

I materiali si caratterizzano con prove di trazione, compressione o taglio piano.

Il calcestruzzo resiste molto bene a compressione e poco a trazione a differenza dell'acciaio.

Quindi ovviamente il calcestruzzo viene usato in edilizia prettamente come materiale di compressione e quindi faremo la relativa prova di compressione.

Possiamo allora volere un coefficiente di sicurezza relativo a  $\sigma_{\text{E}}$  (ELASTICITÀ) o per lo smenramento o rottura.

Le parametri di riferimento molto spesso è la tensione di rottura.

Ad esempio avremo un provino di calcestruzzo con

$$\sigma_0 \text{ (SIGMA DI ROTURA)} = 25 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_e \text{ (SIGMA ELASTICITÀ)} = 13 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{es} \text{ (SIGMA ESERCIZIO)} = 10 \text{ N/mm}^2$$

che ci darà un coeff. di sicurezza  $S = 2,5$  per  $\sigma_0$

e  $S = 1,3$  per  $\sigma_e$

I CRITERI DI RESISTENZA ci aiutano a rendere passabile uno stato tensionale complesso con una  $T$  di riferimento ottenuta in una prova sull' materiale.

## CRITERIO DI BELTRANI

Beltrani dice che:

Un materiale raggiunge la crisi se il suo potenziale elastico raggiunge un valore limite

Il potenziale elastico ha questa espressione:

SCRITTO IN  
FUNZIONE  
DELLE  
TENSIONI

$$\varphi = \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] + \frac{1}{2G} \left( \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 \right)$$

TENSIONI PRINCIPALI  $\varphi = \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \right] \Rightarrow \varphi_0$

S è il coefficiente amplificativo dello stato tensionale che porta alla crisi

quindi  $S \cdot \sigma_{es} = \sigma_0$

moltiplicando il potenziale di esercizio per il coeff di sicurezza avremo il potenziale di crisi

$$S \cdot \varphi_{es} = \varphi_0$$

le prove le facciamo in regime monodimensionale. Quindi l'acciaio va in crisi quando la sua tensione diventa  $\sigma_0$

$$\varphi_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E} \quad \text{perché tutti gli altri termini sono} = 0$$

Ese. prova di comp. avremo solo  $\sigma_m^2$   $(0 + \sigma_m^2 + 0) - \frac{2}{m}(0)$

essendo  $\sigma_0^2$  sarà  $S^2 = \frac{\varphi_0}{\varphi}$

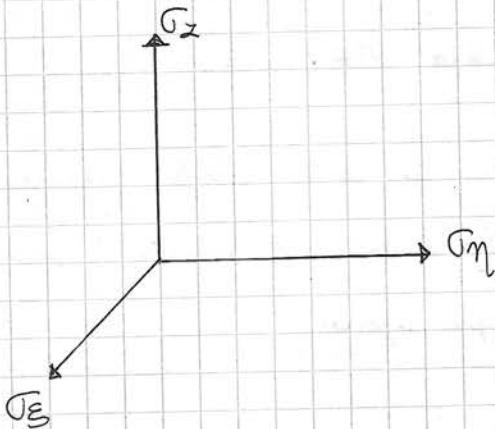
$$S^2 = \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)}$$

$$S = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}}$$

$S \cdot \sqrt{(\ ) - \frac{2}{m}(\ )} = \sigma_0$  otteniamo un confronto tra due grandezze idealmente omogenee

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}$$

Dato uno stato tensionale si definisce  $\sigma_{eq}$  quella tensione che agendo in regime monoassiale fornisce lo stesso coefficiente di sicurezza dello stato tensionale completo.



Nel piano, c'è l'equazione di un ellisseide che ha come asse la bisettrice dell'ottante positivo.

Ottante: Uno degli otto spazi compresi nei tre assi positivo.

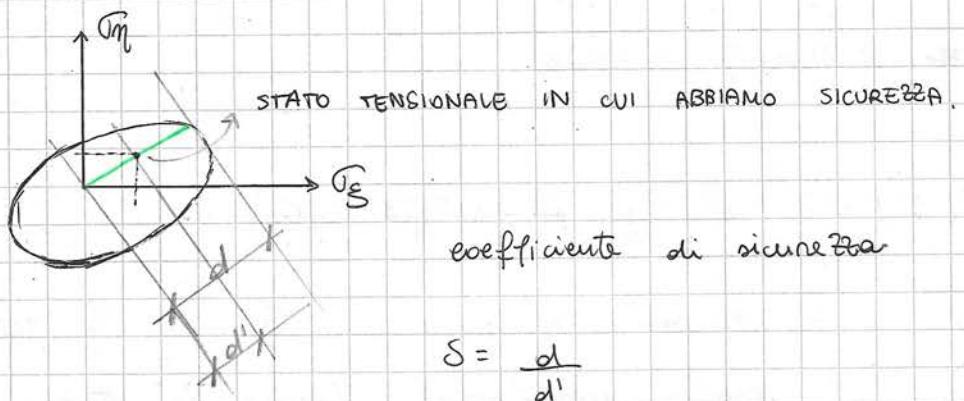
Bisettrice: Bisettrice delle proiezioni di tutti e 3 i piani

- Tutti i punti all'interno dell'ellisseide caratterizzano uno stato tensionale ammissibile.
- I punti della superficie esterna rappresentano uno stato tensionale che ha appena toccato il limite.
- I punti esterni all'ellisseide rappresentano uno stato tensionale di crisi.

Si crea così un dominio.

le criterio di Beltrami puo' ha delle pecche.

Funziona solo per materiali iso-resistenti (stessa resistenza a traz. e compres). Quindi funziona bene con l'acciaio ma non col calcestruzzo.

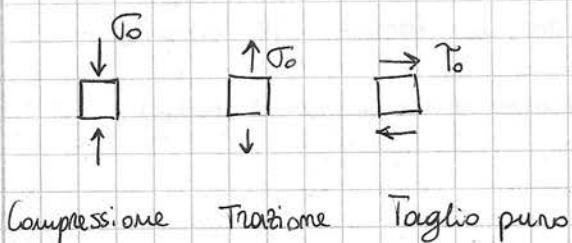


#### CRITERIO DELLA CURVA INTRINSECA

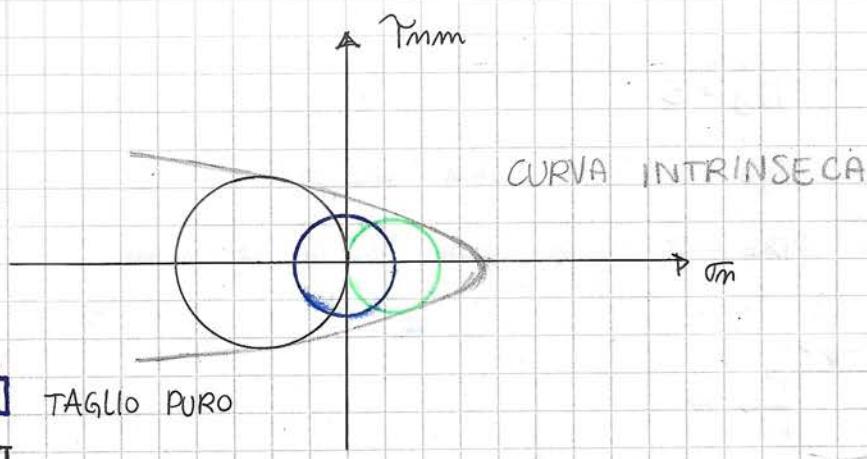
Se prendiamo un materiale con un certo stato tensionale per cui possiamo tracciare il cerchio di Mohr (possiamo farlo se abbiamo una sin. principale)

$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	
$\sigma_y$	$\tau_{yz} = 0$	Otteniamo da ciò $\sigma_z$ tensione
$\sigma_z$	$\tau_{xz} = 0$	principale

- Per un materiale trattato con questo criterio avremo bisogno di un database di prove (COMP. o TRAZ.)



ANTEGGI il taglio punto si fa con un macchinario chiamato macchina di casagrande



Man mano che abbiammo queste prove e i relativi cerchi di MOHR otteniamo una curva che rappresenta gli inviluppi dei cerchi.

La curva dell'acciaio ad esempio c'è rappresentata da 2 rette perché c'è un materiale iso-resistente.

