Università degli Studi di Napoli Federico II
Scienze e Tecniche dell'Edilizia - L23
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

Appunti di Algebra e Geometria

Codice - MAT 03 - 6CFU

IVANO D'APICE

Professore

PROF. MAURIZIO BRUNETTI
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

25 Nov 2023

Abstract

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione inviare mail a:
`ivanodapice@hotmail.com`.

Contents

Chapter 1

Introduzione

Lecture 1: Richiami

25 Nov. 12:11

1.1 Insiemi

Partiamo col dire che nel vasto spettro degli insiemi troviamo anche quelli numerici. Questi insiemi si dicono infiniti perché racchiudono al loro interno elementi che continuano ad incrementare o/e decrementare all'infinito. Vediamo ora i vari insiemi numerici che potremo incontrare nel corso:

Definizione 1.1.1 (Numeri Naturali). L'insieme $\mathbb{N}$ comprende al suo interno tutti i numeri non negativi

Esempio. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., +\infty\}$

Definizione 1.1.2 (Numeri Interi). L'insieme $\mathbb{Z}$ comprende al suo interno tutti i numeri negativi e positivi compreso quello nullo

Esempio. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, ..., \pm\infty\}$

Definizione 1.1.3 (Numeri Razionali). L'insieme $\mathbb{Q}$ comprende al suo interno tutti i numeri interi e comprende la notazione del tipo $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Esempio. $\mathbb{Q} = \{-\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{5}, 1.5\overline{3}, 1.23(\frac{111}{90}), \frac{88}{1}, ...\}$

Definizione 1.1.4 (Numeri Reali). L'insieme $\mathbb{R}$ comprende quei numeri che possono essere rappresentati con notazione decimale senza per forza essere del tipo $\frac{m}{n}$

Esempio. $\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, e^4\}$

Quindi possiamo dire che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.1.1 N-ple, R^n

Identifichiamo ora un nuovo ente $[(a,b)]$ individuato da due oggetti a e b non necessariamente distinti, e dall'ordine dei due. Un buon esempio potrebbe essere quello degli scacchi dove la posizione di una casella è identificata da due valori $[(n,x)]$.[1]
Possiamo definire adesso un nuovo insieme che è quello di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R}\}$ definito da numeri razionali.

Esempio. Un insieme $\mathbb{R}^2$ potrebbe essere $v = (2, \sqrt{6.4}), \in \mathbb{R}^2$

Nota. In $\mathbb{R}^2$ ci sono anche particolari combinazioni che prendono il nome di **Diagonale Principale** e **Diagonale Secondaria**.

Esempio.

$$v = (x,x)\text{: Diagonale Principale (i due elementi sono uguali)}$$
$$v = (x,-x)\text{: Diagonale Secondaria (un elemento è l'opposto dell'altro)}$$

Oltre all'insieme $\mathbb{R}^2$ ci sono poi tutta una serie incrementale di insiemi fino ad arrivare alla ennupla $\mathbb{R}^n$ che ha un numero di elementi virtualmente infinito. L'insieme di $\mathbb{R}^n, n > 2$ viene chiamato spazio euclideo mentre i suoi elementi $(x_1, x_2, ..., x_n, x \in \mathbb{R})$ vengono chiamati punti o vettori.
Possiamo usare gli spazi $\mathbb{R}$ per rappresentare graficamente dei riferimenti. $\mathbb{R}^1$ ci permette di orientarci su una retta mentre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente per visualizzare figure piane e solidi.

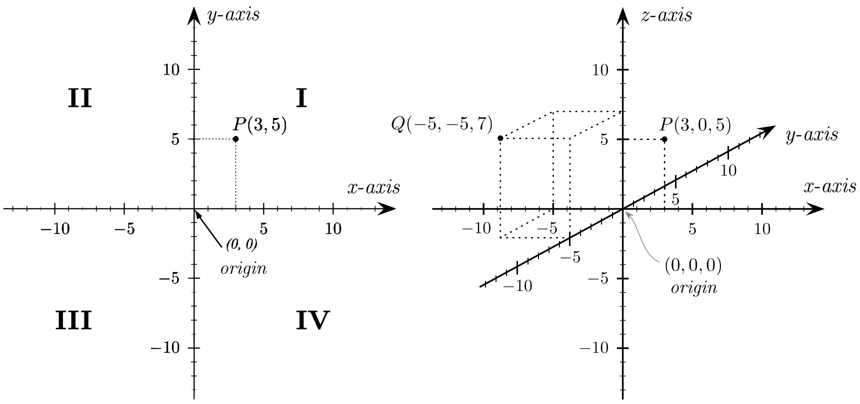

Figure 1.1: Coordinate degli assi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Adesso possiamo usare lo spazio $\mathbb{R}^2$ per fare un esercizio. Avremo due vettori $q = (3,5) \land p = (5,3)$ e vogliamo visualizzare il vettore $s = \frac{1}{2}q + 2p$. Per fare ciò, si usa un metodo grafico chiamato punta-coda, dove mettiamo i nostri vettori in successione connettendo l'inizio di uno alla fine dell'altro.

