -\frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{q_1 L_1^3}{24EI}$$

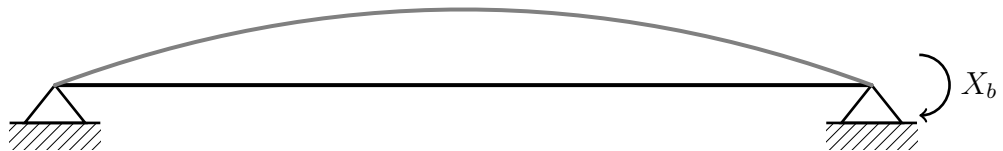
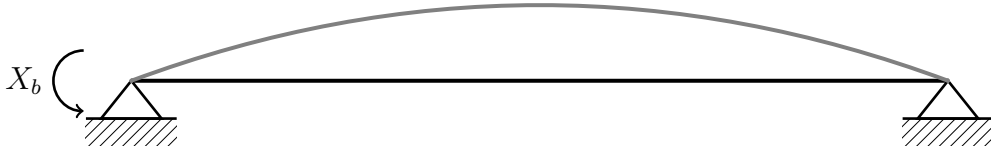
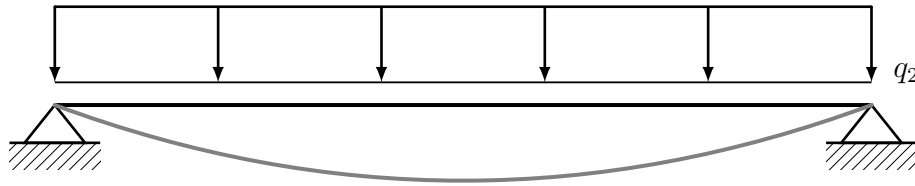


Figura 2.12: Caso X_{bsx} . Tratto AB.

$$\varphi_a(x_b) = \varphi_{bsx}(x_b) \Rightarrow \frac{x_b L_1}{6EI} - \frac{x_b L_1}{3EI}$$

Figura 2.13: Caso X_a . Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(x_b) = \frac{X_b L_2}{3EI}$$

Figura 2.14: Caso q_2 . Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(q_2) = -\frac{q_2 L_2^3}{24EI}$$

Ricapitolando tutti i casi delle nostre equazioni di congruenza arriveremo a costruire un sistema di equazioni tale da darci le soluzioni ai nostri termini incogniti.

$$\varphi_a = 0 \Rightarrow \varphi_a(X_a) + \varphi_a(q_1) + \varphi_a(x_b)$$

$$\varphi_{bsx} = \varphi_{bdx} \Rightarrow \varphi_{bsx}(X_a) + \varphi_{bsx}(q_1) + \varphi_{bsx}(x_b) = \varphi_{bdx}(x_b) + \varphi_{bdx}(q_2)$$

$$\begin{cases} \frac{X_a L_1}{3EI} - \frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{x_b L_1}{6EI} = 0 \\ \frac{X_a L_1}{6EI} + \frac{q_1 L_1^3}{24EI} - \frac{x_b L_1}{3EI} = \frac{X_b L_2}{3EI} - \frac{q_2 L_2^3}{24EI} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \frac{X_a L_1}{3EI} + \frac{x_b L_1}{6EI} = \frac{q_1 L_1^3}{24EI} \\ \frac{X_a L_1}{6EI} + x_b \left(\frac{L_1}{3EI} + \frac{L_2}{3EI} \right) = \frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{q_2 L_2^3}{24EI} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1}{3EI} & \frac{L_1}{6EI} \\ \frac{L_1}{6EI} & (\frac{L_1}{3EI} + \frac{L_2}{3EI}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L_1^3}{24EI} \\ \frac{q_1 L_1^3}{24EI} & \frac{q_2 L_2^3}{24EI} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Il sistema matriciale qui sopra riportato ha la particolarità di essere sempre simmetrico rispetto la diagonale per il termine D_{ij} (*spostamento relativo al G.D.L i -esimo associato ad un vettore unitario*).