Se lo stato tensionale neutro nella curva siamo in sicurezza. Se il cerchio di MOHR lambisce la curva significa che abbiamo raggiunto la cintura. Se lo stato tensionale scavalca la curva vuol dire che non c'è uno stato tensionale compatibile.

$$\sigma_x = 10$$

$$\tau_{xy} = 5$$

$$\tau_{yz} = -5$$

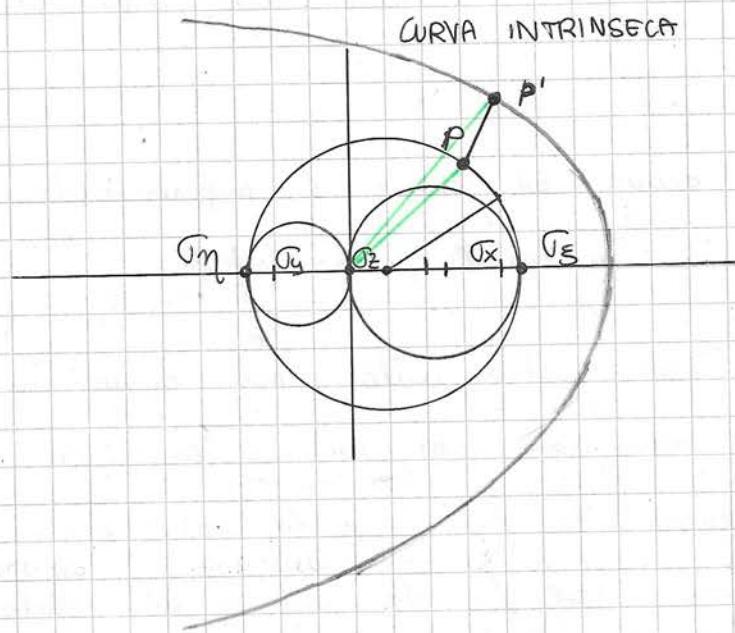
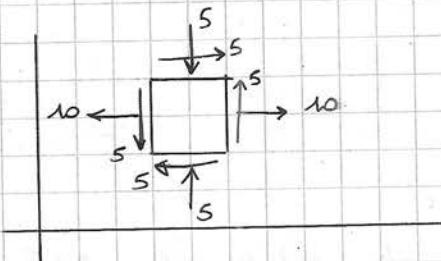
$$\tau_{xz} = 0$$

Una tensione è uguale a 0

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

Stato tensionale piano.



questa curva rappresenta il dominio di curvi

quanto vale il coeff di sicurezza di questo stato  
tensionale ?  $S = ?$

Se aumentiamo lo stato tensuale in maniera proporzionale.

il cerchio si svilupperà omoteticamente rispetto agli assi.

(Centro omotetico) = Punto che non cambia anche durante  
una trasformazione

le centri degli assi è esattamente un altro omotetico.

la cui vera' raggiunta quando un punto del cerchio diventa tangente alla curva.

Quindi per definire  $S$  immaginiamo che il punto che tocca la curva sia il punto  $P$ .

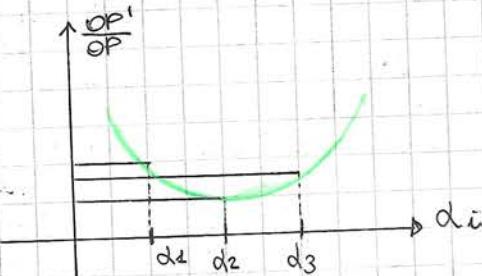
$$S = \frac{OP'}{OP} \quad \text{quindi quando } P \text{ tende a } P' \text{ avremo } S \text{ che tende a 1}$$

quindi  $S$  sarà il valore minimo di  $\frac{OP'}{OP}$  dove  $P \neq P'$   
saranno punti sempre diversi a tangenti.

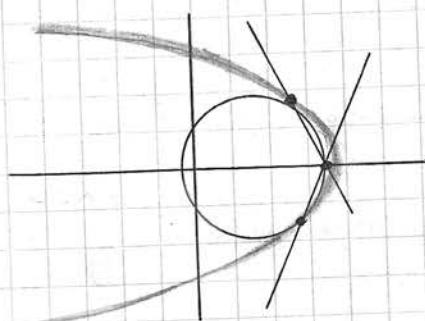
$$S = \min \left[ \frac{OP'}{OP} \right]$$

Ottieniamo una curva.

Il valore minimo di questa curva sarà  $S$ .



Questo criterio ci aiuta anche ad identificare i ~~quadri~~ quadrati fessurativi. Perché quando il cerchio tocca la curva al di là dello stato tensionale avremo una  $\Upsilon$  di cisi. Le  $\Upsilon$  sono tensioni tangenziali e quindi il materiale ha una rotura da scorrimento.



Queste due rette rappresentano le linee di LUDERS.

Queste identificano le inclinazioni delle lesioni sul provino selezionato.

LINEE DI LUDERS  $\Rightarrow$  QUADRI FESSURATIVI

## DESAINT VENANT

Soluzioni del problema elastico per solidi particolari e in qualche modo assimilabili alle nostre travi bidimensionali.

$G$  = BARICENTRO  
SEZIONE



Passando dai carichi agli spostamenti. Dai carichi passiamo agli stati tensionali con varie eq. ai limiti o di equilibrio e dagli stati tensionali (con alcune ipotesi) possiamo passare da  $\sigma, \tau$  a  $E, \gamma$  e quindi alle deformazioni e ancora in ipotesi di piccoli spostamenti arriviamo a quest'ultimo.

Ipotesi:

- 1) Il solido lo supponiamo struttura mono dimensionale (la lunghezza del solido [ $L$ ] è molto maggiore delle dimensioni della sez. trasversale )

$$L \gg d. \quad \text{Almeno 10 volte maggiore}$$

- 2) Struttura priva di peso. (Forza peso non contemplata)

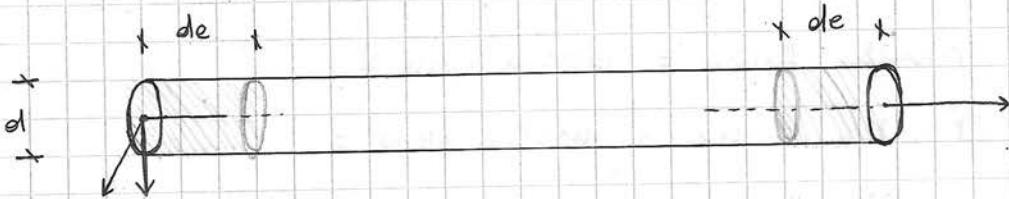
- 3) Caricato solo sulle basi (di destra o sinistra)  
quindi carichi non applicati sul mantello della trave.

- 4) Assenza di vincoli.
- 5) Stato tensionale piano

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Ovviamente faremo ancora le ipotesi di elasticità lineare  
Materiale omogeneo e isotropico  
Materiale conservativo  
Piccoli spostamenti

C'è anche il postulato di DESAINT VENANT che stabilisce la distanza di estinzione

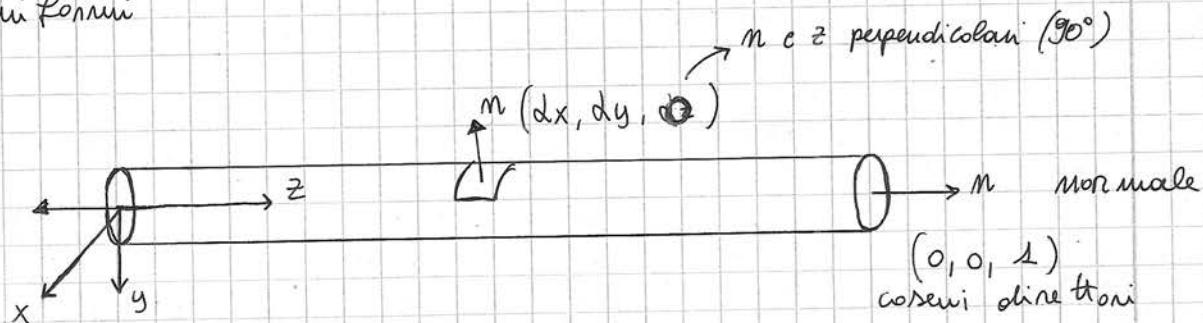


Se ci mettiamo in un punto della trave lontano dalla distanza di estinzione abbiamo che lo stato tensionale in quel punto non dipende dalla distribuzione di carichi laterali sulle facce ma dipende dalle loro RISULTANTI.

Ad esempio nel calcolo delle reazioni un carico distribuito considerato come forza puntuale non ci cambia reazioni mentre cambiano momenti flettenti e tagli e ~~forze~~ sforzi

Immaginiamo una forza olo sforzo normale in G. sia puntuale e avrà la sua influenza.

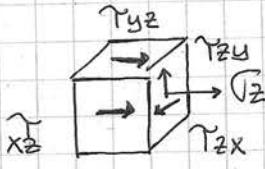
Se però mettessimo un carico distribuito su tutta la faccia laterale, nelle zone estinte avremo tensioni un po' più uniformi



$(0,0,1)$  perché l'angolo che u forma con x è  $90^\circ$ , l'angolo che forma con y è  $90^\circ$  e l'angolo che z è  $0^\circ$

~ ~ ~ ~ ~  
5) STATO TENSIONALE PIANO

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 0 \\ \tau_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \rightarrow$$



$\tau_{zx}$  =  $\tau$  sulla faccia  $z$  rivolta verso  $x$

$\tau_{xz}$  =  $\tau$  sulla faccia  $x$  rivolta verso  $z$

$\tau_{yz}$  =  $\tau$  sulla faccia  $y$  rivolta verso  $z$ .

