Programma di Geometria e Algebra

Prof. Maurizio Brunetti

Spazi vettoriali sui numeri reali: definizione e proprietà elementari. Esempi: vettori geometrici nello spazio euclideo, spazi vettoriali numerici, spazio nullo, matrici con *m* righe e *n* colonne, polinomi a coefficienti reali.

Combinazioni lineari, indipendenza lineare, generatori. Basi. Enunciato del teorema di caratterizzazione delle basi. Unicità delle componenti rispetto a una base. Teorema di completamento di una base. Lemma di Steinitz (senza dim.). Teorema di equipotenza delle basi. Dimensione.

Sottospazi vettoriali: definizione e proprietà caratterizzanti. Dimensione di un sottospazio e sua relazione con *dim V*.

Rango di una matrice. Determinante di una matrice quadrata: proprietà e calcolo tramite il primo teorema di Laplace.. Minori di una matrice e relazione con il rango. Enunciato del teorema degli orlati. Prodotto righe per colonne. Matrici invertibili. Unicità dell'inversa. Secondo teorema di Laplace.

Teorema di Binet (senza dim.). *A* è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo (e conseguente calcolo dell'inversa).

Nomenclatura relativa ai sistemi lineari. Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi di Cramer. Metodo di risoluzione di un sistema compatibile tramite l'individuazione di un sistema normale equivalente e di «incognite principali».

Applicazioni lineari. Nucleo e immagine. Matrici associate. $dim\ Kerf + dim\ Imf = dim\ V$ (senza dim.).

Endomorfismi: autovalori e loro determinazione tramite il polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica. Determinazione degli autospazi e diagonalizzabilità.

Relazioni di equivalenza su un insieme. Classi di equivalenza. Vettori geometrici: definizione, somma, moltiplicazione per un numero reale.

Geometria nel piano e nello spazio: riferimenti e coordinazione. Equazioni parametriche di una retta (e di un piano nello spazio). Parametri direttori. Equazioni cartesiane di rette e piani. Incidenza e parallelismo tra rette e/o tra piani nello spazio. Generica retta e generico piano per un punto.

Riferimenti ortogonali e cartesiani. Prodotto scalare tra vettori geometrici. Versori. Coseni direttori. Angoli tra vettori o rette orientate. Distanza tra due punti, tra un punto e una retta, tra rette parallele, tra un punto e un piano. Direzione ortogonale a un piano. Prodotto vettoriale tra vettori geometrici. Bisettrici di rette incidenti.

Ampliamento proiettivo e coordinazione omogenea. Coniche: classificazione. Punti semplici e punti doppi. Polarità e teorema di reciprocità. Determinazione grafica di una retta polare. Diametri, centro e assi. Disegno di una conica a punti reali. Coniche eventualmente prive di punti reali.

INSIEMI

$\mathbb{N}$ ~ Numeri Naturali $\{1, 2, 3, 4 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ ~ Numeri Interi $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ~ Numeri Razionali : Numeri che ammettono una rappresentazione del tipo:

$\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$

$\left\{ -\frac{5}{7}, \frac{3}{5}, 1{,}57, 1{,}2\bar{3} \left(\frac{111}{90}\right), \frac{88}{1} \dots \right\}$

$\mathbb{R}$ ~ Numeri Reali $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ $\pi \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ $e^4 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ ~ Insieme delle Coppie di numeri reali

$(3;5) \in \mathbb{R}^2$ $(8; -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ $(0;0) \in \mathbb{R}^2$ $(3;5) \neq (5;3)$

$\mathbb{R}^3$ ~ Insieme delle terne di numeri reali

$\mathbb{R}^n$ ~ Insieme delle n-ple di numeri reali

$M_{m \times n}$ ~ Insieme delle matrici con m righe ed n colonne

$\mathbb{R}^2 = \{(a_1; a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 = \{(a_1; a_2; a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}[x]$ ~ Insieme dei polinomi a coefficienti reali ad un'incognita

PROPRIETÀ DELLA SOMMA

$(a_1;a_2)+(b_1;b_2) \overset{def}{=} (a_1+b_1;a_2+b_2)$

Per definizione

La somma è un'operazione interna, dato che gli addendi e il risultato dell'operazione si trovano nello stesso insieme

1ª Proprietà) Esistenza dell'elemento neutro

$\forall (a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$

$(a_1;a_2)+\underbrace{(0;0)}_{\text{Elemento neutro rispetto all'addizione}}=(0;0)+(a_1;a_2)=(a_1;a_2)$

Es: $(3;5)+(0;0)=(3;5)$

2ª Proprietà) Esistenza dell'opposto

$\forall (a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$

$(a_1;a_2)+\underbrace{(-a_1;-a_2)}_{\text{Opposto di }(a_1;a_2)}=(0,0)$

Es: $(3;-\frac{1}{2})+(-3;+\frac{1}{2})=(0;0)$

3ª Proprietà) Proprietà Associativa

$\forall (a_1;a_2),(b_1;b_2),(c_1;c_2) \in \mathbb{R}^2$

$[(a_1;a_2)+(b_1;b_2)]+(c_1;c_2)=(a_1;a_2)+[(b_1;b_2)+(c_1;c_2)]$

4ª Proprietà) Proprietà Commutativa

$\forall (a_1;a_2),(b_1;b_2) \in \mathbb{R}^2$

$(a_1;a_2)+(b_1;b_2)=(b_1;b_2)+(a_1;a_2)$

Una struttura algebrica del tipo $(S;+)$ che gode delle proprietà da 1 a 4 viene chiamata gruppo Abeliano

$(\mathbb{R}^2;+)$ gode di
1. Esiste un neutro
2. Esiste un opposto
3. Prop. Associativa
4. Prop. Commutativa

} Gruppo Abeliano

PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

5ª Proprietà) Proprietà Distributiva

$\forall \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall (a_1;a_2),(b_1;b_2) \in \mathbb{R}^2$

$\beta((a_1;a_2)+(b_1;b_2))=\beta(a_1;a_2)+\beta(b_1;b_2)$

6ª Proprietà)

$\forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}$ e $\forall (a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$

$(\beta+\gamma)\cdot(a_1;a_2)=\beta(a_1;a_2)+\gamma(a_1;a_2)$

Abuso di notazione

{ le prima + somma numeri reali
  le seconda + somma coppie

7ª Proprietà)

$\forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}$ e $\forall (a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$

$\beta\cdot\gamma\cdot(a_1;a_2)=\beta\cdot(\gamma\cdot(a_1;a_2))=(\beta\cdot\gamma)\cdot(a_1;a_2)$

8ª Proprietà) Esistenza dell'elemento neutro

$\forall (a_1;a_2) \in \mathbb{R}^2$

$\underbrace{1}_{\text{Elemento neutro rispetto alla moltiplicazione}}\cdot(a_1;a_2)=(a_1;a_2)$

DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE

Sia $(S;+;\cdot)$ una struttura algebrica (un insieme non vuoto, su cui sono definite delle operazione), dove, $+$ é interna e $\cdot$ é una moltiplicazione per un numero reale, $(S;+;\cdot)$ si chiama "spazio vettoriale" (e gli elementi di S "vettori") se valgono le 8 proprietá:

1) $\forall a \in S \ \exists e \in S : a+e = e+a = a$
2) $\forall a \in S \ \exists a' \in S : a+a' = a'+a = e$
3) $\forall a,b,c \in S \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
4) $\forall a,b \in S \quad a+b = b+a$

~ Gruppo Abeliano

5) $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\forall a,b \in S \quad \beta(a+b) = \beta \cdot a + \beta b$
6) $\forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\forall a \in S \quad (\beta+\gamma)\cdot a = \beta a + \gamma a$
7) $\forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\forall a \in S \quad (\beta\cdot\gamma)\cdot a = \beta\cdot(\gamma\cdot a)$
8) $\forall a \in S \quad 1\cdot a = a$

Esempi di spazi vettoriali

$\mathbb{R}[x]$ ~ Polinomi a coefficienti reali ad un'incognita

$P_1(x) = 3 - x + x^3 \qquad P_2(x) = 5x - \frac{7}{2}x^4 \qquad P_1(x) + P_2(x) = 3 + 4x + x^3 - \frac{7}{2}x^4$

"Si sommano i coefficienti dei monomi di egual grado"

$\frac{1}{3}\cdot P_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3$

$\beta \cdot P(x)$ é il polinomio che si ottiene moltiplicando per β tutti i coefficienti

$(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ é uno spazio vettoriale cioé valgono le proprietá da 1 a 8

- L'elemento neutro é il polinomio a coefficienti nulli
- L'opposto si ottiene cambiando il segno a tutti i coefficienti

---

$\{G\} \qquad G+G \overset{def}{=} G \qquad \beta\cdot G \overset{def}{=} G \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

$(\{G\},+,\cdot)$ é uno spazio vettoriale perché valgono le proprietá da 1 a 8

① $G + ? = G$
↓
G (é l'elemento neutro)

② $G + ? =$ Elemento neutro
↓
G (é l'opposto di se stesso)

Dalla ③ alla ⑦ sono vere perché si riducono in $G = G$ e la ⑧ é vera perché $1\cdot G = G$

- Combinazione lineare

Siano $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k} \in V$, un vettore del tipo $\alpha_1\underline{v_1} + \dots + \alpha_k\underline{v_k}$ (con $\alpha_n \in \mathbb{R}$) si chiama combinazione lineare dei vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$

Es: $3\cdot(1,3) + \frac{1}{2}(0,4) + (-1,-1) = (3,9) + (0,2) + (-1,-1) = (2,10)$

$(2,10)$ é combinazione lineare di $(1,3); (0,4); (-1,-1)$, scegliendo $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_3 = 1$

- Esempi di spazi vettoriali

$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \vdots, \mathbb{R}^n$ — $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x,y]$ — $M_{m\times n}$ $m,n \in \mathbb{N}$ — $\{G\}$

- Esempi di elementi neutri nei vari spazi vettoriali

Elemento neutro = Vettore nullo = $\underline{0}$

$\underline{0}$ in $\mathbb{R}^2 = (0,0)$

$\underline{0}$ in $\mathbb{R}^4 = (0,0,0,0)$

$\underline{0}$ in $\{G\} = \{G\}$

$\underline{0}$ in $M_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ VALIDE NEGLI SPAZI VETTORIALI

Proposizione 1) Sia V uno spazio vettoriale qualunque,
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Dimostrazione:

$\alpha \cdot \underline{0} \underset{①}{=} \alpha(\underline{0}+\underline{0}) \underset{⑤}{=} \alpha \cdot \underline{0} + \alpha \cdot \underline{0}$

$\alpha \cdot \underline{0} = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}$ $\quad \exists$ l'opposto di $\alpha\underline{0}$ e lo chiamiamo OPP

$\alpha \cdot \underline{0} + OPP = (\alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}) + OPP$

$\underline{0} \underset{③}{=} \alpha\underline{0} + (\alpha\underline{0} + OPP)$

$\underline{0} = \alpha\underline{0} + \underline{0} \underset{①}{\Rightarrow} \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Proposizione 2) Sia V uno spazio vettoriale qualunque,
$\forall \underline{v} \in V \quad 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

Dimostrazione:

$0 \cdot \underline{v} = (0+0) \cdot \underline{v} \underset{⑥}{=} 0\underline{v} + 0\underline{v}$

$0 \cdot \underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$ $\quad \exists$ l'opposto di $0\underline{v}$ e lo chiamiamo OPP'

$0\underline{v} + OPP' = (0\underline{v} + 0\underline{v}) + OPP'$

$\underline{0} \underset{③}{=} 0\underline{v} + (0\underline{v} + OPP')$

$\underline{0} = 0\underline{v} + \underline{0} \underset{①}{\Rightarrow} 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

Proposizione 3) Sia V uno spazio vettoriale qualunque,
L'opposto di $\underline{v} \in V$ è $(-1) \cdot \underline{v}$

Dimostrazione:

$\underline{v} + (-1) \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\underline{v} + (-1) \cdot \underline{v} \underset{⑧}{=} 1 \cdot \underline{v} + (-1) \cdot \underline{v} \underset{⑥}{=} (1-1) \cdot \underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$

② Per la proposizione 2

Proposizione 4) Sia V uno spazio vettoriale qualunque,
$k \cdot \underline{v} = \underline{0}$ ~ se $k=0$ o $\underline{v} = \underline{0}$

Dimostrazione:

Se $k=0$ è vera per la proposizione 2

Se $k \neq 0$ $\quad \exists \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$

$k \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \frac{1}{k} \cdot \underline{0}$

$\Downarrow$ ① ~ Per la proposizione 1

$\frac{1}{k}(k \cdot \underline{v}) = \underline{0}$

$\Downarrow$

$1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\Downarrow$ ⑧

$\underline{v} = \underline{0}$

Proposizione 5) In uno spazio vettoriale V (su "$\mathbb{R}$" come insieme di scalari) se $\exists \underline{v} \neq 0$ allora V contiene infiniti vettori

Dimostrazione:

$1\underline{v}, 2\underline{v}, 3\underline{v}, \dots n\underline{v}$ Facciamo vedere che sono a due a due distinte

$h\underline{v} = k\underline{v}$ ~ ($h=k$ tesi)

$h\underline{v} + (-1\, k\underline{v}) = \underline{0}$

$\Downarrow$ ⑥

$(h-k)\, \underline{v} = 0$

$\Downarrow$ ④ Proposizione 4

$h-k=0$

$\Downarrow$

$h=k$

Proposizione 6) In uno spazio vettoriale V qualunque,
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V \quad \underline{0} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$

$\underline{0} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$

$\Downarrow$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k : \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k = 0$

$\Downarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

Con il simbolo $<\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k>$ o con $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ indichiamo l'insieme delle combinazioni lineari di $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ cioè l'insieme $\{\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

Esempi:

$(0,4) \in <(2,6), (0,4), (-7,2)>$?

Si, infatti basta scegliere $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e $\alpha_2 = 1$

$(-1,-3) \in <(2,6), (0,4), (-7,2)>$?

Si, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$

$(-5,8) \in <(2,6), (0,4), (-7,2)>$

$(-5,8) = \alpha_1(2,6) + \alpha_2(0,4) + \alpha_3(-7,2) = (2\alpha_1 - 7\alpha_3, 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_3 = -5 \\ 6\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 1$$

In generale l'insieme delle combinazioni lineari $<\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k> \subseteq V$ cioè se ogni vettore di V è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generano V o $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono generatori di V

Esempio: $\underline{v}_1 = (1,2,0,3)$ $\underline{v}_2 = (\pi, e, 0, -55)$ $\underline{v}_3 = (\log_2 3, \operatorname{sen} 8, 0, 0)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^4$? No, perché

$\{\alpha_1(1,2,\underline{0},3) + \alpha_2(\pi, e, \underline{0}, -55) + \alpha_3(\log_2 3, \operatorname{sen} 8, \underline{0}, 0) \,/\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

perché $(0,0,1,0)$ non è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$P_1(x) = 3 - x^4$ $P_2(x) = x + 77x^7$

$x^8 \in <P_1(x), P_2(x)>$? No, Perché $<P_1(x), P_2(x)>$ non contiene polinomi di grado maggiore a 7.

$<P_1(x), \dots, P_t(x)>$ (La generica combinazione lineare di $P_1(x), \dots, P_t(x)$) Non può superare il grado massimo (n) dei polinomi coinvolti, cioè $x^{n+1} \notin <P_1(x), \dots, P_t(x)>$, quindi $P_1(x), \dots, P_t(x)$ non generano $\mathbb{R}[x]$ cioè $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Lo spazio vettoriale V è finitamente generato $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ che lo generano cioè tale che $<\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k> = V$

Esempio: $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ $(1,3)$ genera $\mathbb{R}^2$? No, perché:

$\{\alpha(1,3) / \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$(1,1) \notin <(1,3)>$ quindi $(1,3)$ non genera $\mathbb{R}^2$

$(1,0), (0,1)$ generano $\mathbb{R}^2$? Si, perché:

$(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) = a(1,0) + b(0,1) =$

$= (a, 0) + (0, b) = (a, b)$

quindi $<(1,0), (0,1)> = \mathbb{R}^2$

$(1,0), (0,1), (55, \frac{1}{2})$ generano $\mathbb{R}^2$? Si, perché:

$(a,b) = ?(1,0) + ?(0,1) + ?(55,\frac{1}{2}) = a(1,0) + b(0,1) + 0(55,\frac{1}{2})$

quindi $<(1,0), (0,1), (55,\frac{1}{2})> = \mathbb{R}^2$

GEN+1 = GEN Se ad un insieme di generatori si aggiunge un altro vettore l'insieme risultante è generatore, cioè se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generano V anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}$ generano V $(\forall \underline{w} \in V)$

Dimostrazione:

Per ipotesi $V = <\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k> \subseteq <\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}> \subseteq V$

Dato che $<\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}>$ è incluso in V e include V allora $<\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}>$ è V

Esempio: In $\mathbb{R}^3$ $(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)$ generano $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^1$ (1) genera $\mathbb{R}^1$

In $\mathbb{R}^n$ $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), (0,0,\dots,1)$ generano $\mathbb{R}^n$

In $\{\underline{0}\}$ $\underline{0}$ genera $\{\underline{0}\}$

Un sistema di vettori, è un insieme in cui contano l'ordine degli elementi e anche le eventuali ripetizioni e si indica così: $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$

Esempio:

$\{(1,0),(0,1),(3,5)\}$ 3 elementi	$[(1,0),(0,1),(3,5)]$ 3 elementi
$\{(1,0),(1,0),(3,5)\}$ 2 elementi	$[(1,0),(1,0),(3,5)]$ 3 elementi
$\{(1,0),(3,5)\}$	$[(1,0),(3,5)]$
$=$	$\neq$
$\{(3,5),(1,0)\}$	$[(3,5),(1,0)]$

$\underline{v}_1 = (1,2,3) \quad \underline{v}_2 = (0,44,44) \quad \underline{v}_3 = (2,4,6)$

Certamente l'equazione $(0,0,0) = x_1(1,2,3) + x_2(0,44,44) + x_3(2,4,6)$ è soddisfatta da $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ma non è l'unico modo per esprimere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ infatti è soddisfatta anche da $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

DIPENDENZA LINEARE

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ si dice "Linearmente Dipendente" se e soltanto se $0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_k$ non è l'unico modo per esprimere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$;

cioè $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ si dice "Linearmente Dipendente"

$\Updownarrow$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \underline{0} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ~~non tutti nulli~~

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ si dice "Linearmente Indipendente" se e soltanto se $0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_k$ è l'unico modo per esprimere $\underline{0}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$;

cioè $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ si dice "Linearmente Indipendente"

$\Updownarrow$ def

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Proposizione) Sia V uno spazio vettoriale qualunque e $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ contiene almeno una coppia di vettori proporzionali

$\Downarrow$

Il sistema di vettori è linearmente dipendente

Dimostrazione:

se $\underline{v}_k = \beta \underline{v}_1 \qquad \underline{0} = -\beta \underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + \beta \underline{v}_1$, con $-\beta \neq 0$, $\beta \neq 0$

Esempio: $\underline{v}_1 = (1,2,3) \quad \underline{v}_2 = (1,1,1) \quad \underline{v}_3 = (1,3,5)$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è Lin Dip o Lin Indip? Linearmente Dipendente perché $(0,0,0) = x_1(1,2,3) + x_2(1,1,1) + x_3(1,3,5)$ ponendo

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = -1$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & \cos 8 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 10^4 & 10^3 \\ 10^{-1} & 10^{-2} \end{pmatrix}$

$[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]$ è linearmente dipendente, perché il vettore $\underline{v}_2$ è proporzionale a tutti gli altri

$[(1,0),(0,1)]$ è linearmente indipendente

$[(1,0),(0,1),(3,5)]$ è linearmente dipendente, perché:

$(3,5) = 3(1,0) + 5(0,1)$

$(0,0) = 3(1,0) + 5(0,1) - 1(3,5) \sim$ Lin. Dip.

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ Linearmente Dipendenti $\Leftrightarrow$ Almeno un vettore è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione: Da Dx a Sx

Se $\underline{v}_k \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1} \rangle$

$\underline{v}_k = \alpha \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \underline{v}_{k-1}$

$\underline{0} = \alpha \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \underline{v}_{k-1} + (-1) \cdot \underline{v}_k$, con $-1 \neq 0$

$\Downarrow$

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ Linearmente Dipendente

Da Sx a Dx per ipotesi $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli tali che

$$\underline{0} = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k$$

se $\alpha_k \neq 0$

$$\underline{v}_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(-\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 - \dots - \alpha_{k-1} \cdot \underline{v}_{k-1}\right) =$$

$$= \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right)\underline{v}_1 + \dots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right) \cdot \underline{v}_{k-1}$$

Corollario) $[\underline{v}_1, \underline{v}_2]$ Linearmente Dipendenti $\Leftrightarrow$ Almeno un vettore è combinazione lineare dell'altro

$\Updownarrow$

Sono proporzionali

Esempio:

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & \pi \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right]$ Sono 2, non sono proporzionali $\Rightarrow$ Linearmente Indipendenti

Esercizio: Sia $P_1(x) = x^{29} + x^9 + x^{2016}$

Determinare $P_2(x), P_3(x)$ tali che:

$[P_1(x), P_2(x)]$ sia Lin. Indip.

$[P_1(x), P_3(x)]$ sia Lin. Dip.

$P_2(x)$ basta che non sia proporzionale a $P_1(x)$

$P_2(x) = 2$

$P_3(x)$ basta che sia proporzionale a $P_1(x)$

$P_3(x) = 0$ oppure $P_3(x) = 2x^{29} + 2x^9 + 2x^{2016}$

$\underline{v} \in V$ $[\underline{v}]$ ~ è Lin. Dip. se $\underline{v} = \underline{0}$

Infatti $\alpha \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Quindi $[\underline{0}]$ Linearmente Dipendente

è Lin. Indip. se $\underline{v} \neq \underline{0}$

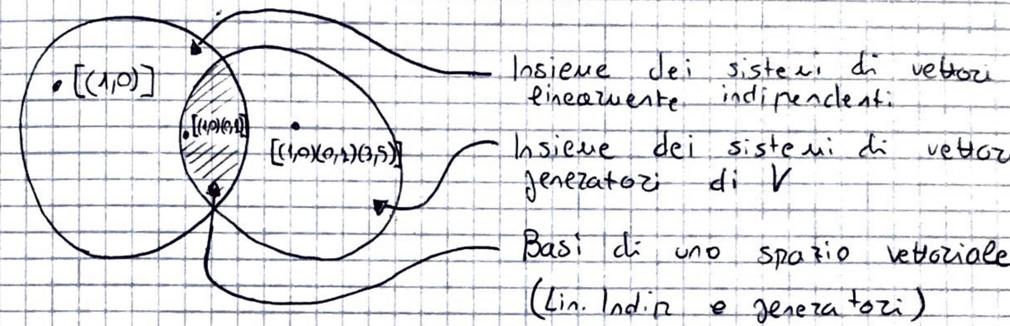
Infatti $k \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\Downarrow$ ~ Proposizione 4

$k = 0$

	Lin. INDIP.	Generatori
$[(1,0)]$	SI	NO
$[(1,0),(0,1)]$	SI	SI
$[(1,0),(0,1),(3,5)]$	NO	SI
$[(1,0),(3,0)]$	NO	NO

$V = \mathbb{R}^2$



BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Un sistema ordinato $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ si dice base di V se i vettori sono linearmente indipendenti e se generano V

- $[(1,0),(0,1)]$ Base (canonica) di $\mathbb{R}^2$
- $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ Base (Canonica) di $\mathbb{R}^3$
- $\{\underline{0}\} = \{\underline{0}\}$ Non ha base, perché i vettori sono linearmente dipendenti
- $P[x]$ Non ha base, perché non è finitamente generato

Data una base, per trovarne una nuova, basta cambiare l'ordine dei vettori contenuti in essa, oppure sostituire qualche vettore con uno proporzionale non nullo.

$B = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$

$B' = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$ ~ Basi Diverse di $\mathbb{R}^3$

$[(0,1,0),(0,0,-1),(2016,0,0)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché:

$$(a,b,c) = x_1(0,1,0) + x_2(0,0,-1) + x_3(2016,0,0)$$

$x_1 = b$, $x_2 = -c$, $x_3 = \frac{a}{2016}$

DIP+1 = DIP Se ad un sistema linearmente dipendente si aggiunge un vettore, il sistema finale è linearmente dipendente

Dimostrazione:

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k]$ Linearmente dipendente

$\Downarrow$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ Non tutti nulli tali che $\underline{0} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k$

$\Downarrow$

$\underline{0} = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k + 0\underline{w}$

$\Downarrow$

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}]$ Linearmente dipendente $\forall \underline{w} \in V$

INDIP-1 = INDIP Se ad un sistema linearmente indipendente si toglie un vettore, il sistema finale è linearmente indipendente

Dimostrazione:

$[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k] \Rightarrow K-1$ di essi formano un sistema linearmente indipendente

$k \geq 2$

Per assurdo, può mai essere $[\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}]$ linearmente dipendente?

No, in base al principio DIP+1 = DIP dovrebbe essere linearmente dipendente anche il sistema di partenza.

SISTEMA INDIPENDENTE MASSIMALE

Un sistema indipendente, si dice indipendente massimale, se appena si aggiunge un vettore, l'indipendenza si perde.