☒

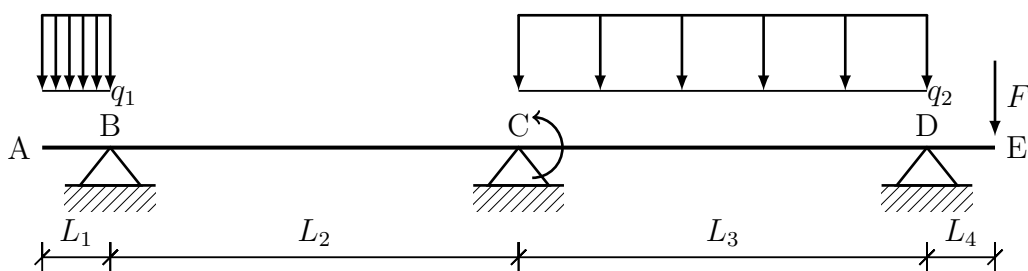


Figura 2.15

Possiamo eliminare lo sbalzo trasportando le forze q_1 e F nei rispettivi punti B e D.

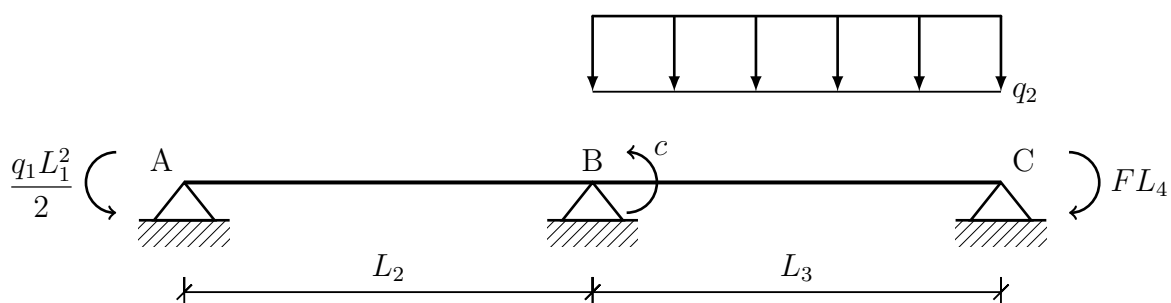


Figura 2.16

Ora creiamo una sconnessione nel punto B che verrà bilanciata da due momenti opposti.

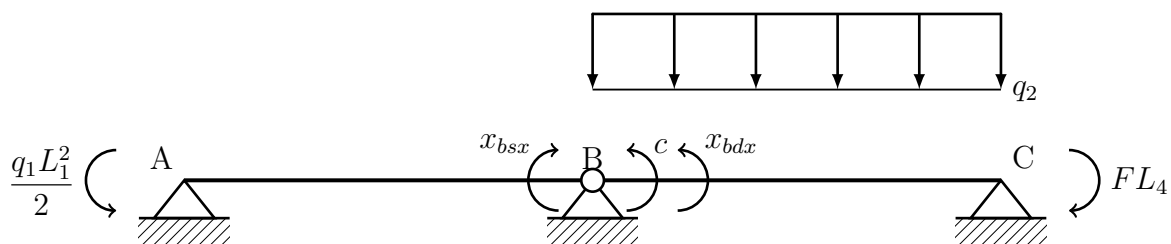


Figura 2.17

Dato che sul nodo in B c'è un momento c dobbiamo stare attenti a ricavare il valore risultante sulla trave. Infatti ciò è riconducibile a un nodo triplo che si potrà visualizzare con la seguente figura:

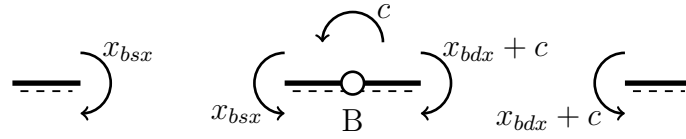
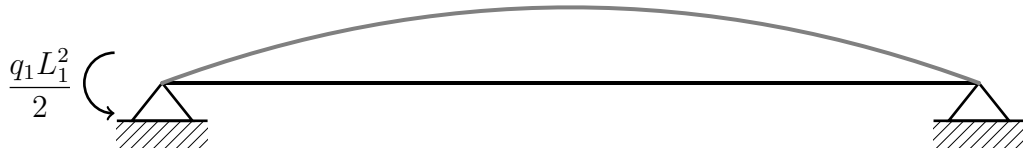


Figura 2.18

⊠ **N.B.** Quando abbiamo un **momento sul nodo** ci sarà sempre un salto nel diagramma del momento.