$\tau_{zz} \neq 0$   ~~$\tau_{zx} \neq 0$~~   ~~$\tau_{zy} \neq 0$~~

~ ~ ~ ~ ~

Sul solido potremo avere forze sull'asse  $x, y, o z$

quindi avremo una condizione di carico per

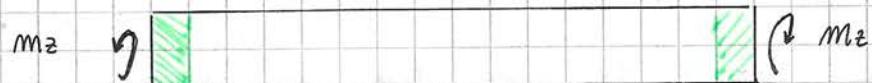
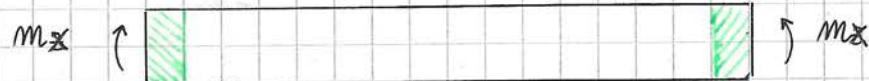
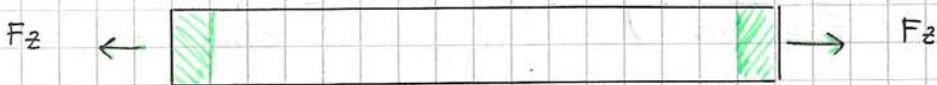
→ l'equilibrio del solido da 2 forze lungo  $x, y, z$

PRIME 3 CONDIZIONI DI CARICO

Potremo anche estorcere due coppie intorno a  $x, y, z$

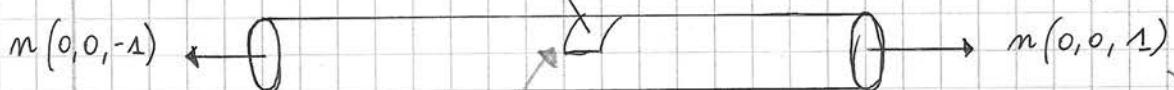
Per questo solido avremo quindi 6 CONDIZIONI DI CARICO SEMPLICI

## BASI O FACCE LATERALI



Neoliemo come si specializzano per la nostra trave le equazioni ai limiti:

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_x dx + \bar{\gamma}_{xy} dy + \bar{\gamma}_{xz} dz = p_x \\ \bar{\gamma}_{xy} dx + \bar{\gamma}_y dy + \bar{\gamma}_{yz} dz = p_y \\ \bar{\gamma}_{xz} dx + \bar{\gamma}_{yz} dy + \bar{\gamma}_z dz = p_z \end{cases}$$



H.p.:

$$\bar{\gamma}_x = \bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_y = 0$$

Eq. limiti su base laterale dx :

$$S_x : \begin{cases} -\bar{\gamma}_{xz} = p_x \\ -\bar{\gamma}_{yz} = p_y \\ -\bar{\gamma}_z = p_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{xz} = p_x \\ \bar{\gamma}_{yz} = p_y \\ \bar{\gamma}_z = p_z \end{cases}$$

Abbiamo puntato ( $dx=0, dy=0, dz=1$ )

$$\text{Sup. laterale : } \bar{\gamma}_{xz} dx + \bar{\gamma}_{yz} dy = 0$$

Dal punto di vista geometrico questa equazione ci dice che  $\bar{\gamma}_z$  è tangente alla sup. laterale del solido

## RELAZIONI DI NAVIER

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \rightarrow \epsilon_x = - \frac{\sigma_z}{Em}$$

$$\epsilon_y = - \frac{\sigma_z}{Em}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (\text{perché } \tau_{xy} = 0)$$

Notiamo che  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  sono fra loro uguali e sono legate anche alla  $\epsilon_z$ .  $-1/m$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\overset{\leftarrow}{\epsilon_x} \quad \overset{\uparrow}{\epsilon_y}$$

E dunque, se  $\gamma_{xy} = 0$  :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

## Equazioni Indelineate dell'Equilibrio.

Ricondiamoci che il solido è senza peso. Quindi forze peso = 0

$$\text{FORZE DI MASSA} = 0 \rightarrow X = Y = Z = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = X \\ \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = Y \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} = Z \end{array} \right.$$

Come si specializzano?

→ tutti uguali a 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Questo ci dice che la variazione della  $\gamma$

lungo z è uguale a 0

$\gamma_z = [\gamma_{zx}, \gamma_{zy}]$  è indipendente da z e cioè non varia lungo z

Eq. equilibrio elastico:

Rappresentano le equazioni inelusive dell'equilibrio scritte in termini di spostamenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right.$$

Come le ricaviamo?

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial (G \cdot \gamma_{xz})}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{se dividiamo rispetto a } \partial z$$

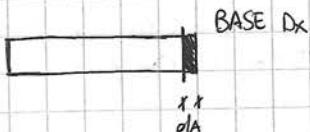
$$G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

- Abbiamo scelto un solido sotto molte ipotesi.
- Abbiamo poi specializzato le equazioni ai limiti, le relazioni di Navier, le equazioni indefinite dell'equilibrio e anche le eq dell'eq elastico.

Sulle basi laterali del solido abbiamo forze di superficie e possiamo immaginare di calcolarne le risultanti.

### BASI LATERALI

$$F_x = \int_A P_x \cdot dA$$

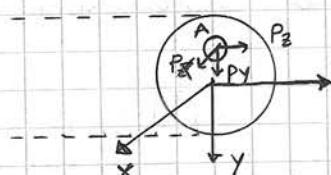


Forze superficiali:  $(P_x, P_y, P_z)$

$$F_y = \int_A P_y \cdot dA$$

$$F_z = \int_A P_z \cdot dA$$

$$M_x = \int_A P_z \cdot y \cdot dA$$



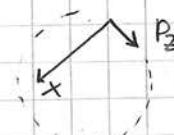
Nell'elemento oriale A

avremo 3 forze superficiali  $P_x, P_y, P_z$ . il momento su

$x$  sarà solo da  $P_z$

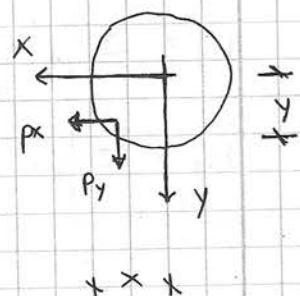
la forza  $P_z$  genera momento

rispetto a  $x$  per la distanza  $y$  lungo l'asse  $y$



$$M_y = \int_A P_z \cdot x \cdot dA$$

$$M_z = \int_A (P_x \cdot y - P_y \cdot x) dA$$



$$F_x = \text{TAGLIO IN DIREZIONE } x \quad | \quad F_y = \text{TAGLIO DIR. } y$$

$F_z = \text{SFORZO NORMALE (N)}$

$M_x = \text{MOMENTO FLETTENTE INTORNO ALL'ASSE } x \quad (M_x)$

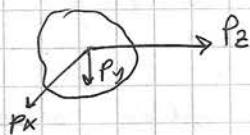
$m_y = (M_y)$

$M_z = \text{MOMENTO TORCENTE (M_t)}$

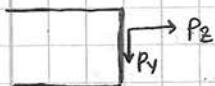
$$\text{Perché in } M_x = \int_A P_z \cdot y \, dA \quad \text{e} \quad M_z = \int_A (P_y x - P_x y) \, dA$$

nel primo caso ci troviamo direttamente sulla superficie  
e  $P_y$  è su di essa quindi non genera momento.

$P_z$  è uscente



TRAVE DI  
PROFILO



$P_x$  uscente dalla trave

~ o ~ o ~ o ~ o

le tangoli  $T_x$  possiamo ponere come

$$T_x = \pm \int T_{xz} \, dA$$

+ sulla base di destra e  
- sulla base di sinistra.

Cioè lo diciamo per le considerazioni all'inizio sul solido

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = P_x \\ \gamma_{yz} = P_y \\ \gamma_z = P_z \end{cases}$$

$$T_y = \pm \int \gamma_{yz} \, dA$$

$$N = \pm \int \gamma_z \, dA$$

$$M_x = \pm \int_A \gamma_z \cdot y \, dA$$

$$M_y = \pm \int_A \gamma_z \cdot x \, dA$$

$$M_t = \pm \int_A (\gamma_{yz} x - \gamma_{xz} y) \, dA$$

Cio' ci fa capire che su una trave se sulle facce laterali abbiamo sforzo normale, all'interno della trave avremo dello  $\tau_z$ .

Se sulla trave avremo un taglio lungo  $x$ , all'interno della trave avremo dello  $\tau_{zx}$

Taglio lungo  $y \rightarrow \tau_{yz}$

Se avremo il nostro solito momento flettente lungo  $x$  nella trave ci saranno  $\sigma_z$

## CASI DI SOLLECITAZIONE SEMPLICI

$N \rightarrow$  SFORZO NORMALE CENTRATO

$M_x \rightarrow$  MOMENTO FLETTENTE  $\rightarrow$  FLESSIONE RETTA LUNGO X

$M_y \rightarrow$  MOMENTO FLETTENTE  $\rightarrow$  FLESSIONE RETTA INTORNO A Y

$T_x \rightarrow$  TAGLIO X

$T_y \rightarrow$  TAGLIO Y

$M_z \rightarrow$  MOMENTO TORCENTE  $\rightarrow$  TORSIONE

Perché semplici? perché ne troveremo solo uno per volta  
 ma in alcuni casi possono essere anche composti:  
 (SFORZO + MOMENTO) (MOMENTO LUNGO X e Y) (- - -)

Ha senso sommare i casi di sollecitazione solo quando generano le stesse componenti. Ad esempio:

$$N = \pm \int_A \sigma_2 \cdot dA \quad M_x = \int_A \sigma_2 \cdot y \cdot dA$$

Tutti e due generano  $\sigma_2$  nella trave.