$\underset{\text{Indipendente Massimale}}{[\underline{e}_1, \dots \underline{e}_k]} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{Linearmente Dipendente}}{[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{w}]} \quad \forall \underline{w} \in V$

SISTEMA MINIMALE DI GENERATORI

Un sistema di generatori, si dice minimale di generatori, se appena si toglie un vettore, il sistema risultante non è più un generatore

$\underset{\text{Minimale di generatori}}{[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k]} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{Non genera } V}{[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{k-1}]}$

Genera V

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI

Sia V uno spazio vettoriale non banale. Una sistema ordinato di vettori $B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ di V è una base ordinata se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

a) $\Leftrightarrow$ il sistema è indipendente massimale;

b) $\Leftrightarrow$ il sistema è minimale di generatori;

c) $\Leftrightarrow$ Ogni vettore di V si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di B, in un solo modo.

Dimostrazione: c) da Dx a Sx

$B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ per ipotesi si sa già che è generatore, bisogna dimostrare che è linearmente indipendente.

Il sistema B è linearmente indipendente, perché essendo ogni vettore è esprimibile in un solo modo, ~~quindi~~ anche $\underline{0}$ si può esprimere in un solo modo. Quindi B è linearmente indipendente.

Da Sx a Dx:

$[\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ è una base di V

quindi supponiamo che: $\underline{v} = \alpha_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \underline{e}_n$

$\underline{v} = \beta_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + \beta_n \cdot \underline{e}_n$

Sottraendo membro a membro: $\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \underline{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \underline{e}_n$

Essendo, per ipotesi, linearmente indipendente: $\alpha_1 - \beta_1 = 0$; $\alpha_n - \beta_n = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\alpha_1 = \beta_1 \qquad \alpha_n = \beta_n$

Le altre dimostrazioni a Pag 36 del Libro

$B = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] \rightarrow (a,b,c) = a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$

$B' = [(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)] \rightarrow (a,b,c) = b(0,1,0)+c(0,0,1)+a(1,0,0)$

$B'' = [(0,1,0),(0,0,-1),(2016,0,0)] \rightarrow (a,b,c) = b(0,1,0)+(-c)\cdot(0,0,1)+\frac{a}{2016}(2016,0,0)$

In un qualunque spazio vettoriale V che possegga una base un vettore $\underline{V}$ si può esprimere come $\underline{V} = \alpha_1 \cdot \underline{e}_1 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n$, i coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ individuano univocamente $\underline{V}$ e prendono anche il nome di componenti di $\underline{V}$ rispetto alla base B

Esempio: $\underline{V} \equiv (3, 10, 2016) \in \mathbb{R}^2$

Le componenti di $\underline{V}$ rispetto a B sono $3, 10, 2016$

Le componenti di $\underline{V}$ rispetto a B' sono $10, 2016, 3$

Le componenti di $\underline{V}$ rispetto a B'' sono $10, -2016, \frac{3}{2016}$

$B = \left[\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&55\end{pmatrix}\right]$

Calcolare le componenti del vettore $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ rispetto a B

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0&0\\0&55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \alpha-2\beta\\ \gamma & 55\delta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha = 1\\ \alpha - 2\beta = 2\\ \gamma = 3\\ 55\delta = 4\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = -\frac{1}{2}\\ \gamma = 3\\ \delta = \frac{4}{55}\end{cases}$$

Data la base $B' = [(1,2),(3,4)]$ di $\mathbb{R}^2$ calcolare il vettore di componenti $(5,8)$:

$\underline{V} = 5(1,2) + 8(3,4) = (5,10) + (24,32) = (29,42)$

Il determinante è una funzione che ha per dominio una matrice quadrata.

$\det : M_{n\times n} \rightarrow \mathbb{R}$

Calcolo del determinante di una matrice quadrata:

$n=1 \quad \det(a_{11}) \overset{def}{=} a_{11}$

$n=2 \quad \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \overset{def}{=} (a_{11}\cdot a_{22}) - (a_{21}\cdot a_{12})$

$\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = 4-6 = -2 \qquad \det\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix} = 6-4 = 2 \qquad \det\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix} = 6-4 = 2$

- 1ª Proprietà elementare dei determinanti

Data una matrice $M_{n\times n}$ $\forall n \in N$ scambiando due righe o due colonne il determinante cambia di segno.

- Corollario relativo alla 1ª proprietà:

Se la matrice ha due righe o due colonne uguali il determinante è uguale a 0

Dimostrazione:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&2&3&4\\e&\frac{1}{2}&e&\frac{1}{3}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\1&2&3&4\\e&\frac{1}{2}&e&\frac{1}{3}\end{pmatrix} = 0$$

Sono state invertite la 1ª e la 3ª riga, quindi essendo 0 l'unico numero che moltiplicato per -1 ~~fa sempre uguale~~ assume lo stesso valore (0), è l'unica soluzione accettabile

① Pag 38 Lemma di Steinitz (Si pronuncia Stainitz)

Sia V uno spazio vettoriale avente $[e_1, \dots, e_n]$ come base e sia $S = [v_1, \dots, v_m]$ un sistema di vettori di V.

Se $m > n$ il sistema S è linearmente dipendente.

②

Sia $[e_1, \dots, e_n]$ una base di V e sia $S = [v_1, \dots, v_h]$ un sistema linearmente indipendente allora $h \leq n$

Esempio

$S = [(1,2,3), (\pi, \pi^2, \pi^3), (5, 50, 500), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})] \in \mathbb{R}^3$

$[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$ ~ Base Canonica di $\mathbb{R}^3$

Il sistema S è linearmente dipendente, per il lemma di Steinitz.

TEOREMA DI EQUIPOTENZA DELLE BASI

Per potenza di un insieme finito si intende il numero dei suoi elementi.

Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione:

Ipotesi:	
$B = [e_1, \dots, e_n]$ $B' = [e'_1, \dots, e'_m]$	Basi di V

Tesi: $m = n$

B è una base, B' in particolare è indipendente

$\Downarrow$

$m \leq n$ ~ Per il lemma di Steinitz

B' è una base, B in particolare è indipendente

$\Downarrow$

$n \leq m$ ~ Per il lemma di Steinitz

$$\left.\begin{matrix} m \leq n \\ n \leq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = n$$

Esercizio:

$S = [(1,2,3,4), (\frac{1}{2}, \pi, \operatorname{sen} 8, 55)]$ ~ Genera $\mathbb{R}^4$?

S genera $\mathbb{R}^4$ se $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(a,b,c,d) = \alpha(1,2,3,4) + \beta(\tfrac{1}{2}, \pi, \operatorname{sen} 8, 55)$$

S indipendente (Lemma di Steinitz)

S non è una base (Teorema di equipotenza delle basi)

$\Rightarrow$ S non è un generatore

$[(1,2,3), (1,1,1)]$ ~ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ per il teorema di equipotenza

$[(1,2,3), (0,1,1), (5,55,0), (8,8,8)]$ ~ Non è una base di $\mathbb{R}^3$ perché per il lemma di Steinitz sono linearmente dipendenti

$[(1,2,3), (0,1,1), (5,55,0)]$ ~ Se sono linearmente indipendenti allora è una base di $\mathbb{R}^3$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 55 & 0 \end{pmatrix}$
- $= 0$ Allora Lin dip e quindi non è una base
- $\neq 0$ Allora Lin indip e quindi è una base

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

La dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato è uguale al numero di vettori che contiene una base

$$\dim V \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{0\} \\ \text{N° di vettori contenuti in una sua base} & \text{se } V \neq \{0\} \end{cases}$$

↳ Ha senso perché per il teorema di equipotenza delle basi, ogni base di V ha lo stesso numero di vettori.

Perché $V \neq \{0\}$ (Finitamente Generato) contiene una base?

Ipotesi: $[v_1, \dots, v_n]$ generano V

- Se il sistema è minimale di generatori, allora è una base;
  Altrimenti esistono $n-1$ vettori che generano V.
- Iterando il ragionamento (togliendo i vettori superflui) si arriva ad una base di V

Esempi di dimensioni di vari spazi vettoriali:

$\dim \mathbb{R}^1 = 1$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; $\dim \mathbb{R}^n = n$; $\dim \{0\} = 0$; $\dim M_{m \times n} = m \times n$

CONSEGUENZA DEL LEMMA DI STEINITZ

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato

e $\dim V = n > 0$

- se $[v_1, \ldots, v_n]$ è indipendente allora è anche generatore;
- se $[v_1, \ldots, v_n]$ è generatore allora è anche indipendente.

Dimostrazione (in $\mathbb{R}^3$):

INDIP $\Rightarrow$ GEN $\quad [v_1, v_2, v_3]$ indip

$\Downarrow$

$[v_1, v_2, v_3, w]$ è dipendente per ogni w (Steinitz)

$\Downarrow$

$[v_1, v_2, v_3]$ è indipendente massimale

$\Downarrow$

$[v_1, v_2, v_3]$ è una base $\Rightarrow$ Indipendente e generatore

GEN $\Rightarrow$ INDIP (Se il numero è quello giusto)

$[v_1, v_2, v_3]$ è generatore di $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

è per forza minimale, perché altrimenti $\mathbb{R}^3$ avrebbe una base con meno di 3 vettori

$\Downarrow$

$[v_1, v_2, v_3]$ è una base

$\Downarrow$

Indipendente e generatore

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \pi & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

N° di riga N° di colonna

$$\| $$

$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$ ~ Divisione in righe $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \underline{a}_1 = (1, 2, -1) \\ \underline{a}_2 = (0, \pi, \frac{1}{5}) \end{cases}$

$\|$

$(\underline{a}^1\ \underline{a}^2\ \underline{a}^3)$ ~ Divisione in colonne $(\vdots\ \vdots\ \vdots)$ ~ $\underline{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}$

$\underline{a}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$

$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot 6 \qquad \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot 6$

- 2^a Proprietà elementare dei determinanti

$\beta \cdot \det \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \beta \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix}$; $\beta \det [\underline{a}^1 \ldots \underline{a}^n] = \det [\beta \underline{a}^1 \ldots \underline{a}^n]$

- Corollario 1 relativo alla 2^a proprietà:

Se in una matrice quadrata troviamo 2 righe o 2 colonne proporzionali, il determinante vale 0

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ \pi & e & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & \frac{1}{4} & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0$$ perché $\underline{a}^3 = 0\underline{a}^1 = 0\underline{a}^2 = 0\underline{a}^4$

(La 3^a colonna è proporzionale a tutte le altre

$B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\det B=-2$

- $\det(5B)=\det\begin{pmatrix}5\cdot1&5\cdot2\\5\cdot3&5\cdot4\end{pmatrix}\overset{2^a PE}{=}5\cdot\det\begin{pmatrix}1&5\cdot2\\3&5\cdot4\end{pmatrix}\overset{2^a PE}{=}5\cdot5\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=25\cdot(-2)=-50$

- Corollario 2 relativo alla 2ª proprietà:

$A\in M_{n\times n}$ e $\beta\in\mathbb{R}$

$$\det(\beta A)=\beta^n\det(A)$$

- 3ª Proprietà elementare dei determinanti

$$\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}\\\underline{c_2}\\\vdots\\\underline{c_n}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}\underline{b_1}\\\underline{c_2}\\\vdots\\\underline{c_n}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}+\underline{b_1}\\\underline{c_2}\\\vdots\\\underline{c_n}\end{bmatrix}$$ ~ Vale anche per le colonne

Esempio:

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}6&6\\3&4\end{pmatrix}\overset{2^a PE}{=}6\det\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=6\cdot(4-3)=6$$

TEOREMA (Dipendenza lineare e matrici)

$V=\mathbb{R}^n$ se $[\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}]$ è linearmente indipendente ~~allora~~ se e solo se $\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\vdots\\\underline{v_n}\end{bmatrix}\neq0$

Dimostrazione: Da Dx a Sx ($n=4$ per facilitare i calcoli)

Se $[\underline{v_1},\underline{v_2},\underline{v_3},\underline{v_4}]$ è linearmente dipendente, allora, almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri (teorema di caratterizzazione) quindi supponiamo che $\underline{v_4}=\alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2}+\gamma\underline{v_3}$

$$\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\\underline{v_4}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\(\alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2})+\gamma\underline{v_3}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\\alpha\underline{v_1}+\beta\underline{v_2}\end{bmatrix}+\underbrace{\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\\gamma\underline{v_3}\end{bmatrix}}_{=0}=$$

0 ~ perché ha due righe proporzionali

$$=\underbrace{\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\\alpha\underline{v_1}\end{bmatrix}}_{=0}+\underbrace{\det\begin{bmatrix}\underline{v_1}\\\underline{v_2}\\\underline{v_3}\\\beta\underline{v_2}\end{bmatrix}}_{=0}=0$$

- Corollario relativo alla 3ª proprietà (Trasformazione elementare sulle righe o sulle colonne)

$$\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}+\beta\underline{a_i}\\\underline{a_2}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}$$ ~ Stessa formula anche per le colonne.

Dimostrazione:

$$\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}+\beta\underline{a_i}\\\underline{a_i}\\\underline{a_n}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}\\\underline{a_i}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}+\underbrace{\det\begin{bmatrix}\beta\underline{a_i}\\\vdots\\\underline{a_i}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}}_{=0}=\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}\\\vdots\\\underline{a_i}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}+0=\det\begin{bmatrix}\underline{a_1}\\\vdots\\\underline{a_n}\end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&-1&5&5\\0&2&3&6\\1&1&1&1\end{pmatrix}\underset{\underline{a_2}\mapsto\underline{a_2}-2\underline{a_1}}{=\!=}\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-5&-1&-3\\0&2&3&6\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Ho trasformato $\underline{a_2}$ in $\underline{a_2}-2\underline{a_1}$ per far diventare $a_{21}=0$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia V uno spazio vettoriale, se $S\subseteq V$ si dice che S è un sottospazio di V se e solo se S con le operazioni ereditate da V è uno spazio vettoriale

S è un sottospazio di $V \overset{def}{\iff} \forall\,\underline{w_1},\underline{w_2}\in S$ $\underline{w_1}+\underline{w_2}\in S$ (A)

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ e $\underline{w_1}\in S$ $\alpha\cdot\underline{w_1}\in S$ (B)

Esempi:

$S_1=\{(c,c^2)/c\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$

$(0,0)\in S_1$

$(2,4)\in S_1$

$(1,1)\in S_1$

$(2,4)+(1,1)=(3,5)\notin S_1$ La (A) non è soddisfatta quindi S_1 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$

$S_2=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ $(0,0)\notin S_2$ quindi S_2 non è un sottospazio

$S_3 = \mathbb{R}^2 - \{(6,9)\}$ $(0,0) \in S_3$

$(-6,-9) \in S_3$

$(-1)\cdot(-6,-9) = (6,9) \notin S_3$ La Ⓑ non è soddisfatta

$S_4 = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{Z}\}$ La Ⓐ è verificata

$(6,9) \in S_4$

$\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{\pi}\cdot(6,9) = \left(\frac{6}{\pi}; \frac{9}{\pi}\right) \notin S_4$ La Ⓑ non è soddisfatta

$S_5 = \left\{\left(\frac{n}{\pi}; \frac{2n}{\pi}\right) / -1000 \le n \le 1000 \quad n \in \mathbb{Z}\right\}$ $(0,0) \in S_5$

S_5 ha 2001 elementi quindi non è uno spazio vettoriale perché non è infinito (Prop5)

$S_6 = \left\{ \begin{matrix} P(x) \text{ con} \\ \text{termine noto} = 0 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ $x q_1(x) + x q_2(x) = x(q_1(x) + q_2(x))$ Ⓐ

$S_6 = \{x \cdot q(x) / q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ $\alpha(x \cdot q(x)) = x(\alpha \cdot q(x))$ Ⓑ

S_6 è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

$S_7 = \{\underline{0}\} = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ S_7 è uno sottospazio di $\mathbb{R}^2$

Ogni spazio vettoriale V contiene il sottospazio nullo:

$\{\underline{0}\}$ ~ Sottospazio di dimensione 0

Proposizione)

Comunque scelti $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$

$S = \langle \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \rangle = \{\alpha_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \cdot \underline{v_n} / \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V

Infatti: $(\alpha_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \cdot \underline{v_n}) + (\beta_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + \beta_n \cdot \underline{v_n}) = (\alpha_1 + \beta_1)\cdot \underline{v_1} \dots + (\alpha_n + \beta_n)\cdot \underline{v_n} \in S$

Quindi Ⓐ è verificata

$\alpha(\beta_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + \beta_n \cdot \underline{v_n}) = (\alpha \cdot \beta_1)\cdot \underline{v_1} + \dots + (\alpha \cdot \beta_n)\cdot \underline{v_n} \in S$

Quindi Ⓑ è verificata

Esempi:

Determinare la dimensione del sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = S$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ~ Linearmente indipendente perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ solo se $\alpha = 0$

genera S

Quindi una sua base è $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \dim S = 1$

Calcolare la dimensione del sottospazio dei polinomi

$\langle x^{2016} \rangle = \{\alpha x^{2016} / \alpha \in \mathbb{R}\}$ ~ $\dim = 1$

Proposizione)

$\forall\, \underline{v} \ne \underline{0}$ in un qualsiasi spazio vettoriale V si ha che:

$\langle \underline{v} \rangle = \{\alpha \underline{v} / \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di V di dimensione 1

e una sua base è $[\underline{v}]$

$T = \langle \underline{v_1}, \dots, \underline{v_k} \rangle \subseteq V$ T è un sottospazio di V

T ha dimensione $\le$ a K

- Se $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$ sono indipendenti, allora sono anche una base di T e quindi $\dim T = K$

- Se $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$ sono dipendenti, allora non sono una base, quindi non sono minimali di generatori, quindi una base di T contiene meno di K vettori, di conseguenza $\dim T < K$

$T_n = \{\text{Polinomi di grado} \le n\}$ $\dim T_n = n+1$

$T_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 / a_i \in \mathbb{R}\} = \langle x^0, x^1, x^2, x^3 \rangle \Rightarrow [1, x^1, x^2, x^3]$ INDIP

$\Downarrow$

$\dim T_3 = 4$

Sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ di dimensione $1000 = T_{999} = \{a_0 + a_1 x + \dots a_{999} x^{999} / a_i \in \mathbb{R}\}$

$\Downarrow$

Base $[1, x, x^2, x^3, \dots, x^{999}]$

Proposizione)

(A) Se W è un sottospazio di V e $\dim V = n$ allora $\dim W \leq \dim V$

(B) Se $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

Dimostrazione (A):

Per il lemma di Steinitz più di n vettori dentro W sono linearmente dipendenti, di conseguenza, un sistema indipendente massimale in W non può contenere più di n vettori.

Dimostrazione (B):

Siano $w_1, \dots, w_n$ vettori indipendenti di W (una base di W), $[w_1, \dots, w_n, v]$ $\forall v \in V$, $n+1$ vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n, per il lemma di Steinitz sono linearmente dipendenti, allora $[w_1, \dots, w_n]$ è indipendente massimale in V e di conseguenza genera V.

Sottospazi di $\mathbb{R}^2$ ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$)

W sottospazio di $\mathbb{R}^2$

- $\dim W = 0$ 1 solo: $W = \{(0,0)\}$
- $\dim W = 1$ Tutti i sottospazi del tipo $\langle v \rangle$ $\forall v \neq 0$
- $\dim W = 2$ 1 solo: $W = \mathbb{R}^2$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

Si chiama complemento algebrico di posto (i,j) il numero reale A_{ij} elevando -1 alla $i+j$ e moltiplicandolo per il determinante della matrice che si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

manca la j-esima colonna

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Manca la i-esima riga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = -1(21-6) = -15$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-5) = -5$$

1° Teorema di Laplace

Il determinante di una matrice quadrata A è la somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) di A moltiplicati per i loro complementi algebrici.

$$\det A = a_{i,1} \cdot A_{i,1} + a_{i,2} A_{i,2} + \dots + a_{i,n} \cdot A_{i,n}$$

$$\det A = a_{1,j} \cdot A_{1,j} + a_{2,j} \cdot A_{2,j} + \dots + a_{n,j} \cdot A_{n,j}$$

Esercizio: Verificare se v_1, v_2 e v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,3,1)$ $v_2 = (0,1,-1)$ $v_3 = (5,6,7)$

Dato che tutte le basi di $\mathbb{R}^3$ contengono 3 vettori, basta verificare che sono indipendenti massimali, cioè che $\det A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \underset{a^2 \to a^2 + a^3}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 13 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\text{Laplace 2ª Riga}}{=} 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= (+1)(13-20) = -7$$

Dato che il determinante di A è diverso da 0 $[(1,3,1),(0,1,-1),(5,6,7)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$

Verificare se $[(1,0,1,1),(1,2,-1,0),(1,1,-1,-1),(0,1,0,4)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{a^4 \to a^4 - 4a^2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 4ª Riga}}{=} +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -8 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{a^1 \to a^1 + a^2}{=}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 1ª colonna}}{=} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (5-8) = -6$$

Sì, i vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$

Rango di una matrice

Il rango di una matrice qualsiasi è pari al numero massimo di righe indipendenti o al numero massimo di colonne indipendenti.

$A \in M_{m \times n}$ $\quad rg A \leq \min\{m,n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \underline{a_3} \end{pmatrix} \quad \langle \underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3} \rangle \in \mathbb{R}^4$$

$$= (\underline{a}^1\, \underline{a}^2\, \underline{a}^3\, \underline{a}^4) \quad \langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \subseteq M_{3\times 1}$$

La dimensione di $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ è uguale alla dimensione di $\langle a^1, a^2, a^3, a^4 \rangle$ ed è uguale al rango della matrice

$\dim \langle \underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3} \rangle = \dim \langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3, \underline{a}^4 \rangle = rg A$

Le matrici nulle hanno rango $\emptyset$

In ogni spazio vettoriale delle matrici $M_{m \times n}$ c'è una sola matrice di rango $\emptyset$

Le matrici che hanno tutte le righe o colonne proporzionali hanno rango 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 16 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$rg A = 1$ ~ perché tutte le righe sono proporzionali

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$rg B \neq 0$ Perché non è nulla

$rg B \neq 1$ Perché non è proporzionale

$rg B = 2 \text{ o } 3$

Se $A \in M_{n \times n}$ (è quadrata) il rango massimo possibile è n.

Il rango di A è il massimo: $rg A = n \iff \det A \neq 0$

- Minore di una matrice

Sia A una matrice qualunque ($A \in M_{m \times n}$), si chiama minore di ordine K, il determinante di una sottomatrice quadrata che si ottiene da A selezionando K righe e K colonne (anche non contigue).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

~ ha minori di ordine 1, 2, 3, 4

$$\det A^{24}_{13} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 16$$ ← Minore di ordine 2 della matrice A

Colonne scelte

Righe scelte

$\det A^5_3 = \det(7) = 7$ ← Minore di ordine 1

Esistono al massimo $m \times n$ minori di ordine 1

$N°$ di minori di ordine K in $A \in M_{m\times n} = \binom{m}{K} \cdot \binom{n}{K}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ ~ se $rg A =$

$4 \iff$ ci sono 4 colonne indipendenti

$\Updownarrow$

Il determinante di una matrice formata da 4 colonne opportune $\neq 0$

$\Updownarrow$

Esiste un minore di ordine 4 non nullo

< 4

$\Updownarrow$

Tutti i minori di ordine 4 sono nulli

$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ di $\mathbb{R}^n$ ~ Sono indipendenti se $rg \begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \vdots \\ \underline{v_k} \end{pmatrix} = K$

$\Updownarrow$

Esiste un minore di ordine K non nullo

Sono dipendenti se $rg \begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \vdots \\ \underline{v_n} \end{pmatrix} < K$

$\Updownarrow$

Tutti i minori di ordine K sono nulli

Teorema degli orlati

Sia A una matrice con m righe ed n colonne ($A \in M_{m \times n}$)

$\operatorname{rg} A = K \iff$
① Esiste un minore di ordine K non nullo
② Tutti i minori di ordine $K+1$, che si ottengono aggiungendo a M una riga e una colonna, sono nulli.

I minori ottenuti aggiungendo a M una riga e una colonna si dicono "Orlati" di M.