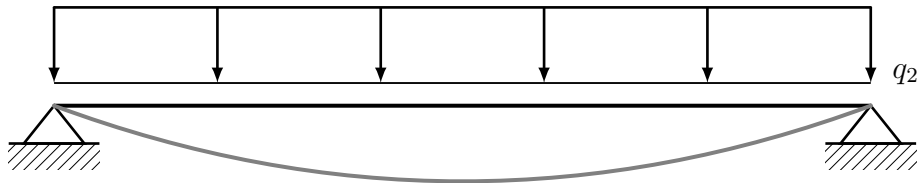
Ora scriviamo le equazioni di congruenza per il nuovo corpo sconsso.

Figura 2.19: Caso Momento sx di trasporto q_1 . Tratto AB.

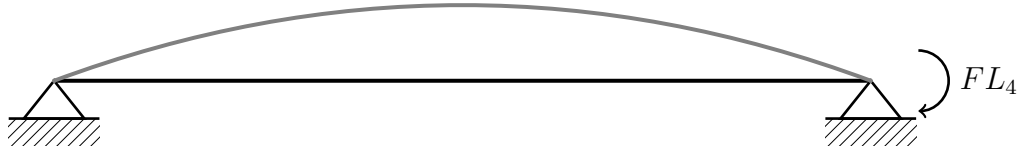
$$\varphi_{bsx}(q_1) = -\frac{q_1 L_1^2}{2} \cdot \frac{L_2}{6EI}$$

Figura 2.20: Caso X_{bsx} . Tratto AB.

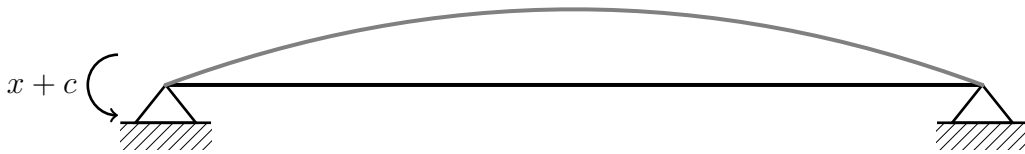
$$\varphi_{bsx}(x) = -\frac{x L_2}{3EI}$$

Figura 2.21: Caso q_2 . Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(q_2) = -\frac{q_2 L_3^3}{24EI}$$

Figura 2.22: Caso F . Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(F) = FL_4 \cdot \frac{L_3}{6EI}$$

Figura 2.23: Caso $x + c$. Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(x + c) = (x + c) \cdot \frac{L_3}{3EI}$$

$$[\varphi_{bsx} = \varphi_{bdx}]$$

$$\varphi_{bsx} = \varphi_{bsx}(q_1) + \varphi_{bsx}(x)$$

$$\varphi_{bdx} = \varphi_{bdx}(q_2) + \varphi_{bdx}(F) + \varphi_{bdx}(x + c)$$

Se volessimo ad esempio trovare il valore di x , grazie alle equazioni di congruenza basterà mettere a denominatore i termini di interesse e i restanti al numeratore:

$$x = \frac{-\frac{q_1 L_1^2}{2} \cdot \frac{L_2}{6EI} + \frac{q_2 L_3^3}{24EI} - \frac{FL_4 L_3}{6EI} - \frac{cL_3}{3EI}}{-\frac{L_2}{3EI} + \frac{L_3}{3EI}}$$

☒ Metodo delle forze (Esempio Numerico)

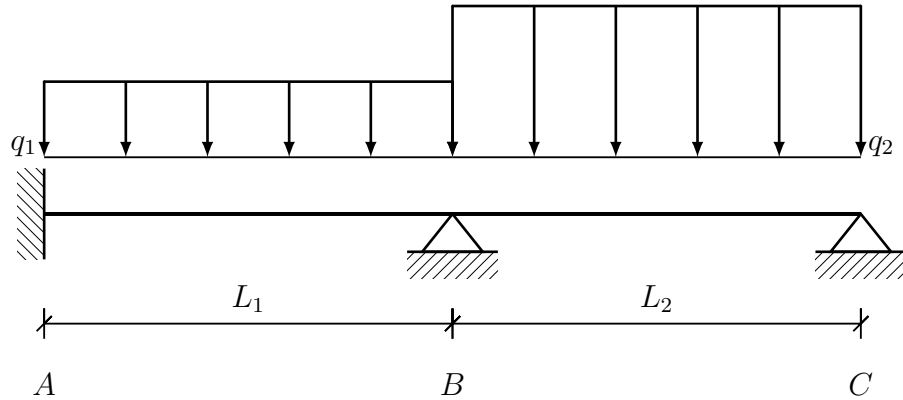


Figura 2.24: Taglio.