# SFORZO NORMALE CENTRATO



~~RELAZIONI~~

~~DI NAVIER~~

$$\begin{cases} u = -\frac{c}{mE} \cdot x \\ v = -\frac{c}{mE} y \\ w = +\frac{c}{E} z \end{cases}$$

Queste soluzioni di DESAINT VENANT rappresenta la forma di spostamenti per un punto qualsiasi.

C = COSTANTE

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Condizione sul DESAINT-V

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{xz} dx + \gamma_{yz} dy = 0$$

Sono tutte condizioni che ora riusciamo in grado di verificare.

prendiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c}{mE}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{c}{mE}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c}{E}$$

avremo

$$-\frac{c}{mE} = -\frac{c}{mE} = -\frac{1}{m} \frac{c}{E}$$

VERIFICATA

~~~~~

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

0+0=0 VERIFICATO.

~~~~~

$$u = -\frac{c}{mE} x$$

$\gamma_{xz}$

$$v = -\frac{c}{mE} y$$

$\gamma_{yz}$  ?

$$w = \frac{c}{E} z$$

$\gamma_z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_z = E \epsilon_z = E \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = E \frac{c}{E} = c$$

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} \left( \frac{c}{E} z \right) = \frac{c}{E}$$

$\sigma_z = c$

$$\text{LATO DX (+)} \quad N = \int_A \sigma_z dA \Rightarrow N = \int_A c dA \Rightarrow N = c \int_A dA$$

$$N = c \cdot A$$

portiamo fuori c perché è  
una costante

$$c = \frac{N}{A}$$

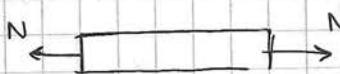
$$U = - \frac{N}{mEA} x$$

$$v = - \frac{N}{mEA} y$$

$$w = \frac{N}{EA} z$$

Spostamenti di qualsiasi  
punto in funzione dello  
sforzo normale

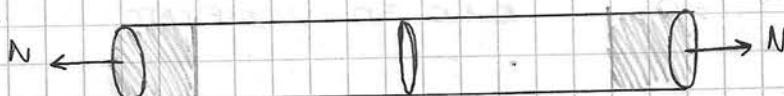
$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$



quanto si allunga la trave?

+ L +

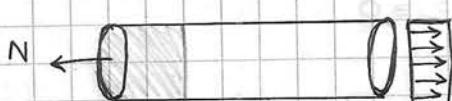
$$w = \frac{NL}{EA}$$



Supponiamo uno sforzo di trazione centrata.

A meno delle zone di estinzione avremo un punto  
interno:

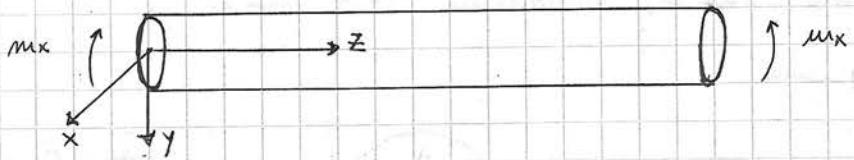
DIAGRAMMA DI FLESSIONE TENSIONE



$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

Per sforzi trazionali vediamo inoltre che il regno è  
concorde.

## FLESSIONE RETTA



Sistema assiale bicancentrico con  $O \equiv G$

Così è il bican centro di una figura?

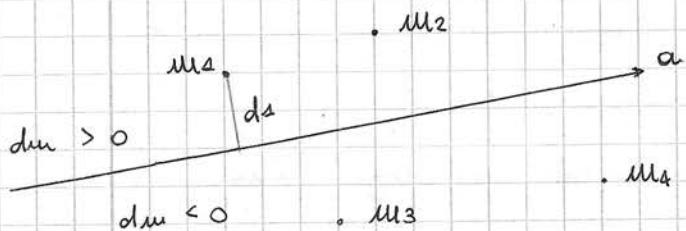
È il centro del fascio di rette di momento statico nullo.

Allora non solo  $O \equiv G$  ma anche  $X \equiv E$  e  $Y \equiv M$

che sono le direzioni principali di inerzia delle sezioni

~~~~~

Dato un sistema di masse concentrate prendiamo una retta a



il momento statico

di  $m_2$  è dato

$$\text{da } S^2 = m_2 \cdot d_2$$

Il momento statico rispetto ad a complessivo sarà dato da

$$S_a = \sum_{i=1}^4 m_i \cdot d_i$$

le distanze  $d_1, \dots, d_4$  sono  $> 0$  se a sinistra della retta  
orientata.  $< 0$  se a destra.

Ci può essere una configurazione di  $a$  tale che il  
momento a  $\alpha_x$  sia uguale a quello di  $\alpha_X$  e avere  
come risultante  $0$ .

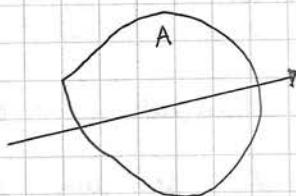
Si definisce il bican centro il centro del fascio di rette di  
momento statico nulli.

~~~~~

$$\text{Se } S_a^1 = m_1 \cdot d_1 \text{ allora } d_1 = \frac{S_a}{m_1}$$

quindi, il momento statico / sommatore delle masse ci dà  
il baricentro. quindi

$$dG = \frac{S_a}{A}$$

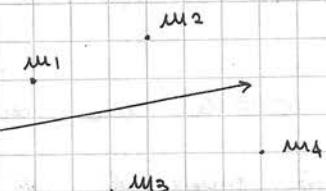


$$S_a = A \cdot d_1$$

$$\frac{S_a}{A} = dG$$

Definiamo momento di inerzia

$$I_a = m_1 \cdot d_1^2$$



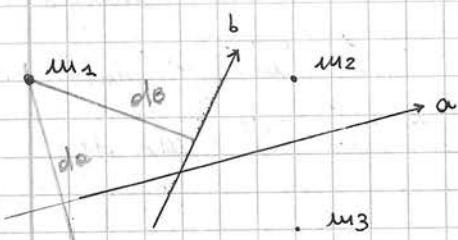
Il momento di

inerzia ovviamente è sempre

positivo dato che la distanza è quadratica

Il momento di inerzia potremmo definirlo come momento  
statico del momento statico:  $(m_1 \cdot d_1) \cdot d_1$

non non non



Momento centri fugo:  $I_{ab}$ .

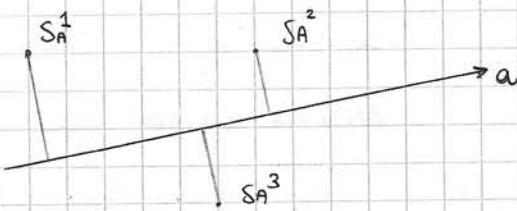
$$I_{ab}^1 = m_1 \cdot d_a^2 \cdot d_b^2$$

Prodotto tra la massa e la sua distanza dalle due  
rette.

$I_{ab} =$  momento statico rispetto a b dei momenti statici

rispetto ad a.  $\rightarrow I_{ab} = S_a^1 \cdot d_b^2$

Immaginiamo di avere anche masse mosse momenti statici



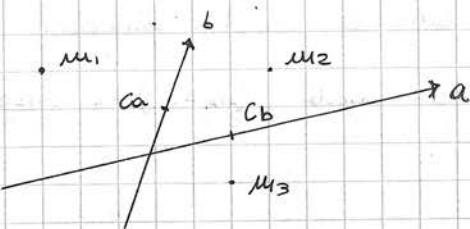
potremmo calcolare il baricentro relativo dei momenti statici

$$(Sa^1) \cdot 1 = Ia^1 \rightarrow 1c = \frac{Ia^1}{Sa^1}$$

questo punto baricentricale dei momenti statici non coincide con quello delle masse e lo chiamiamo Ca nel caso della retta a

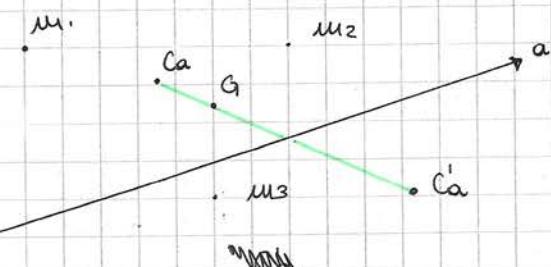
c si definisce come centro relativo della retta a rispetto al sistema di masse m.

Romponiamo un sistema di masse:



Se il momento centrifugo tra a e b ha valore nullo  
 $Iab = 0$  le due rette si dicono conjugate

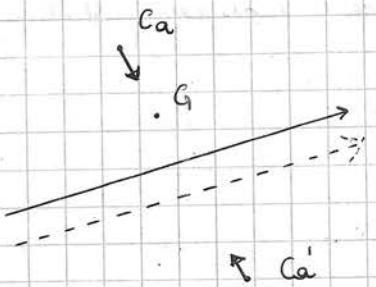
Essere conjugate vale a dire che il centro della retta a appartiene a b e il centro della retta b appartiene all'altra a



$C'a =$  punto simmetrico rispetto a G del punto Ca

Se il punto Ca e' come in figura.