Esercizio:

Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$W = \langle (1,2,3,-1), (2,0,1,1), (0,4,5,-3) \rangle$

$$\dim W = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{12}_{23} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2$$

$$\det A^{123}_{123} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{a_3 \to a_3 - 2a_1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 2ª colonna}}{=} -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A^{124}_{123} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{a_3 \to a_3 - 2a_1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{\det A^{134}_{123} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{a_2 \to a_2 - 2a_1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 0}$$

$$\cancel{\det A^{234}_{123} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{a_3 \to a_3 - 2a_1}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0}$$

Questi determinanti sono superflui per il teorema degli orlati

$\operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow B_W = [(2,0,1,1), (0,4,5,-3)]$

Calcolare le componenti di $(1,2,3,-1)$ e $(2,0,1,1)$ rispetto a B_W

$(1,2,3,-1) = \alpha(2,0,1,1) + \beta(0,4,5,-3)$

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 4\beta = 2 \\ \alpha + 5\beta = 3 \\ \alpha - 3\beta = -1 \end{cases} \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$(2,0,1,1) = \alpha(2,0,1,1) + \beta(0,4,5,-3) \qquad \alpha = 1$ e $\beta = 0$

Per quali $c \in \mathbb{R}$ $(2c, 4, 3c, -2) \in W$

$$\dim W = \operatorname{rg} A = 2 \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -3 \\ 2c & 4 & 3c & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det A^{12}_{12} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2$$

$$\det A^{123}_{123} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2c & 4 & 3c \end{pmatrix} \underset{a^1 \to a^1 - 2a^3}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 4 & 5 \\ -4c & 4 & 3c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4c & 4 \end{pmatrix} = -40 + 16c$$

$$\det A^{124}_{123} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2c & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{a^1 \to a^1 - 2a^3}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2c+4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2c+4 & 4 \end{pmatrix} = 24 - 8c - 16 = 8 - 8c$$

$16c - 40 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$

$8 - 8c = 0 \Rightarrow c = 1$

$\nexists c : v \in W$

Vari casi che si sarebbero potuti ottenere:

$\begin{cases} \det A^{123}_{123} = c - 1 \\ \det A^{124}_{123} = 3c - 3 \end{cases}$ $v \in W$ solo se $c = 1$

$\begin{cases} \det A^{123}_{123} = c - 1 \\ \det A^{124}_{123} = (c-3)(c-1) \end{cases}$ $v \in W$ solo se $c = 1$

$\begin{cases} \det A^{123}_{123} = c - 1 \\ \det A^{124}_{123} = 0 \ \forall c \end{cases}$

$v \in W$ solo se $c = 1$

$\begin{cases} \det A^{123}_{123} = 0 \ \forall c \\ \det A^{124}_{123} = 0 \ \forall c \end{cases}$

$\operatorname{rg} A = 2 \ \forall c$

$v \in W \ \forall c$

$\begin{cases} \det A^{123}_{123} = c - 1 \\ \det A^{124}_{123} = c - 3 \end{cases}$

$\forall c \ \operatorname{rg} A = 3$

$\nexists c : v \in W$

Calcolare il rango di A al variare di c

$$A=\begin{pmatrix}1 & c & 1 & c\\ c & 1 & c & 1\\ 2 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$rg\,A \geq 2 \iff \det A^{12}_{23} = \det\begin{pmatrix}c & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix} = -2c-2 \neq 0 \Rightarrow c \neq -1$

per $c=-1$ → $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & +2 & -2\end{pmatrix}$ → $rg\,A = 1$

per $c \neq -1$ considero i due orlati

$$\left.\begin{aligned}\det A^{123}_{123} &= \det\begin{pmatrix}1 & c & 1\\ c & 1 & c\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} = 0 \quad \forall c\\ \det A^{124}_{123} &= \det\begin{pmatrix}1 & c & c\\ c & 1 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix} = 0 \quad \forall c\end{aligned}\right\} \Rightarrow rg\,A = 2 \quad \forall c \neq -1$$

Confronta i 2 sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$W = \{(a+b-c,\ c-b,\ a,\ a) \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$U = \langle (3,3,0,0),(2,1,2,2) \rangle$

$W = a(1,0,1,1) + b(1,-1,0,0) + c(-1,1,0,0)$

$\Downarrow$

$W = \langle (1,0,1,1),(1,-1,0,0),(-1,1,0,0) \rangle$

$B_U = [(3,3,0,0),(2,1,2,2)]$

$\dim W = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$ → perché $\underline{a_2}$ e $\underline{a_3}$ sono proporzionali

$B_W = [(1,0,1,1),(1,-1,0,0)]$

Se due sottospazi hanno egual dimensione, allora sono uguali.

$B_W = [\underline{w_1}, \dots, \underline{w_r}]$

$B_U = [\underline{u_1}, \dots, \underline{u_s}]$

Se $s \leq r$ allora $U \subseteq W \iff \forall i \ u_i \in W \iff rg\begin{pmatrix}\underline{w_1}\\ \vdots\\ \underline{w_r}\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}\underline{w_1}\\ \vdots\\ \underline{w_r}\\ \underline{u_i}\end{pmatrix} = r$

Allora U è contenuto in W soltanto se:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix} = 2$$

$$rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow U \neq W \Rightarrow U \not\subseteq W$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix} = 3-3 = 6$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 0 & 0 & 11 & 12 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 14 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \underset{\text{Laplace } 1^a \text{ col}}{=} 2 \cdot \det\begin{pmatrix}7 & 8 & 9 & 10\\ 0 & 11 & 12 & 13\\ 0 & 0 & 14 & 8\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot \det\begin{pmatrix}11 & 12 & 13\\ 0 & 14 & 8\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \frac{1}{4} = 539$$

Diagonale Principale

MATRICI TRIANGOLARI

Una matrice $A \in M_{n \times n}$ (Quadrata), si dice triangolare alta $\iff a_{ij} = 0 \ \forall i > j$ (Tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono $= 0$)

Se A è triangolare alta: $\det A$ = Prodotto degli elementi sulla diagonale principale → $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Una matrice $A \in M_{n \times n}$ (Quadrata), si dice triangolare bassa $\iff a_{ij} = 0 \ \forall i < j$ (Tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono $= 0$)

Se A è triangolare bassa: $\det A$ = Prodotto degli elementi sulla diagonale principale → $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

---

a_{ij} = elemento posto sulla i-esima riga e j-esima colonna

$[(2,1),(1,1)]$ Lin. dip o lin. indip?

$$(0,0)=x(2,1)+y(1,1) \sim \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Sia $[e_1, e_2]$ una base di V (Es $[(1,0),(0,1)]$)

$[2e_1+e_2, e_1+e_2]$ Lin dip o lin. indip?

└ componenti di v_1 e v_2 rispetto alla base scelta

$$\underline{0}=x(2e_1+e_2)+y(e_1+e_2)=(2x+y)\cdot e_1+(x+y)\cdot e_2.$$

Dato che $[e_1,e_2]$ è una base, $\underline{0}$ può essere espresso solo quando i coefficienti sono nulli:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{INDIP}$$

Sia V uno spazio vettoriale dotato di una base B.
L'indipendenza del sistema $[v_1,\dots,v_n]$ equivale all'indipendenza delle componenti dei vettori del sistema.

Determinare se il sistema è lin. dip. o lin. indip.

$S=\left[\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right]$ in $M_{2\times2}$ una base è $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$

quindi le componenti dei vettori di S rispetto alla base sono:
$[(1,0,2,1),(1,1,1,-1),(1,2,3,4)]$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&1&1&-1\\1&2&3&4\end{pmatrix} \begin{cases}\text{Se } 3 \text{ sono Indip} \\ \text{Se } <3 \text{ sono Dip.}\end{cases}$$

Determinare due basi di W

$W=\langle 1-x^2, 2x+x^4, x^2-x^4\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$

└ $\subseteq \langle 1,x,x^2,x^3,x^4\rangle = T_4$

$B_{T_4}=[1,x,x^2,x^3,x^4]$

I vettori di W secondo la base B_{T_4} sono:
$[(1,0,-1,0,0),(0,2,0,0,1),(0,0,1,0,-1)]$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&2&0&0&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2 \Rightarrow \text{rg}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&2&0&0&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}=3$$

$B_W=[1-x^2, 2x+x^4, x^2-x^4]$ $\quad$ $B'_W=[2x+x^4, 1-x^2, x^2-x^4]$

Qual'è il polinomio in W di componenti $(17, 10, \frac{2016}{\pi})$

$$17\cdot(1-x^2)+10(2x+x^4)+\frac{2016}{\pi}(x^2-x^4)=17+20x+\left(\frac{2016}{\pi}-17\right)x^2+\left(10-\frac{2016}{\pi}\right)x^4$$

Dim Pag 41 **TEOREMA DI COMPLETAMENTO DI UNA BASE**

Se $S=[v_1,\dots,v_r]$ è un sistema linearmente indipendente in uno spazio vettoriale V di dimensione n, allora esistono $n-r$ vettori che aggiunti a S formano una base di V.

Esempio:

Esiste una base di $\mathbb{R}^5$ contenente tra gli altri:
$S=[(1,2,0,1,1),(2,4,0,2,0),(0,0,1,0,5)]$?

└ Se S è lin. dip. No perché DIP+Z = DIP

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&\boxed{0&1&1}\\2&4&\boxed{0&2&0}\\0&0&\boxed{1&0&5}\end{pmatrix}=3 \quad \text{poiché il minore } A^{345}_{123}\,(M)\neq 0 \Rightarrow S \text{ INDIP}$$

Per completare la base aggiungiamo dei vettori della base canonica nelle colonne non coinvolte dal minore M

$$\det\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\2&4&0&2&0\\0&0&1&0&5\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Laplace}\\ 5^a \text{ riga}}}{=}-\det\begin{pmatrix}2&0&1&1\\4&0&2&0\\0&1&0&5\\1&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Laplace}\\ 4^a \text{ R.ga}}}{=}\det M\neq 0$$

↑↑ colonne non coinvolte

$B=[(1,2,0,1,1),(2,4,0,2,0),(0,0,1,0,5),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)]$

Determinare una base di $M_{2\times 2}$

$$\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix},(B),(C)\right]$$

$$rg\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&2&2\end{pmatrix}}_{M}=2 \qquad \det M=2$$

$$\det\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&2&2\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\neq 0 \longrightarrow B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Determinare due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in modo che $[1+x,\ x-2x^3,\ p_1(x),\ p_2(x)]$ sia una base di T_3

$$rg\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-2\end{pmatrix}}_{M}=2 \qquad \det M=1$$

$$\det\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\neq 0 \implies \begin{aligned}p_1(x)&=x^2\\ p_2(x)&=x^3\end{aligned}$$

Esibendone una base, determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ di dim 2 contenente $\underline{v_1}=(1,2,3,4)$ ma non $\underline{v_2}=(0,1,1,1)$

$W=\langle(1,2,3,4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\rangle$

$$rg\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}}_{M}=3 \qquad \det A_{12}^{24}\neq 0$$

$$rg\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=3 \qquad \det M=-\det A_{12}^{24}\neq 0 \implies rg=3$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

$a\sim b$ a è in relazione con b

$a\nsim b$ a non è in relazione con b

Una relazione si dice di equivalenza se gode di tutte e tre le seguenti proprietà:

Ⓡ Proprietà Riflessiva $\forall a\in S\quad a\sim a$

Ⓢ Proprietà Simmetrica $\forall a\sim b\quad b\sim a$

Ⓣ Proprietà Transitiva $\forall a\sim b,\ \forall b\sim c\ ,\ a\sim c$

$\Sigma=\{$Insieme dei segmenti orientati$\}$

segmenti orientati: coppia ordinata di punti $(A\ B)$ — A: estremo iniziale, B: estremo finale

$AB=CD \iff \begin{matrix}A=C\\B=D\end{matrix}$

$AB=BA \iff A=B$ ~ segmento orientato nullo

$AB\sim CD \overset{def}{\iff}$ (Equipollente)
- se $A=B \implies C=D$ Tutti i segmenti nulli sono equipollenti
- se $A\neq B$
  - AB equipollente a CD
    - hanno la stessa lunghezza $|AB|=|CD|$
    - hanno la stessa direzione $r_{AB}=r_{CD}$
    - hanno lo stesso verso

$\vec{AB}=\left\{\begin{matrix}\text{Tutti i segmenti}\\\text{orientati equipollenti}\\\text{ad AB}\end{matrix}\right\}$ = Vettore geometrico

Vettore geometrico: classe di equivalenza di segmenti orientati rispetto alla relazione di equipollenza.

$\vec{AB}=\vec{CD}\iff AB\sim CD$

AB rappresenta il vettore geometrico $\vec{AB}$

$\vec{AB}+\vec{CD} = \vec{AB}+\vec{BE} \overset{def}{=} \vec{AE}$ ~ Vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AE

$\exists E : BE \sim CD$

La Somma Vettoriale è un gruppo Abeliano

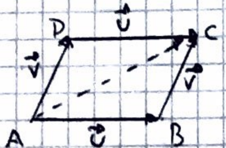
- $\vec{AB}+\vec{BB}=\vec{AB}$
  ↑ Vettore geometrico nullo
- $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}$
  ↑ Vettore geometrico opposto
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

  $\vec{u}=\vec{AB}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{AC}$

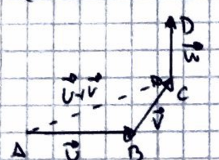
  $\vec{v}=\vec{BC}$ $\quad \vec{v}=\vec{AD} \Rightarrow \vec{u}=\vec{DC}$

  $\Downarrow$

  $\vec{v}+\vec{u}=\vec{AC}$

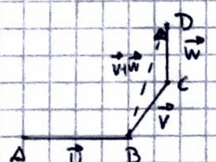


- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$



$\vec{u}+\vec{v}=\vec{AC}$

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$



$\vec{v}+\vec{w}=\vec{BD}$

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$

$\alpha \cdot \vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} \vec{0} \text{ se } \alpha=0 \text{ o } \vec{u}=\vec{0} \\ \text{Stessa direzione di } \vec{u} \text{ se } \alpha\neq 0 \text{ e } \vec{u}\neq\vec{0} \\ \text{Stesso verso di } \vec{u} \iff \alpha>0 \end{cases}$$

$|\alpha\vec{u}|=|\alpha|\cdot|\vec{u}|$

PRODOTTO SCALARE STANDARD IN $\mathbb{R}^n$

$\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$

$\underline{b}=(b_1,\dots,b_n)$

$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i$

Il risultato è uno scalare, non un vettore!

$\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$ $\quad \underline{a}\cdot\underline{0}=0$ $\quad \underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$

Abuso di notazione

$\underline{a}\cdot\underline{b}$ può essere 0 anche se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono diversi da $\underline{0}$

$(1,3,1)\cdot(1,-2,-3)=1-6-3=-8$

$(1,2,3)\cdot(3,0,-1)=3+0-3=0$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE FRA MATRICI

Il prodotto righe per colonne è definito solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice. Ed ha per risultato una matrice che ha tante righe quante ne ha la prima matrice e tante colonne quante ne ha la seconda.

$A\in M_{m\times n}$ $\quad B\in M_{n\times p}$ $\quad C=A\cdot B\in M_{m\times p}$

$c_{ij}\overset{def}{=}\underline{a_i}\cdot\underline{b^j}$

Es $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ 2×2 $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&0\end{pmatrix}$ 2×3 $\quad C=\begin{pmatrix}8&6&-2\\14&10&-4\end{pmatrix}$ 2×3

$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

$A\cdot B\neq B\cdot A$ (A volte non si può nemmeno effettuare)

$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{O}=\underset{m\times p}{O}$

Il prodotto righe per colonne di matrici quadrate è un'operazione interna

$A\in M_{n\times n}$ $\quad A\cdot B$ esiste

$B\in M_{n\times n}$ $\quad B\cdot A$ esiste

$\in M_{n\times n}$

MATRICE UNITÀ ("IDENTICA")

Una matrice quadrata ($\in M_{n \times n}$) si dice matrice unità, se ha tutti gli elementi uguali a 0, tranne quelli sulla diagonale principale che sono uguali a 1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad I = (\delta_{ij}) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

simbolo di Kronecker

La matrice identità è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione righe per colonne:

$$A \cdot I = A \quad e \quad I \cdot A = A \qquad \forall A$$

Una matrice quadrata ($\in M_{n \times n}$) si dice invertibile se esiste una matrice A' tale che $A \cdot A' = A' \cdot A = I$

$$A \in M_{n \times n} \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \exists A' \text{ tale che } \begin{matrix} A \cdot A' = I \\ A' \cdot A = I \end{matrix}$$

Se la matrice A' (soluzione delle equazioni $A \cdot A' = I$ e $A' \cdot A = I$) esiste, allora è unica e si denota con il simbolo A^{-1}:

Dimostrazione:

$\exists A'$ e A'' tali che $\begin{matrix} A \cdot A' = I \\ A' \cdot A = I \end{matrix}$ e $\begin{matrix} A \cdot A'' = I \\ A'' \cdot A = I \end{matrix}$

$$A' \cdot A \cdot A'' = (A' \cdot A) A'' = A' \cdot (A \cdot A'')$$

$$I \cdot A'' = A' \cdot I$$

$$A'' = A'$$

A^{-1} è l'inverso di A $\qquad I^{-1} = I$

O^{-1} non esiste

TEOREMA DI JACOBUS - BINET

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Dimostrazione omessa

TEOREMA MATRICI INVERTIBILI

$$A \in M_{n \times n} \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Dimostrazione: Da Sx a Dx

$\exists A^{-1}: A \cdot A^{-1} = I$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Da Dx a Sx

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$n=3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \cdots & \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \cdots & \\ \frac{A_{13}}{\det A} & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ Matrice Unità}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot \frac{A_{11}}{\det A} + a_{12} \cdot \frac{A_{12}}{\det A} + a_{13} \cdot \frac{A_{13}}{\det A} = \frac{\underbrace{a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}}_{= \det A \text{ per 1° teorema di Laplace}}}{\det A} = \frac{\det A}{\det A} = 1$$

Analogamente $c_{22} = c_{33} = 1$

$$c_{21} = a_{21} \cdot \frac{A_{11}}{\det A} + a_{22} \cdot \frac{A_{12}}{\det A} + a_{23} \cdot \frac{A_{13}}{\det A} = \frac{\underbrace{a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{13}}_{= 0 \text{ per 2° Teorema di Laplace}}}{\det A} = \frac{0}{\det A} = 0$$

Analogamente $c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 0$

2° Teorema di Laplace

$a_{h1}\cdot A_{k1} + a_{h2}\cdot A_{k2} + \dots + a_{hn}\cdot A_{kn} = 0$ se $h \neq k$

$a_{1h}\cdot A_{1k} + a_{2h}\cdot A_{2k} + \dots + a_{nh}\cdot A_{nk} = 0$

La somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna per i complementi algebrici di un'altra riga o di un'altra colonna è uguale a 0.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = -9 \neq 0$ A è invertibile

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\det B = -4 \neq 0$ B è invertibile

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 7 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +2 & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & +2 & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

Un sistema lineare, è un insieme di equazioni dove tutte le incognite compaiono in monomi di grado non superiore a 1.
Risolvere un sistema lineare significa trovare tutte le soluzioni.

$S = \{\text{Soluzioni}\}$ se $S \neq \emptyset$ il sistema è compatibile

se $S = \emptyset$ il sistema è incompatibile

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 18 \\ 6x_1 \quad\quad - x_3 = 30 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & +5 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice incompleta associata al sistema}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Risolvere un sistema lineare equivale a risolvere un'equazione tra matrici

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 18 \\ 6 & 0 & -1 & 30 \end{pmatrix}$ Matrice completa associata al sistema

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

il sistema è compatibile

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

La colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice incompleta associata

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$ ~ Sistema lineare di m-equazioni in n-incognite

$$\underline{a}^1 \cdot x_1 + \underline{a}^2 \cdot x_2 + \dots + \underline{a}^n \cdot x_n = B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \rightsquigarrow \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}$$

$$C = (A \,|\, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ ~ Matrice Completa

---

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa

Sistema lineare compatibile $\iff$ $rg\,A = rg\,C$

Osservazione: $rg\,C$ può assumere solo 2 valori infatti o è uguale a $rg\,A$ oppure è uguale a $rg\,A+1$, perché viene aggiunta una sola colonna

Dimostrazione: Da Sx a Dx (Per quello da Dx a Sx basta ripercorrere al contrario)

Sistema compatibile $\Rightarrow$ Esiste una soluzione $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2$, ..., $x_n = \beta_n$

$\Updownarrow$

$\underline{a}^1\beta_1 + \underline{a}^2\beta_2 + \dots + \underline{a}^n\beta_n = B$

$\Updownarrow$

$B \in \langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^n \rangle$

$\Updownarrow$

nella relazione $\langle \underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^n \rangle \subseteq \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n, B \rangle$ vale l'uguale

$\Updownarrow$

Le dimensioni dei due sottospazi sono uguali, cioè:

$\dim\langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \rangle = \dim \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n, B \rangle$

$\Updownarrow$

$\dim A = \dim C$

$\Updownarrow$

$rg\,A = rg\,C$

$\underline{a}^1x^1 + \dots + \underline{a}^n x_n = B$ Equazione

$\underline{a}^1\beta_1 + \dots + \underline{a}^n\beta_n = B$ Identità

SISTEMA DI CRAMER

Un sistema lineare si dice di Cramer, se il numero delle equazioni corrisponde al numero di incognite $(m=n)$ e se il determinante della matrice incompleta è diverso da 0 ($\det A \neq 0$)

Proprietà dei sistemi di Cramer:
- Sono sempre compatibili;
- Esiste una sola soluzione.

Dimostrazione: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \Rightarrow A^{-1}\cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B$

$\Downarrow$

$I\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot B$

$\Downarrow$

$A^{-1}B$ è l'unica soluzione del sistema

A^{-1} esiste perché $\det A \neq 0$ per ipotesi

- Regola di Cramer:

La n-pla soluzione è:

$$x_1 = \frac{\det[B\,\underline{a}^2 \dots \underline{a}^n]}{\det A}$$ ho sostituito a^1 con la colonna dei termini noti B

$$x_2 = \frac{\det[\underline{a}^1\,B\,\underline{a}^3 \dots \underline{a}^n]}{\det A}$$

$$x_n = \frac{\det[\underline{a}^1 \dots a^{n-1}\,B]}{\det A}$$

Esercizio: Nei casi in cui il sistema è di Cramer, trova la soluzione

$$\begin{cases} cx_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = c \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

il sistema è di Cramer se $\det A \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} c & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}^1 \mapsto \underline{a}^1 + \underline{a}^3}{=} \det\begin{pmatrix} c-1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 3° col}}{=} \det\begin{pmatrix} c-1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -c-2$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow -c-2 \neq 0 \Leftrightarrow c \neq -2$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-c-2} = \frac{-1-c}{-c-2} = \frac{c+1}{c+2}$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} c & 1 & -1 \\ 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-c-2} = \frac{+c+c^2-1}{-c-2} = \frac{c^2+c-1}{-c-2}$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & -1 & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-c-2} = \frac{c+1}{-c-2}$$

L'unica soluzione è:

$$\left(\frac{c+1}{c+2}; \frac{c^2+c-1}{-c-2}; \frac{c+1}{-c-2}\right)$$

al variare di c varia l'intero sistema

per $c=-2$ $\quad A\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -1 + 2 - 1 = 0$

$\det A_{12}^{12} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\det C_{123}^{234} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -(2+1) = -3$

$rg\,C = 3 \quad rg\,A = 2$

Per Rouché Capelli è incompatibile

RISOLUZIONE SISTEMI NON DI CRAMER MA COMPATIBILI

Sistema di esempio:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$\det A = 0$

$rg\,A = rg\,C$ ⇒ compatibile

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{1} & 4 & \boxed{3} & 4 \end{array}\right)$$

$\det \overset{M}{A_{23}^{13}} = 4 \neq 0$

Algoritmo per la risoluzione:

⓪ Controllo della compatibilità (Rouché - Capelli)
- si calcola prima $rg\,C$ solo se C è quadrata

① Trovare in A un minore non nullo di ordine K massimo ($rg\,A = rg\,C = K$). Cancellare le equazioni non coinvolte in M (Perché quelle non coinvolte in M sono combinazioni lineari)
- $(m-K)$ equazioni da cancellare $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

② Le incognite non coinvolte in M diventano parametri e si portano al secondo membro. Il sistema così ottenuto è di Cramer
- $(n-K)$ parametri da portare al secondo membro

$$\begin{cases} x_2 = t \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 4 - 4t \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4-4t & 3 \end{pmatrix}}{4} = -t+1 \qquad x_3 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4-4t \end{pmatrix}}{4} = 1-t$

$S = \{1-t,\ t,\ 1-t \,/\, t \in \mathbb{R}\}$

Esercizio:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \quad = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\det A_{12}^{34} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$

$\Downarrow$

$rg\, C = 2$ (Non ha abbastanza righe per essere 3)

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 5 - t + 2s \\ 2x_3 \quad = -2t + 4s \\ x_1 = t \\ x_2 = s \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5-t+2s & -1 \\ -2t+4s & 0 \end{pmatrix}}{2} = t - 2s$$

$$x_4 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 5-t+2s \\ 2 & -2t+4s \end{pmatrix}}{2} = \frac{\cancel{-2t} \cancel{+4s} - 10 \cancel{+2t} \cancel{-4s}}{2} = -5$$

$$S = \{t, s, t-2s, -5 \;/\; t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = c \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad \det C = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -(-2+c) + (2-2c) - (-1+4) =$$

$$= \cancel{2} - c + 2 - 2c - 3 = \cancel{3} - 3c$$

Se $\det C \neq 0$ $\quad rg\, C = 3$ ma $rg\, A = 2$ perché non ha abbastanza colonne

$\Downarrow$

Sistema non compatibile per $c \neq 1$

Se $\det C = 0$ $\Rightarrow rg\, C = 2$ e $rg\, A = 2$ Sistema compatibile per $c = 1$

$\det C_{12}^{12} = 3$

$$\begin{cases} \boxed{x_1 - 2x_2 = 1} \\ \boxed{x_1 + x_2 = 1} \\ \cancel{2x_1 - x_2 = 2} \end{cases} \qquad x_1 = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$S = \{1, 0\} \quad c = 1$$

I sistemi lineari che hanno $B = 0$ si chiamano sistemi lineari omogenei, e sono sempre compatibili, perché almeno una soluzione del sistema è la n-pla nulla.

