Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x \mathrm{sen} x + 1 \\ \\ y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione omogenea:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{0.1}$$

e il polinomio caratteristico:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \tag{0.2}$$

Le soluzioni dell'equazione $z^2 - 3z + 2 = 0$ sono:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

quindi un integrale generale della (0.1) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

La funzione $\varphi = e^x \mathrm{sen} x + 1$ non rientra nei casi notevoli, ma è somma delle funzioni $\varphi_1(x) = e^x \mathrm{sen} x$ e $\varphi_2(x) = 1$ che rientrano nei casi notevoli.
Allora consideriamo le equazioni:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \mathrm{sen} x, \tag{0.3}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 1. \tag{0.4}$$

Risolviamo la (0.3). Dato che $\lambda = 1 + i$ non è soluzione dell'equazione (0.2) si ha che un integrale particolare della (0.3) è del tipo:

$$v(x) = e^x (a \cos x + b \mathrm{sen} x),$$

$$v'(x) = e^x (a \cos x + b \mathrm{sen} x - a \mathrm{sen} x + b \cos x),$$

$$v''(x) = e^x (a \cos x + b \mathrm{sen} x - a \mathrm{sen} x + b \cos x - a \mathrm{sen} x + b \cos x - a \cos x - b \mathrm{sen} x) = 2e^x (-a \mathrm{sen} x + b \cos x).$$

Sostituendo nella (0.3):

$$2e^x (-a \mathrm{sen} x + b \cos x) - 3e^x (a \cos x + b \mathrm{sen} x - a \mathrm{sen} x + b \cos x) + 2e^x (a \cos x + b \mathrm{sen} x) = e^x \mathrm{sen} x,$$

$$a \mathrm{sen} x - b \cos x - a \cos x - b \mathrm{sen} x = \mathrm{sen} x.$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ -b - a = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

allora $v(x) = e^x (\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \mathrm{sen} x)$. Consideriamo la (0.4), dato che $\lambda = 0$ non è soluzione dell'equazione (0.2) la soluzione della (0.4) è del tipo:

$$v(x) = a,$$

$$v'(x) = 0, \;\; v''(x) = 0,$$

sostituendo nella (0.4) si ha $a = \frac{1}{2}$.

La soluzione della (0.1) è data da:

$$z(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}x\right) e^x + \frac{1}{2}. \tag{0.5}$$

Per risolvere il problema di Cauchy occorre imporre le condizioni iniziali. La prima condizione è $z(0) = 1$.

Dalla (0.5) si ha che:

$$z(0, c_1, c_2) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

di conseguenza si deve porre per la prima condizione:

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Calcoliamo la derivata prima della soluzione (0.5):

$$z'(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{sen}x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}x\right) e^x = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - e^x \mathrm{sen}x,$$

La seconda condizione iniziale è $z'(0) = -1$,

$$z'(0, c_1, c_2) = c_1 + 2c_2$$

di conseguenza si deve porre per la seconda condizione:

$$c_1 + 2c_2 = -1$$

Per risolvere il problema di Cauchy occorre determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che sia soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$z(x) = e^x - e^{2x} + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}x\right) e^x + \frac{1}{2}.$$