All'avvicinamento della retta a a G il punto Ca si fa più distante. Se la retta la allontaniamo da G avremo Ca che tende a G. Se G e' sulla retta Ca e' all'infinito.



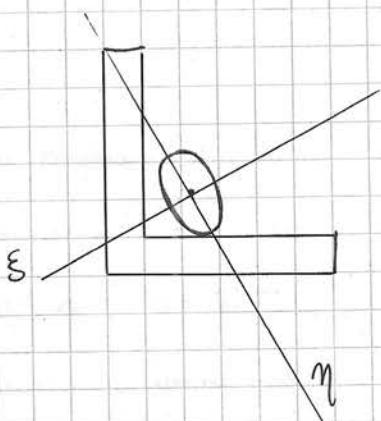
allontanamento di  
a da G.

Avvicinamento di Ca, Ca a G.

Possiamo individuare una posizione della retta  $a^*$  dove il centro relativo è contenuto proprio sulla retta.

Lo stesso gioco possiamo farlo per la retta  $b$ .

le lungo altri punti generati dai centri relativi simmetrici che appartengono alle rette stesse descriviamo una ellisse che si chiama ellisse centrale d'inerzia



direzioni principali d'inerzia  
sono le uniche direzioni  
coniugate ( $I_{xy} = 0$ ) e ortogonali

Quindi **Baicentro** = intersez di due rette con momento statico = 0

( $+ax, -ay$ ) **Momento statico** = massa  $\cdot$  distanza netta

(sopra +) **Momento iniziale** = momento statico sui momenti statici  $(m_1 \cdot d_1) d_1$ .

(+, -) **Momento centrifugo** = momento statico rispetto alla retta b odi momenti statici rispetto alla retta a.

$$I_{ab} = m_1 \cdot d_a \cdot d_b$$

**Centro relativo** = Baicentro dei momenti statici  $d_c = \frac{I}{SA} \frac{\text{Mom. INERZIA}}{\text{Mom. STATICO}}$

~~Retta di inerzia~~ =

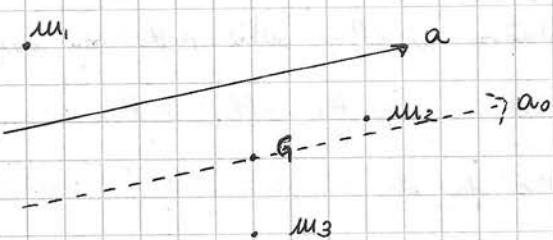
**rette coniugate** = momento centrifugo nullo

**Direzioni principali dell'inerzia** = Uniche due rette coniugate e ORTOGONALI

**Ellisse centrale dell'inerzia** = Figura generata dai vari centri relativi simmetrici appartenenti alle stesse rette.

## TEOREMA DEL TRASPORTO

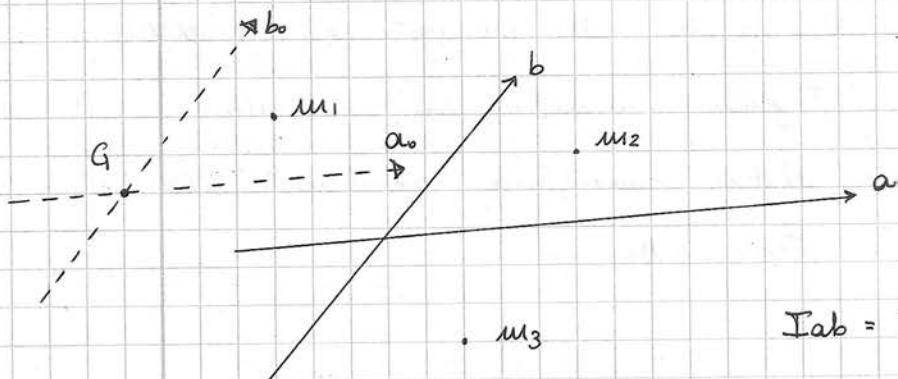
### DEL MOM. D'INERTIA



$$I_a = I_{ao} + \sum m_i \cdot (d_{ai} - a_o)$$

distanza retta a  
da  $a_o$

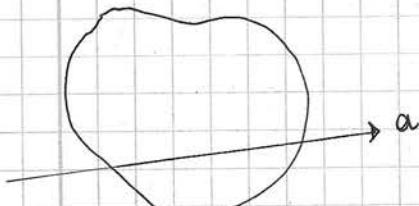
Vale solo per la retta passante dal baricentro del sistema masse.



Momento Centrifugo di trasporto

$$I_{ab} = I_{aob} + \sum m_i \cdot d_{ai} \cdot d_{bi}$$

~ ~ ~ ~



le momenti d'inerzia di un'area  
di flusso come quella di un corpo  
non è uguale a  $m \cdot d$  ma va  
fatta attraverso un calcolo di integrazione

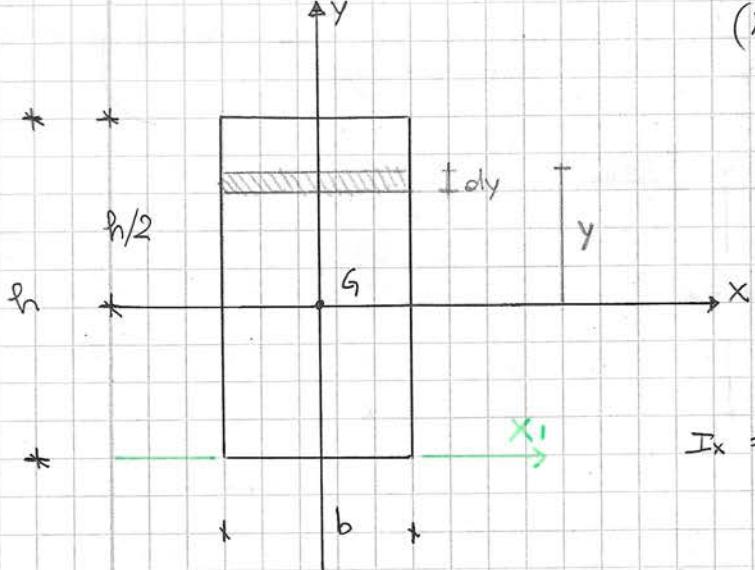
~ ~ ~

### RAGGIO DI INERTIA

$$r_a = \sqrt{\frac{I_a}{A}} \quad r_a^2 = \frac{I_a}{A}$$

$A \cdot r_a^2 = I_a$   $r_a$  è la distanza dove immaginiamo  
di concentrare tutta la massa per calcolare lo  
stesso momento d'inerzia

$(x, y)$  assi biaxcentrici



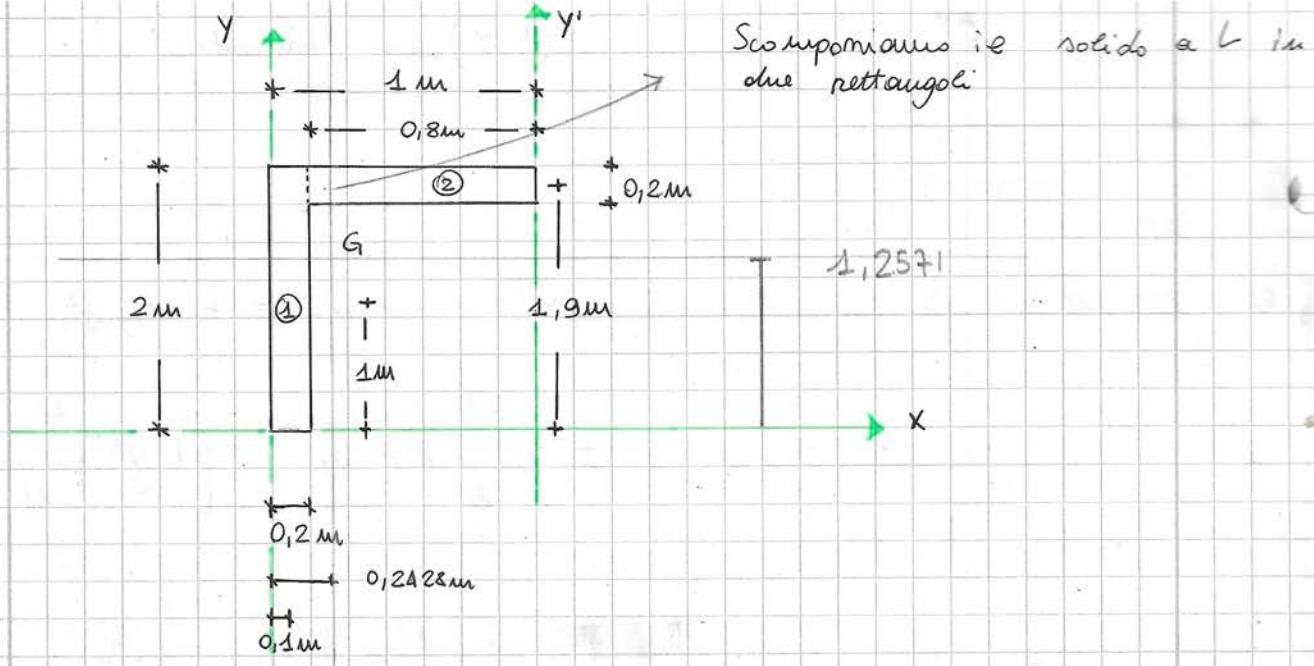
$$dI_x = (b \cdot dy) \cdot y^2$$

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy = \left[ b \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{b \left[ \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right]} = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b h^3}{12}$$