Le soluzioni di un sistema compatibile formano un sottospazio se e solo se il sistema è omogeneo (Perché 0 appartiene di sicuro all'insieme delle soluzioni);
La dimensione è pari al numero dei parametri da cui le soluzioni dipendono (n° incognite $-$ $rg\, A$)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \quad + z = 0 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{cases} \qquad \text{Sistema omogeneo}$$

$$\begin{cases} x + cy + z = 0 \\ cx + y + cz = 0 \\ 2cx + (c^2+1)y + 2cz = 0 \end{cases}$$

Sempre compatibile perché omogeneo

se $\det A \neq 0$ L'unica soluzione è $(0,0,0)$ perché diventerebbe un sistema di Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ c & 1 & c \\ 2c & c^2+1 & 2c \end{pmatrix} \qquad \det M = \det\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1 - c^2$$

uguali

$\Downarrow$

$rg\, A < 3$

se $\det M \neq 0$ $\quad rg\, A = 2$

$\det M \neq 0 \iff 1 - c^2 \neq 0 \rightarrow c^2 \neq 1 \iff c \neq \pm 1$

$$\begin{cases} x + cy = -t \\ cx + y = -tc \\ z = t \end{cases}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -t & c \\ -tc & 1 \end{pmatrix}}{1 - c^2} = \frac{-t + tc^2}{1 - c^2} = \frac{-t(\cancel{1-c^2})}{\cancel{1-c^2}} = -t$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -t \\ c & -tc \end{pmatrix}}{1 - c^2} = \frac{\cancel{-tc} \cancel{+tc}}{1 - c^2} = \frac{0}{1 - c^2} = 0$$

$$S = \{(-t, 0, t) \;/\; t \in \mathbb{R}\} \quad \text{per } c \neq \pm 1$$

$B = [(1,0,1)]$ $\quad \langle (1,0,1) \rangle$ Sottospazio dim = 1

per $c = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad rg\, A = 1$$

per $c = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = A \quad rg\, A = 1$$

per $c=1$

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det r \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 1$$

$$\begin{cases} x = -s-t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad \text{per } c=1 \quad S' = \{(-s-t, s, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = [(-1,1,0),(-1,0,1)]$$

$V^2 = \{$Vettori geometrici del piano euclideo$\}$ dim $V^2 = 2$

$V^3 = \{$Vettori geometrici dello spazio euclideo$\}$ dim $V^3 = 3$

dim $V^2 \neq 0$ Perché se sarebbe $=0$ tutti i vettori sarebbero nulli ($\exists\ \underline{i} \neq 0$)

dim $V^2 > 1$ Perché se sarebbe $=1$ tutti i vettori sarebbero proporzionali ad $\underline{i}$ ($\exists\ \underline{j}$ non parallelo a $\underline{i}$)

$\underline{0}$ per convenzione è parallelo a tutti i vettori

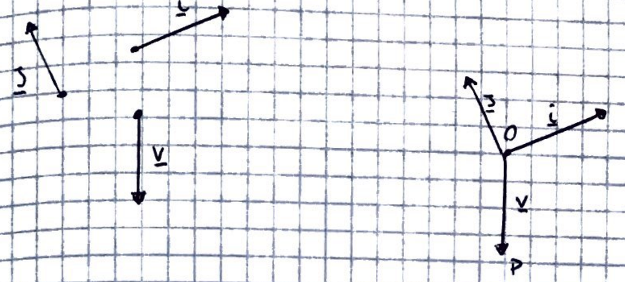
---

Ogni coppia di vettori non paralleli è una base di V^2

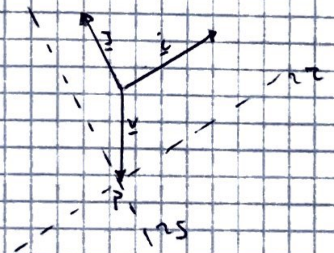
$B = [\underline{i}, \underline{j}]$ è una base di V^2:

1. Sono indipendenti perché non proporzionali;
2. Sono generatori, perché ogni $\underline{v} \in V^2$ si può scrivere come $\alpha \underline{i} + \beta \underline{j}$

Dimostrazione: ① Rappresentare $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{v}$ con segmenti orientati che hanno lo stesso estremo iniziale.

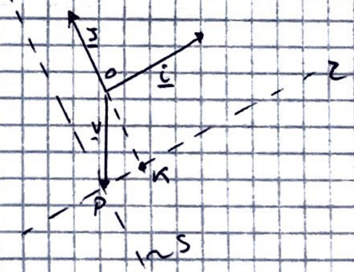


② Dall'estremo finale di $\underline{v}$ (P) si conducono le rette parallele a $\underline{i}$ e $\underline{j}$ (r e s) $\Rightarrow r \parallel \underline{i}$ e $\underline{j} \parallel s$



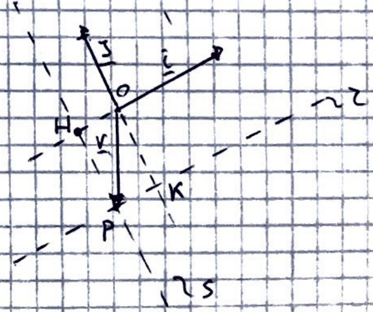
③ $r \cap r_O(\underline{j}) = K$

Retta passante per O e parallela a $\underline{j}$



④ $s \cap r_O(\underline{i}) = H$

Retta passante per O e parallela a $\underline{i}$



⑤ $\underline{v} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} =$

$= \alpha \underline{i} + \beta \underline{j}$

$\alpha \hat{=} -0,5$

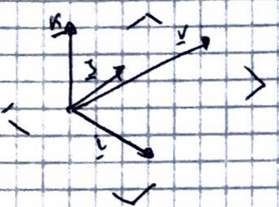
$\beta \hat{=} -1$

$\underline{v} \in V^3$

$\underline{v} \parallel \pi \overset{def}{\iff} \exists A, B \in \pi$ tali che $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

$\underline{u}, \underline{v}$ e $\underline{w} \in V^3$ complanari $\iff$ Sono paralleli allo stesso piano
$\exists \pi \parallel \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

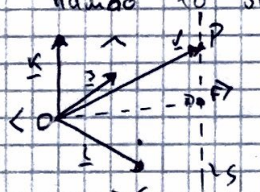
- Se $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ non sono complanari, allora il sistema generato da $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ è una base di V^3
- Non si dice che le rette appartengono ad un piano, ma si dice che sono parallele ad un piano.



$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono indipendenti, perché $\underline{k}$ non è combinazione lineare di $\underline{i}$ e $\underline{j}$, poiché $\underline{k}$ non è $\parallel$ a π

Dimostriamo che $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ generano V^3 $\quad (\underline{v} \in V^3)$

① Rappresentiamo $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{v}$ con segmenti orientati che hanno lo stesso estremo iniziale (O)



② Dall'estremo finale di $\underline{v}$ si conduce la parallela a $\underline{k}$

$s \parallel \underline{k} \Rightarrow s \nparallel \pi \Rightarrow \exists F = \pi \cap s$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FP}$$
$$\underline{v} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j} \quad \gamma\underline{k}$$
$$\underline{v} = \alpha\underline{i} + \beta\underline{j} + \gamma\underline{k}$$

Un riferimento nel piano è una coppia del tipo:

$(O, [\underline{i}, \underline{j}])$

- $[\underline{i}, \underline{j}]$: Una base di V^2
- O: Un punto del piano considerato come origine del riferimento

Un riferimento nello spazio è una coppia del tipo:

$(O, [\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}])$

- $[\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}]$: Una base di V^3
- O: Un punto dello spazio considerato come origine del riferimento.

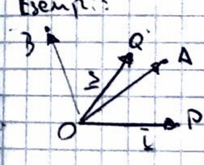
Le coordinate di un punto P sono le componenti di $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base del riferimento:

$P = (x, y) \iff \overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ Nel Piano

$P = (x, y, z) \iff \overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ Nello Spazio

---

Esempi:



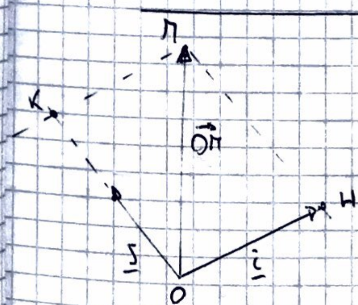
$A = (\frac{1}{2}, 1) \qquad B = (-1, \frac{3}{2})$

$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\underline{i} + \underline{j} \qquad \overrightarrow{OB} = -\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{k}$

$\overrightarrow{OO} = 0\underline{i} + 0\underline{j} \qquad O(0,0)$

$\overrightarrow{OQ} = 0\underline{i} + 1\underline{j} \qquad Q = (0,1)$

$\overrightarrow{OP} = 1\underline{i} + 0\underline{j} \qquad P = (1,0)$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$

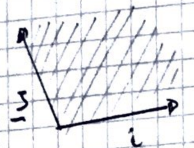
$x\underline{i} + y\underline{j} = 1\underline{i} + 2\underline{j}$

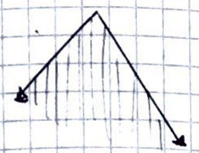
$M = (1,2)$

$P \equiv (x, y)$

- Ordinata di P
- Ascissa di P

Il I° quadrante è dove $x>0$, $y>0$

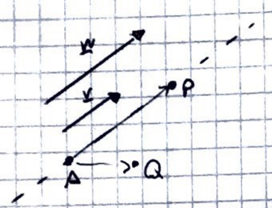




$r_A(\vec{v})$ - Retta passante per il punto A e parallela al vettore $\vec{v}$

Insieme dei punti caratterizzati da P tali che il vettore $\vec{AP}$ appartiene al sottospazio generato da $\underline{v}$

$\{P / \vec{AP} \in \langle \underline{v} \rangle\} = \{P / \exists t \in \mathbb{R} : \vec{AP} = t \cdot \underline{v}\}$

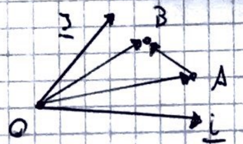


$\underline{w} \parallel \underline{v} \Rightarrow r_A(\underline{v}) = r_A(\underline{w})$ ~ Perché generano lo stesso sottospazio

$\vec{AP} \in r_A(\underline{v})$

$\vec{AQ} \notin r_A(\underline{v})$

VETTORE PER 2 PUNTI



$A \equiv (x_A, y_A)$

$B \equiv (x_B, y_B)$

$\vec{OA} = x_A \cdot \underline{i} + y_A \cdot \underline{j}$

$\vec{OB} = x_B \cdot \underline{i} + y_B \cdot \underline{j}$

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = x_B \cdot \underline{i} + y_B \cdot \underline{j} - (x_A \cdot \underline{i} + y_A \cdot \underline{j}) = (x_B - x_A) \cdot \underline{i} + (y_B - y_A) \cdot \underline{j}$

Nel Piano $\vec{AB} = (x_B - x_A) \cdot \underline{i} + (y_B - y_A) \cdot \underline{j}$

Nello Spazio $\vec{AB} = (x_B - x_A) \cdot \underline{i} + (y_B - y_A) \cdot \underline{j} + (z_B - z_A) \cdot \underline{k}$

EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA RETTA

Formula di Grassmann: $P = A + \underline{v}\, t$

- $\underline{v}\,t$: componenti del vettore
- A: Punto Fissato
- P: Generico punto sulla retta

$A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ $\quad \underline{v} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$

$$r_A(\underline{v}) = \begin{cases} x = x_A + lt \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases}$$

Parametri direttori della retta

Due rette sono parallele se hanno i parametri direttori proporzionali

Retta per due punti:

Dati due punti $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ troviamo il vettore $\vec{AB}$ e dopodiché calcoliamo la retta per A (o B) e parallela ad $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = \underbrace{(x_B - x_A)}_{=l} \cdot \underline{i} + \underbrace{(y_B - y_A)}_{=m} \cdot \underline{j} + \underbrace{(z_B - z_A)}_{=n} \cdot \underline{k}$$

$$r_A(\vec{AB}) = \begin{cases} x = x_A + l \cdot t \\ y = y_A + m \cdot t \\ z = z_A + n \cdot t \end{cases}$$

Esercizi:

$\underline{v} = -\frac{1}{3}\underline{i} + 2\underline{j} + 10\underline{k}$ $\quad A = (5, 7, 8)$

Scrivere le equazioni parametriche di $r_A(\underline{v})$:

$$r_A(\underline{v}): \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{3}t \\ y = 7 + 2t \\ z = 8 + 10t \end{cases}$$

$I \equiv (12, 09, 1997) \in r_A(\underline{v})$? No, perché il sistema è incompatibile

$$\begin{cases} 12 = 5 - \frac{1}{3}t \\ 9 = 7 + 2t \\ 1997 = 8 + 10t \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1989}{10} \end{cases}$$

Confronto tra rette:

$r: \begin{cases} x = 5-3t \\ y = 2 \\ z = 2t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1+6t \\ y = 2 \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad r \parallel -3\underline{i} + 2\underline{k}$, $s \parallel 6\underline{i} + 4\underline{k}$ $\Rightarrow r \not\parallel s$ perché non sono proporzionali

$r': \begin{cases} x = 5-3t \\ y = 2 \\ z = 2t \end{cases}$ $\quad s': \begin{cases} x = 1-6t \\ y = 2 \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad r' \parallel -3\underline{i} + 2\underline{k}$, $s' \parallel -6\underline{i} + 4\underline{k}$ $\Rightarrow r \parallel s$

$r' = s'$? Sì, solo se $A = (5,2,0) \in r'$ appartiene anche a s'

$\begin{cases} 5 = 1-6t \\ 2 = 2 \\ 0 = 4t \end{cases}$ $\begin{cases} t = -1 \\ \\ t = 0 \end{cases}$ Sistema incompatibile $\Rightarrow A \notin s' \Rightarrow$ rette distinte

---

$A = (5,7,8)$ $\quad B = (-1,6,8)$ $\quad r_A(\vec{AB})$

$\vec{AB} = -6\underline{i} - \underline{j}$ $\quad P = A + \underline{v} \cdot t$

$\begin{cases} x = 5-6t \\ y = 7-t \\ z = 8 \end{cases}$

TEOREMA

Fissato un riferimento nel piano $(O, [\underline{i}, \underline{j}])$ e $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli, l'equazione $ax+by+c=0$ rappresenta una retta parallela a $-b\underline{i} + a\underline{j}$

$(a,b) \neq (0,0)$ $\quad ax+by+c=0$ $\parallel -b\underline{i} + a\underline{j}$

Dimostrazione:

1° Caso $b \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ $\quad r_A(v) = \begin{cases} x = (\text{qualcosa}) \cdot t \\ y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot t \end{cases}$

$A = (0, -\frac{c}{b})$ $\quad \parallel (\underline{i} - \frac{a}{b}\underline{j}) \Rightarrow \parallel (-b\underline{i} + a\underline{j})$

2° Caso $b = 0 \Rightarrow ax+c=0$ $\quad r_A(v) = \begin{cases} x = -\frac{c}{a} \\ y = (\text{qualcosa}) \cdot t \end{cases}$

(Tesi $r \parallel a\underline{j} \parallel \underline{j}$)

$A = (-\frac{c}{a}, 0)$

Equazione cartesiana della generica retta passante per $A = (x_0, y_0)$ e parallela a $\underline{v} = -b\underline{i} + a\underline{j}$

$A \in r_A(v) \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

Esercizio: $r = (tg\,54, \sqrt[19]{7,5})$ $\quad \underline{v} = -\frac{1}{2}\underline{i} + 8^8\underline{j}$ $\quad r_M(v) = ?$

$r_M(v) = a(x-x_0) + b(y-y_0) =$
$= 8^8(x - tg\,54) + \frac{1}{2}(y - \sqrt[19]{7,5})$

$r_M(v): \begin{cases} x = tg\,54 - \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt[19]{7,5} + 8^8 t \end{cases}$

Per passare da una retta in forma parametrica ad una in forma cartesiana, basta ricavarsi il parametro da un'equazione e sostituirlo nelle altre:

$\begin{cases} x = \frac{75000}{\pi} \\ y = 7t \end{cases}$ $\quad r$ retta parallela a $7\underline{j} \parallel \underline{j}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{75000}{\pi} + 0 \cdot \left(\frac{y}{7}\right) = \frac{75000}{\pi} \\ t = \frac{y}{7} \end{cases}$

Determinare l'equazione di una retta s per B e parallela a r.

$r)$ $3x+2y-1=0$ $\quad B = (18,30)$ $\quad B \in r$? $\quad 3 \cdot 18 + 2 \cdot 30 - 1 \neq 0$
$B \notin r$

$r \parallel \underline{v}$ $\quad \underline{v} = -2\underline{i} + 3\underline{j}$

$r_B(v) = \begin{cases} x = 18 - 2t \\ y = 30 + 3t \end{cases}$ $\quad r_B(v) = 3(x-18) + 2(y-30) = 0$

Due rette in un piano hanno 0, 1 o tutti i punti in comune.

Dimostrazione:

r) $ax+by+c=0$

s) $a'x+b'y+c'=0$

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c' \end{cases}$$

se $rg\,A=2 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow r\cap s$ in un solo punto

se $rg\,A=1 \Rightarrow$ se $rg\,C=2 \Rightarrow$ Sistema incompatibile $r\cap s=\emptyset$ e r ed s $// -b\underline{i}+a\underline{j}$

$\Rightarrow$ Se $rg\,C=1 \Rightarrow r=s$

$rg\,A\neq 0$ poiché $(a,b)\neq(0,0)$

PIANO NELLO SPAZIO

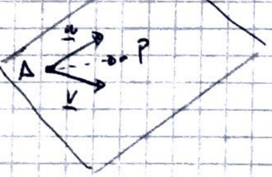
Piano passante per A e parallelo a due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non proporzionali:

$$\{P / \vec{AP} \in \langle \underline{v}, \underline{w}\rangle\} = \{P / \vec{AP} = s\cdot\underline{v} + t\cdot\underline{w}\}$$

$A=(x_A, y_A, z_A)$ $\quad \underline{v} = l\underline{i} + m\cdot\underline{j} + n\cdot\underline{k}$ $\quad \underline{w} = l'\underline{i} + m'\underline{j} + n'\cdot\underline{k}$

$P=(x,y,z)$

$$\vec{AP} = (x-x_A)\cdot\underline{i} + (y-y_A)\cdot\underline{j} + (z-z_A)\cdot\underline{k}$$



$$\begin{cases} x = x_A + l\cdot s + l'\cdot t \\ y = y_A + m\cdot s + m'\cdot t \\ z = z_A + n\cdot s + n'\cdot t \end{cases}$$

~ Equazione parametrica del piano per A e parallelo a $\underline{v}$, $\underline{w}$

Componenti di $\underline{w}$

Componenti di $\underline{v}$

Coordinate di A

Essendo $[\vec{AP}, \underline{w}, \underline{v}]$ linearmente dipendente, il determinante che si ottiene dalla matrice composta dalle componenti dei 3 vettori deve essere uguale a 0

$$\det\begin{pmatrix} \text{Componenti di } \vec{AP} \\ \text{componenti di } \underline{v} \\ \text{componenti di } \underline{w} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

quindi applicando il teorema di Laplace alla prima riga si ha:

$$(x-x_A)\cdot\det\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} - (y-y_A)\det\begin{pmatrix} l & n \\ l' & n' \end{pmatrix} + (z-z_A)\cdot\det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix} = 0$$

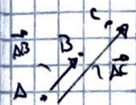
Equazione cartesiana di un piano per A e parallelo a $\underline{v}$ e $\underline{w}$

$ax+by+cz+d=0$ con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

PIANO PER 3 PUNTI

Per 3 punti non allineati passa uno ed un solo piano

Condizioni di allineamento di 3 punti:

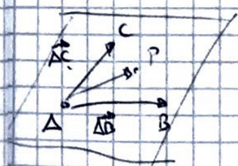


A, B, C allineati $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ proporzionali

$A=(5,7,8)$ $\quad B=(-1,2,3)$ $\quad C=(3,4,5)$

$\vec{AB} = -6\underline{i} - 5\underline{j} - 5\underline{k}$ $\quad \vec{AC} = -2\underline{i} - 3\underline{j} - 3\underline{k}$

Nel nostro caso $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ non sono proporzionali



equazione del piano: $\det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ -6 & -5 & -5 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} x-5 & y-7 & z-8 \\ -6 & -5 & -5 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-5)\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}_{0} - (y-7)\det\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + (z-8)\cdot\det\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-(y-7)(18-10) + (z-8)\cdot(18-10) = 0$$

$$-8y + 56 + 8z - 64 = 0$$

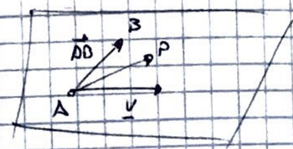
$$-8y + 8z - 8 = 0$$

$$-y + z - 1 = 0$$ ~ Piano per A, B e C

Esercizio: Calcolare l'equazione del piano per A e B e parallelo a $\underline{v}$

$A=(5,7,8)$ $\quad B=(1,0,0)$ $\quad \underline{v}=\underline{j}-\underline{k}$

$\vec{AB}=-4\underline{i}-7\underline{j}-8\underline{k}$ $\quad \vec{AB} \nparallel \underline{v}$ $\quad \vec{AP}=(x-5)\underline{i}+(y-7)\underline{j}+(z-8)\underline{k}$



$$\det\begin{pmatrix} x-5 & y-7 & z-8 \\ -4 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=0$$

$(x-5)(15)-(y-7)(4)+(z-8)(-4)=0$

$15x-75-4y+28-4z+32=0$

$15x-4y-4z-15=0$

Due piani nello spazio hanno in comune: 0 punti, una retta, tutti i punti.

Dimostrazione:

Fissato un riferimento $\pi)\ ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\pi')\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ $\quad (a',b',c')\neq(0,0,0)$

$$\begin{cases} ax+by+cz=-d \\ a'x+b'y+c'z=-d' \end{cases}$$

Se $rg\,A=2 \Rightarrow rg\,C=2 \Rightarrow \pi\cap\pi'$ forma una retta del tipo: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$

Se $rg\,A=1 \Rightarrow$ se $rg\,C=2 \Rightarrow$ Sistema incompatibile $\pi\cap\pi'=\emptyset$ allora $\pi // \pi'$

se $rg\,C=1 \Rightarrow$ Sono equazioni dello stesso piano, cioè $\pi=\pi'$

$rg\,A\neq 0$ poiché $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

generico piano per $A=(x_A,y_A,z_A)$: $\pi)\ a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\pi')\ a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\pi // \pi' \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$ cioè se $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

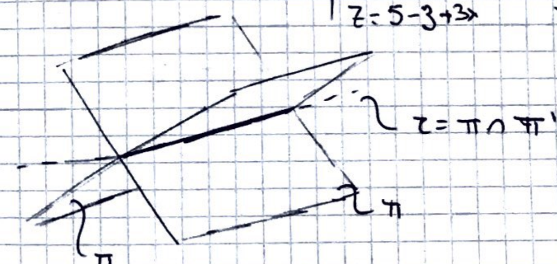
RETTE NELLO SPAZIO

Una retta, nello spazio, non è mai rappresentata da una sola equazione cartesiana (un'equazione nello spazio rappresenta un piano), infatti può essere rappresentata come intersezione tra due piani.