Calcoliamo la condizione statica di questa struttura:

$$2t - s = 2 - 4 \Rightarrow 2 \text{ volte iperstatica.}$$

Dati numerici:

$$q_1 = 2,00 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 3,00 \text{ kN/m}$$

$$L_1 = 3,00 \text{ m}$$

$$L_2 = 2,00 \text{ m}$$

Ora costruiamo la nostra struttura declassata

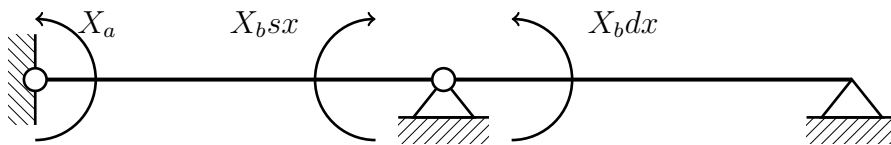


Figura 2.25: Taglio.

Eq. di congruenza:

$$\begin{aligned} \varphi_a = 0 &\Rightarrow \varphi_a(q_1) + \varphi_a(x_a) + \varphi_a(x_b) = 0 \\ \varphi_{bsx} = \varphi_{bdx} &\Rightarrow \varphi_{bsx}(q_1) + \varphi_{bsx}(x_a) + \varphi_{bsx}(x_b) = \varphi_{bdx}(q_2) + \varphi_{bdx}(x_b) \end{aligned}$$

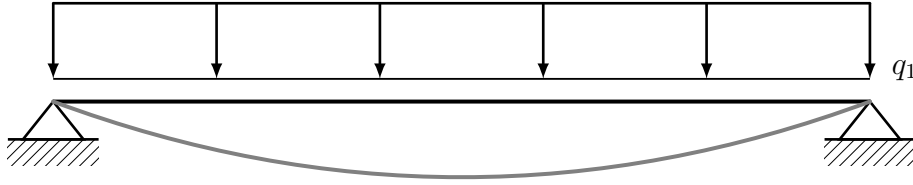


Figura 2.26: Tratto AB.

$$\varphi_a(q_1) = \frac{q_1 L_1^3}{24EI}, \quad \varphi_{bsx}(q_1) = -\frac{q_1 L_1^3}{24EI}$$



Figura 2.27: Tratto AB.

$$\varphi_a(x_a) = -\frac{x_a L_1}{3EI}, \quad \varphi_{bsx}(x_a) = \frac{x_a L_1}{6EI}$$

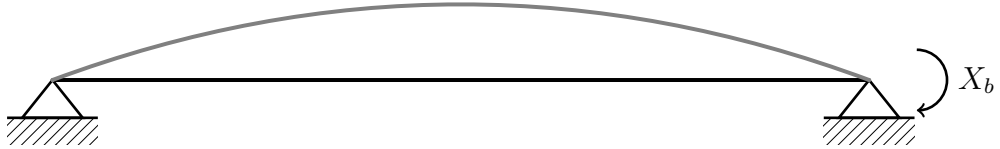


Figura 2.28: Tratto AB.

$$\varphi_a(x_b) = -\frac{x_b L_1}{6EI}, \quad \varphi_{bsx} = \frac{x_b L_1}{3EI}$$

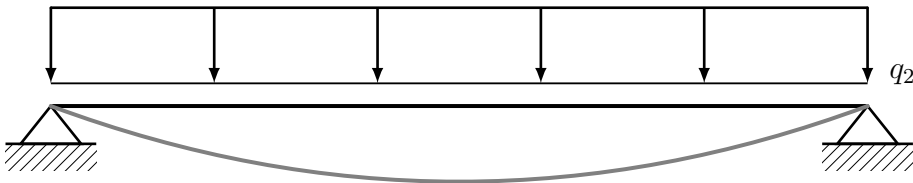


Figura 2.29: Tratto BC.