$$x_0 \text{ si intende } I_{x<} = I_{x_0} + A \cdot d_{x_0 x_1}^2 = \frac{b h^3}{12} + b h \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 = b h^3 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{b h^3}{3}$$



$$A = (0.2 \cdot 2) + (0.8 \cdot 0.2) = 0.560 \text{ m}^2$$

$$S_x = (0.2 \cdot 2) \cdot 1 + (0.8 \cdot 0.2) \cdot 1.9 = 0.704 \text{ m}^3$$

$$S_y = (0.2 \cdot 2) \cdot 0.1 + (0.8 \cdot 0.2) \cdot 0.6 = -0.136 \text{ m}^3$$

$$d_{Gx} = \frac{S_x}{A} = \frac{0.704}{0.560} = 1.2571 \text{ m}$$

$$d_{Gy} = \frac{S_y}{A} = -\frac{0.136}{0.560} = -0.2428 \text{ m}$$

Valori ~~negativi~~<sup>>0</sup> a dx degli assi, valori ~~positivi~~<sup><0</sup> a sx

$$I_x = I_{x(1)} + I_{x(2)} =$$

$$I_{x(1)} = \frac{bh^3}{3} \quad \text{valore visto calcolato prima.}$$

$$\text{TRASPORTO} \rightarrow I_{x(2)} = \left[ \frac{bh^3}{12} + A \cdot d_{Gx_0}^2 \cdot x \right] \quad \begin{aligned} &\text{Non. Imen. Rispett. all'asse baricentrico + Area \cdot dist}^2 \text{ da} \\ &\text{Asse baric. a Ass. x.} \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{(0.2 \cdot 2^3)}{3} + \frac{(0.8 \cdot 0.2^3)}{12} + (0.8 \cdot 0.2) \cdot 1.9^2 =$$

$$0.5333 + 0.5808 = 1.114 \text{ m}^4$$

Potremmo anche calcolare i momenti di inerzia come differenze



$$I_x = I_{x(1)} + I_{x(2)} = I_{x(2)} - I_{x(1)}$$

$$I_{x(1)} = \frac{1 \cdot 2^3}{3}$$

↓

$$2,666$$

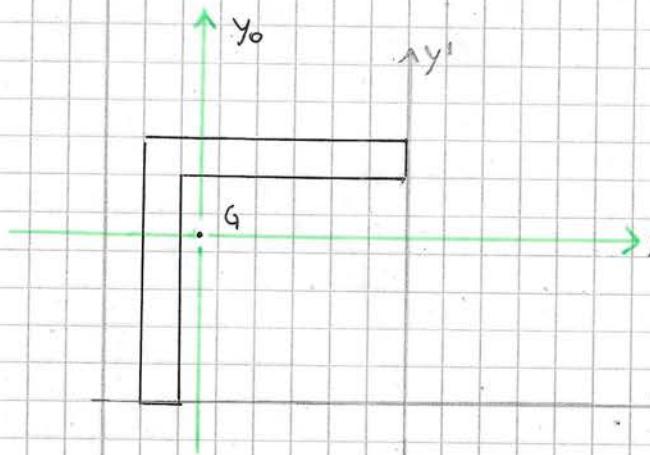
$$I_{x(2)} = \frac{0,8 \cdot 1,8^3}{3}$$

↓

$$1,555$$

$$= 1,111$$

$$I_y = I_{y(1)} - I_{y(2)} = \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1,8 \cdot 0,8^3}{3} = 0,3594 \text{ m}^4$$



$I_{x_0} ? \quad I_{y_0} ?$

$$I_x = I_{x_0} + A d_{x_0 x}^2$$

$$I_y = I_{y_0} + A d_{y_0 y}^2$$

$$I_{x_0} = I_x - A d_{x_0 x}^2$$

$$I_{y_0} = I_y - A d_{y_0 y}^2$$

$$I_{x_0} = 1,111 \text{ m}^4 - (0,560 \cdot 1,257^2) = 0,2264 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = 0,3594 \text{ m}^4 - (0,560 \cdot (1 - 0,2428)^2) = 0,0383 \text{ m}^4$$

Momento  
Centri pugni

$$I_{x_0 y_0}$$

$$I_{x_0 y_0} = A \sqrt{d_{x_0 x}^2 + d_{y_0 y}^2} = \sqrt{(1,257^2 + 0,2428^2)} = 1,275 \text{ m}^4$$

■

$$I_{x y_1} = A_{R_g}^2 d_{x_0 x} d_{y_0 y} - A_{R_p}^2 d_{x_0 x} d_{y_0 y} = (2 \cdot 1) \cdot 1 \cdot 0,5 - (1,8 \cdot 0,8) \cdot 0,9 \cdot 0,4$$

$$= 0,4816 \text{ m}^4$$

$$I_{xy'} = I_{x'yo} + A \alpha_{xx} \alpha_{yy}$$

$$I_{x'yo} = I_{xy} - A \alpha_{xx} \alpha_{yy}$$

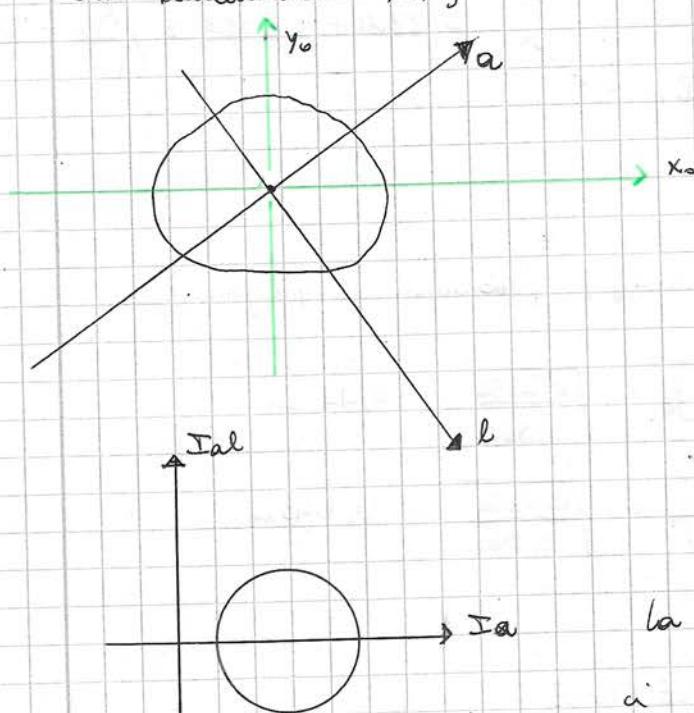
$$I_{x'yo} = 0,4816 - (0,560) \cdot 1,2571 \cdot (1 - 0,2428) = \\ = -0,0514 \text{ m}^4$$

Il momento centrifugo e' negativo.

$$I_{xy} = A_1 \alpha_{xx} \alpha_{yy} + A_2 \alpha_{x2} \alpha_{y2}$$

## Osservazioni di Mohr

Supponiamo di avere una figura geometrica con  
asse bicoassiale  $x_0, y_0$



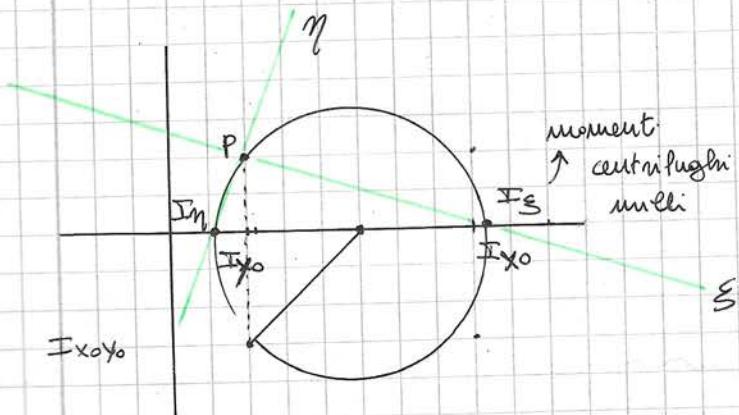
Mohr immagina una  
nuova terna di riferimento  
 $a, e$

Calcoliamo  $I_a, I_e$  e  $I_{al}$

la coppia di valori  $I_{al}, I_a$   
ci descrive un cerchio di Mohr  
di valori momenti inertiali

Ci sono posizioni per le quali il momento centriugulo e'  
uguale a 0  $I_{al} = 0$