Es: $A:(1,0,5)$ $\quad \underline{v}=-\underline{i}+2\underline{j}-3\underline{k}$

$r_A(\underline{v}): \begin{cases} x=1-t \\ y=0+2t \\ z=5-3t \end{cases}$ ~ Trasformiamola in cartesiana

$\begin{cases} t=1-x \\ y=2-2x \\ z=5-3+3x \end{cases}$ $\quad \pi)\ 2x+y-2=0$ $\quad \pi')\ +3x-z+2=0$



Esercizio: Determinare una retta per A e contenuta in π

$\pi)\ 3x-2y+z-\frac{1}{2}=0$ $\quad A=(0,0,\frac{1}{2})\in\pi$

Troviamo un punto $B\in\pi$ $\quad B=(\frac{1}{6},0,0)$

$\vec{AB}=\frac{1}{6}\underline{i}-\frac{1}{2}\underline{k}$

$r_A(\vec{AB})=P+\vec{AB}\cdot t=\begin{cases} x=0+\frac{1}{6}t \\ y=0+0t \\ z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \end{cases}$ $\quad t=6x$ ~ $\begin{cases} z=\frac{1}{2}-3x \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+z-\frac{1}{2}=0 \\ y=0 \end{cases}$

Una retta e un piano nello spazio hanno in comune:
0 punti, 1 punto, tutti i punti (una retta).

$$r)\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 3+4t \end{cases} \qquad \pi)\ x+y+z-8=0$$

~~1° caso) Ricaviamo t dal sistema e la sostituiamo nell'equazione del piano~~

Sostituiamo i valori dal sistema nell'equazione del piano, e si possono verificare 3 casi:

1) $(1-\cancel{t})+(\cancel{t})+(3+4t)-8=0$

$4t-4=0$

$t=1$ ~ La retta e il piano si intersecano in un punto, che si ottiene sostituendo t nel sistema. ~ $r \cap \pi = P$

2) $0t=0$ ~ hanno tutti i punti in comune $r \cap \pi = \pi$

3) $0t=\neq 0$ ~ Nessun punto in comune $r \cap \pi = \emptyset$

Dimostrazione:

$$(r)\begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases} \qquad (\pi)\ ax+by+cz+d=0$$

$$a(x_0+lt)+b(y_0+mt)+c(z_0+nt)+d=0$$

$\vdots$

$$t = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{(al+bm+cn)}$$ ~ se $=0$ ci troviamo nei casi $0t=0$, $0t=n$

Una retta e un piano sono paralleli se e solo se
$al+bm+cn=0$

$$\underline{v} = l\underline{i}+m\underline{j}+n\underline{k} \ // \ \pi)\ ax+by+cz+d=0$$
$$\Updownarrow$$
$$al+bm+cn=0$$

Determinare una retta per A parallela a π

$A=(5,7,8)$ $\qquad \pi)\ 3x-y+z-1=0$

$$r_A\begin{cases} x = 5 + lt \\ y = 7 + mt \\ z = 8 + nt \end{cases} \qquad r_A // \pi \Leftrightarrow 3l-m+n=0$$

$l=1 \quad m=0 \quad n=-3$

$$r_A = \begin{cases} x = 5+t \\ y = 7 \\ z = 8-3t \end{cases}$$

Una retta non parallela si ottiene imponendo che $3l-m+n \neq 0$

Equazioni degli assi nello spazio

$$\begin{cases} x = 0+t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0+t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0+t \end{cases}$$

Asse x $\qquad$ Asse y $\qquad$ Asse z

In equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Un piano $ax+by+cz+d=0$ è parallelo all'asse x ($//\ \underline{i} = 1\underline{i}+0\underline{j}+0\underline{k}$; l, m, n)

Quando: $al+bm+cn=0$

$a(1)+b(0)+c(0)=0$

$a=0$ ~ $by+cz+d=0$ piano parallelo all'asse x

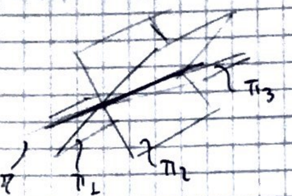
$ax+cz+d=0$ piano parallelo all'asse y

$ax+by+d=0$ piano parallelo all'asse z

(se $d=0$ il piano passa per l'origine

FASCIO DI PIANI PROPRIO

Per fascio di piani proprio, si intende l'insieme di tutti i piani che contengono la stessa retta.



$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$$\pi_{\alpha,\beta})\ \alpha(\underbrace{ax+by+cz+d}_{=0})+\beta(\underbrace{a'x+b'y+c'z+d'}_{=0})=0$$

generico piano contenente r

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ $\quad \forall P\in r \Rightarrow P\in\pi_{\alpha,\beta}$

Scrivere l'equazione del generico piano contenente l'asse y

$$r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \pi_{\alpha,\beta})\ \alpha x+\beta z=0$$

Scrivere l'equazione del piano contenente r e passante per A:

$$r: \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases} \qquad A=(5,7,8)$$

$\alpha(3x+y-z-1)+\beta(x-y+z)=0$

$A\in\pi_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha(3\cdot5+7-8-1)+\beta(5-7+8)=0$

$\alpha(15+7-8-1)+6\beta=0$

$13\alpha+6\beta=0$

$\alpha=-6 \quad \beta=13 \Rightarrow$ il piano contenente r e passante per A è il seguente:

$$-6(3x+y-z-1)+13(x-y+z)=0$$

Scrivere l'equazione del piano contenente r e parallelo a $\underline{v}$:

$$r: \begin{cases} 3x+y-z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \qquad \underline{v}=\underline{i}-3\underline{k}$$

$\alpha(3x+y-z-1)+\beta(x-y+z)=0$

$3\alpha x+\alpha y-\alpha z-\alpha+\beta x-\beta y+\beta z=0$

$\pi_{\alpha\beta})\ (3\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y+(-\alpha+\beta)z+(-\alpha)=0$

$\pi_{\alpha\beta} \parallel \underline{v} \Leftrightarrow al+bm+cn=0$

$(3\alpha+\beta)\cdot1+(-\alpha+\beta)\cdot(-3)=0$

$3\alpha+\beta+3\alpha-3\beta=0$

$6\alpha-2\beta=0$

$\alpha=2 \quad \beta=6 \qquad \pi)\ 2(3x+y-z-1)+6(x-y+z)=0$

$\Leftrightarrow (3x+y-z-1)+3(x-y+z)=0$

Due rette sono sghembe $\Leftrightarrow$ non sono né parallele né incidenti $\Leftrightarrow$ non sono complanari

Per verificare se due rette sono sghembe, bisogna analizzare i parametri direttori.

Parametri direttori (delle due rette):
- Proporzionali — Parallele
- Non proporzionali — Incidenti / Sghembe

Se i parametri direttori non sono proporzionali, per vedere se sono incidenti o sghembe, abbiamo bisogno che una retta sia espressa in forma parametrica e l'altra in forma cartesiana. Quindi sostituiamo la x, y e z di quella in forma cartesiana, con quelli della parametrica. Se il sistema è compatibile in t, le rette sono incidenti altrimenti sono sghembe.

$r\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=5t \end{cases}$ $\quad$ Parametri direttori non proporzionali $\Downarrow$ $r \nparallel s$

$$r\begin{cases} x=1-\frac{y-2}{2} \\ t=\frac{y-2}{2} \\ z=3 \end{cases} : \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ z=3 \end{cases} : \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ z=3 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2t+3t-4=0 \\ 5t=3 \end{cases} \begin{cases} 5t=4 \\ 5t=3 \end{cases}$$ → incompatibili $\Downarrow$ r e s sono sghembe

---

Determinare le componenti di un vettore parallelo a s

$$s:\begin{cases} 3x-2y+z-1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$rg\, A = rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{cases} 3x-2y=1-t \\ x+y=0 \\ z=t \end{cases}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

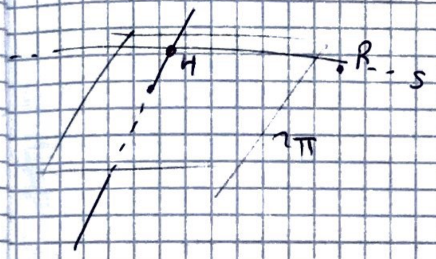
$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1-t}{5} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1-t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{5} = \frac{t-1}{5}$$

$$s:\begin{cases} x=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}t \\ y=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}t \\ z=t \end{cases} \qquad \underline{V}/\!/s \Rightarrow \underline{V} = -\frac{1}{5}\underline{i}+\frac{1}{5}\underline{j}+\underline{k}$$

Per determinare l'equazione del piano che è parallelo a due rette (rette complanari), trasformiamo le due rette in forma parametrica, dopodiché scegliamo due punti su una e uno sull'altra, e applichiamo la formula per il piano passante per 3 punti.

Esercizio: Dato un punto R e l'equazioni di un piano e di una retta, trovare la retta s passante per R, incidente r e parallela a π.

$R:(0,0,1) \qquad \pi)\ 3x-z-1=0 \qquad r:\begin{cases} x=2t+2 \\ y=3t+3 \\ z=4t+4 \end{cases}$



$r/\!/\pi$? $\quad al+bm+cn=0 \Rightarrow (3\cdot 2)+(0\cdot 3)+(-1\cdot 4)=0 \Rightarrow 6-4=0$
Non sono paralleli

$H\in r \Rightarrow H=(2t+2;\ 3t+3;\ 4t+4)$

$\vec{RH} = (2t+2-0)\underline{i}+(3t+3-0)\underline{j}+(4t+4-1)\underline{k} = (2t+2)\underline{i}+(3t+3)\underline{j}+(4t+3)\underline{k}$

$\vec{RH}/\!/\pi \Rightarrow al+bm+cn=0 \Rightarrow 3(2t+2)-(4t+3)=0$
$\Downarrow$
$6t+6-4t-3=0$
$\Downarrow$
$2t+3=0$
$\Downarrow$
$t=-\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{RH} = -\underline{i}-\frac{3}{2}\underline{j}-3\underline{k}$

$$s:\begin{cases} x=-t \\ y=-\frac{3}{2}t \\ z=1-3t \end{cases} \qquad H=\left(-1,-\frac{3}{2},-2\right)$$

PRODOTTO SCALARE STANDARD TRA VETTORI GEOMETRICI

$\underline{v}, \underline{w}$ vettori geometrici

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{cases} 0 & \text{se } \underline{v} \circ \underline{w} = \underline{0} \\ |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos \widehat{\underline{v}\,\underline{w}} & \text{se } \underline{v} \text{ e } \underline{w} \neq \underline{0} \end{cases}$$

Proprietà del prodotto scalare:

1. Commutativa: $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
2. $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}| |\underline{v}| \cdot \cos 0° = |\underline{v}|^2$
3. $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$

Il versore è un vettore di lunghezza 1

$\underline{v}$ versore $\Leftrightarrow |\underline{v}| = 1$

$(O, [\underline{i}, \underline{j}])$ e $(O, [\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}])$ riferimenti cartesiani

$\Updownarrow$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ versori e a due a due ortogonali

$$\left.\begin{matrix} \underline{i} \cdot \underline{i} = 1 & \underline{j} \cdot \underline{j} = 1 & \underline{k} \cdot \underline{k} = 1 \\ \underline{k} \cdot \underline{i} = 0 & \underline{j} \cdot \underline{k} = 0 & \underline{i} \cdot \underline{j} = 0 \end{matrix}\right\} \sim \text{In un riferimento cartesiano.}$$

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è uguale a 0

L'angolo compreso tra due vettori si ricava da:

$$\cos \widehat{\underline{v}\,\underline{w}} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{(l\underline{i} + m\underline{j}) \cdot (l'\underline{i} + m'\underline{j})}{\sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} \cdot \sqrt{\underline{w} \cdot \underline{w}}} = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2} + \sqrt{l'^2 + m'^2}}$$

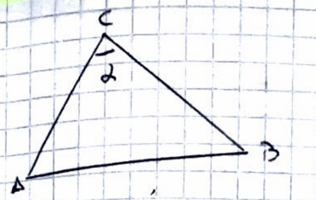
LUNGHEZZA DI UN VETTORE

$$|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{(l\underline{i} + m\underline{j})(l\underline{i} + m\underline{j})} = \sqrt{l^2 \cdot \underline{i}^2 + m^2 \cdot \underline{j}^2 + 2(l \cdot m) \cdot (\underline{i} \cdot \underline{j})}$$

$\underline{v} = l\underline{i} + m\underline{j}$

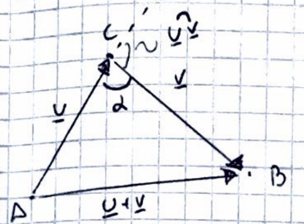
se in un riferimento cartesiano $|\underline{v}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$

TEOREMA DI CARNOT



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \alpha$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$



$$|\underline{u} + \underline{v}|^2 = (\underline{u} + \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) =$$
$$= \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} =$$
$$= |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + 2(\underline{u} \cdot \underline{v}) = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 + 2(|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \widehat{\underline{u}\underline{v}}) =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{CB} \cdot \cos(\widehat{\underline{u}\underline{v}}) =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \alpha$$

$\alpha = 180° - \widehat{\underline{u} \cdot \underline{v}}$

VERSORI PARALLELI AD UN VETTORE

$\underbrace{|\alpha \cdot \underline{v}|}_{\text{Vettore parallelo a } \underline{v}} = 1 \Rightarrow |\alpha| \cdot |\underline{v}| = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{|\underline{v}|} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{|\underline{v}|}$ ~ Ogni vettore ha due versori paralleli

Data una retta è sempre possibile calcolare due versori paralleli alla retta data (l'uno ha il verso opposto dell'altro)

Dato che i versori sono vettori di lunghezza 1 per trovarli, basta trovare il vettore parallelo alla retta assegnata, e dividerlo per la sua lunghezza:

Data una retta $ax + by + c = 0$ il vettore parallelo è $\underline{v} = -b\underline{i} + a\underline{j}$

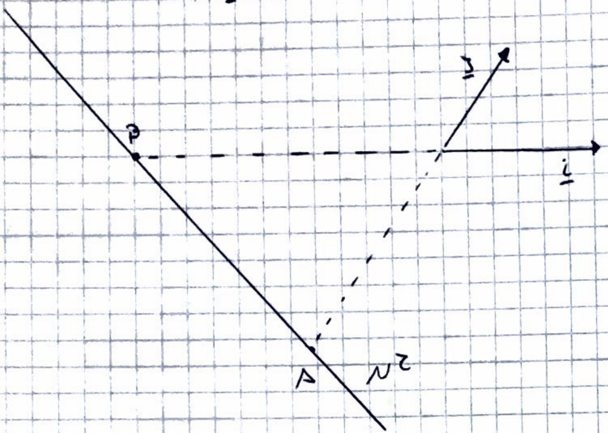
Quindi i versori paralleli alla retta sono:

$\frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$ e $-\frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$ ~ versori paralleli a $\underline{v}$

Esercizio: Calcolare i versori paralleli ad r

$R=(O;[\underline{i},\underline{j}])$ $\quad |\underline{i}|=2=3|\underline{j}|$ $\quad \hat{ij}=\frac{\pi}{3}$ $\quad r: x+y+2=0$

$|\underline{i}|=2$ $\quad |\underline{j}|=\frac{2}{3}$ $\quad \underline{i}\cdot\underline{j}=|\underline{i}|\cdot|\underline{j}|\cdot\cos\hat{ij}=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}$



x	y	
0	-2	A
-2	0	B

$r \parallel -\underline{i}+\underline{j}$ $\qquad |-\underline{i}+\underline{j}|=\sqrt{(-\underline{i}+\underline{j})(-\underline{i}+\underline{j})}=\sqrt{\underline{i}^2+\underline{j}^2-2\underline{i}\underline{j}}=\sqrt{4+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{28}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$

$$\frac{1}{|-\underline{i}+\underline{j}|}\cdot(-\underline{i}+\underline{j})=\frac{-\underline{i}+\underline{j}}{\frac{2}{3}\sqrt{7}}=\frac{3(-\underline{i}+\underline{j})}{2\sqrt{7}}$$

$$-\frac{1}{|-\underline{i}+\underline{j}|}\cdot(-\underline{i}+\underline{j})=\frac{+\underline{i}-\underline{j}}{\frac{2}{3}\sqrt{7}}=\frac{3(\underline{i}-\underline{j})}{2\sqrt{7}}$$

Calcolare le equazioni di una retta s passante per R che formi un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r: $|\underline{i}|=2$ $\quad |\underline{j}|=\frac{2}{3}$ $\quad |\underline{i}\cdot\underline{j}|=\frac{2}{3}$

$R=(2,3)$ $\qquad r: x+y+2=0$ $\qquad a(x-2)+b(y-3)=0 \parallel -b\underline{i}+a\underline{j}$ — generica retta per R

$\hat{\underline{v}\underline{w}}=\frac{\pi}{4}$ $\qquad \cos\hat{\underline{v}\underline{w}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(-\underline{i}+\underline{j})(-b\underline{i}+a\underline{j})}{|-\underline{i}+\underline{j}||-b\underline{i}+a\underline{j}|}=\frac{b\underline{i}^2+a\underline{j}^2-a\underline{i}\underline{j}-b\underline{i}\underline{j}}{\frac{\sqrt{28}}{3}\cdot\sqrt{4b^2-\frac{4}{3}ab+\frac{4}{9}a^2}}=\frac{4b+\frac{4}{9}a-\frac{2}{3}(a+b)}{\frac{\sqrt{28}}{3}\cdot\sqrt{4b^2-\frac{4}{3}ab+\frac{4}{9}a^2}}$$

Dopo di ché elevando al quadrato entrambi i membri verrà fuori un equazione del tipo $Aa^2+Bab+Cb^2=0$
- Se $b=0$ verrà $a=0$: Impossibile
- Se $b\neq0$ lo imponiamo uguale a 1

Per esempio $3a^2-2ab-b^2=0$ $\qquad b=1$

$3a^2-2a-1=0$ $\qquad \Delta=16$

$a=\frac{2\pm4}{6} < \begin{matrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{matrix}$

$$\begin{cases}-\frac{1}{3}(x-2)+1(y-3)=0\\ 1(x-2)+1(y-3)=0\end{cases}$$ Equazioni delle due rette che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con s.

Trovare un vettore ortogonale ad r di lunghezza 30^{30}

$\cos\hat{vw}=0 \Rightarrow \underline{v}\cdot\underline{w}=0$ condizione di ortogonalità

$(-\underline{i}+\underline{j})(l\underline{i}+m\underline{j})=0$ $\qquad |\underline{i}|=2 \quad \underline{i}^2=4$

$-4l+\frac{4}{9}m+(-m+l)\cdot\frac{2}{3}=0$ $\qquad |\underline{j}|=\frac{2}{3} \quad \underline{j}^2=\frac{4}{9}$

$|\underline{i}\underline{j}|=\frac{2}{3}$

$-36l+4m-6m+6l=0$

$+30l+2m=0$

$l=-2 \quad m=30$

$l=-1 \quad m=15 \Rightarrow \underline{w}=-\underline{i}+15\underline{j}$

$|\underline{w}|=\sqrt{(-\underline{i}+15\underline{j})(-\underline{i}+15\underline{j})}=$

Vettore di lunghezza 30^{30} = versore moltiplicato per 30^{30}: $30^{30}\cdot\frac{(-\underline{i}+15\underline{j})}{|-\underline{i}+15\underline{j}|}$

VETTORI ORTOGONALI IN UN RIFERIMENTO CARTESIANO

Due vettori $\underline{v}=l\underline{i}+m\underline{j}$ e $\underline{w}=l'\underline{i}+m'\underline{j}$ sono ortogonali se:

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0$ $\qquad$ in RC: $|\underline{i}|=1 \quad \underline{i}^2=1$

$(l\underline{i}+m\underline{j})(l'\underline{i}+m'\underline{j})=0$ $\qquad |\underline{j}|=1 \quad \underline{j}^2=1$

$ll'+mm'=0$ $\qquad \underline{i}\cdot\underline{j}=0$

Quindi se un vettore $\underline{w}$ deve essere perpendicolare ad una retta $r: ax+by+c=0$, troviamo il vettore $\underline{v}$ parallelo a r: $\underline{v}=-b\underline{i}+a\underline{j}$ ed impostiamo la condizione

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$-bl'+am'=0 \Rightarrow \begin{matrix}l'=a\\ m'=b\end{matrix} \Rightarrow \underline{w}=a\underline{i}+b\underline{j}$

Esercizio: ① Trovare un vettore ortogonale alla retta $(\text{sen}\,30)x + (\cos 30)y + \log 30 = 0$

dato da $r \parallel -\cos 30\,\underline{i} + \text{sen}\,30\,\underline{j}$ scelgo il vettore $\underline{w} = \text{sen}\,30\,\underline{i} + \cos 30\,\underline{j}$

② Trovarne anche uno lungo 2016:

$\underline{w}' = (2016) \cdot \frac{1}{|\underline{w}|} \cdot \underline{w} = 2016(\text{sen}\,30\,\underline{i} + \cos 30\,\underline{j})$

$\hookrightarrow \sqrt{\text{sen}^2 30 + \cos^2 30} = \sqrt{1} = 1$

Data la retta $r: 3x - y + 2016 = 0$ Trovare 3 vettori ortogonali

$\underline{v}' = 3\underline{i} - \underline{j}$ $\underline{v}'' = 6\underline{i} - 2\underline{j}$ $\underline{v}''' = -3\underline{i} + \underline{j}$

ANGOLI ACUTI E OTTUSI TRA VETTORI

Siano $(\underline{v}, \underline{w}) \neq (\underline{0}, \underline{0})$: l'angolo $\widehat{\underline{v}\underline{w}}$ è acuto $[0, \frac{\pi}{2}[\iff \underline{v} \cdot \underline{w} > 0$

l'angolo $\widehat{\underline{v}\underline{w}}$ è ottuso $]\frac{\pi}{2}, \pi] \iff \underline{v} \cdot \underline{w} < 0$

Perché dato da $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|}$; essendo $|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|$ sempre positivo il valore di $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ dipende solo da $\underline{v} \cdot \underline{w}$

COSENI DIRETTORI (Riferimento cartesiano)

Le componenti di un versore si chiamano coseni direttori

Sia $\underline{u} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$ un versore, cioè $|\underline{u}| = 1$

$\cos \widehat{\underline{u}\underline{i}}$ = coseno dell'angolo formato da $\underline{u}$ e l'asse x $= \frac{\underline{u} \cdot \underline{i}}{|\underline{u}||\underline{i}|} = \frac{(l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}) \cdot \underline{i}}{1} = l$

$\cos \widehat{\underline{u}\underline{j}} = m$; $\cos \widehat{\underline{u}\underline{k}} = n$

Esercizio: determinare un vettore $\underline{w}$ di lunghezza 5, che formi un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r e un angolo acuto con l'asse x ($\underline{i}$).

Step: ① Trovare il vettore $\underline{w}$ che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r

② Trovare il vettore $\underline{w}'$ lungo 5

③ Scegliere quello che forma un angolo acuto con $\underline{i}$

(RC) $|\underline{i}| = |\underline{j}| = 1$, $\underline{i} \cdot \underline{j} = 0$ $r: 3x + y - 1 = 0 \parallel -\underline{i} + 3\underline{j}$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{(-\underline{i} + 3\underline{j})(l\underline{i} + m\underline{j})}{|-\underline{i} + 3\underline{j}|\,|l\underline{i} + m\underline{j}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-l + 3m}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{l^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(-l + 3m)^2}{10 \cdot (l^2 + m^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10l^2 + 10m^2 = 2l^2 + 18m^2 - 12lm \Rightarrow 8l^2 - 8m^2 + 12lm = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2l^2 + 3lm - 2m^2 = 0$

$\llcorner m = 1$ $2l^2 + 3l - 2 = 0$ $\Delta = 9 + 16 = 25$

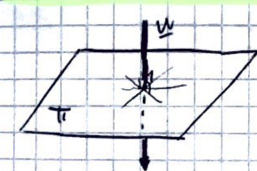
$l = \frac{-3 \pm 5}{4} < \begin{matrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$\underline{v} = -2\underline{i} + \underline{j}$ $|\underline{v}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

$\underline{v}'_1 = \frac{5}{\sqrt{5}}(-2\underline{i} + \underline{j})$ $\underline{v}'_2 = -\frac{5}{\sqrt{5}}(-2\underline{i} + \underline{j})$ Questo forma un angolo acuto

$\underline{v}'_1 \cdot \underline{i} = -\frac{10}{\sqrt{5}}$ $\underline{v}'_2 \cdot \underline{i} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

VETTORE ORTOGONALE AD UN PIANO (Riferimento Cartesiano)



Un vettore $\underline{w}$ è ortogonale ad un piano π se e solo se è ortogonale a tutti i vettori che appartengono al piano π

$\underline{w} \perp \pi \overset{\text{def}}{\iff} \underline{w} \perp \underline{v} \quad \forall \underline{v} \parallel \pi \iff \underline{w} \cdot \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{v} \parallel \pi$

$\pi)\ ax + by + cy + d = 0$

$\underline{v} \neq l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k} = 0$

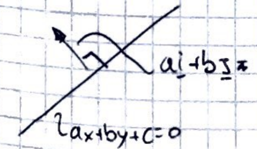
$\underline{w} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$

$\underline{v} \parallel \pi \iff al + bm + cn = 0$

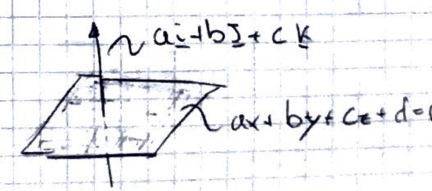
$al + bm + cn = (a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k})(l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k})$

Il vettore ortogonale a $\pi)\ ax + by + cz + d = 0$ è $\underline{w} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$

Nel piano

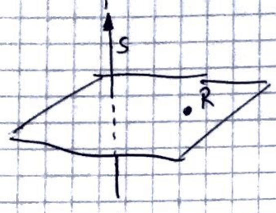


Nello spazio



(RC) Determinare l'equazione del piano passante per R e perpendicolare ad s

$R \equiv (1, 3, \frac{2}{3})$ $s) \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 6t \\ z = \sqrt{5} - 8t \end{cases}$



$s \parallel 5\underline{i} + 6\underline{j} - 8\underline{k}$

generico piano per R $a(x-1) + b(y-3) + c(z - \frac{2}{3}) = 0$

dato che $s \parallel a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ $\pi)\ 5(x-1) + 6(y-3) - 8(z - \frac{2}{3}) = 0$

(RC) Determinare una retta s per R ortogonale a π ed una retta s' per R non ortogonale

$\pi)\ 3x - z + \log_3 30 =$ $R \equiv (1, 3, \frac{2}{3})$

$s \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 0t \\ z = \frac{2}{3} - t \end{cases}$ $s' \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 10t \\ z = \frac{2}{3} + 0t \end{cases}$

DISTANZA TRA DUE PUNTI

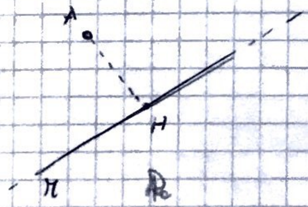
Dati due punti A e B, la loro distanza è pari alla lunghezza del vettore $\vec{AB}$

$A \equiv (x_A, y_A, z_A)$
$B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ $\vec{AB} = (x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}$

$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

se il riferimento è cartesiano

DISTANZA TRA UN PUNTO E UNA RETTA (RC) (Nel Piano)



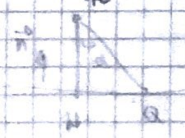
$d(A, r) = |\vec{AH}|$

$H = r \cap$ (retta per A ortogonale a r)

$d = \dfrac{a x_0 + b y_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\vec{n} \cdot \vec{P_0 Q} = |\vec{n}| |\vec{P_0 Q}| \cos\alpha = |\vec{n}|\, d(P_0, H)$

$d(P_0, H) = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{P_0 Q}}{|\vec{n}|}$



DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO (RC)

$d(A, \pi) = |\vec{AH}|$

$A = (x_A, y_A, z_A)$ $\pi)\ ax + by + cz + d = 0$

$s: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ $H = \pi \cap s$

$a(x_A - at) + b(y_A - bt) + c(z_A - ct) + d = 0$

$t_H = \dfrac{-ax_A - by_A - cz_A - d}{a^2 + b^2 + c^2}$ Valore del parametro t per ottenere H dalla retta s

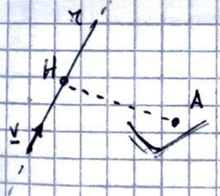
$H = (x_A + at_H;\ y_A + bt_H;\ z_A + ct_H)$

$d(A,H) = |\vec{AH}| = \sqrt{(x_A + at_H - x_A)^2 + (y_A + bt_H - y_A)^2 + (z_A + ct_H - z_A)^2} =$

$= \sqrt{a^2 t_H^2 + b^2 t_H^2 + c^2 t_H^2} = \sqrt{t_H^2 (a^2 + b^2 + c^2)} = |t_H| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

DISTANZA TRA UN PUNTO E UNA RETTA (RC) (Nello Spazio)



1) Supponiamo un H generico sulla retta r, e poi imponiamo che $\vec{AH} \cdot \underline{v} = 0$ (condizione di ortogonalità)

$r: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases}$ $A = (x_A, y_A, z_A)$

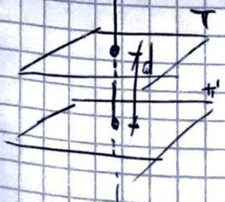
Piano per A ortogonale r ???