$$\varphi_{bdx}(q_2) = -\frac{q_2 L_2^3}{24EI}$$

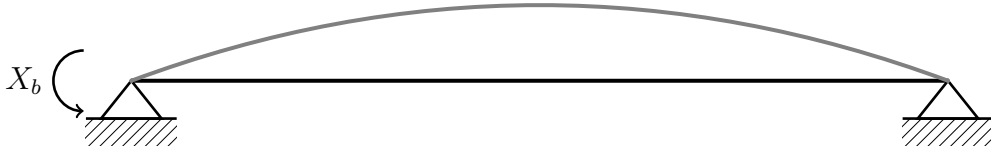


Figura 2.30: Tratto BC.

$$\varphi_{bsx}(x_b) = -\frac{x_b L_2}{3EI}$$

$$\begin{cases} \frac{q_1 L_1^3}{24EI} - \frac{x_a L_1}{3EI} - \frac{x_b L_1}{6EI} = 0 \\ -\frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{x_a L_1}{6EI} + \frac{x_b L_1}{3EI} = \frac{q_2 L_2^3}{24EI} - \frac{x_b L_2}{3EI} \end{cases} \quad (2.6)$$

Trasformiamo il sistema in termini noti tutti positivi:

$$\begin{cases} \frac{x_a L_1}{3EI} + \frac{x_b L_1}{6EI} = \frac{q_1 L_1^3}{24EI} \\ \frac{x_a L_1}{6EI} + \frac{x_b L_1}{3EI} + \frac{x_b L_2}{3EI} = \frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{q_2 L_2^3}{24EI} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1}{3EI} & \frac{L_1}{6EI} \\ \frac{L_1}{6EI} & (\frac{L_1}{3EI} + \frac{L_2}{3EI}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1 L_1^3}{24EI} \\ \frac{q_1 L_1^3}{24EI} + \frac{q_2 L_2^3}{24EI} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Ora calcoliamo le reazioni vincolari:

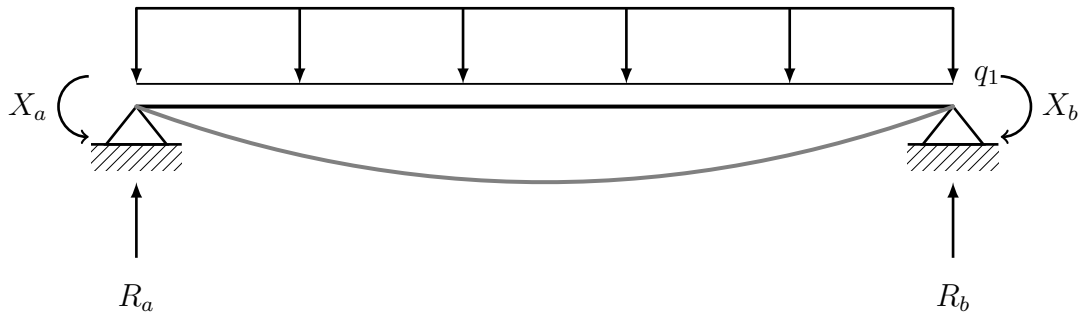


Figura 2.31: Tratto AB.

$$\Sigma V = 0, \quad R_a + R_{bsx} - q_1 L_1 = 0$$

$$\Sigma M_a = 0, \quad -x_a + x_{bsx} + \frac{q_1 L_1^2}{2} - R_b L_1 = 0$$

Otteniamo $R_a = 3,00kN$, $R_{bsx} = 3,00kN$, $x_a = 1,50kNm$,
 $x_b = 1,50kNm$.

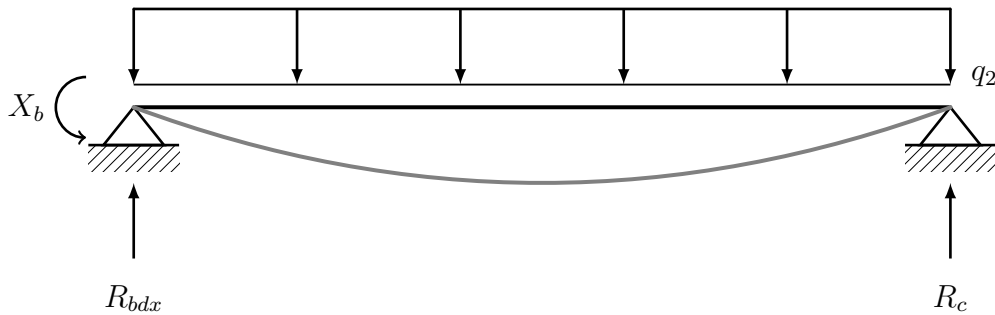


Figura 2.32: Tratto AB.

$$\Sigma V = 0, \quad R_{bdx} + R_c - q_2 L_2 = 0$$

$$\Sigma M_b = 0, \quad -x_b + \frac{q_2 L_2^2}{2} - R_c L_2 = 0$$

Otteniamo $R_b = 3,75kN$, $R_c = 2,25kN$.

