Università degli Studi di Napoli Federico II
Scienze e Tecniche dell'Edilizia - L23
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

Appunti di Algebra e Geometria

Codice - MAT 03 - 6CFU

IVANO D'APICE

Professore

PROF. MAURIZIO BRUNETTI
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Ambientale

25 Nov 2023

Abstract

Questi appunti sono presi a lezione. Per quanto sia stata fatta una revisione è altamente probabile (praticamente certo) che possano contenere errori, sia di stampa che di vero e proprio contenuto. Per eventuali proposte di correzione inviare mail a:
`ivanodapice@hotmail.com`.

Contents

Chapter 1

Introduzione

Lecture 1: Richiami

25 Nov. 12:11

1.1 Insiemi

Partiamo col dire che nel vasto spettro degli insiemi troviamo anche quelli numerici. Questi insiemi si dicono infiniti perché racchiudono al loro interno elementi che continuano ad incrementare o/e decrementare all'infinito. Vediamo ora i vari insiemi numerici che potremo incontrare nel corso:

Definizione 1.1.1 (Numeri Naturali)**.** L'insieme $\mathbb{N}$ comprende al suo interno tutti i numeri non negativi

Esempio. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., +\infty\}$

Definizione 1.1.2 (Numeri Interi)**.** L'insieme $\mathbb{Z}$ comprende al suo interno tutti i numeri negativi e positivi compreso quello nullo

Esempio. $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, ..., \pm\infty\}$

Definizione 1.1.3 (Numeri Razionali)**.** L'insieme $\mathbb{Q}$ comprende al suo interno tutti i numeri interi e comprende la notazione del tipo $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}$

Esempio. $\mathbb{Q} = \{-\frac{5}{7}, 0, \frac{3}{5}, 1.5\overline{3}, 1.23(\frac{111}{90}), \frac{88}{1}, ...\}$

Definizione 1.1.4 (Numeri Reali)**.** L'insieme $\mathbb{R}$ comprende quei numeri che possono essere rappresentati con notazione decimale senza per forza essere del tipo $\frac{m}{n}$

Esempio. $\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, e^4\}$

Quindi possiamo dire che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.1.1 N-ple, R^n

Identifichiamo ora un nuovo ente [(a, b)] individuato da due oggetti a e b non necessariamente distinti, e dall'ordine dei due. Un buon esempio potrebbe essere quello degli scacchi dove la posizione di una casella è identificata da due valori [(n, x)].[1]
Possiamo definire adesso un nuovo insieme che è quello di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ definito da numeri razionali.

Esempio. Un insieme $\mathbb{R}^2$ potrebbe essere $v = (2, \sqrt{6.4}), \in \mathbb{R}^2$

Nota. In $\mathbb{R}^2$ ci sono anche particolari combinazioni che prendono il nome di **Diagonale Principale** e **Diagonale Secondaria**.

Esempio.

$$v = (x,x): \text{ Diagonale Principale (i due elementi sono uguali)}$$
$$v = (x, -x): \text{ Diagonale Secondaria (un elemento è l'opposto dell'altro)}$$

Oltre all'insieme $\mathbb{R}^2$ ci sono poi tutta una serie incrementale di insiemi fino ad arrivare alla ennupla $\mathbb{R}^n$ che ha un numero di elementi virtualmente infinito. L'insieme di $\mathbb{R}^n, n > 2$ viene chiamato spazio euclideo mentre i suoi elementi $(x_1, x_2, ..., x_n, x \in \mathbb{R})$ vengono chiamati punti o vettori.
Possiamo usare gli spazi $\mathbb{R}$ per rappresentare graficamente dei riferimenti. $\mathbb{R}^1$ ci permette di orientarci su una retta mentre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente per visualizzare figure piane e solidi.