$\pi)\ \ell(x - x_A) + m(y - y_A) + n(z - z_A) = 0$

$H = r \cap \pi$

poi si calcola $d(A, H)$

DISTANZA TRA DUE PIANI PARALLELI NELLO SPAZIO



$\pi)\ ax + by + cz + d = 0$

$\pi')\ ax + by + cz + d' = 0$

DIMOSTRAZIONE A PIACERE

$d(\pi, \pi') = \dfrac{|d' - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

CIRCONFERENZE (come luogo geometrico)

$\{P / |\vec{LP}| = 5\}$ ~ circonferenza di centro L con raggio pari a 5

Es. $L = (-1; \frac{1}{3})$ $P = (x, y)$ $\sqrt{(x+1)^2 + (y-\frac{1}{3})^2} = 5$

$(x+1)^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = 25$

$x^2 + y^2 + 2x - \frac{2}{3}y - \frac{215}{9} = 0$

Equazione di una generica circonferenza:

$\Gamma)\ x^2 + y^2 + mx + ny + q = 0$ $R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - q}$

Centro: $\left(-\frac{m}{2}; -\frac{n}{2}\right)$

Se $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - q$
- > 0 L'equazione Γ è soddisfatta da infiniti punti reali
- $= 0$ L'equazione Γ è soddisfatta da un solo punto reale, il centro
- < 0 L'equazione Γ non è soddisfatta da alcun punto reale (circonferenza immaginaria)

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ ⇝ Circonferenza immaginaria

SFERE (come luogo geometrico)

$\{P / |\vec{LP}| = 5\}$ ~ Sfera di centro L con raggio pari a 5

$\Gamma)\ x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$ $R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q}$

centro $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$

Esercizi: Calcolare le coordinate del centro della circonferenza

$\Gamma)\ 3x^2 + 3y^2 - 2x - y - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{7}{3} = 0$

Centro: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ $R = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{89}{36}} = \frac{\sqrt{89}}{6}$

Determinare una circonferenza di centro C, che non intersechi r in punti reali

$r)\ x - 2y + 3 = 0$ $C = (5, 2) \notin r$

$d(C, r) = \frac{|4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$????

Scegliamo un raggio minore di $d(C, r)$

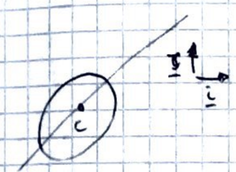
$R = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$

$-4y - 10x + x^2 + 25 + y^2 + 4 = \frac{4}{5} \Rightarrow \Gamma)\ x^2 + y^2 - 10x - 4y + \frac{141}{5} = 0$

Trovare una circonferenza che intersechi r in due punti reali

$r)\ 3x + 33567y - \frac{\log_2 3}{\cos 8} = 0$

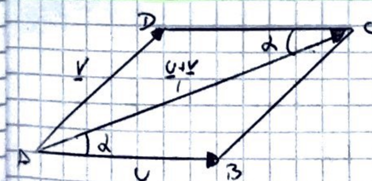


Prendiamo il centro su r e un raggio arbitrario

$C = \left(\frac{\log_2 3}{3\cos 8}, 0\right)$ $R = \frac{\pi}{4}$

$\left(x - \frac{\log_2 3}{3\cos 8}\right)^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}$

BISETTRICE DI UN ANGOLO



$\underline{u} + \underline{v}$ è la bisettrice di $\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}$ $\iff |\underline{u}| = |\underline{v}|$

Esercizio: Determinare le equazioni delle bisettrici

$\underline{w} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$ $\underline{w}' = l'\underline{i} + m'\underline{j} + n'\underline{k}$ $A = (x_0, y_0, z_0)$

Trovo i versori paralleli ai due vettori e poi li sommo

$P = A + t\left(\frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} + \frac{\underline{w}'}{|\underline{w}'|}\right)$ $P' = A + t\left(\frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} - \frac{\underline{w}'}{|\underline{w}'|}\right)$

Se $\underline{w} \cdot \underline{w}' > 0$ $\frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} + \frac{\underline{w}'}{|\underline{w}'|}$ ⇝ Direzione della bisettrice dell'angolo acuto

Se $\underline{w} \cdot \underline{w}' < 0$ $\frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} + \frac{\underline{w}'}{|\underline{w}'|}$ ⇝ Direzione della bisettrice dell'angolo ottuso

$r)\ 2x+3y-5=0 \quad // \ \underline{w} = -3\underline{i}+2\underline{j}$

$s)\ x-2y+1=0 \quad // \ \underline{w}' = 2\underline{i}+\underline{j}$

$|\underline{w}| = \sqrt{13}$

$|\underline{w}'| = \sqrt{5}$

$$A \equiv \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \qquad A=(1,1)$$

Determinare la bisettrice dell'angolo ottuso:

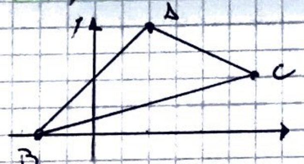
$\underline{w}\cdot\underline{w}' = (-3\underline{i}+2\underline{j})(2\underline{i}+\underline{j}) = -6+2 = -4 < 0$

$$s' = \begin{cases} x = 1 + t\left(-\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) & \text{in considerazione i coefficienti di } \underline{i} \\ y = 1 + t\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) & \text{in " " " " } \underline{j} \end{cases}$$

$$s' \ // \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\underline{i} + \left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\underline{j}$$

$$s')\ -\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(x-1) + \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)(y-1) = 0$$

AREA DI UN TRIANGOLO



$$\text{Area} = \frac{|BC|\cdot|AH|}{2} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}\right|$$

PRODOTTO VETTORIALE

$\underline{u}, \underline{v} \in V^3$

$\underline{u} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$

$\underline{v} = l'\underline{i} + m'\underline{j} + n'\underline{k}$

Il prodotto vettoriale tra due vettori, per definizione è:

$$\underline{u}\times\underline{v} \overset{def}{=} \det\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix}\underline{i} - \det\begin{pmatrix} l & n \\ l' & n' \end{pmatrix}\underline{j} + \det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix}\underline{k}$$

Indipendentemente dal riferimento

Proprietà:

$\underline{u}\times\underline{0} = \underline{0}$

$\underline{u}\times\underline{v} = \underline{0} \iff \text{rg}\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} < 2 \iff \underline{u} \text{ e } \underline{v}$ sono proporzionali

Il vettore ottenuto mediante il prodotto scalare di due vettori, è sempre perpendicolare al piano contenente i due vettori

Dimostrazione (Nel riferimento cartesiano)

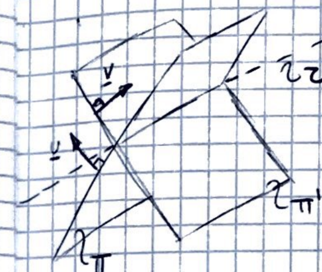
$$\underline{u}\cdot(\underline{u}\times\underline{v}) = l\det\begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} - m\det\begin{pmatrix} l & n \\ l' & n' \end{pmatrix} + n\det\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 1ª riga}}{=} \det\begin{pmatrix} l & m & n \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio: Calcolare i parametri direttori di una retta nello spazio

$$\begin{cases} \pi)\ e^3 x + \log_2 3\, y - \text{sen}\, 8 = 0 \\ \pi')\ \text{tg}\, 4\, x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + 30 z = 0 \end{cases}$$

$\underline{u} \perp \pi = e^3\underline{i} + \log_2 3\,\underline{j}$

$\underline{v} \perp \pi' = \text{tg}\,4\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + 30\underline{k}$



$$r \ // \ \underline{u}\times\underline{v} = \det\begin{pmatrix} \log_2 3 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 30 \end{pmatrix}\underline{i} - \det\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ \text{tg}\,4 & 30 \end{pmatrix}\underline{j} + \det\begin{pmatrix} e^3 & \log_2 3 \\ \text{tg}\,4 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\underline{k}$$

Parametri direttori di r

$f: V \to V'$

- Dominio è tutto V
- Codominio = Immagine di f = $\mathrm{Im}\, f$

→ I vettori $\underline{v}' \in V'$ tali che esiste un vettore $\underline{v} \in \underline{V}$ tali che $f(\underline{v}) = \underline{v}'$; cioè:

$$\mathrm{Im} f = \{ \underline{v}' \in V' / \exists\, \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{v}' \}$$

- Tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che la propria immagine sia il vettore nullo, si dice che appartengono al Kernel di f (Nucleo di f); cioè

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ \underline{v} \in V / f(\underline{v}) = \underline{0}' \}$$

APPLICAZIONI LINEARI - OMOMORFISMI

Un'applicazione lineare, è una funzione da V in V' che soddisfa 2 proprietà:

1) $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in V \qquad f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$

2) $\forall\, \underline{v} \in V$ e $\forall \alpha \in \underline{R} \qquad f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

Proposizione 1) Sia $f: V \to V'$ un omomorfismo: L'immagine del vettore nullo è uguale al vettore nullo:

$$f(\underline{0}) = \underline{0}'$$

Quando f è un omomorfismo il nucleo non è mai vuoto, vi appartiene sempre il vettore nullo:

$$\underline{0} \in \mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$$

Dimostrazione: $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) \Rightarrow \alpha = 0 \quad f(0\underline{v}) = 0 f(\underline{v}) \Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0}'$

Proposizione 2) Sia $f: V \to V'$ un omomorfismo:

① Il nucleo è un sottospazio di V

② L'immagine è un sottospazio di V'

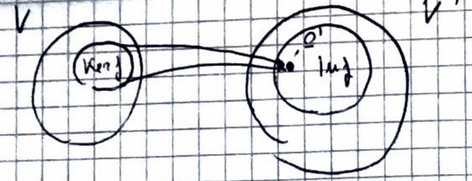
Dimostrazione: ①

Ipotesi:	Tesi: $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in \mathrm{Ker} f$ si ha $\underline{u}+\underline{v} \in \mathrm{Ker} f$ e $\alpha \underline{u} \in \mathrm{Ker} f \ \forall \alpha \in \underline{R}$
$f(\underline{v}) = \underline{0}'$	$f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = \underline{0}' + \underline{0}' = \underline{0}'$
$f(\underline{u}) = \underline{0}'$	$f(\alpha \underline{u}) = \alpha f(\underline{u}) = \alpha \cdot \underline{0}' = \underline{0}'$

Dimostrazione ②

Ipotesi:	Tesi: $\underline{u}' + \underline{v}' \in \mathrm{Im} f \quad \alpha \underline{u}' \in \mathrm{Im} f$
$\underline{u}', \underline{v}' \in \mathrm{Im} f$	$\underline{u}' + \underline{v}' = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = f(\underline{u}+\underline{v})$
	$\alpha \underline{u}' = \alpha f(\underline{u}) = f(\alpha \underline{u})$

$f: V \to V'$



FUNZIONE INIETTIVA

Una funzione è iniettiva se $\forall \underline{u} \neq \underline{v}$ in V si ha $f(\underline{u}) \neq f(\underline{v})$

O in alternativa: $f(\underline{u}) = f(\underline{v}) \Rightarrow \underline{u} = \underline{v}$

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI OMOMORFISMI INIETTIVI

$f: V \to V'$ è un omomorfismo iniettivo $\Leftrightarrow$ $\text{Ker } f = \{\underline{0}\}$

Dimostrazione (Da SX a DX)

Prendiamo $\underline{u} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\underline{u}) = \underline{0}'$

Ma sappiamo che $f(\underline{0}) = \underline{0}'$

Dato che f è iniettiva $f(\underline{u}) = f(\underline{0}) \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

Dimostrazione (Da DX a SX)

(Tesi $\underline{u}=\underline{v}$) Supponiamo che

$$f(\underline{u}) = f(\underline{v})$$
$$\Downarrow$$
$$f(\underline{u}) - f(\underline{v}) = \underline{0}'$$
$$\Downarrow$$
$$f(\underline{u}) + (-1) f(\underline{v}) = \underline{0}'$$
$$\Downarrow$$
$$f(\underline{u}) + f(-\underline{v}) = \underline{0}'$$
$$\Downarrow$$
$$f(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{0}'$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{u} - \underline{v} \in \text{Ker } f$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{u} - \underline{v} = \underline{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{u} = \underline{v}$$

FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione è suriettiva, quando il codominio coincide con lo spazio vettoriale d'arrivo

$f: V \to V'$ è suriettiva $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\text{Im } f = V'$

FUNZIONE BIETTIVA

Una funzione è biettiva, quando è contemporaneamente iniettiva e suriettiva

$f: V \to V'$ è Biettiva/Biunivoca $\Leftrightarrow$ Iniettiva + Suriettiva

$\forall$ V e V' spazi vettoriali, esiste un'applicazione lineare da V in V'

$\underline{v} \in V' \to \underline{0}' \in V'$ $\forall \underline{v}$ ← Applicazione lineare "Nulla"

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE APPLICAZIONI LINEARI

Supponiamo che $\dim V = n > 0$ (cioè V possiede una base $B = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n]$).

Prendiamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V'$ (Non necessariamente distinti)

Esiste uno ed un solo omomorfismo ~~tale~~ tale: $f: V \to V'$

tale che: $\underline{e}_1 \to \underline{v}_1$; $\underline{e}_2 \to \underline{v}_2$; ...; $\underline{e}_n \to \underline{v}_n$

"Presa una qualsiasi base di V, una volta scelto dove mandare ogni vettore della base scelta, l'applicazione lineare che si ottiene è unica"

Dimostrazione:

$f: \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ $\quad B = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$

$$(1,0,0) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0,1,0) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 4 & \pi \end{pmatrix} \quad (0,0,1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a,b,c) = f((a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)) \underset{(1)}{=} f(a,0,0) + f(0,b,0) + f(0,0,c) =$$
$$= a\, f(1,0,0) + b\, f(0,1,0) + c\, f(0,0,1) =$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 4 & \pi \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{3}b + c & 2b \\ 4b & \pi b \end{pmatrix}$$

Per vedere se è iniettiva, studiamo il Ker f:

$$\begin{cases} a - \frac{1}{3}b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ 4b = 0 \\ \pi b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -t \\ b = 0 \\ c = t \end{cases}$$

$\text{Ker } f = \{(-t, 0, t) / t \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$

$B_{\text{Ker} f} = [(-1, 0, 1)]$ $\Rightarrow$ Non è iniettiva

Non è suriettiva perché $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin \text{Im } f$

Quando lo spazio vettoriale di partenza, ha una dimensione più piccola di quello d'arrivo: la funzione non è suriettiva

EQUAZIONE DIMENSIONALE

Sia $f: V \to V'$ un omomorfismo e V finitamente generato.

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$ ← Dimostrazione a piacere

Esempio: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ un omomorfismo, non può essere suriettivo.

Per assurdo immaginiamolo suriettivo, quindi:

$\dim \operatorname{Im} f = \dim M_{2\times 2} = 4$

Dall'analisi dimensionale: $\dim \operatorname{Ker} f + 4 = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = -1$ Assurdo!

*) Se $\dim V < \dim V'$ allora f omomorfismo non può essere suriettivo

*) Se $\dim V > \dim V'$ allora f omomorfismo non può essere iniettivo

Dimostrare che f non può essere iniettiva:

$f: V^3 \to \langle x^{10}, x^{15} - 1 \rangle$

$$\Downarrow$$

$$\{\alpha x^{10} + \beta(x^{15}-1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim V' = 2$$

Consideriamo per assurdo f iniettivo

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V^3 \Rightarrow 0 + \dim \operatorname{Im} f = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$

Ma la dimensione dell'immagine, non può essere maggiore della dimensione di V': $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V' \Rightarrow 3 \leq 2$ Assurdo!

Un omomorfismo biettivo, può esistere solo tra spazi vettoriali della stessa dimensione.

Esercizio di geometria nello spazio: Data una retta r, trovarne una s ortogonale ed incidente r in un punto diverso da $(1,2,5)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

per $t = 1$ $C = (4, 1, 7)$

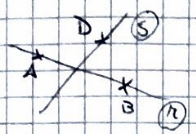
$$s = \begin{cases} x = 4 + l t \\ y = 1 + m t \\ z = 7 + n t \end{cases}$$

Affinché le due rette siano perpendicolari il prodotto scalare fra i coefficienti delle due rette deve essere 0

$3l - m + 2n = 0 \Rightarrow l = 1 \quad m = 5 \quad n = 1$

$$s = \begin{cases} x = 4 + 1t \\ y = 1 + 5t \\ z = 7 + 1t \end{cases}$$

Trovare il piano contenente le due rette:



1) Piano per 3 punti

2) Piano ortogonale a $\underline{v} \times \underline{w}$

$\underline{v} = 3\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ $\quad \underline{w} = \underline{i} + 5\underline{j} + \underline{k}$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\underline{i} - \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{j} + \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\underline{k}$$

Generico piano per C: $a(x-4) + b(y-1) + c(z-7) = 0$

sono le componenti di $\underline{v} \times \underline{w}$

! Per quali $b \in \mathbb{R}$ esiste un omomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ tale che:

$(b,1,0) \to 3 - x^2$
$(1,b,0) \to 3 - x^2$
$(0,0,1) \to x^2 - 5$

Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari se $[(b,1,0),(1,b,0),(0,0,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ allora esiste un'applicazione lineare

Per essere una base, non devono essere linearmente dipendenti:

$$\det\begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = b^2 - 1 = (b+1)(b-1) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$b \neq 1$ e $b \neq -1$

quindi: se $b = -1$

$(-1,1,0) \to 3 - x^2$
$(1,-1,0) \to 3 - x^2$
$(0,0,1) \to x^2 - 5$

$\rightsquigarrow$ $f(x) = -f(x)$ l'omomorfismo non esiste

se $b = 1$

~~$(1,1,0) \to 3 - x^2$~~
$(1,1,0) \to 3 - x^2$
$(0,0,1) \to x^2 - 5$
$(1,0,0) \to x^6 - 2$

Togliamo un vettore "multiplo" e ne aggiungiamo un'altro affinché troviamo una base.

L'omomorfismo esiste

Quindi:

Se $b = -1$ l'omomorfismo non esiste

Se $b = 1$ Esistono infiniti omomorfismi

Se $b \neq \pm 1$ L'omomorfismo è unico

Costruire un omomorfismo tale che:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $\quad (1,-1) \in \operatorname{Ker} f$

$(1,2,3,4) \in \operatorname{Im} f$

$(1,-1) \to (0,0)$

$(1,0) \to (1,2,3,4)$

$(0,1) = (1,0) - (1,-1)$

$$\rightsquigarrow f(a,b) = f((a,0)+(b,0)) = f(a(1,0)+b(0,1)) =$$
$$= a\, f(1,0) + b\, f(0,1) =$$
$$= a\, f(1,0) + b\big(f(1,0) - f(1,-1)\big) =$$
$$= a(1,2,3,4) + b(1,2,3,4) =$$
$$= (a+b,\ 2(a+b),\ 3(a+b),\ 4(a+b))$$

ISOMORFISMI

Un isomorfismo è un omomorfismo biettivo (iniettivo: $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ e suriettivo: $\operatorname{Im} f = V'$) $\quad f$ isomorfismo $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Lemma: Siano V e V' spazi vettoriali finitamente generati:

1) Se $\exists\, f: V \to V'$ suriettiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim V'$
2) Se $\exists\, f: V \to V'$ iniettiva $\Rightarrow \dim V \leq \dim V'$

Dimostrazione: 1)

Dall'equazione dimensionale: $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\geq 0} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\dim V'} = \dim V$

$$\Downarrow$$
$$\dim V' \leq \dim V$$

Dimostrazione: 2)

Dall'equazione dimensionale $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{=0} + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

Siccome $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio di V':

$$\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V'$$
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V$$
$$\Downarrow$$
$$\dim V \leq \dim V'$$

TEOREMA

Se esiste un isomorfismo $f: V \to V'$ con V e V' finitamente generati $\Leftrightarrow \dim V = \dim V'$

Dimostrazione: (Da SX a DX)

Deriva immediatamente dal lemma, infatti dato che deve essere contemporaneamente iniettivo e suriettivo, deve essere contemporaneamente:

$$\left.\begin{array}{l}\dim V \geq \dim V' \\ \dim V \leq \dim V'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$$

Dimostrazione: (Da DX a SX)

$\dim V = \dim V' > 0$

$B_V = [e_1, \dots, e_n] \quad B_{V'} = [e'_1, \dots, e'_n]$

Per il teorema fondamentale sugli omomorfismi, se esiste uno tale che:

$e_1 \to e'_1$

$e_2 \to e'_2$

$\vdots$

$e_n \to e'_n$

f è suriettiva, perché prendendo un qualsiasi $v' \in V'$ essendo $B_{V'}$ una base di V'

$v' = \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_n e'_n$

$$v' = f(\beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n) =$$
$$= \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_n f(e_n) =$$
$$= \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_n e'_n$$

f è iniettiva per il lemma successivo

LEMMA

Siano V e V' spazi vettoriali finitamente generati, e di eguale dimensione, e sia $f: V \to V'$ un omomorfismo, allora:

$$f \text{ SURIETTIVA} \Leftrightarrow f \text{ INIETTIVA}$$

Dimostrazione (Da SX a DX)

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V \underset{\text{Essendo } f \text{ suriettiva}}{\Longrightarrow} \dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\cancel{\dim V'} = \cancel{\dim V}}_{\text{Avendo eguale dimensione}} \to \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$$\Downarrow$$
$$\operatorname{Ker} f = \{0\}$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ INIETTIVA}$$

Dimostrazione (Da DX a SX)

Dato che ~~f è~~ V e V' hanno egual dimensione

$\dim V = \dim V'$

$\underbrace{\dim Ker f}_{0 \text{ perché } f \text{ è iniettiva}} + \dim Im f = \dim V \Rightarrow \dim Im f = \dim V' \Rightarrow Im f = V'$

$\Downarrow$

f è Suriettiva

Esercizio: Costruiamo un isomorfismo fra $\mathbb{R}^4$ e $M_{2\times 2}$

$(1,0,0,0) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(0,1,0,0) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(0,0,1,0) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(0,0,0,1) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(a,b,c,d) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Due spazi vettoriali V e V' si dicono isomorfi se e solo se esiste un isomorfismo $f: V \to V'$

Isomorfismo fra: $\langle x^7, x^5 - 1\rangle \to \mathbb{R}^2$

$B_V = [x^7, x^5 - 1]$ $\quad B_{V'} = [(1,0)(0,1)]$

$x^7 \to (1,0)$

$x^5 - 1 \to (0,1)$

$f(a,b) = a x^7 + b(x^5 - 1)$

Sia $B_V = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ una base di V e sia $f: V \to V'$ un omomorfismo.

Proposizione) L'immagine di f è il sottospazio vettoriale generato dalle immagini dei vettori di f.