Adesso calcoliamo analiticamente il taglio e momento della struttura:

TRATTO A-B

$$\begin{cases} T(x) &= R_a - q_1 x \\ M(x) &= -x_a + R_a x - \frac{q_1 x^2}{2} \end{cases} \quad (2.9)$$

TRATTO B-C

$$\begin{cases} T(x) &= R_{bdx} - q_2 x \\ M(x) &= -x_b + R_{bdx} x - \frac{q_2 x^2}{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

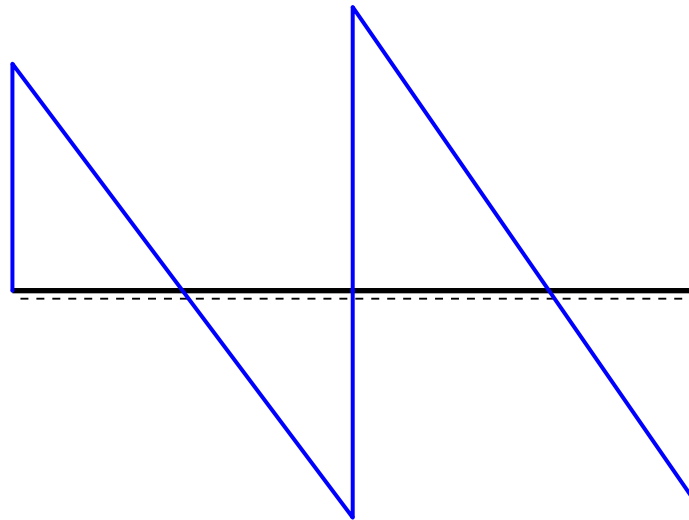


Figura 2.33: Diagramma Taglio.

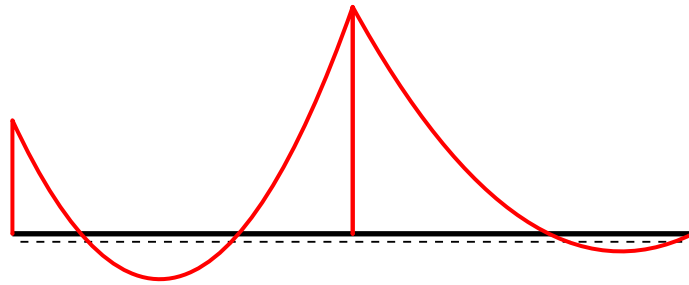


Figura 2.34: Diagramma Momento.

⊠ **N.B.** Il punto di minimo parabolico del momento si trova dove il taglio è nullo.

2.3 Metodo degli Spostamenti

| | INCOGNITE | EQUAZIONI |
|--------------------------|-------------|-------------------------|
| Metodo delle forze | FORZE | Equazioni di congruenza |
| Metodo degli spostamenti | SPOSTAMENTI | Equazioni di equilibrio |

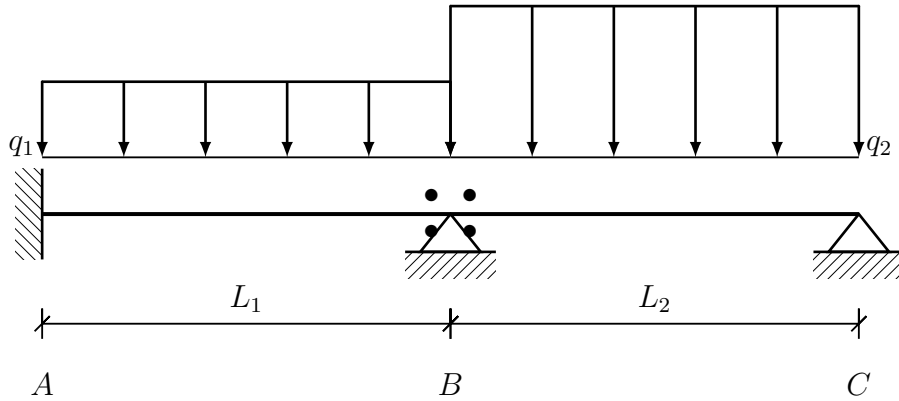


Figura 2.35

α) FASE A NODI BLOCCATI.