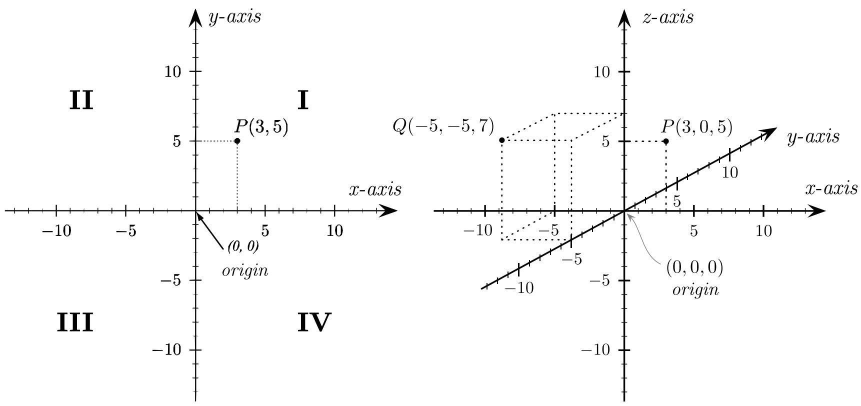

Figure 1.1: Coordinate degli assi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Adesso possiamo usare lo spazio $\mathbb{R}^2$ per fare un esercizio. Avremo due vettori $q = (3, 5) \wedge p = (5, 3)$ e vogliamo visualizzare il vettore $s = \frac{1}{2}q + 2p$. Per fare ciò, si usa un metodo grafico chiamato punta-coda, dove mettiamo i nostri vettori in successione connettendo l'inizio di uno alla fine dell'altro.

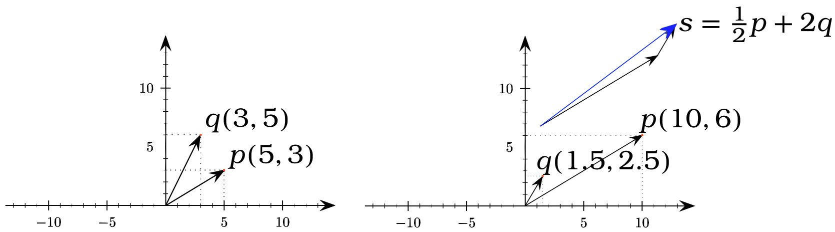

Figure 1.2

[1] Coordinate Scacchiera

1.2 Proprietà

1.2.1 Somma

Definizione 1.2.1. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (a, b) \in \mathbb{R}$

La somma è un'operazione interna, dato che gli addendi e il risultato dell'operazione si trovano nello stesso insieme.

Nota.

1. Elemento neutro: $(a_1, a_2) + (0, 0) = (0, 0) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
2. Opposto: $(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0, 0), \forall (a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2)$
3. P. Associativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), \in \mathbb{R}^2$
$$[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) = (a_1, a_2)[(b_1, b_2) + (c_1, c_2)]$$
4. P. Commutativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$
$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$$

Una struttura algebrica del tipo $(\mathbb{R}^2, +)$ se gode delle precedenti proprietà da 1 a 4 viene chiamata **Gruppo Abeliano**

1.2.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione 1.2.2. $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \dagger a, b \in \mathbb{R}$

Nota.

5. P. distributiva: $\forall \beta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), \in \mathbb{R}^2$
$$\beta[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \beta(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2)$$
6. P. distributiva: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$
$$(\beta + \delta)(a_1, a_2) = \beta(a_1, a_2) + \delta(a_1, a_2)$$
7. P. Associativa: $\forall \beta, \delta \in \mathbb{R} \wedge \forall (a_1, a_2), \in \mathbb{R}^2$
$$\beta\gamma(a_1, a_2) = \beta[\gamma(a_1, a_2)] = (\beta\gamma)(a_1, a_2)$$
8. Elemento neutro: $1(a_1, a_2) = (a_1, a_2), \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

1.3 Spazio Vettoriale

Sia $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ una struttura algebrica (ovvero un insieme non vuoto su cui sono definite delle operazioni), dove $+$ è interna e $\cdot$ è una moltiplicazione di un vettore per uno scalare, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ si chiama **spazio vettoriale** (e gli elementi di $\mathbb{R}^2$ vettori) se valgono le precedenti 8 proprietà.

Esempio (Spazi Vettoriali). $\mathbb{R}[x] \cong$ Polinomi a coefficienti reali ad un'incognita.