$Im f = \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)\rangle$

Dimostrazione:

Fissiamo $v' \in Im f$ di conseguenza $\exists\, \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = v'$

ma $\underline{v} = \alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n$

di conseguenza:

$\underline{v}' = f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n) = f(\alpha_1 \underline{e}_1) + \dots + f(\alpha_n \underline{e}_n) = \alpha_1 f(\underline{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\underline{e}_n)$

$\in \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)\rangle$

Fissata una base $B_V = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$ in V

e $B_{V'} = [\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m]$ in V'

Ogni omomorfismo $f: V \to V'$ è rappresentato da una matrice $A \in M_{m\times n}$

(Questa matrice varia al variare delle basi)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{componenti}} & \boxed{} & \dots & \boxed{} \end{pmatrix}$$

1ª colonna, 2ª colonna, N-esima colonna

Nella 1ª colonna sono disposte le componenti di $f(\underline{e}_1)$ nella base $B_{V'}$

Nella 2ª colonna sono disposte le componenti di $f(\underline{e}_2)$ nella base $B_{V'}$

Nella N-esima colonna sono disposte le componenti di $f(\underline{e}_n)$ nella base $B_{V'}$

Essendo $Im f = \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)\rangle$:

$\dim f =$ N° massimo di colonne indipendenti della matrice A

$\dim f = rg A \Rightarrow \dim Ker f = \dim V - rg A$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$B_V = [(1,2,3), (0,2,0), (0,0,-1)]$

$B_{V'} = [(1,2), (1,1)]$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(1,2,3) = 8\cdot(1,2) + 8(1,1) = (16,24)$

$f(0,2,0) = 10(1,2) + 10(1,1) = (20,30)$

$f(0,0,-1) = 1(1,2) + 1(1,1) = (2,3)$

$(0,0,1) = -(0,0,-1) \Rightarrow f(0,0,1) = -f(0,0,-1) = (-2,-3)$

$(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,0) \Rightarrow f(0,1,0) = \frac{1}{2} f(0,2,0) = (10,15)$

$(1,0,0) = (1,2,3) - (0,2,0) + 3(0,0,-1) \Rightarrow f(1,0,0) = f(1,2,3) - f(0,2,0) + 3f(0,0,-1) = (2,3)$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1(2,3) + x_2(10,15) + x_3(-2,-3) = (2x_1 + 10x_2 - 2x_3,\ 3x_1 + 15x_2 - 3x_3)$

Esercizio: Scrivere la matrice che rappresenta f, nelle basi canoniche

$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+10x_2-2x_3 \,;\, 3x_1+15x_2-3x_3)$

$f(1,0,0)=(2,3)$
$f(0,1,0)=(10,15)$
$f(0,0,1)=(-2,-3)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 15 & -3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

~ hanno lo stesso rango

Una base di Im f : $B_{Im f} = [(2,3)]$ oppure $B_{Im f} = [8(1,2)+8(1,1)] = [(16,22)]$

CONTRO IMMAGINE

$f^{-1}((2,3)) = \{ \underline{v} \in V \,/\, f(\underline{v}) = (2,3) \}$ (Tutti i vettori $v \in V$ la cui immagine tramite f è $(2,3)$)

└ Può essere $\emptyset$.

Si risolve tramite un sistema lineare:

$\begin{cases} \boxed{2x_1} + 10x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 15x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$
$\begin{cases} x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_1 = -5s + t + 1 \end{cases}$

$\{ (-5s+t+1, s, t) \,/\, s,t \in \mathbb{R} \}$

Minore non nullo

Non è un sottospazio perché $\emptyset$ non vi appartiene

$f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_3+x_1 \\ x_3+x_1 & x_1+x_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

$B = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ $B' = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ~ Minore non nullo di ordine 2

Per trovare una base dell'immagine, scelgo le colonne del minore considerato

$B_{Im f} = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]$

Costruire un endomorfismo tale che:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(1,2,1) \in Ker f$ dim Ker f = 1 $(1,2,1) \notin Im f$

$B = [(1,2,1),(0,1,0),(0,0,1)]$

$(1,2,1) \to (0,0,0)$ dim Im f = dim V − dim Ker = 3 − 1 = 2
$(0,1,0) \to A$
$(0,0,1) \to B$

Affinché $(1,2,1) \notin Im f$ $\det \begin{pmatrix} A \\ B \\ 1\ 2\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ $A = (0,1,0)$ $B = (0,0,1)$

$f(1,2,1) \to (0,0,0)$
$f(0,1,0) \to (0,1,0)$
$f(0,0,1) \to (0,0,1)$
$(1,0,0) = (1,2,1) - 2(0,1,0) - (0,0,1)$
$f(1,0,0) = f(1,2,1) - 2f(0,1,0) - f(0,0,1) = (0,-2,-1)$
$f(a,b,c) = (0,-2a,-a) + (0,b,0) + (0,0,c) = (0,-2a+b,-a+c)$

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo (Quando $V \equiv V'$)

Può accadere che: $f(\underline{v}) = \underline{v}$ ~ In questo caso $\underline{v}$ si chiama autovettore

Oppure: $f(\underline{v}) \in \langle \underline{v} \rangle$ cioè: $\exists \lambda : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ ~ $\underline{v}$ è un autovettore di autovalore λ

Autovalore

$f(\underline{v})$ è proporzionale a $\underline{v}$

I vettori non nulli del nucleo, sono tutti autovettori di autovalore 0 : $f(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) = (0,0,0) = 0 \cdot (\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

Proposizione:

$a \in \mathbb{R}$ e $f: V \to V$ (Endomorfismo)

Dire che "a è un autovalore per f" vuol dire che esiste un vettore $\underline{v}$ non nullo, tale che $f(\underline{v})$ è uguale ad a volte $\underline{v}$

"a è un autovalore per f" $\Leftrightarrow \exists \underline{v} \neq 0 : f(\underline{v}) = a\underline{v}$

Lo spazio vettoriale che contiene tutti i vettori che coincidono a volte se stessi, prende il nome di:

Autospazio di autovalore a

$$V_a = \{ \underline{v} \in V \,/\, f(\underline{v}) = a\underline{v} \}$$

Proposizione:

Ogni Autospazio è un sottospazio

Dimostrazione

$\underline{u}, \underline{v} \in V_a$ Tesi: $\underline{u}+\underline{v} \in V_a$

$\beta \cdot \underline{u} \in V_a$

$f(\underline{v}) = a\underline{v}$ $\quad f(\underline{u}) = a\underline{u}$

$f(\underline{v}+\underline{u}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v} = a(\underline{u}+\underline{v})$

$f(\beta\underline{u}) = \beta f(\underline{u}) = \beta \cdot a \cdot \underline{u} = a \cdot (\beta\underline{u})$

MOLTEPLICITA' GEOMETRICA

La dimensione dell'autospazio di un autovalore, si chiama molteplicità geometrica dell'autovalore

$mg(a) = \dim V_a$

Se V è finitamente generato

$\dim V = n$

$\dim V_a \leq n$

$mg(a) \leq n$

DETERMINAZIONE DEGLI AUTOVALORI

$f: V \to V$ fissiamo a destra e a sinistra la stessa base $B = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n]$

$X' = AX$ ← componenti di $\underline{v}$ in colonna

X' ← Componenti di $f(\underline{v})$ in colonna

$\overline{X}$ sono le componenti in colonna di un autovettore $\overline{v}$

$f(\overline{v}) = a\overline{v}$

$$a\overline{X} = A\overline{X} \Rightarrow A\overline{X} - a\overline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A\overline{X} - aI\overline{X}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\underbrace{A - aI}_{\text{Matrice quadrata}}) \cdot \overline{X}$$

$\overline{v}$ è un autovettore di autovalore $a \Leftrightarrow$ le sue componenti soddisfano

$$(A - aI)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Sistema di n equazioni in n incognite omogeneo e non è di cramer, perché ammette un'altra soluzione a $\underline{0}$

$$\Downarrow$$

$$\det(A - aI) = 0$$

(Un sistema è di cramer quando $\det(A \cdot aI) \neq 0$, ma se è di cramer ammette, dato che è omogeneo, come soluzione solo $\underline{0}$ e quindi imponiamo $\det(A - aI) = 0$)

$A - aI$ significa sottrarre a dalla diagonale principale

Il risultato del $\det(A - aI)$ si chiama polinomio caratteristico di f

Esercizio:

$f: (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (4x_1+x_3; 5x_2; 4x_1+x_3) \in \mathbb{R}^3$

$B = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg\,A = 2 \Rightarrow$ f non è suriettiva $\Downarrow$ f non è iniettiva $\Downarrow$ f non è un isomorfismo

$B_{Im f} = [(4,0,4),(0,5,0)]$

- Ricerca degli eventuali autovalori

$\det(A - aI) = \det\begin{pmatrix} 4-a & 0 & 1 \\ 0 & 5-a & 0 \\ 4 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = \ldots$

$= (5-a)\cdot[(4-a)(1-a)-4] = (5-a)(-5a+a^2) = a(5-a)(-5+a) = -a(5-a)^2$

$-a(5-a)^2 = 0 \Rightarrow \quad a=0 \quad a=5$ Autovalori

Determinare l'autospazio V_5

Se $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sono le componenti di un autovettore di autovalore a

$\bar{x}$ è la soluzione di $(A - aI)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-5I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 4x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_3 = t \\ x_2 = s \end{cases}$

$V_5 = \{(t,s,t) / s,t \in \mathbb{R}\}$
$= t(1,0,1) + s(0,1,0)$

$B_{V_5} = [(1,0,1),(0,1,0)]$

$\Downarrow$

$mg(5) = 2$

$V_0 = Ker\, f$

$(A - 0I) = A \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_0 = \langle(1,0,-4)\rangle \Rightarrow mg(0) = 1$

CALCOLO DELLA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

In generale $f: V \to V$ $\dim V = n$ e a autovalore

$mg(a) = n - rg(A - aI)$

Esiste un endomorfismo $f: \mathbb{R}^{2016} \to \mathbb{R}^{2016}$ che abbia come autovalori tutti i numeri interi divisibili per 88? NO

Infatti, gli autovalori sono le radici del polinomio $\det(A-aI)$ che ha grado 2016, quindi ammette solo 2016 autovalori, mentre i numeri divisibili per 88 sono infiniti

$f: (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (-x_2, x_1) \in \mathbb{R}^2 \qquad B = [(1,0),(0,1)]$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = a^2+1 \sim \neq 0 \ \forall a$ quindi $\nexists$ autovalori reali

se $\dim V$ è dispari, esiste almeno un autovalore

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

Ipotizziamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia un autovalore per $f: V \to V$

La molteplicità algebrica è il numero di volte che il fattore $(a-\lambda)$ compare nel polinomio caratteristico scomposto in fattori

Esempio:

$f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6 \qquad \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)^3 (7+\lambda)\left(\frac{66}{5} - \lambda\right)^2 (a^2+a+1)$

Gli autovalori sono $5, -7, \frac{66}{5}$: $ma(5) = 3$
$ma(-7) = 1$
$ma\left(\frac{66}{5}\right) = 2$

Per ogni autovalore λ è sempre vero che la sua molteplicità geometrica è minore o uguale della molteplicità algebrica

$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ Dimostrazione a piacere

Nell'esercizio di prima: $\nexists\ \underline{v}, \underline{w}$ indip tali che: $f(\underline{v}) = 7\underline{v}$ e $f(\underline{w}) = 7\underline{w}$

perché: $1 \le mg(7) \le ma(7) = 1 \Rightarrow mg(7) = 1 \Rightarrow \dim V_7 = 1$

$$\Downarrow$$

$$V_7 = \langle \underline{v} \rangle$$

ENDOMORFISMI DIAGONALIZZABILI

Sia $f: V \to V$ (con $\dim V = n > 0$) un endomorfismo, si dice diagonalizzabile, se e solo se (per definizione), V possiede una base composta solo da autovettori

(f Diagonalizzabile $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ una matrice diagonale che rappresenta f)

Es: $f: V \to V$ $\quad B = [\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*]$

$\underline{e}_1^* \to (-3)\,\underline{e}_1^*$

$\underline{e}_2^* \to (\sqrt{55})\,\underline{e}_2^*$

$\underline{e}_3^* \to (-3)\,\underline{e}_3^*$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{55} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Sulla Diagonale principale, troviamo gli autovalori ripetuti tante volte quanto vale $mg(\lambda)$

Determinare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che sia:

① Isomorfismo ② Diagonalizzabile ③ 2016 autovalore di $mg = 2$

$(1,0,0) \to (2016, 0, 0)$

$(0,1,0) \to (0, 2016, 0)$

$(0,0,1) \to (0, 0, 8)$

$$A = \begin{pmatrix} 2016 & 0 & 0 \\ 0 & 2016 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$f(x_1, x_2, x_3) = (2016x_1, 2016x_2, 8x_3)$

CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ

$f: V \to V$ Endomorfismo, $\dim V = n > 0$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

① Il polinomio caratteristico è completamente scomponibile

② $\forall$ autovalore λ $\quad mg(\lambda) = ma(\lambda)$

Es: $f: (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (\sqrt{11}(x_1+x_2);\ \sqrt{11}\,x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad B = [(1,0), (0,1)]$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{11} & \sqrt{11} \\ 0 & \sqrt{11} \end{pmatrix} \qquad \det(A - aI) = \det\begin{pmatrix} \sqrt{11}-a & \sqrt{11} \\ 0 & \sqrt{11}-a \end{pmatrix} = (\sqrt{11}-a)^2$$

① $\det(A - aI)$ è completamente scomponibile

$ma(\sqrt{11}) = 2 \qquad mg(\sqrt{11}) = n - rg(A-aI) = 2 - rg\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$

$ma(\sqrt{11}) \ne mg(\sqrt{11}) \qquad f$ non è diagonalizzabile

---

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha n autovalori distinti, è sicuramente diagonalizzabile.

"Il polinomio caratteristico è completamente scomponibile" significa che $\forall\, b$ autovalore $\sum ma(b) = \dim V$

Es: Determinare un endomorfismo f tale che il polinomio caratteristico sia: $(5-a)^3 \cdot (\frac{1}{2} - a)$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \det(A - aI) = (5-a)^3 (\frac{1}{2} - a)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$$

$(1,0,0,0) \to 5(1,0,0,0)$

$(0,1,0,0) \to 5(0,1,0,0)$

$(0,0,1,0) \to 5(0,0,1,0)$

$(0,0,0,1) \to \frac{1}{2}(0,0,0,1)$

$\rightsquigarrow f(a,b,c,d) \to (5a, 5b, 5c, \frac{1}{2}d)$

Se lo volessi non diagonalizzabile, dato che:

$m_a(\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow m_g(\frac{1}{2}) = 1$

$m_g(5) < 3 \Rightarrow \dim V - rg(A - 5I) < 3 \Rightarrow rg(A-5I) > 1$

$rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow f$ non diagonalizzabile

---

OMOTETIE

Gli endomorfismi in cui tutti i vettori non nulli sono autovettori prendono il nome di omotetie

- → Endomorfismo identità $v \to v \ \forall v$ - Omotetia di ragione 1
- → Endomorfismo nullo $v \to 0 \ \forall v$ - Omotetia di ragione 0
- → Endomorfismo $v \to c v$ $c \in \mathbb{R}$ $\forall v$ - Omotetia di ragione c

In un omotetia $A = c \cdot I$ Es. $A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Esempio: Omotetia di ragione $\log_2 3$ in $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(a,b,c) \to \log_2 3\,(a,b,c)$

$A = \begin{pmatrix} \log_2 3 & 0 & 0 \\ 0 & \log_2 3 & 0 \\ 0 & 0 & \log_2 3 \end{pmatrix} = \log_2 3 \cdot I$

Polinomio caratteristico: $(\log_2 3 - a)^3$

$cI + dI = (c+d) \cdot I$ | $cI \cdot dI = (c \cdot d) \cdot I$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

A e $A^* \in M_{n,n}$ si dicono simili

$\Updownarrow$ def

$\exists B$ invertibile tale che: $B^{-1}AB = A^*$

La similitudine è una relazione di equivalenza:

- A è simile a se stessa (Riflessiva)

$I^{-1}AI = IAI = A$

Se A è simile ad $A^* \Rightarrow \exists X: \ X^{-1}AX = A^*$

Se A è simile a B e B è simile a $C \Rightarrow A$ è simile a C

---

1) Se A e A^* sono simili $\Rightarrow \det A = \det A^*$

Dimostrazione:

$B^{-1}AB = A^* \Rightarrow \det A^* = \det(B^{-1}A \cdot B) \overset{\text{Binet}}{=} \det(B^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(B) =$

$= \det(A) \cdot \det(B^{-1}B) = \det A \cdot \det I = \det A$

Lemma: Le matrici scalari sono simili soltanto a se stesse

Dimostrazione:

$B^{-1}(cI) \cdot B = c(B^{-1}IB) = c(B^{-1}B) = c \cdot I$

In particolare: $B^{-1}IB = I$

$B^{-1}0B = 0$

---

2) A e A^* sono simili $\Rightarrow$ Danno luogo allo stesso polinomio caratteristico

Dimostrazione:

$\det(A^* - aI) = \det(B^{-1}AB - aI) = \det(B^{-1}AB - aB^{-1}IB) =$

$= \det(B^{-1}(A - aI)B) \underbrace{=}_{\text{Binet con i passaggi di prima}} \det(A - aI)$

Se due matrici A e A^* individuano lo stesso polinomio caratteristico e rappresentano entrambe endomorfismi diagonalizzabili
$\Downarrow$
A e A^* sono simili

ENDOMORFISMI E SIMILITUDINI

Sia $B = [e_1, \dots, e_n]$ una base di V
$f: V \to V$ fissata B è rappresentata da A

Sia $B^* = [e_1^*, \dots, e_n^*]$ una base di V
la stessa $f: V \to V$ fissata B^* è rappresentata da A^*

A e A^* rappresentano lo stesso endomorfismo in B prima e in B^* poi
$\Updownarrow$
A e A^* sono simili

$A^* = B^{-1} A B$
↑ Matrice di cambiamento di base
↳ $B = \left([\,] [\,] \dots [\,] \right)$

Nelle colonne troviamo le componenti della base "nuova" ($B^* = [e_1^*, \dots, e_n^*]$) nella base "vecchia" ($B = [e_1, \dots, e_n]$)

$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \underline{v} = y_1 e_1^* + \dots + y_n e_n^*$
$x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n = f(v) = y_1' e_1^* + \dots + y_n' e_n^*$

X = componenti rispetto a B
Y componenti rispetto a B^*

① $X' = BY'$ ② $X = BY$ ③ $X' = AX$ ④ $Y' = A^* Y$
↑ Matrice di cambiamento di base

① in ③

$BY' = AX$
$\Downarrow$ ④
$BA^*Y = AX$
$\Downarrow$ ②
$BA^*Y = ABY$
$B^{-1}(BA^*Y) = B^{-1}(ABY)$
$A^*Y = B^{-1}ABY$ ← Vale per ogni Y
$\Downarrow$
$B^{-1}AB = A^*$

MATRICI SIMMETRICHE

$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ~ Matrice simmetrica

Una matrice si dice simmetrica quando $a_{ij} = a_{ji}$
Una matrice simmetrica è simile ad una matrice diagonale

Se f è rappresentata da una matrice simmetrica, allora f è sicuramente diagonalizzabile

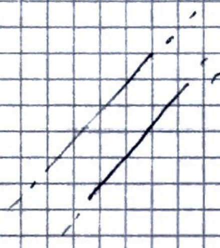
GEOMETRIA PROIETTIVA

Nel piano A^2, fissiamo un riferimento $(O,[\underline{i},\underline{j}])$ cartesiano.
Chiamiamo $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo, che si ottiene aggiungendo ai punti del piano ordinario (Punti propri). Le direzioni delle sue rette (Punti impropri)

$$\mathbb{P}^2 = \{\text{Piano ordinario}\} \cup \{\text{Direzioni delle rette}\}$$

Punti impropri "All'infinito"

Punti Propri



~ Due rette parallele avendo in comune la direzione, hanno un punto improprio in comune

Nel piano proiettivo ogni punto ha 3 coordinate:
(x_1, x_2, x_3) Se: $x_3 \neq 0$ Otteniamo un punto proprio
$x_3 = 0$ Otteniamo un punto improprio

$(0,0,0)$ ~ Non rappresentano niente.

Trasformazione in coordinate affini:

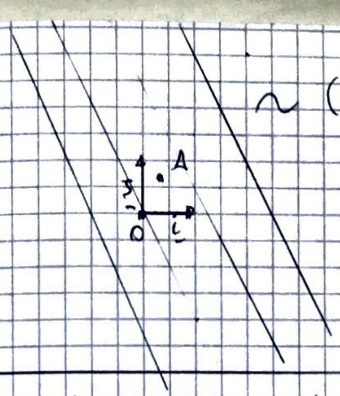
$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Se $x_3=0$ otteniamo la direzione del vettore $x_1\underline{i} + x_2\underline{j}$

Nel piano proiettivo a più terne può corrispondere lo stesso punto:

$(6,2,2) \Rightarrow (3,1)$
$(3,1,1) \Rightarrow (3,1)$
$(12,4,4) \Rightarrow (3,1)$

$\Rightarrow$ Ogni punto è un sottospazio di dimensione 1 in $\mathbb{R}^3$



~ $(1,-2,0)$ // $\underline{i} - 2\underline{j}$

$A = (1,2,3) = (2,4,6) \Rightarrow (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

$O = (0,0,1) = (0,0,2)$

$(1,0,0)$ ~ Direzione $\underline{i}$ $(0,1,0)$ ~ Direzione $\underline{j}$ $(0,0,0)$ ~ Non rappresenta nulla

POLINOMI NEL PIANO PROIETTIVO

$3x_1 - 2x_2 - 5 = 0$ ~ Non rappresenta niente
Non è omogeneo

$(0, \frac{5}{2}, 1) \in C$ $(0,5,2) \notin$

Polinomi omogenei ⇝ Tutti i monomi hanno lo stesso grado
- Di 1° grado: Rette Proiettive
- Di 2° grado: Coniche

Una retta proiettiva è l'insieme dei punti P le cui coordinate soddisfano:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \sim \text{con } (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

$a=0$ $b=0$ $c\neq0$
$cx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ ~ Retta impropria (Contiene tutte le direzioni)
~ $\emptyset$ Punti Propri

$a\neq0$ $b\neq0$
$ax_1+bx_2+cx_3=0$ ~ Retta Propria

I punti propri sono:
$a\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + c = 0$
$\Downarrow$
$ax+by+c=0$ // $-b\underline{i}+a\underline{j}$ cioè il suo punto improprio

I punti impropri si ottengono ponendo $x_3=0$

INTERSEZIONE TRA DUE RETTE PROIETTIVE

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$rg\,A$
- $\neq 0$ poiché A non è mai nulla
- 1 quando sono la stessa retta $(r=s)$
- 2 Le soluzioni formano un sottospazio di dimensione

$Rg A = 1 \Rightarrow r \cap s = 1$ Punto
- → Proprio quando $r \times s$
- → Improprio quando $r // s$

Per verificare se due rette sono parallele:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{cases} = 0 & \text{Parallele} \\ \neq 0 & \text{Non Parallele} \end{cases}$$

RETTE PROIETTIVE IN FORME PARAMETRICHE

$\boxed{a}x_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

Minore non nullo

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$P = s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = sL + tM$$

L, M: 2 punti fissati della retta

Es: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}s - \frac{5}{3}t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

Trovare l'equazione della retta proiettiva passante per L ed M:

$L: (\sqrt{3}, 1)$

$M: (8, \pi)$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}s + 8t \\ x_2 = s + \pi t \\ x_3 = s + t \end{cases}$$

Liberandoci dei parametri torna nella forma cartesiana

POLINOMI OMOGENEI DI 2° GRADO

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

MATRICI TRASPOSTE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Specchio rispetto alla diagonale principale

Le righe diventano colonne

$${}^t a_{ij} \overset{def}{=} a_{ji}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad {}^tX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}}_{\substack{1\times 3 \\ = {}^tX}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\substack{3\times 3 \\ = A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\substack{3\times 1 \\ = X}} = 0 \quad (1\times 1)$$

$${}^tX A X = 0$$

Es:

$$3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$$

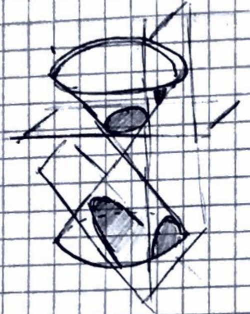
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + \frac{x_2}{2}; & \frac{x_1}{2} - x_2 - 2x_3; & -2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(3x_1^2 + \frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_1x_2}{2} - x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_3 + 5x_3^2\right) = 0$$

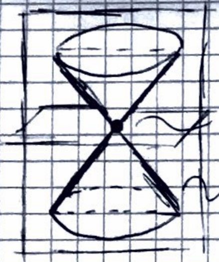
$$\Rightarrow 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$$

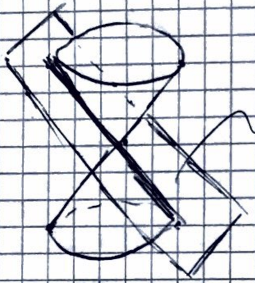
CONICHE

Una conica è una curva che si ottiene dall'intersezione di un cono con un piano



Casi particolari:





STUDIO DEI PUNTI PROPRI DI UNA CONICA

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

Dividendo per x_3^2 otteniamo

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + a_{33} + 2a_{12}\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_2}{x_3} + 2a_{13}\frac{x_1}{x_3} + 2a_{23}\cdot\frac{x_2}{x_3} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

STUDIO DEI PUNTI IMPROPRI DELLA CONICA

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(Per semplicità poniamo $a_{11} \neq 0$)

Dato che … le terze sono proprie

Se $x_2 = 0 \Rightarrow a_{11}\cdot x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Ma $(0,0,0)$ non rappresenta niente, quindi poniamo $x_2 = 1$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1 + a_{22} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a_{11}}$$

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22}$$

se $\frac{\Delta}{4} > 0$, $A_{33} < 0$: La conica ha due punti impropri reali

se $\frac{\Delta}{4} = 0$, $A_{33} = 0$: La conica ha un solo punto improprio reale

Se $\frac{\Delta}{4} < 0$, $A_{33} > 0$: La conica ha zero punti impropri reali

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}^2$$

$$\Downarrow$$

$$A_{33} = -\frac{\Delta}{4}$$

INTERSEZIONE TRA CONICA E RETTA ~~IM~~PROPRIA

$\Gamma)\ {}^tXAX = 0 \qquad r)\ X = sL + tM$

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = sL + tM \end{cases} \Rightarrow {}^t(sL + tM)\,A\,(sL + tM) = 0 \Rightarrow (s\,{}^tL + t\,{}^tM)\,A\,(sL + tM) = 0$$

Matr 1×1

$$\Rightarrow {}^tLAL\,s^2 + {}^tLAM\,st + {}^tMAL\,st + {}^tMAM\,t^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$${}^tLAL\,s^2 + 2\,{}^tLAM\,st + {}^tMAM\,t^2 = 0$$

1° Caso) $^tLAL=0$ $\quad$ $^tMAL=0$ $\quad$ $^tMAM=0$

In questo caso, ogni s e t verificano l'uguaglianza:

retta ⊆ conica

2° Caso) $^tLAL=0$ $\quad$ $^tMAL\neq0$ $\quad$ $^tMAM=0$

otteniamo: $$2\,{}^tMAL\,st=0$$
$$\Downarrow$$
$$s\cdot t=0$$
$$\Downarrow$$
$$r\cap\Gamma=\{L,M\}$$

3° Caso) ^tLAL o $^tMAM\neq0$

In questo caso ipotizzo $^tLAL\neq0$

$$^tLAL\,s^2+{}^tMAL\,st+{}^tMAM\,t^2=0$$

Se $t=0 \Rightarrow s=0$ il che non ha significato geometrico.