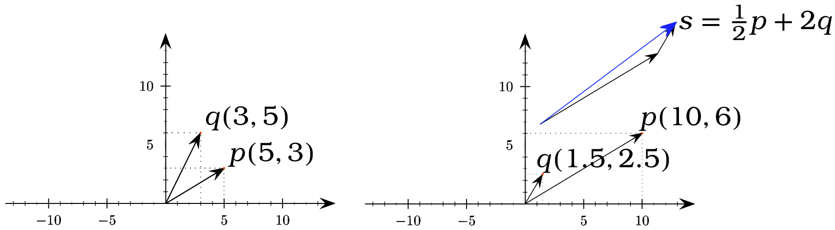

Figure 1.2

[1] Coordinate Scacchiera

1.2 Proprietà

1.2.1 Somma

Definizione 1.2.1. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (a, b) \in \mathbb{R}$

La somma è un'operazione interna, dato che gli addendi e il risultato dell'operazione si trovano nello stesso insieme.

Nota.

1. Elemento neutro: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
2. Opposto: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0, 0), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
3. P. Associativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), \in \mathbb{R}^2$

$$[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) = (a_1, a_2)[(b_1, b_2) + (c_1, c_2)]$$

4. P. Commutativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$$

Una struttura algebrica del tipo $(\mathbb{R}^2, +)$ se gode delle precedenti proprietà da 1 a 4 viene chiamata **Gruppo Abeliano**

1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione 1.2.2. $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \dagger a, b \in \mathbb{R}$

Nota.

5. P. distributiva: $\forall \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$

$$\beta[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \beta(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$

6. P. distributiva: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$

$$(\beta + \delta)(a_1, a_2) = \beta(a_1, a_2) + \delta(a_1, a_2)$$

7. P. Associativa: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$

$$\beta\gamma(a_1, a_2) = \beta[\gamma(a_1, a_2)] = (\beta\gamma)(a_1, a_2)$$

8. Elemento neutro: $1(a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Chapter 2

Vettori e Matrici

Lecture 2: Spazi vettoriali

Sia $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ una struttura algebrica (ovvero un insieme non vuoto su cui sono definite delle operazioni), dove $+$ è interna e $\cdot$ è una moltiplicazione di un vettore per uno scalare, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ si chiama **spazio vettoriale** (e gli elementi di $\mathbb{R}^2$ vettori) se valgono le precedenti 8 proprietà. 9 Sep. 08:00

Esempio (Spazi Vettoriali). $\mathbb{R}[x] \cong$ Polinomi a coefficienti reali ad un'incognita.

$P_1(x) = 3 - x + x^3 + P_2(x) = 5x - \frac{7}{2}x^4$

$$\begin{aligned} &3 - x \ \ + x^3 &&+ \\ &\ \ + 5x \qquad &&- \frac{7}{2}x^4 = \\ &3 + 4x + x^3 - \frac{7}{2}x^4 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3$

Definizione 2.0.1 (combinazione lineare). Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n, \in V$. Un vettore del tipo $\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \dots + \beta_n\underline{v}_n, \beta \in \mathbb{R}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

Esempio. $3(1,3) + \frac{1}{2}(0,4) + (-1,-1) = (3,9) + (0,2) + (-1,-1) = (2,10)$, questi elementi di $\mathbb{R}^2 = (2,10)$ sono combinazione lineare di $(1,3), (0,4), (-1,-1)$ scegliendo $(\beta_1 = 3, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = 1)$

Esempio (spazi vettoriali).
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ (Spazio vettoriale dei vettori)
$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x_1, x_2], \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (Spazio vettoriale dei polinomi)
$M_{n\times m}, n \wedge m \in \mathbb{N}$ (Spazio vettoriale delle matrici)
$\{G\}$ (Spazio vettoriale dell'elemento nullo)

Esempio (elementi neutri negli spazi vettoriali).
$\mathbb{R}^2 = \underline{0} \Rightarrow (0,0)$
$\mathbb{R}^4 = \underline{0} \Rightarrow (0,0,0,0)$
$M_{3\times 3} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.1 Proprietà valide negli spazi vettoriali

Proposizione 2.1.1. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \beta \in \mathbb{R}, \beta 0 = 0$

Dimostrazione.
$\beta \underline{0} = \beta(\underline{0} + \underline{0}) = \beta \underline{0} + \beta \underline{0}$
$\beta \underline{0} = \beta \underline{0} + \beta \underline{0}$, esiste l'opposto di $\beta \underline{0}$ e lo chiamiamo OPP
$\beta \underline{0} + OPP = (\beta \underline{0} + \beta \underline{0}) + OPP$
$\underline{0} = \beta \underline{0} + (\beta \underline{0} + OPP)$
$\underline{0} = \beta \underline{0} + \underline{0} \rightarrow \beta \underline{0} = \underline{0}$

Proposizione 2.1.2. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} \cdot 0 = 0$

Dimostrazione.
$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v}(0 + 0) = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$
$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$, esiste l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ e lo chiamiamo OPP
$\underline{v} \cdot 0 + OPP = (\underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0) + OPP$
$0 = \underline{v} \cdot 0 + (\underline{v} \cdot 0 + OPP)$
$0 = \underline{v}0 + 0 \rightarrow \underline{v} \cdot 0 = 0$

Proposizione 2.1.3. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ è $(-1)\underline{v}$

Dimostrazione.
$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 0$
$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = 0$, per la proposizione III.2

Proposizione 2.1.4. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $k \cdot \underline{v} = \underline{0}$, se $k = 0$ o $\underline{v} = \underline{0}$