$P_1(x) = 3 - x + x^3 + P_2(x) = 5x - \frac{7}{2}x^4$

$$\begin{aligned} 3 - x \ \ + x^3 \qquad & + \\ + 5x \qquad - \frac{7}{2}x^4 & = \\ 3 + 4x + x^3 - \frac{7}{2}x^4 & \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3$

Definizione 1.3.1 (combinazione lineare). Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \in V$. Un vettore del tipo $\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + ... + \beta_n\underline{v}_n, \beta \in \mathbb{R}$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$

Esempio. $3(1,3) + \frac{1}{2}(0,4) + (-1,-1) = (3,9) + (0,2) + (-1,-1) = (2,10)$, questi elementi di $\mathbb{R}^2 = (2,10)$ sono combinazione lineare di $(1,3), (0,4), (-1,-1)$ scegliendo $(\beta_1 = 3, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = 1)$

Esempio (spazi vettoriali).
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, ..., \mathbb{R}^n$ (Spazio vettoriale dei vettori)
$\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x_1, x_2], \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ (Spazio vettoriale dei polinomi)
$M_{n \times m}, n \wedge m \in \mathbb{N}$ (Spazio vettoriale delle matrici)
$\{G\}$ (Spazio vettoriale dell'elemento nullo)

Esempio (elementi neutri negli spazi vettoriali).
$\mathbb{R}^2 = \underline{0} \Rightarrow (0,0)$
$\mathbb{R}^4 = \underline{0} \Rightarrow (0,0,0,0)$
$M_{3\times 3} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3.1 Proprietà valide negli spazi vettoriali

Proposizione 1.3.1. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \beta \in \mathbb{R}, \beta 0 = 0$

Dimostrazione.
$\beta\underline{0} = \beta(\underline{0} + \underline{0}) = \beta\underline{0} + \beta\underline{0}$
$\beta\underline{0} = \beta\underline{0} + \beta\underline{0}$, esiste l'opposto di $\beta\underline{0}$ e lo chiamiamo OPP
$\beta\underline{0} + OPP = (\beta\underline{0} + \beta\underline{0}) + OPP$
$\underline{0} = \beta\underline{0} + (\beta\underline{0} + OPP)$
$\underline{0} = \beta\underline{0} + \underline{0} \rightarrow \beta\underline{0} = \underline{0}$

Proposizione 1.3.2. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} \cdot 0 = 0$

Dimostrazione.
$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v}(0+0) = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$
$\underline{v} \cdot 0 = \underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0$, esiste l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ e lo chiamiamo OPP
$\underline{v} \cdot 0 + OPP = (\underline{v} \cdot 0 + \underline{v} \cdot 0) + OPP$
$0 = \underline{v} \cdot 0 + (\underline{v} \cdot 0 + OPP)$
$0 = \underline{v}0 + 0 \rightarrow \underline{v} \cdot 0 = 0$

Proposizione 1.3.3. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, l'opposto di $\underline{v} \cdot 0$ è $(-1)\underline{v}$

Dimostrazione.
$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 0$
$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = 0$, per la proposizione III.2

Proposizione 1.3.4. Sia V uno spazio vettoriale qualunque, $k \cdot \underline{v} = \underline{0}$, se $k = 0$ o $\underline{v} = \underline{0}$

Dimostrazione.
Se $k = 0$ è vera per la proposizione III.2
Se $k \neq 0, \exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R} : k \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \frac{1}{k} \cdot \underline{0}$
$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$ Per la proposizione III.1
$1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$
$\underline{v} = \underline{0}$

Proposizione 1.3.5. In uno spazio vettoriale $V \in \mathbb{R}$ se $\exists \underline{v} \neq 0$ allora V contiene infiniti vettori

Dimostrazione.
$1\underline{v}, 2\underline{v}, 3\underline{v}, \ldots, n\underline{v}$ facciamo vedere che sono a due a due distinte
$h \cdot \underline{v} = k \cdot \underline{v}$
$(h \cdot \underline{v}) + (-1k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$
$(h-k)\underline{v} = \underline{0}$
$h - k = \underline{0}$ Per la proposizione III.4
$h = k$

Proposizione 1.3.6. In uno spazio vettoriale V qualunque, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V, 0 \in < \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n >$

Dimostrazione.
$\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n : \beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \ldots + \beta_n\underline{v}_n = 0$
$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$

Nota. Con il simbolo $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n >$ o con $\beta(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ indichiamo l'insieme delle combinazioni lineari di $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ cioè l'insieme $\{\beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \ldots + \beta_n\underline{v}_n / \beta_i \in \mathbb{R}\}$