Quindi avremo uno stato corrisposto delle rette, che però  
saranno anche ortogonali ( $a \perp e$ ) e che quindi ci  
davanno le direzioni principali



$$I_{y_0} = 0,038 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0} = 0,22 \text{ m}^4$$

$$I_{x_0y_0} = -0,0514 \text{ m}^4$$

$$\text{Polo } P = [I_{y_0}, -I_{x_0y_0}]$$

I raggi dell'ellisse centrale d'inerzia  $r_S$  e  $r_\eta$  sono dati da:

$$r_S = \sqrt{\frac{I_S}{A}}$$

$$r_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}$$

$$I_S = \frac{0,226u + 0,0383}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Px_0 - Ix_0}{2}\right)^2 + I_{xy_0}^2}$$

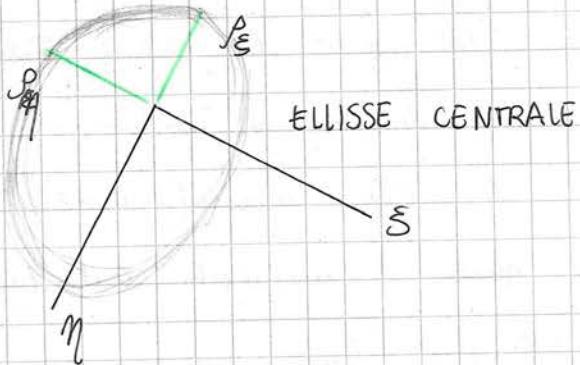
Ovvero il centro ± il raggio (teorema di pitagora)

$$I_S = 0,2396$$

$$r_S = \sqrt{\frac{0,2396}{0,560}} = 0,42 \text{ m}$$

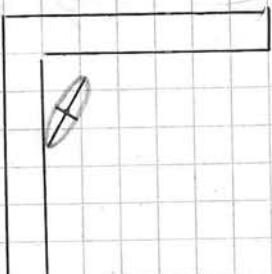
$$I_\eta = 0,025u$$

$$r_\eta = \sqrt{\frac{0,025u}{0,560}} = 0,045 \text{ m}$$



RICORDARE CHE  $S$  GIACE SULLA RETTA  $\eta$  e

CHE  $S$  GIACE SU  $\epsilon$



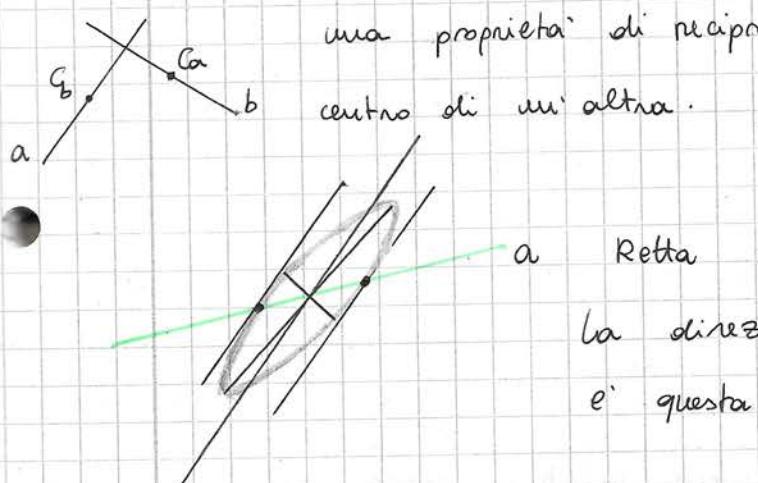
# COSTRUZIONI GRAFICHE

## GEOMETRIA DELLE AREE

- 1) Data una retta "a" indicare la direzione coniugata
- 2) Data una retta "a" indicare il centro relativo ca (ANTIPOLO)
- 3) Dato un punto Ca indicare l'antipolare "a"

rette coniugate = rette con momento centrifugo  $\neq 0$  e che godono di

una proprietà di reciprocità. L'una contiene il  
centro dell'altra.



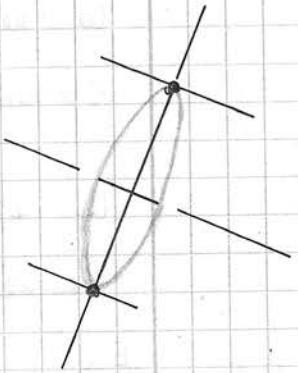
a Retta a bari centrale.

la direzione coniugata alla retta a  
e' questa

Retta coniugata bari centrale

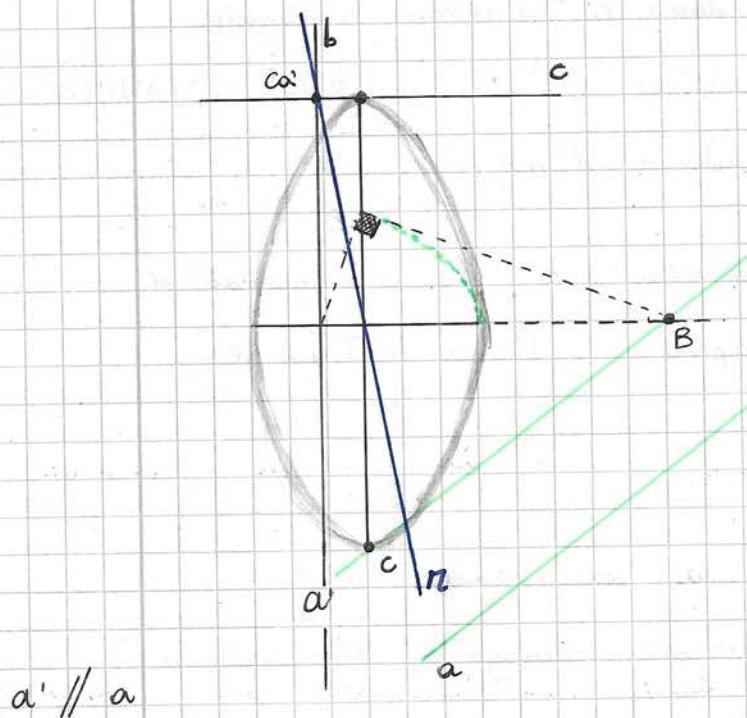
Se prendessimo come retta l'asse dell'ellisse avremo

Allora gli assi stellati ellisse sono le uniche  
direzioni coniugate e ortogonali tra loro.



1)

Come tutte le 3 le costruzioni avremo bisogno dell'ellisse centrale di massa. Avremo quindi già i diametri principali dell'ellisse.



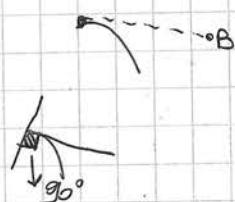
la retta di cui  $c$  è il centro relativo passa per l'estremo opposto della diagonale

la retta di cui  $B$  è centro relativo:

Prendiamo l'ampiezza del diametro minore che interseca  $B$  e riponiamo sulla diagonale maggiore.

Congiungiamo il punto di incontro con  $B$

e costruiamo la ortogonale a quella retta

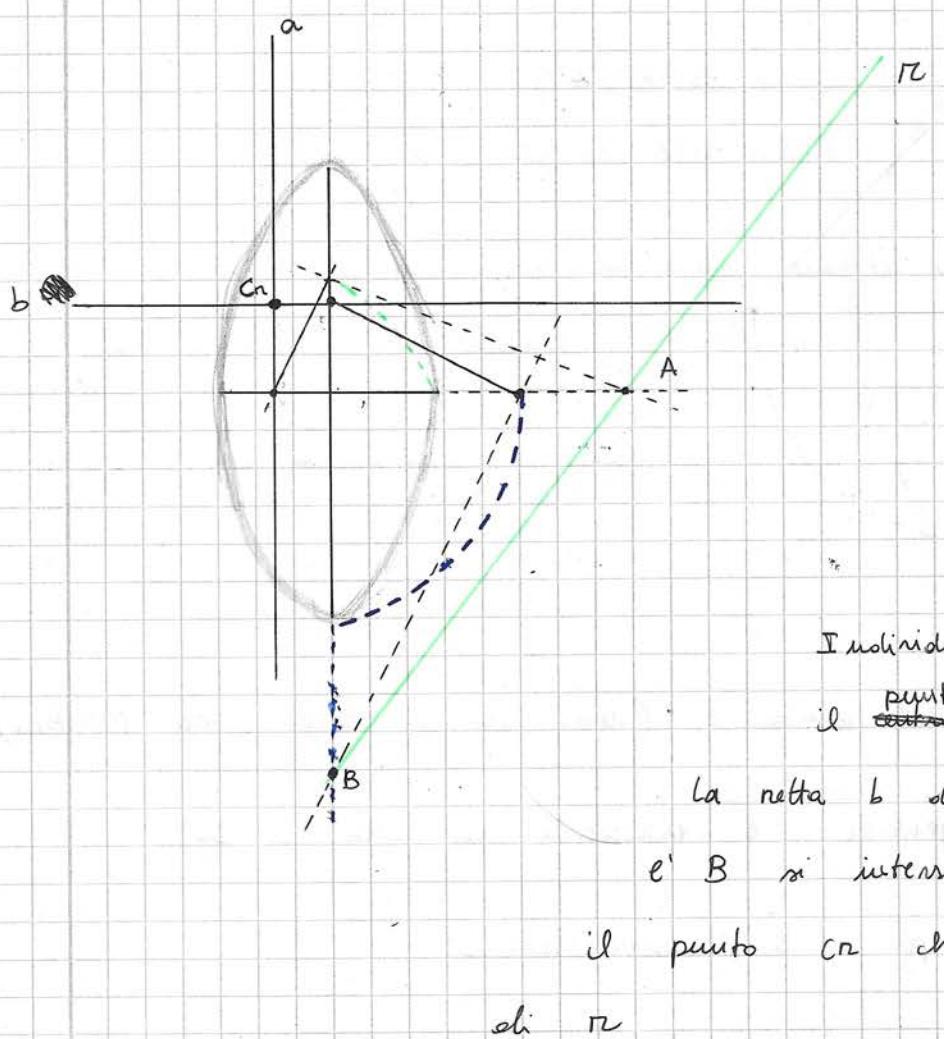


la retta  $b$  minima si interseca con la retta  $c$  e quel punto sarà il centro relativo della retta  $a'$