Dimostrazione.
Se $k = 0$ è vera per la proposizione III.2
Se $k \neq 0, \exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \frac{1}{k} \cdot \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$ Per la proposizione III.1
$1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\underline{v} = \underline{0}$

Proposizione 2.1.5. In uno spazio vettoriale $V \in \mathbb{R}$ se $\exists \underline{v} \neq 0$ allora V contiene infiniti vettori

Dimostrazione.
$1\underline{v}, 2\underline{v}, 3\underline{v}, \ldots, n\underline{v}$ facciamo vedere che sono a due a due distinte
$h \cdot \underline{v} = k \cdot \underline{v}$
$(h \cdot \underline{v}) + (-1k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$
$(h - k)\underline{v} = \underline{0}$
$h - k = \underline{0}$ Per la proposizione III.4
$h = k$

Proposizione 2.1.6. In uno spazio vettoriale V qualunque, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in V, 0 \in < \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$

Dimostrazione.
$\exists \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n : \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + ... + \beta_n \underline{v}_n = 0$
$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0$

Nota. Con il simbolo $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$ o con $\beta(\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n)$ indichiamo l'insieme delle combinazioni lineari di $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ cioè l'insieme $\{\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + ... + \beta_n \underline{v}_n / \beta_i \in \mathbb{R}\}$

Esempio.
$(0,4) \in < (2,6), (0,4), (-7,2) > ?$
Si, infatti basta scegliere $\beta_1 \wedge \beta_3 = 0, \beta_2 = 1$

$(-1,-3) \in < (2,6), (0,4), (-7,2) > ?$
Si, $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{2}$

$(-5,8) \in < (2,6), (0,4), (-7,2) > ?$
$(-5,8) = \beta_1(2,6) + \beta_2(0,4) + \beta_3(-7,2) = (2\beta_1 - 7\beta_3, 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3)$

$$\begin{cases} -5 = 2\beta_1 \quad\quad\quad - 7\beta_3 \\ 8 = 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 \end{cases}$$

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

In generale, l'insieme delle combinazioni lineari $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n > \subseteq V$. Quindi ogni vettore di V è combinazione lineare di $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$ e si dice che $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$ sono **generatori** di V.

Esempio.
$\underline{v}_1 = (1,2,0,3), \underline{v}_2 = (\pi, e, 0, -55), \underline{v}_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^4$?
No perché: $\beta_1 = (1,2,0,3) + \beta_2 = (\pi, e, 0, -55) + \beta_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0) / \beta_i \in \mathbb{R}$
$(0,0,1,0)$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

Esempio. $P_1(x) = 3 - x^4, P_2(x) = x + 77x^7$
$x^8 \in < P_1(x), P_2(x) >$?
No perché non contiene polinomi di grado maggiore a 7.

Esempio. $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ genera $\mathbb{R}^2$?
No, perché: $\{\beta(1,3)/\beta_i \in \mathbb{R}\} = \{(\beta, 3\beta)/\beta \in \mathbb{R}\}$
$\beta = 1 \rightarrow (1,3)$ non possiamo generare $(1,1)$

Esempio. $(1,0), (0,1)$ generano $\mathbb{R}^2$?
Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) = (\beta_1, \beta_2)$
$< (1,0), (0,1) > \in \mathbb{R}^2$

Esempio. $(1,0), (0,1), (55, \frac{1}{2})$ generano $\mathbb{R}^2$?

Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) + ?(55, \frac{1}{2}) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) + \beta_3(55, \frac{1}{2})$
$< (1,0),(0,1),(55,\frac{1}{2}) >\in \mathbb{R}^2$

Come vediamo, se un insieme di vettori ha cardinalità minore della dimensione dello spazio a cui appartengono, allora possiamo immediatamente concludere che l'insieme assegnato non è un sistema di generatori (come visto nel caso polinomiale precedente).[1] Mentre più avanti, con il concetto di dimensione di spazio vettoriale, sarà più facile capire come verificare se un insieme è generatore.

Nota. Se ad un insieme di generatori se ne aggiunge un altro, l'insieme risultante è anch'esso un generatore. Cioè se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ genera V allora anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}$ diventa generatore.

Dimostrazione. Per ipotesi $V =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > \subseteq < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} > \subseteq V$
Dato che $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, w >$ è incluso in V e include V, allora $< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w} >$ è V

Esempio.
In $\mathbb{R}^3$, $(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ generano $\mathbb{R}^3$
In $\mathbb{R}^4$, (1) genera $\mathbb{R}^4$
In $\mathbb{R}^n$, $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),(0,0,\dots,1)$ generano $\mathbb{R}^n$
In $\{G\}$, G genera $\{G\}$

Un **Sistema di vettori** è un insieme in cui contano l'ordine degli elementi e anche le eventuali ripetizioni, e si indica così: $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$

Esempio.
$\{(1,0),(0,1),(3,5)\}$ 3 elementi
$\{(1,0),(1,0),(3,5)\}$ 2 elementi
$=\{(1,0),(3,5)\}$
$=\{(3,5),(1,0)\}$

Nota. $\underline{v}_1 = (1,2,3), \underline{v}_2 = (0,44,44), \underline{v}_3 = (2,4,6)$
Esistono varie combinazioni lineari per esprimere gli elementi soprastanti come vettore nullo. Un metodo banale è porre $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0/\beta_1(1,2,3), \beta_2(0,44,44), \beta_3(2,4,6)$
Un altro modo sarebbe porre $\beta_1 = -2, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

2.2 Dipendenza lineare

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_2]$ si dice **linearmente dipendente** se e soltanto se $0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_2$ non è l'unico modo per esprimere 0 come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_2]$ Si dice **linearmente indipendente** se e soltanto se $0 \cdot \underline{v}_1, \dots, 0 \cdot \underline{v}_2$ è l'unico modo per esprimere 0 come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

Proposizione 2.2.1. Sia V uno spazio vettoriale qualunque e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ contiene almeno una coppia di vettori proporzionali, il sistema è linearmente dipendente.