Esempio.
$(0,4) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>$?
Si, infatti basta scegliere $\beta_1 \wedge \beta_3 = 0, \beta_2 = 1$

$(-1,-3) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>$?
Si, $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{2}$

$(-5,8) \in <(2,6),(0,4),(-7,2)>$?
$(-5,8) = \beta_1(2,6) + \beta_2(0,4) + \beta_3(-7,2) = (2\beta_1 - 7\beta_3, 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3)$

$$\begin{cases} -5 = 2\beta_1 \qquad\quad - 7\beta_3 \\ \;\; 8 = 6\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 \end{cases}$$

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

In generale, l'insieme delle combinazioni lineari $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n > \subseteq V$. Quindi ogni vettore di V è combinazione lineare di $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$ e si dice che $< \underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n >$ sono **generatori** di V.

Esempio.
$\underline{v}_1 = (1,2,0,3), \underline{v}_2 = (\pi, e, 0, -55), \underline{v}_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^4$?
No perché: $\beta_1 = (1,2,0,3) + \beta_2 = (\pi, e, 0, -55) + \beta_3 = (\log_2 3, \sin 8, 0, 0) / \beta_i \in \mathbb{R}$
$(0,0,1,0)$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

Esempio. $P_1(x) = 3 - x^4, P_2(x) = x + 77x^7$
$x^8 \in < P_1(x), P_2(x) >$?
No perché non contiene polinomi di grado maggiore a 7.

Esempio. $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ genera $\mathbb{R}^2$?
No, perché: $\{\beta(1,3)/\beta_i \in \mathbb{R}\} = \{(\beta, 3\beta)/\beta \in \mathbb{R}\}$
$\beta = 1 \rightarrow (1,3)$ non possiamo generare $(1,1)$

Esempio. $(1,0),(0,1)$ generano $\mathbb{R}^2$?
Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) = (\beta_1, \beta_2)$
$< (1,0),(0,1) > \in \mathbb{R}^2$

Esempio. $(1,0),(0,1),(55,\frac{1}{2})$ generano $\mathbb{R}^2$?
Si, perché: $(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) + ?(55,\frac{1}{2}) = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) + \beta_3(55,\frac{1}{2})$
$< (1,0),(0,1),(55,\frac{1}{2}) > \in \mathbb{R}^2$

Come vediamo, se un insieme di vettori ha cardinalità minore della dimensione dello spazio a cui appartengono, allora possiamo immediatamente concludere che l'insieme assegnato non è un sistema di generatori (come visto nel caso polinomiale precedente).[2] Mentre più avanti, con il concetto di dimensione di spazio vettoriale, sarà più facile capire come verificare se un insieme è generatore.

Nota. Se ad un insieme di generatori se ne aggiunge un altro, l'insieme risultante è anch'esso un generatore. Cioè se $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ genera V allora anche $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{w}$ diventa generatore.

[2] youmath

Dimostrazione. Per ipotesi $V =< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n > \subseteq < \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{w} > \subseteq V$
Dato che $< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, w >$ è incluso in V e include V, allora $< \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n, \underline{w} >$ è V

Esempio.
In $\mathbb{R}^3$, $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$
In $\mathbb{R}^4$, (1) genera $\mathbb{R}^4$
In $\mathbb{R}^n$, $(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), (0, 0, ..., 1)$ generano $\mathbb{R}^n$
In $\{G\}$, G genera $\{G\}$

Un **Sistema di vettori** è un insieme in cui contano l'ordine degli elementi e anche le eventuali ripetizioni, e si indica così: $[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$

Esempio.
$\{(1, 0), (0, 1), (3, 5)\}$ 3 elementi
$\{(1, 0), (1, 0), (3, 5)\}$ 2 elementi
$=\{(1, 0), (3, 5)\}$
$=\{(3, 5), (1, 0)\}$

Nota. $\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \underline{v}_2 = (0, 44, 44), \underline{v}_3 = (2, 4, 6)$
Esistono varie combinazioni lineari per esprimere gli elementi soprastanti come vettore nullo. Un metodo banale è porre $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0/\beta_1(1, 2, 3), \beta_2(0, 44, 44), \beta_3(2, 4, 6)$
Un altro modo sarebbe porre $\beta_1 = -2, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$