In questa fase blocchiamo tanti nodi quante volte è iperstatica la struttura. I morsetti (Se guardiamo la [2.35] ce n'è uno nel punto B) potranno essere disposti solo su vincoli interni.

Il morsetto è un ulteriore vincolo fittizio che ci farà alzare di 1 volta la iperstaticità strutturale. La sua condizione cinematica è $\varphi = 0$.

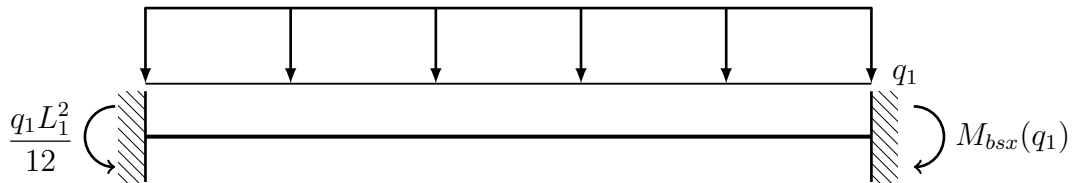


Figura 2.36: Tratto AB.

$$M_{bsx}(q_1) = \frac{q_1 L_1^2}{12}$$

$$M_{bdx}(q_2) = \frac{q_2 L_2^2}{8}$$

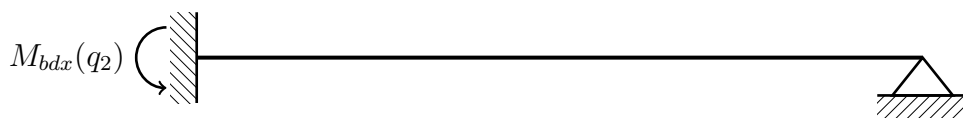


Figura 2.37: Tratto BC.

$M_{bsx}(q_1)$, $M_{bdx}(q_2)$ sono azioni applicate dal nodo per effetto del carico esterno. Azioni che il vincolo ausiliario $[\cdot\cdot]$ deve esercitare per imporre la condizione cinematica $\varphi = 0$.

☒

$\beta)$ ATTIVAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI NODALI.

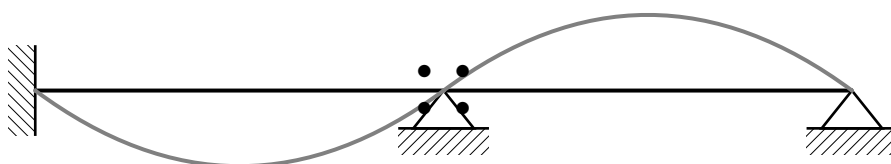


Figura 2.38: Flessione dei tronchi indotta dagli spostamenti.

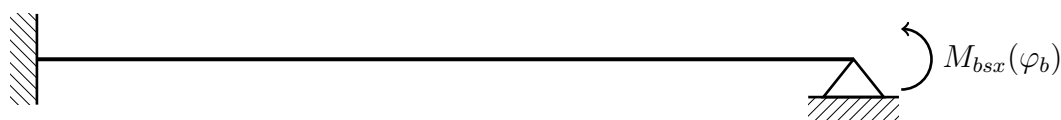


Figura 2.39

$$M_{bsx}(\varphi_b) = \frac{4EI}{L_1} \varphi_b$$

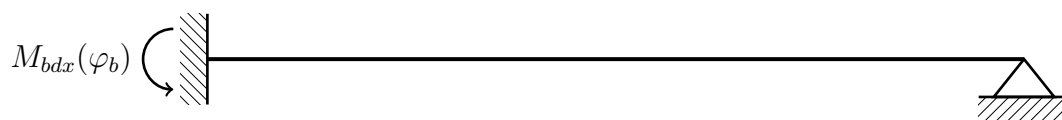


Figura 2.40

$$M_{bdx}(\varphi_b) = \frac{3EI}{L_2} \varphi_b$$

☒

γ) **SCRITTURA DELL'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO AL
NODO.**