Esempio. $\underline{v}_1 = (1,2,3), \underline{v}_2 = (1,1,1), \underline{v}_3 = (1,3,5)$
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente o indipendente?
Linearmente dipendente perché: $(0,0,0) = \beta_1(1,2,3) + \beta_2(1,1,1) + \beta_3(1,3,5)$ se poniamo nell'equazione $\beta_1 = 2, \beta_2 = -1, \beta_3 = -1$

[1] youmath

Esempio. $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & \cos\delta \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 10^4 & 10^7 \\ 10^-31 & 10^0 \end{bmatrix}$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente perché se ci facciamo caso, qualsiasi valore di β mettiamo davanti a $\underline{v}_2$ il risultato sarà sempre un vettore con elementi nulli, mentre per $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ basta porre il coefficiente di beta uguale a 0.

Esempio. $[(1, 0), (0, 1)]$ è linearmente indipendente perché gli unici coefficienti di beta possibili sono 0

Esempio. $[(1, 0), (0, 1), (3, 5)]$ è linearmente dipendente perché $(3, 5)$ è proporzionale a $(1, 0)$ e $(0, 1)$
Un modo per esprimere il vettore nullo è: $-3(1, 0) + [-5(0, 1)] + 1(3, 5)$

2.3 Teorema di caratterizzazione dei sistemi di vettori linearmente dipendenti

Teorema 2.3.1. $[v_1, \dots, v_n]$ lin. dipendenti $\Longleftrightarrow$ Almeno un vettore è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione (da destra a sinistra).
Se $\underline{v}_n \in < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1} >$
$\underline{v}_n = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{n-1} \underline{v}_{n-1}$
$0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_{n-1} \underline{v}_{n-1} + (-1)\underline{v}_n \Longrightarrow [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ linearmente dipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra).
Per ipotesi $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ non tutti nulli tale che $0 = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$
se $\beta_n \neq 0 \Longrightarrow \underline{v}_n = \frac{1}{\beta_n}(-\beta_1 \underline{v}_1, \dots, -\beta_{n-1}\underline{v}_n - 1) = (-\frac{\beta_1}{\beta_n})\underline{v}_1 + \dots + (-\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n})\underline{v}_{n-1}$

Corollario 2.3.1. $[\underline{v}_1, \underline{v}_2]$ linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ Almeno un vettore è combinazione lineare dell'altro $\Longleftrightarrow$ sono proporzionali

Esempio. $[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}]$ non sono proporzionali $\Longrightarrow$ linearmente indipendenti

Esercizio. Sia $P_1(x) = x^{29} + x^9 + x^2023$

Determinare $P_2(x), P_3(x)$ tali che: $[P_1(x), P_2(x)]$ lin. indipendenti e $[P_1(x), P_3(x)]$ lin. dipendenti
$P_2(x)$ basta che non sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_2(x) = 2$
$P_3(x)$ basta che sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_3(x) = 0$ oppure $P_3(x) = 2x^{29} + 2x^9 + 2x^2023$

Osservazione. $\underline{v} \in V$

$\underline{v}$ è linearmente dipendente se $\underline{v} = \underline{0}$
infatti $\beta\underline{v} = \beta\underline{0} = \underline{0}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{v}$ è linearmente indipendente se $\underline{v} \neq \underline{0}$
infatti $\beta\underline{v} = \underline{0} \Longleftrightarrow \beta = 0$

$V = \mathbb{R}$	Lin. indipendenti	Generatori
$[(1,0)]$	SI	NO
$[(1,0),(0,1)]$	SI	SI
$[(1,0),(0,1),(0,5)]$	NO	SI
$[(1,0),(3,0)]$	NO	NO

Figure 2.1: Insiemi dei sistemi vettoriali

2.4 Basi di uno spazio vettoriale

Un sistema ordinato $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ si dice base di V se i vettori sono linearmente indipendenti e generano V.

Nota.
$[(1,0),(0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}$
$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}$
$\{G\} = \{\underline{0}\}$ Non ha basi, perché i vettori sono linearmente dipendenti
$P[x]$ Non ha basi, perché non è finitamente generato

Data una base, per trovarne una nuova, basta cambiare l'ordine dei vettori contenuti in essa, oppure sostituire qualche vettore con uno proporzionale **non nullo**.