1.3.2 Dipendenza lineare

$[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_2]$ si dice **linearmente dipendente** se e soltanto se $0 \cdot \underline{v}_1, ..., 0 \cdot \underline{v}_2$ non è l'unico modo per esprimere 0 come combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$
$[\underline{v}_1, ..., \underline{v}_2]$ Si dice **linearmente indipendente** se e soltanto se $0 \cdot \underline{v}_1, ..., 0 \cdot \underline{v}_2$ è l'unico modo per esprimere 0 come combinazione lineare di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$

Proposizione 1.3.7. Sia V uno spazio vettoriale qualunque e $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ contiene almeno una coppia di vettori proporzionali, il sistema è linearmente dipendente.

Esempio. $\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \underline{v}_2 = (1, 1, 1), \underline{v}_3 = (1, 3, 5)$
$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente o indipendente?
Linearmente dipendente perché: $(0, 0, 0) = \beta_1(1, 2, 3) + \beta_2(1, 1, 1) + \beta_3(1, 3, 5)$ se poniamo nell'equazione $\beta_1 = 2, \beta_2 = -1, \beta_3 = -1$

Esempio. $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & \cos\delta \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 10^4 & 10^7 \\ 10^{-31} & 10^0 \end{bmatrix}$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente perché se ci facciamo caso, qualsiasi valore di β mettiamo davanti a $\underline{v}_2$ il risultato sarà sempre un vettore con elementi nulli, mentre per $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ basta porre il coefficiente di beta uguale a 0.

Esempio. $[(1, 0), (0, 1)]$ è linearmente indipendente perché gli unici coefficienti di beta possibili sono 0

Esempio. $[(1, 0), (0, 1), (3, 5)]$ è linearmente dipendente perché $(3, 5)$ è proporzionale a $(1, 0)$ e $(0, 1)$
Un modo per esprimere il vettore nullo è: $-3(1, 0) + [-5(0, 1)] + 1(3, 5)$

1.3.3 Teorema di caratterizzazione dei sistemi di vettori linearmente dipendenti

Teorema 1.3.1. $[v_1, ..., v_n]$ lin. dipendenti $\iff$ Almeno un vettore è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione (da destra a sinistra).
Se $\underline{v}_n \in < \underline{v}_1, ..., \underline{v}_{n-1} >$
$\underline{v}_n = \beta_1 \underline{v}_1 + ... + \beta_{n-1}\underline{v}_{n-1}$
$0 = \beta_1 \underline{v}_1 + ... + \beta_{n-1}\underline{v}_{n-1} + (-1)\underline{v}_n \implies [\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n]$ linearmente dipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra).
Per ipotesi $\exists \beta_1, ..., \beta_n$ non tutti nulli tale che $0 = \beta_1 \underline{v}_1 + ... + \beta_n \underline{v}_n$
se $\beta_n \neq 0 \implies \underline{v}_n = \frac{1}{\beta_n}(-\beta_1 \underline{v}_1, ..., -\beta_{n-1}\underline{v}_n - 1) = (-\frac{\beta_1}{\beta_n})\underline{v}_1 + ... + (-\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n})\underline{v}_{n-1}$

Corollario 1.3.1. $[\underline{v}_1, \underline{v}_2]$ linearmente dipendenti $\iff$ Almeno un vettore è combinazione lineare dell'altro $\iff$ sono proporzionali

Esempio. $[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}]$ non sono proporzionali $\implies$ linearmente indipendenti

Esercizio. Sia $P_1(x) = x^{29} + x^9 + x^2 023$

Determinare $P_2(x), P_3(x)$ tali che: $[P_1(x), P_2(x)]$ lin. indipendenti e $[P_1(x), P_3(x)]$ lin. dipendenti
$P_2(x)$ basta che non sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_2(x) = 2$
$P_3(x)$ basta che sia proporzionale a $P_1(x)$: $P_3(x) = 0$ oppure $P_3(x) = 2x^{29} + 2x^9 + 2x^2 023$

Osservazione. $\underline{v} \in V$

$\underline{v}$ è linearmente dipendente se $\underline{v} = \underline{0}$
infatti $\beta \underline{v} = \beta \underline{0} = \underline{0}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{v}$ è linearmente indipendente se $\underline{v} \neq \underline{0}$
infatti $\beta \underline{v} = \underline{0} \iff \beta = 0$