Quindi: $t=1$

$$^tLAL\,s^2+2\,{}^tMAL\,s+{}^tMAM=0$$
$$\Downarrow$$
$$s=\frac{-{}^tMAL\pm\sqrt{\underbrace{({}^tMAL)^2-({}^tLAL)({}^tMAM)}_{=\frac{\Delta}{4}}}}{^tLAL}$$

Se $\frac{\Delta}{4}>0 \iff r\cap\Gamma$ hanno 2 punti in comune

$\frac{\Delta}{4}=0 \iff r\cap\Gamma$ hanno 1 punto in comune

$\frac{\Delta}{4}<0 \iff r\cap\Gamma$ hanno 0 punti reali in comune

VEDERE SE UN PUNTO APPARTIENE ALLA CONICA

$^tL=(l_1,l_2,l_3)\in\Gamma$? $\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$

Se $^tLAL=0$ Allora $L\in\Gamma$

Se $^tLAL\neq0$ Allora $L\notin\Gamma$

PUNTI DOPPI (Definizione Geometrica)

D è un punto doppio per Γ

$\Updownarrow$ def

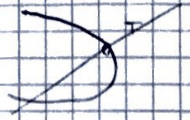
Non esistono rette per D che con Γ hanno esattamente 2 punti in comune

Un punto che non è doppio, si dice semplice

Non esistono rette per T che non hanno 2 punti di intersezione con Γ

$\Downarrow$

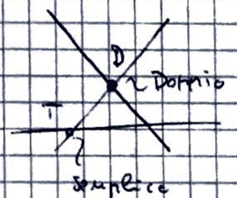
L'ellisse non ha punti doppi



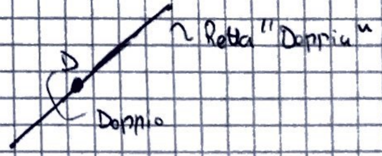
La parabola non ha punti doppi

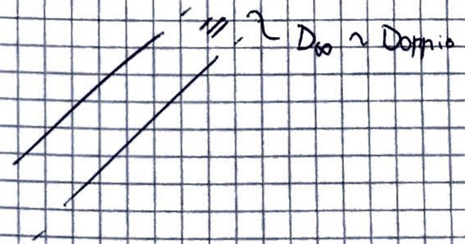
L'iperbole non ha punti doppi

$x^2-5y^2=0 \Rightarrow (x+\sqrt{5}y)(x-\sqrt{5}y)$



$x^2+y^2+1+2x+2y+2xy=0 \Rightarrow (x+y+1)^2=0$





PUNTI DOPPI (Condizione Algebrica)

D è doppio per $\Gamma \iff$
1. $D \in \Gamma$
2. Una retta che passa per D e per Y qualunque, non ha con Γ esattamente 2 intersezioni

$\Gamma)\ {}^tXAX = 0 \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ X = sD + tY \end{cases} \Rightarrow {}^t(sD+tY)A(sD+tY) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{{}^tDAD}_{=0}s^2 + 2\,{}^tDAY\,st + {}^tYAY\,t^2 = 0$$

${}^tDAY = {}^tYAD$

Poiché

${}^t\underset{1\times1}{DAY} = {}^t({}^tDAY) =$

$= {}^tY\,{}^tA\,D = {}^tYAD$

poiché A è simmetrica

Poiché $D \in \Gamma$ $\Downarrow$

$$t\left(2\,{}^tDAY\,s + {}^tYAY\,t\right) = 0$$

se $t = 0 \to$ Otteniamo D

se $t \neq 0 \Rightarrow t = 1$

Dato che consideriamo D appartenente a Γ, se troviamo un'altro punto Y che appartiene a Γ, sicuramente D non è doppio.

Quindi affinché D sia doppio, non dobbiamo trovare nessun altro punto, quindi s non deve essere un numero

$$s = -\frac{{}^tYAY}{2\,{}^tDAY} \to \text{Non deve essere un numero}$$

Cioè: ${}^tDAY = 0 \quad \forall Y$

${}^tDAY = 0 \Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (d_1\ d_2\ d_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\Downarrow$$

$$(d_1\ d_2\ d_3)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + a_{13}d_3 = 0 & Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + a_{23}d_3 = 0 & Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a_{13}d_1 + a_{23}d_2 + a_{33}d_3 = 0 & Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

D è doppio per $\Gamma \iff$ Le sue coordinate proiettive soddisfano $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dato che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è omogeneo, bisogna imporre che non sia di Cramer, (se no l'unica soluzione è $(0,0,0)$) quindi:

$$\det A = 0$$

$$\Downarrow$$

Esistono punti doppi per $\Gamma \iff \det A = 0$

se $\operatorname{rg} A =$
- 1 La conica è una retta di punti doppi
- 2 Le soluzioni formano un sottospazio di dimensione 1 $\Downarrow$ 1 punto doppio
- 3 Nessun punto doppio

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE (Condizione Geometrica)

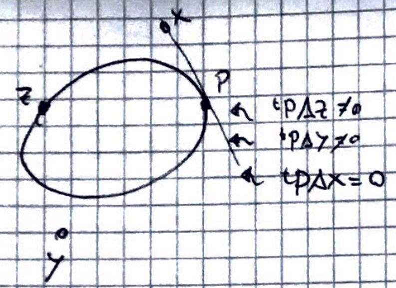
Γ Ha punti Doppi
- NO – Quanti punti impropri ha?
  - 2 Reali ⇒ Iperbole
  - 1 Reale ⇒ Parabola
  - 0 Reali ⇒ Ellisse
- SI – QUANTI?
  - 1 = Intersezione di due rette
  - ∞ = Retta Doppia

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE (Condizione Algebrica)

det = 0 Riducibile

$\det A$
- $\neq 0$ → A_{33}
  - < 0 : Iperbole
  - $= 0$: Parabola
  - > 0 : Ellisse
- $= 0$ → $\operatorname{Rg} A$
  - 2 $\Gamma: r \cup s$
  - 1 $\Gamma: r^2$

RETTE TANGENTI AD UNA CONICA



La retta per P e per X non ha esattamente 2 punti in comune con $\Gamma \Leftrightarrow {}^tPAX = 0$

La retta tangente si ottiene con: ${}^tPAX = 0$

Es: Calcolare la tangenti nell' origine a

$\Gamma)\ x^2+y^2-3x+2y=0$

$$(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

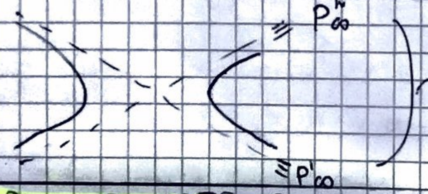
$\Downarrow$

$$\left(-\frac{3}{2}\ \ 1\ \ 0\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x_1+x_2=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x+y=0$$

Retta tangente

ASINTOTI

Una retta tangente a Γ in un suo punto improprio si chiama asintoto



POLO E RETTE POLARI

Se $P \in \Gamma$ la polare di P è tangente Γ

Il punto di cui la retta è polare si chiama polo

Il polo di una retta r è quel punto P tale che $r)\ {}^tPAX=0$

TEOREMA DI RECIPROCITÀ

Fissata $\Gamma)\ {}^tXAX=0$ priva di punti doppi

L appartiene alla polare di $M \Rightarrow M$ appartiene alla polare di L

Dimostrazione:

La polare di M ha equazione ${}^tMAX=0$

Ipotesi: ${}^tMAL=0$ | tesi: M soddisfa ${}^tLAX=0$

$${}^tMAL=0 \Rightarrow {}^t({}^tMAL)=0 \Rightarrow {}^tL\,{}^tA\,{}^t({}^tM)=0 \Rightarrow {}^tLAM=0$$

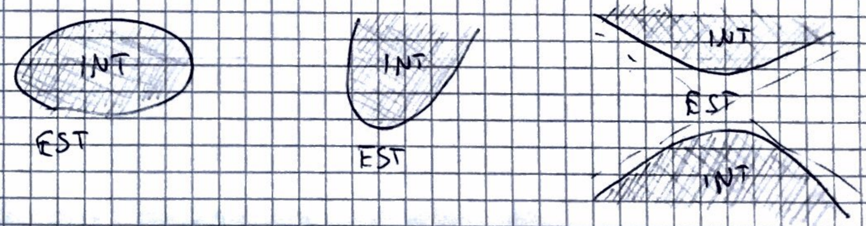
$\Downarrow$

M soddisfa ${}^tLAX=0$

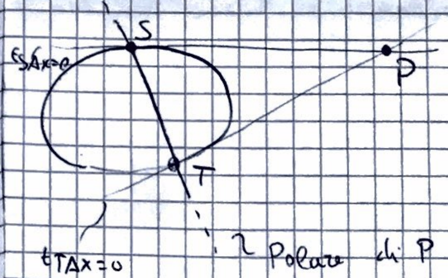
REGIONI INTERNE ED ESTERNE

Regione interna $=\{P$ tali che $\nexists$ rette reali per P tangenti $\Gamma\}$

Regione esterna $=\{P$ tali che $\exists$ 2 rette reali per P tangenti $\Gamma\}$



POLARE DI UN PUNTO ESTERNO



Preso P, si tracciano le tangenti di Γ, la retta passante per i due punti di contatto è la Polare di P

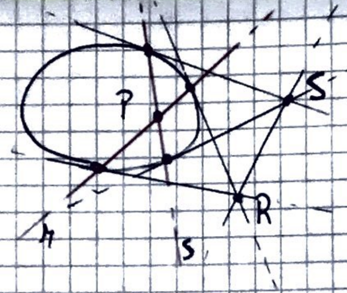
$P \in$ Polare di $S \Rightarrow S \in$ Polare di P

$P \in$ Polare di $T \Rightarrow T \in$ Polare di P

$\Downarrow$

La polare di P è la retta passante per S e T

POLARE DI UN PUNTO INTERNO



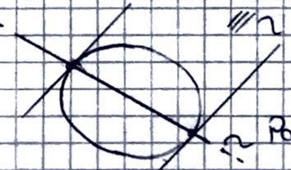
Preso P, si tracciano due rette passanti per P, dopodiché si considerano i poli R di r e S di s; la polare di P è la retta passante per R ed S

P ∈ Polare di S ⇒ S ∈ Polare di P
P ∈ Polare di R ⇒ R ∈ Polare di P
⇓
La polare di P è la retta passante per R ed S

DETERMINAZIONE ALGEBRICA DEL POLO DI UNA RETTA

Scegliere due punti a piacere sulla retta r

$$P = \begin{cases} {}^tRAX = 0 \\ {}^tSAX = 0 \end{cases}$$



La retta polare di un punto improprio si chiama diametro della conica
- Ogni conica ha infiniti diametri
- L'asintoto di un iperbole è un diametro

Il centro è il polo della retta impropria.
Per determinare il centro, intersechiamo due diametri

$$\text{Centro} = \begin{cases} {}^tR_\infty AX = 0 \\ {}^tS_\infty AX = 0 \end{cases}$$

Tutti i diametri passano per il centro

Dimostrazione:

Siano d) e d') due diametri

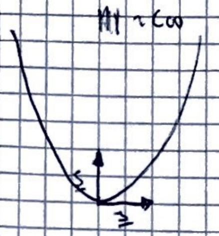
d) ${}^tR_\infty AX = 0$
d') ${}^tS_\infty AX = 0$

$$C = \begin{cases} {}^tR_\infty AX = 0 \\ {}^tS_\infty AX = 0 \end{cases}$$

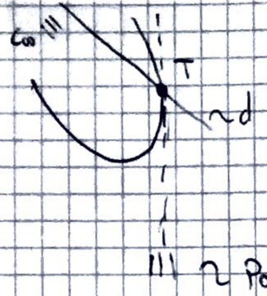
C ∈ Polare di R_∞ ⇒ R_∞ ∈ Polare di C
C ∈ Polare di S_∞ ⇒ S_∞ ∈ Polare di C
⇓
La polare di C è l'unica retta che contiene 2 punti impropri, cioè è la retta impropria
⇓
C è il centro

L'iperbole ha due asintoti reali
La parabola ha un asintoto reale
L'ellisse non ha alcun asintoto reale

L'asintoto di una parabola è la retta impropria
(La retta tangente la parabola nel suo punto improprio



$C_\infty \in \Gamma$
La polare di C_∞ è la retta impropria
⇓
C_∞ è il centro della parabola
Dato che tutti i diametri passano per il centro, tutti i diametri della parabola sono paralleli a C_∞



$d \cap \Gamma = \{T, C_\infty\}$

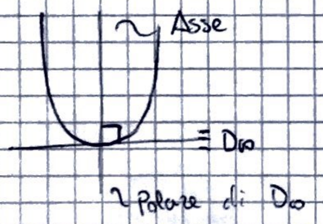
Polo di d = $\begin{cases} \text{Polare di } T \\ \text{Polare di } C_\infty \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Polare di } T \\ \text{Retta impropria} \end{cases}$ = Direzione della tangente in T

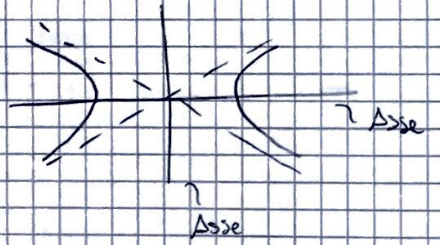
Dalla tangente in T?

ASSE DI UNA CONICA

L'asse di una conica è un diametro ortogonale al proprio polo.

- Iperbole: 2 Assi (Le bisettrici degli asintoti)
- Parabole: 1 Asse
- Ellissi: 2 Assi
- Circonferenze: Infiniti Assi





VERTICI

I vertici sono le intersezioni di una conica con i suoi assi

- Iperbole: 2 Vertici
- Parabole: 1 Vertice proprio, 1 vertice improprio
- Elisse: 4 Vertici
- Circonferenza: Tutti i punti reali propri della circonferenza

Trovare gli assi di una conica generica

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ Diametro generico $(l\ m\ 0)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$

$(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{12}l + a_{22}m)y + \text{Altro} = 0$

è perpendicolare al vettore

$(a_{11}l + a_{12}m)\underline{i} + (a_{12}l + a_{22}m)\underline{j}$

Affinché quel diametro sia un asse, il vettore $(a_{11}l + a_{12}m)\underline{i} + (a_{12}l + a_{22}m)\underline{j}$ deve essere ortogonale a $l\underline{i} + m\underline{j}$

Cioè: $\det\begin{pmatrix} a_{11}l + a_{12}m & a_{12}l + a_{22}m \\ l & m \end{pmatrix} = 0$

$\Downarrow$

$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})lm + a_{12}m^2 = 0$

Se viene $0 = 0$ ogni diametro è un'asse

$\Updownarrow$

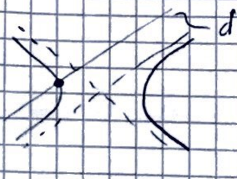
$\boxed{a_{12} = 0 \text{ e } a_{11} = a_{22}}$ Condizioni affinché l'ellisse sia una circonferenza

---

TEOREMA

Una parabola e un iperbole hanno infiniti punti reali propri.

Dimostrazione (Iperbole)



Prendiamo d parallelo ad un asintoto

$\Gamma \cap d = \begin{cases} \cancel{d} & \text{Solo le coniche riducibili contengono rette} \\ \cancel{1} & \text{Perché d non è un asintoto} \\ \emptyset & \text{Perché d interseca almeno il punto improprio} \\ 2 & \text{Perché d ha in comune con } \Gamma \text{ anche un punto proprio reale} \end{cases}$

$\Downarrow$

Se prendiamo un'altra retta appartenente al fascio improprio di rette di d, troviamo sempre un intersezione reale propria

$\Downarrow$

L'iperbole ha infiniti punti reali

Dimostrazione (Parabola)

Sia d un diametro proprio

$\Gamma \cap d = \begin{cases} \cancel{\infty} & \text{solo le coniche riducibili contengono rette} \\ \cancel{1} & \text{solo la retta impropria ha un intersezione con } \Gamma \\ \emptyset & \text{Dato che tutti i diametri passano per il centro} \\ 2 & \text{Perché } d \text{ ha in comune con } \Gamma \text{ anche un punto proprio } \Rightarrow \text{ secca} \end{cases}$

$\Downarrow$

COME A PRIMA

ELLISSI PRIVE DI PUNTI REALI

Un ellisse è priva di punti reali

$\Updownarrow$

$\begin{cases} a_{11} \det A > 0 \\ A_{33} > 0 \end{cases}$ Devono essere verificate in contemporanea

Es. $x^2+y^2+1=0 \sim$ circonferenza immaginaria

COME SI DISEGNA UN'IPERBOLE

1. Trovare i punti impropri
2. Trovare gli asintoti
3. Trovare qualche ulteriore punto

Es: $x^2-3xy-4y^2-2x=0 \Rightarrow x_1^2-3x_1x_2-4x_2^2-2x_1x_3=0$

(1) $\begin{cases} x_1^2-3x_1x_2-4x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ Poniamo $x_2=1$

$\begin{cases} x_1^2-3x_1-4=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \end{cases}$ $x_1=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$(-1,1,0)$ $(4,1,0)$

$\sim /\!/ -\underline{i}+\underline{j}$ $\sim /\!/ 4\underline{i}+\underline{j}$

(2) ${}^tPAx=0 \Rightarrow$

$(-1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$

$\Downarrow$

$-5x-5y+2=0$

$\Downarrow$

$5x+5y-2=0 \sim /\!/ -\underline{i}+\underline{j}$

$(4,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$

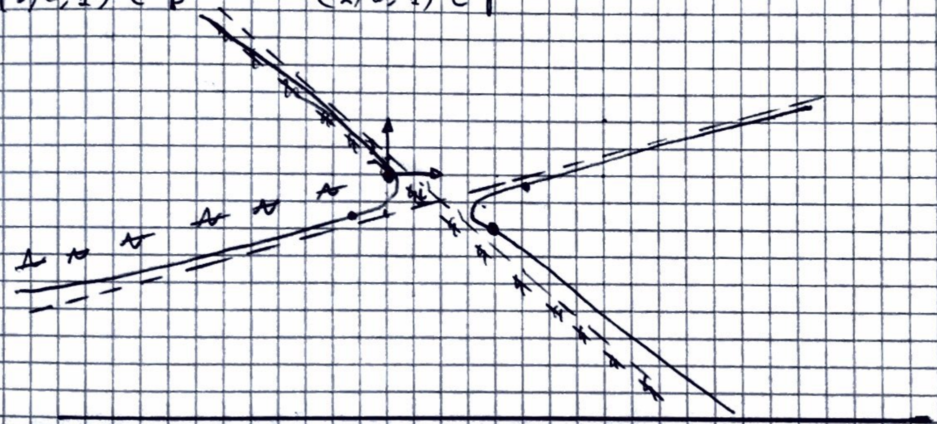
$\Downarrow$

$\frac{5}{2}x-10y-4=0$

$\Downarrow$

$5x-20y-8=0 \sim /\!/ 4\underline{i}+\underline{j}$

$(0,0,1) \in \Gamma$ $(2,0,1) \in \Gamma$



COME SI DISEGNA UNA PARABOLA

1. Trovare il punto improprio (centro)
2. Trovare l'asse
3. Trovare il vertice proprio
4. Trovare qualche ulteriore punto

Es: $x^2-2xy+y^2-16x=0$

(1) $\begin{cases} x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x_1-x_2)^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ $C_\infty=(1,1,0)$

$\Downarrow$

Polo dell'asse $(-1,1,0)$

(2) $(-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1 & -1 & -8\\ -1 & 1 & 0\\ -8 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$

$\Downarrow$

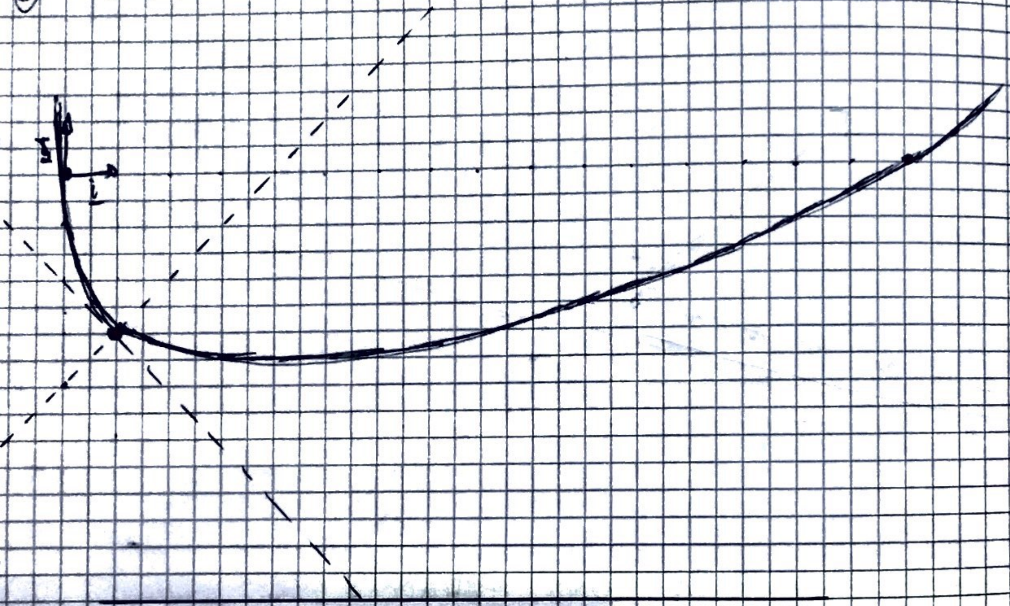
$-2x+2y+8=0$

$\Downarrow$

$x-y-4=0 \quad a \parallel i+j$

(3) $\begin{cases}(x-y)^2-16x=0\\ x-y=4\end{cases}$ $\begin{cases}16-16x=0\\ *\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}$ Vertice = $(1,-3)$

(4) $(0,0)\in\Gamma$ $\quad(16,0)\in\Gamma$



COME SI DISEGNA UN ELLISSE

(1) Trovare gli assi

(2) Trovare i vertici

(3) Trovare qualche ulteriore punto

Es: $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y-4=0$

(1) $x+y-2=0$

$x=y$

(2) $\begin{cases}4x^2-2x^2-4x-4=0\\ x=y\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-4x-4=0\\ *\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2x-2=0\\ *\end{cases}$

$\hookrightarrow$ $V_1\ (1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$

$V_2 = (1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+2}}{1} < \begin{matrix}1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{matrix}$

$\begin{cases}\Gamma\\ x+y-2=0\end{cases}$ $\quad V_3=(0,2)$ $\quad V_4=(2,0)$

(3) $(-1,0)\in\Gamma$ $\quad(2,0)\in\Gamma$