Esempio.
$B^{'} = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$
$B^{''} = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$
Queste sono due basi diverse di $\mathbb{R}^3$, dove nel secondo caso abbiamo solo cambiato l'ordine di $\underline{v}_2$ con $\underline{v}_3$
$[(0,1,0),(0,0,-1),(2023,0,0)]$
Invece qui abbiamo sia cambiato l'ordine vettoriale e sia proporzionato gli elementi con diversi coefficienti

Nota (DIP+1=DIP). Se ad un sistema linearmente dipendente si aggiunge un vettore, il sistema finale è linearmente dipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ linearmente dipendente
$\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ non tutti nulli tali che $\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$
$\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n + 0\underline{w}$
$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}]$ linearmente dipendente $\forall \underline{w} \in$V
Quindi in parole povere, se già abbiamo un sistema linearmente dipende e aggiungiamo un vettore a caso, possiamo sempre annullarlo moltiplicando per 0 e non cambia niente in termini di dipendenza

Nota (INDIP-1=INDIP). Se ad un sistema linearmente indipendente si toglie un vettore, il sistema finale è linearmente indipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}]/n \geq 1$ linearmente indipendente
Per assurdo, può essere $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-2}]/n \geq 2$ linearmente dipendente? No, in base al principio DIP+1=DIP dovrebbe essere linearmente dipendente anche il sistema di partenza

Nota (Sistema indipendente massimale)**.** Un sistema indipendente si dice indipendente massimale, se appena si aggiunge un vettore, l'indipendenza si perde

Nota (Sistema minimale di generatori)**.** Un sistema di generatori si dice minimale di generatori, se appena si toglie un vettore, il sistema risultante non è più generatore

2.5 Teorema di caratterizzazione delle basi

Teorema 2.5.1. Sia V uno spazio vettoriale non banale. Un sistema ordinato di vettori $B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ di V è una base ordinata se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

- $\iff$ il sistema è indipendente massimale
- $\iff$ il sistema è minimale di generatori
- $\iff$ ogni vettore di V, si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di B, in un solo modo

Dimostrazione (da destra a sinistra)**.**
$B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ per ipotesi si sa già essere generatore, bisogna dimostrare quindi che sia linearmente indipendente. Il sistema B è linearmente indipendente, perché essendo ogni vettore esprimibile in un solo modo, anche $\underline{0}$ si può esprimere in un solo modo. Quindi B è linearmente indipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra)**.**
$B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ è una base di V, quindi supponiamo che:
$\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \ldots + \beta_n \underline{e}_n$
$\underline{v} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \ldots + \gamma_n \underline{e}_n$
Sottraendo membro a membro: $\underline{0} = (\beta_1 - \gamma_1)\underline{e}_1 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\underline{e}_n //$ Essendo per ipotesi, linearmente indipendente: $\beta_1 - \gamma_1 = 0, \beta_n - \gamma_n = 0$

Proposizione 2.5.1.
$B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \implies (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$
$B' = [(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)] \implies (a, b, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) + a(1, 0, 0)$
$B'' = [(0, 1, 0), (0, 0, -1), (2023, 0, 0)] \implies (a, b, c) = b(0, 1, 0) + [-c(0, 0, -1)] + \frac{a}{2023}(2023, 0, 0)$
In qualunque spazio vettoriale V che possegga una base, un vettore $\underline{v}$ si può esprimere come: $\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \ldots + \beta_n \underline{e}_n$. I coefficienti $\beta_1, \ldots, \beta_n$ individuano univocamente $\underline{v}$ e prendono anche il nome di componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base B.

Esempio. $\underline{v} = (3, 10, 2023) \in \mathbb{R}^2$
Le componenti di B rispetto a B sono $(3, 10, 2023)$
Le componenti di B rispetto a B' sono $(10, 2023, 3)$
Le componenti di B rispetto a B'' sono $(10, -2023, \frac{3}{2023})$

Esempio. $B = [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}]$

Calcolare le componenti del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ rispetto a B:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varpi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta - 2\delta \\ \lambda & 55\varpi \end{pmatrix}$
Quindi $\beta = 1, \beta - 2\delta = 2, \lambda = 3, 55\varpi = 4$
$\beta = 1, \delta = -\frac{1}{2}, \lambda = 3, \varpi = \frac{4}{55}$

Esempio. Data la base $B' = [(1,2),(3,4)]$ di $\mathbb{R}^2$ calcolare il vettore di componenti $(5,8)$
$\underline{v} = 5(1,2) + 8(3,4) = (5,10) + (24,32) = (29,42)$

Definizione 2.5.1. Il determinante è una funzione che ha per dominio una matrice quadrata
$\det = M_{n\times n} \Longrightarrow \mathbb{R}$
Calcolo del determinante di una matrice quadrata:
$n = 1 \Longrightarrow \det(a_{1,1}) = a_{1,1}$
$n = 2 \Longrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (a_{1,1}a_{2,2}) - (a_{1,2}a2,1)$

si può anche capire meglio visualizzando l'operazione come una croce: $\begin{matrix} a_{1,1} & & a_{1,2} \\ & \times & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} \end{matrix}$

Proposizione 2.5.2 (Prima proprietà elementare dei determinanti)**.** Data una matrice $M_{n\times n}, \forall n \in \mathbb{N}$ scambiando due righe o due colonne, il determinante cambia segno

Corollario 2.5.1. Se la matrice ha due righe o due colonne uguali, $\det = 0$

Dimostrazione. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ e & \frac{1}{2} & e & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0$

Sono state invertite la prima e la terza riga, quindi essendo 0 l'unico numero che moltiplicato per -1 assume lo stesso valore, è l'unica soluzione accettabile