$V = \mathbb{R}$	Lin. indipendenti	Generatori
$[(1, 0)]$	SI	NO
$[(1, 0), (0, 1)]$	SI	SI
$[(1, 0), (0, 1), (0, 5)]$	NO	SI
$[(1, 0), (3, 0)]$	NO	NO

Figure 1.3: Insiemi dei sistemi vettoriali

1.3.4 Basi di uno spazio vettoriale

Un sistema ordinato $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]$ si dice base di V se i vettori sono linearmente indipendenti e generano V.

Nota.
$[(1,0),(0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}$
$[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ base canonica di $\mathbb{R}$
$\{G\} = \{\underline{0}\}$ Non ha basi, perché i vettori sono linearmente dipendenti
$P[x]$ Non ha basi, perché non è finitamente generato

Data una base, per trovarne una nuova, basta cambiare l'ordine dei vettori contenuti in essa, oppure sostituire qualche vettore con uno proporzionale **non nullo**.

Esempio.
$B' = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$
$B'' = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$
Queste sono due basi diverse di $\mathbb{R}^3$, dove nel secondo caso abbiamo solo cambiato l'ordine di $\underline{v}_2$ con $\underline{v}_3$
$[(0,1,0),(0,0,-1),(2023,0,0)]$
Invece qui abbiamo sia cambiato l'ordine vettoriale e sia proporzionato gli elementi con diversi coefficienti

Nota (DIP+1=DIP)**.** Se ad un sistema linearmente dipendente si aggiunge un vettore, il sistema finale è linearmente dipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n]$ linearmente dipendente
$\exists \beta_1, \ldots, \beta_n$ non tutti nulli tali che $\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n$
$\underline{0} = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n + 0\underline{w}$
$[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w}]$ linearmente dipendente $\forall \underline{w} \in$V
Quindi in parole povere, se già abbiamo un sistema linearmente dipende e aggiungiamo un vettore a caso, possiamo sempre annullarlo moltiplicando per 0 e non cambia niente in termini di dipendenza

Nota (INDIP-1=INDIP)**.** Se ad un sistema linearmente indipendente si toglie un vettore, il sistema finale è linearmente indipendente

Dimostrazione. $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}]/n \geq 1$ linearmente indipendente
Per assurdo, può essere $[\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-2}]/n \geq 2$ linearmente dipendente? No, in base al principio DIP+1=DIP dovrebbe essere linearmente dipendente anche il sistema di partenza

Nota (Sistema indipendente massimale)**.** Un sistema indipendente si dice indipendente massimale, se appena si aggiunge un vettore, l'indipendenza si perde

Nota (Sistema minimale di generatori)**.** Un sistema di generatori si dice minimale di generatori, se appena si toglie un vettore, il sistema risultante non è più generatore

Teorema 1.3.2 (Teorema di caratterizzazione delle basi)**.** Sia V uno spazio vettoriale non banale. Un sistema ordinato di vettori $B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ di V è una base ordinata se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

- $\iff$ il sistema è indipendente massimale
- $\iff$ il sistema è minimale di generatori

- $\Longleftarrow$ ogni vettore di V, si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di B, in un solo modo

Dimostrazione (da destra a sinistra).
$B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ per ipotesi si sa già essere generatore, bisogna dimostrare quindi che sia linearmente indipendente. Il sistema B è linearmente indipendente, perché essendo ogni vettore esprimibile in un solo modo, anche $\underline{0}$ si può esprimere in un solo modo. Quindi B è linearmente indipendente

Dimostrazione (da sinistra a destra).
$B = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n]$ è una base di V, quindi supponiamo che:
$\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \ldots + \beta_n \underline{e}_n$
$\underline{v} = \gamma_1 \underline{e}_1 + \ldots + \gamma_n \underline{e}_n$
Sottraendo membro a membro: $\underline{0} = (\beta_1 - \gamma_1)\underline{e}_1 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\underline{e}_n //$ Essendo per ipotesi, linearmente indipendente: $\beta_1 - \gamma_1 = 0, \beta_n - \gamma_n = 0$