Lemma 2.5.1 (Steinitz)**.** Sia V uno spazio vettoriale avente $[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ come base, e sia $S = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m]$ un sistema di vettori di V. Se $m > n$, il sistema S è linearmente dipendente.
Sia $[\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ una base di V e sia $S = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_h]$ un sistema linearmente indipendente, allora $h \leq n$

Esempio. $S = [(1,2,3),(\pi,\pi^2,\pi^3),(5,50,500),(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6})] \in \mathbb{R}^3$
$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}^3$
Il sistema S è linearmente dipendente, per il 2.5.1

Teorema 2.5.2 (Equipotenza delle basi)**.** Per potenza di un insieme finito si intende il numero dei suoi elementi. Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

Dimostrazione.

hp $B = [\underline{e}_1, ..., \underline{e}_n], B' = [\underline{e}_1, ..., \underline{e}_m]$ basi di V

th $m = n$

B è una base, B' in particolare è indipendente $\Longrightarrow m \leqslant n$ Per il 2.5.1
B' è una base, B in particolare è indipendente $\Longrightarrow n \leqslant m$ Per il 2.5.1
Quindi $m = n$

Esercizio. $S = [(1,2,3,4), (\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)]$ genera $\mathbb{R}^4$?
S genera $\mathbb{R}^4$ se $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \exists \beta \delta \in \mathbb{R}$ tali che:
$(a,b,c,d) = \beta(1,2,3,4) + \delta(\frac{1}{2}, \pi, \sin 8, 55)$ S è indipendente (Lemma di Steinitz2.5.1), S non è una base (Teor. equipotenza delle basi2.5.2) $\longrightarrow$ S non è un generatore

Osservazione.
$[(1,2,3), (1,1,1)]$ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ per il 2.5.2
$[(1,2,3), (0,1,1), (5,55,0), (8,8,8)]$ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ perché per il 2.5.1 sono linearmente dipendenti
$[(1,2,3), (0,1,1), (5,55,0)]$ Se sono linearmente indipendenti allora sono una base di $\mathbb{R}^3$.
Come verificarlo?
Se $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 55 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ allora è lin. indipendente

Proposizione 2.5.3 (Dimensione di uno spazio vettoriale)**.**
La **dimensione di uno spazio vettoriale** finitamente generato è uguale al **numero di vettori che contiene una base**

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\} \\ n^\circ & \text{di vettori contenuti in una sua base se } V \neq \{\underline{0}\} \end{cases}$$

Perché $V \neq \{\underline{0}\}$ (finitamente generato) contiene una base?
Hp: $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ generano V

- Se il sistema è minimale di generatori, allora è una base; altrimenti esistono $n-1$ vettori che generano V
- Iterando il ragionamento (togliendo i vettori superflui) si arriva ad una base di V

Esempio.
$\dim \mathbb{R} = 1$
$\dim \mathbb{R}^2 = 2$
$\dim \mathbb{R}^n = n$
$\dim\{\underline{0}\} = 0$
$\dim M_{n \times m} = n \times m$

Lemma 2.5.2 (conseguenza del lemma di Steinitz)**.** Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e $\dim V = n > 0$

- Se $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ è indipendente, allora è anche generatore
- Se $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ è generatore, allora è anche indipendente

Dimostrazione (INDIP=GEN).
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ indipendente
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}]$ è dipendente per ogni w 2.5.1
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è indipendente massimale
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è una base $\longrightarrow$ indipendente e generatore

Dimostrazione (GEN=INDIP).
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è generatore di $\mathbb{R}^3$
è per forza minimale, perché altrimenti $\mathbb{R}^3$ avrebbe una base con meno di 3 vettori
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è una base
indipendente e generatore

Proposizione 2.5.4 (seconda proprietà elementare dei determinanti).

$$\beta \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \beta \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}; \beta \det \left(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\right) = \det \left(\beta \underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n\right)$$

Corollario 2.5.2. Se in una matrice quadrata troviamo due righe o due colonne proporzionali, il determinante è uguale a 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ \pi & e & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0 \text{ perché } \underline{a}^3 = 0\underline{a}^1 = 0\underline{a}^2 = 0\underline{a}^4 \text{(Colonne)}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \det B = -2$$

$$\det(5B) = \det \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 25 \cdot (-2) = -50$$

Corollario 2.5.3. $A \in M_{n \times m}$ e $\beta \in \mathbb{R} \longrightarrow \det(\beta A) = \beta^n \det A$

Proposizione 2.5.5 (terza proprietà elementare dei determinanti).

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \underline{b}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_n \end{pmatrix} \text{(vale anche per le colonne)}$$

Teorema 2.5.3 (Dipendenza lineare e matrici).

$V = \mathbb{R}^n$ se $[\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n]$ è linearmente indipendente e quindi se e solo se $\det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \cdots \\ \underline{v}_n \end{pmatrix} \neq 0$

Dimostrazione (da dx a sx, n=4).
Se $[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4]$ è linearmente dipendente, allora, almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri [teorema di caratterizzazione], quindi supponiamo che $\underline{v}_4 = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \gamma \underline{v}_3$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ (\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2)\gamma \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma \underline{v}_3 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \alpha \underline{v}_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \beta \underline{v}_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \gamma \underline{v}_3 \end{pmatrix} = 0$$

Corollario 2.5.4 (relativo alla terza proprietà).

$$\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \text{(stessa formula anche per le colonne)}$$

Dimostrazione. $\det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \beta \underline{a}_i \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_i \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} + 0 = \det\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$

Esempio. $\det\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 2,-1,5,5 \\ 0,2,3,4 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 0,-5,-1,-3 \\ 0,2,3,6 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix}$

Abbiamo trasformato $\underline{a}_2$ in $\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1$ per far diventare $\underline{a}_4 = 0$

Chapter 3

Sottospazi Vettoriali

Lecture 3: Spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale, se $S \subseteq V$ si dice che S è un sottospazio di V se e solo se S con le operazioni 9 Sep. 08:00
creditate da V è uno spazio vettoriale

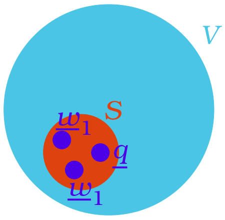

Figure 3.1: Sottospazio Vettoriale

Definizione 3.0.1. S è un sottopazio di V se:
A: $\forall \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S - \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in S$
B: $\forall a \in \mathbb{R}, \underline{w}_1 \in S - a\underline{w}_1 \in S$

Esempio.
$S_1 = \{(c, c^2)/c \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$(0, 0) \in S_1$
$(2, 4) \in S_1$
$(1, 1) \in S_1$
$(2, 4) + (1, 1) = (3, 5) \notin S_1$ Non è soddisfatta la (A) e quindi S_1 non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$\diamond$
$S_2 = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$
$(0, 0) \notin S_2$ quindi S_2 non è un sottospazio

$\diamond$
$S_3 = \mathbb{R}^2 - \{6, 9\}$
$(0, 0) \in S_3$
$(-6, -9) \in S_3$
$(-1) \cdot (-6, -9) = (6, 9) \notin S_3$ Non è soddisfatta la (B)

$\diamond$
$S_4 = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{Z}\}$
$(6, 9) \in S_4$

$\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\pi} \cdot (6, 9) = (\frac{6}{\pi}; \frac{9}{\pi}) \notin S_4$ Non è soddisfatta la (B)

$\diamond$
$S_5 = \{(\frac{n}{\pi}; \frac{2n}{\pi}) / -1000 < n < 1000, n \in \mathbb{Z}\}$
$(0, 0) \in S_5$ Se ha 2001 elementi quindi non è uno spazio vettoriale perché non è infinito

$\diamond$
$S_6 = \{P(x)\} \subseteq \mathbb{R}[x]$
A: $xq_1(x) + xq_2(x) = x(q_1(x) + q_2(x))$
B: $a(xq(x)) = x(aq(x))$
$S_6 = \{xq(x)/q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$, S_6 è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

$\diamond$
$S_7 = \{\underline{0}\} = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, S_7 è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

Ogni spazio vettoriale V contiene il sottospazio nullo: $\{\underline{0}\}$

Proposizione 3.0.1.
Comunque scelti $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$
$S =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >= \{a\underline{v}_1 + \dots + a\underline{v}_n / a_i \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V
infatti: $(a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n) + (\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + \beta_n)\underline{v}_n \in S$,
Quindi (A) è verificata.

$a(\beta_1\underline{v}_1 + \dots + \beta_n\underline{v}_n) = (a\beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (a\beta_n)\underline{v}_n \in S$, Quindi (B) è verificata.

Esempio.
Determinare la dimensione del sottospazio $< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} >= 5$
$S = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}\}$ linearmente indipendente perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ solo se $a = 0$ e genera anche S
Quindi una sua base è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longmapsto \dim S = 1$

Calcolare la dimensione del sottospazio dei polinomi $< x^{2024} >= \{ax^{2024}/a \in \mathbb{R}\} \Longmapsto \dim = 1$

Proposizione 3.0.2.
$\forall \underline{v} \neq \underline{0}$ in un qualsiasi spazio vettoriale V si ha che:
$< \underline{v} >= \{a\underline{v}/a \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V di dimensione 1, e una sua base è $[\underline{v}]$
$\diamond$
$T =< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k > \subseteq V$
(T è un sottospazio di V)
(T ha dimensione $\leqslant ak$)

- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono indipententi, allora sono anche una base di T e quindi $\dim T = k$
- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono dipendenti, allora non sono una base, quindi non sono minimali di generatori e così una base di T contiene meno di k vettori. Di conseguenza $\dim T < k$

$\diamond$
$T_n = \{$Polinomi di grado $\leqslant n\}$, $\dim T_n = n + 1$
$T_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 / a_i \in \mathbb{R}\} =< x^0, x^1, x^2, x^3 > \mapsto [1, x^1, x^2, x^3]$ è indipendente e quindi $\dim T_3 = 4$

Sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ di dimensione $1000 = T_{999} = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{999}x^{999}/a \in \mathbb{R}\}$
BASE= $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{999}]$

Proposizione 3.0.3.
A: Se W è un sottospazio di V e $\dim V = n$ allora $\dim W \leqslant \dim V$
B: Se $\dim W = \dim V \mapsto W = V$

Dimostrazione (A). Per il lemma di Steinitz, più di n vettori dentro W sono linearmente dipendenti, di conseguenza, un sistema indipendente massimale in W non può contenere più di n vettori.