Proposizione 1.3.8.
$B\ = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \Longrightarrow (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$
$B' = [(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)] \Longrightarrow (a,b,c) = b(0,1,0) + c(0,0,1) + a(1,0,0)$
$B'' = [(0,1,0),(0,0,-1),(2023,0,0)] \Longrightarrow (a,b,c) = b(0,1,0) + [-c(0,0,-1)] + \frac{a}{2023}(2023,0,0)$
In qualunque spazio vettoriale V che possegga una base, un vettore $\underline{v}$ si può esprimere come: $\underline{v} = \beta_1 \underline{e}_1 + \ldots + \beta_n \underline{e}_n$. I coefficienti $\beta_1, \ldots, \beta_n$ individuano univocamente $\underline{v}$ e prendono anche il nome di componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base B.

Esempio. $\underline{v} = (3, 10, 2023) \in \mathbb{R}^2$
Le componenti di B rispetto a B sono $(3, 10, 2023)$
Le componenti di B rispetto a B' sono $(10, 2023, 3)$
Le componenti di B rispetto a B'' sono $(10, -2023, \frac{3}{2023})$

Esempio. $B = [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}]$

Calcolare le componenti del vettore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ rispetto a B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varpi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta - 2\delta \\ \lambda & 55\varpi \end{pmatrix}$$

Quindi $\beta = 1, \beta - 2\delta = 2, \lambda = 3, 55\varpi = 4$
$\beta = 1, \delta = -\frac{1}{2}, \lambda = 3, \varpi = \frac{4}{55}$

Esempio. Data la base $B' = [(1,2),(3,4)]$ di $\mathbb{R}^2$ calcolare il vettore di componenti $(5,8)$
$\underline{v} = 5(1,2) + 8(3,4) = (5,10) + (24,32) = (29,42)$

Definizione 1.3.2. Il determinante è una funzione che ha per dominio una matrice quadrata
$\det = M_{n\times n} \Longrightarrow \mathbb{R}$
Calcolo del determinante di una matrice quadrata:
$n = 1 \Longrightarrow \det\left(a_{1,1}\right) = a_{1,1}$

$$n = 2 \Longrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (a_{1,1}a_{2,2}) - (a_{1,2}a2, 1)$$

si può anche capire meglio visualizzando l'operazione come una croce:

$$\begin{tikzcd} a_{1,1} \arrow[dr] & a_{1,2} \\ a_{2,1} \arrow[ur] & a_{2,2} \end{tikzcd}$$

Chapter 2

Known Bugs

Lecture 2: Second Lecture

9 Sep. 08:00

2.1 Introduction

Nothing is bugs-free. There are some known bugs which I don't have incentive to solve, or it is hard to solve whatsoever. Let me list some of them.

2.1.1 Footnote Environment

It's easy to let you fall into a situation that you want to keep using `footnote` to add a bunch of unrelated stuffs. However, with our environment there is a known strange behavior, which is following.

> **Esempio.** Footnote![a]
>
> > **Osservazione.** Oops! footnote somehow shows up earlier than expect![a]
> >
> > [a]This is a footnote!
> > [a]This is another footnote!
>
> Bugs caught![b]
>
> [b]The final footnote which is ok!

As we saw, the footnote in the `Example` environment should show at the bottom of its own box, but it's caught by `Osservazione` which causes the unwanted behavior. Unfortunately, I haven't found a nice way to solve this. A potential way to solve this is by using `footnotemark` with `footnotetext` placing at the bottom of the environment, but this is tedious and needs lots of manual tweaking.

Furthermore, not sure whether you notice it or not, but the color box of `Osservazione` is not quite right! It extends to the right, another trick bug...

2.1.2 Mdframe Environment

Though `mdframe` package is nice and is the key theme throughout this template, but it has some kind of weird behavior. Let's see the demo.

> **Proof of.** We need to prove the followings.
>
> > **Affermazione.** $E = mc^2$.

Spiegazione. Nonsense.
Nonsense,
Nonsense,
Nonsense,
Nonsense,
Nonsense. ⊛

■

I expect it should break much earlier, and this seems to be an algorithmic issue of `mdframe`. One potential solution is to use `tcolorbox` instead, but I haven't completely figure it out, hence I can't really say anything right now.

Appendix

Appendix A

Additional Proofs