Dimostrazione (B). Siano $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ vettori indipendenti di W (una base di W), $[\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{v}] \forall \underline{v} \in V$, $n+1$ vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n, per il lemma di Steinitz sono linearmente dipendenti, allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ è indipendente massimale in V e di conseguenza genera V

Vediamo adesso alcuni sottospazi di $\mathbb{R}^2$, $(\dim \mathbb{R}^2 = 2)$:
W sottospazio di $\mathbb{R}^2$
$\dim W = 0$ Esiste un solo sottospazio: $W = \{(0,0)\}$
$\dim W = 1$ Tutti i sottospazi del tipo: $< \underline{v} > \forall \underline{v} \neq \underline{0}$
$\dim W = 2$ Esiste un solo sottospazio: $W = \mathbb{R}^2$

3.1 Complemento Algebrico

Si chiama complemento algebrico di posto (i,j) il numero reale A_{ij} elevando -1 alla $i+j$ e moltiplicandolo per il determinante della matrice che si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathrm{coef}_{1,1}(A) & \dots & \mathrm{coef}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{coef}_{n,1}(A) & \dots & \mathrm{coef}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$A_{2,1} = (-1)^3 \cdot \det \left(\begin{array}{|c|cc} \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \right) = -1(21-6) = -15$$

$$A_{1,3} = (-1)^4 \cdot \det \left(\begin{array}{cc|c|} \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \right) = 1(-5) = -5$$

Teorema 3.1.1 (4° Teorema di Laplace). Il determinante di una matrice quadrata A, è la somma dei prodotti degli elementi di una linea (ruga o colonna) di A moltiplicati per i loro componenti algebrici.
$\det A = a_{i,1} \cdot A_{i,1} + a_{i,2} \cdot A_{i,2} + \dots + a_{i,n} \cdot A_{i,n}$
$\det A = a_{1,j} \cdot A_{1,j} + a_{2,j} \cdot A_{2,j} + \dots + a_{n,j} \cdot A_{n,j}$

Esercizio. Verificare se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$
$\underline{v}_1 = (1,3,1); \underline{v}_2 = (0,1,-1); \underline{v}_3 = (5,6,7)$
Dato che tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contengono 3 vettori, basta verificare che sono indipendenti massimali, cioè che $\det A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (a^2 = (a^2 + a^3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Con laplace: $0 \cdot A_{2,1} + 0 \cdot A_{2,2} + (-1) \cdot (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = (+1)(13-20) = -7$, ovvero i

coefficienti (in questo caso della seconda riga) per i complementi algebrici di A relativi sempre alla seconda riga
Dato che il determinante di A è diverso da 0: $[(1, 3, 1), (0, 1, -1), (5, 6, 7)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$

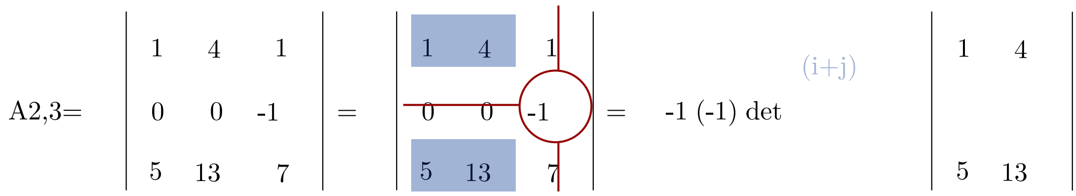

Figure 3.2: Visualizzazione grafica dell'esercizio precedente

Esercizio. Verificare se $[(1, 0, 1, 1), (1, 2, -1, 0), (1, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 4)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$
$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix} = (a^4 = (a^4 - 4a)) = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -8\\ 1 & 1 & -1 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ = laplace 4a riga =
$+1\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -8\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -8\\ 0 & -1 & -5\end{pmatrix}$ = laplace 1a colonna $= 2\det\begin{pmatrix}-1 & -8\\ -1 & -5\end{pmatrix} = 2(5 - 8) = -6$

Si, i vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$

3.2 Rango di una Matrice

Il rango di una matrice qualsiasi è pari al numero massimo di righe indipendenti o al numero massimo di colonne indipendenti.
$A \in M_{m\times n}$, $rgA \leqslant min\{m, n\}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = (\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4), (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$
$< \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 > \subseteq \mathbb{R}^3$
$< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 > \subseteq \mathbb{R}^4$
La dimensione di $< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 >$ è uguale alla dimensione di $< \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 >$ ed è uguale al rango della matrice.
$dim < \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 >= dim < \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 >= rg(1)$

Le matrici nulle hanno rango 0:
In ogni spazio vettoriale delle matrici $M_{m\times n}$ c'è una sola matrice di rango 0

Le matrici che hanno tutte le righe o colonne proporzionali hanno rango 1: $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 0 & 6\\ 8 & 16 & 0 & 24\end{pmatrix}$, $rg(A) = 1$ perché tutte le righe sono proporzionali
$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$, Il rango di B è diverso da 0 perché non è una matrice nulla, diverso da 1 perché non ci sono righe o colonne proporzionali e quindi può essere 2 o 3

Se $A \in M_{m\times n}$ è quadrata, il rango massimo possibile è n; Il rango di A è il massimo: $rgA = n \iff \det A \neq 0$

Appendix

Appendix A

Additional Proofs