Per ottenere la direzione coniugate congiungiamo  $c a'$  al bocentro

$r =$  coniugate di  $a$

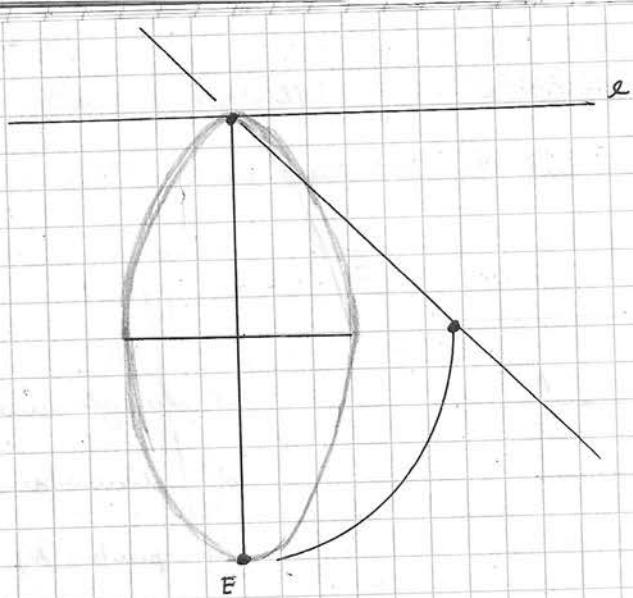
2)



Prolungiamo uno  
dei diametri ottenendo  
un punto (A)

I prolungiamo la retta a che ci  
il punto ~~A~~ A e' un centro relativo

La retta b di cui il centro relativo  
e' B si interseca con a e ci dà  
il punto Cn che e' centro relativo  
di m

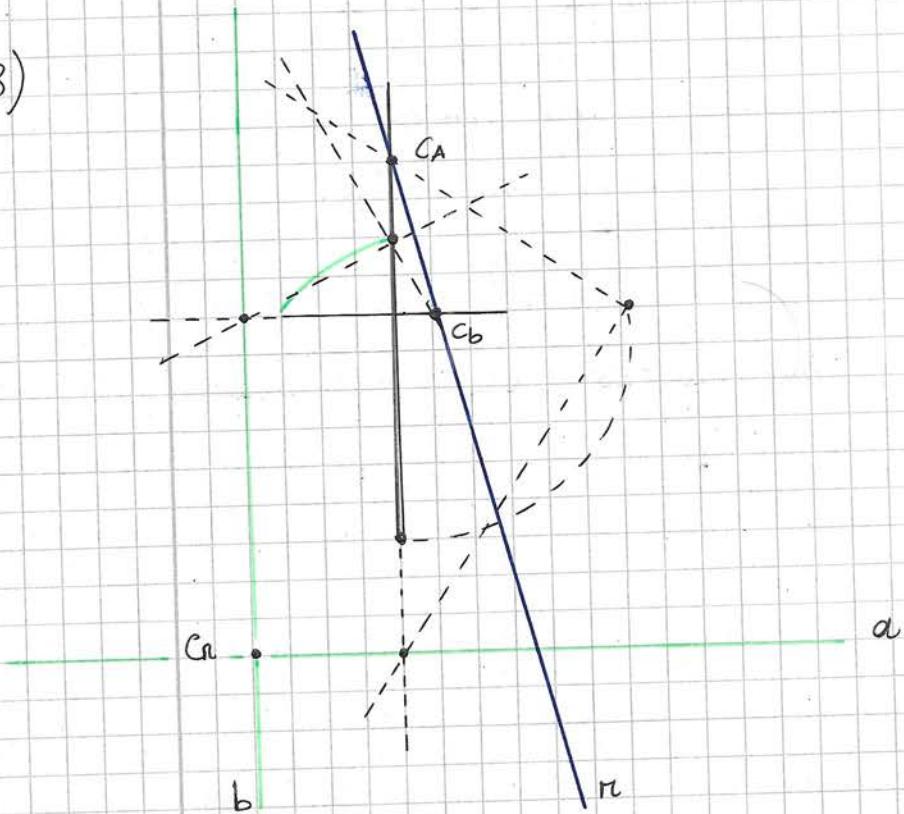


Troviamo l'antipolare al punto  $E$  (retta per cui  $E$  è centro relativo)

ribaltiamo la diagonale e tracciamo la retta a  $90^\circ$

retta e sarà quella per cui  $E$  è centro relativo

3)



Facciamo passare per  $n$  la parallela a una diagonale principale.

—  
qual'è il centro relativo della retta a?

Genieriamo un'altra nette  $b$  parallela all'altra diagonale

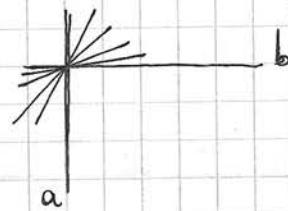
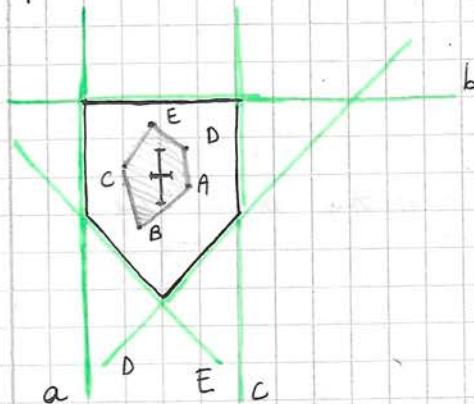
retta  $m$  è quella di cui  $c_n$  è centro relativo

## NUCCIOLO D'INERZIA

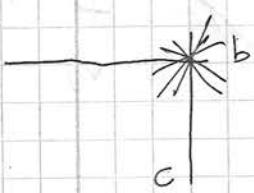
### NUCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

E' il luogo dei punti che sono centri relativi alle rette tangenti alla sezione e non secanti alla sezione.

per sezione si intende la figura.



queste rette passanti per b  
ci danno i punti sul  
perimetro BA del nocciole  
centrale d'inerzia



Quindi, se una figura ha 5 lati ci  
aspettiamo che anche il nocciole avrà 5 lati

I punti B-A-C-... sono autopolari delle rette.

I punti sul perimetro sono autopolari alle rette passanti  
per le intersezioni

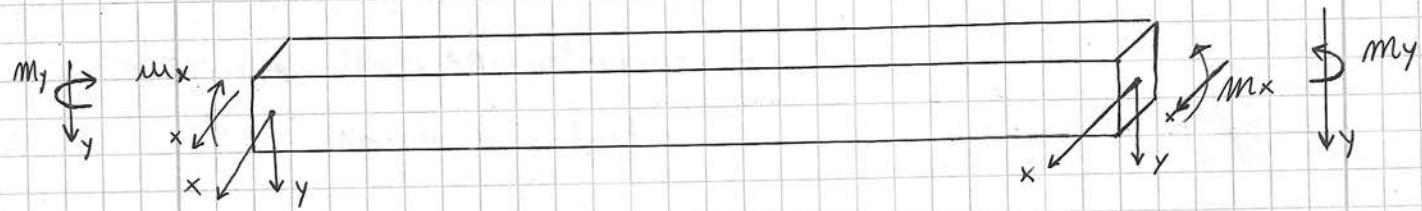
TORNIAMO A PASSARE AL

DESAINT VENANT

FLESSIONE RETTA.



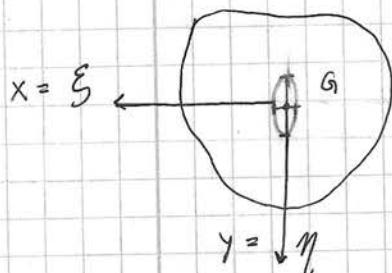
Siamo in presenza di una trave soggetta a momento  $M_x \neq 0$   
 $M_y$



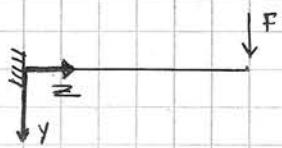
potremo immaginare successivamente di aggiungere sulla faccia  
a destra un  $M_y$

Se la trave è soggetta al momento  $x$  dobbiamo capire gli  
assi  $x$  e  $y$  chi sono?

Sono assi principali d'inerzia della sezione trasversale della trave



Dobbiamo individuare un asse di sollecitazione:

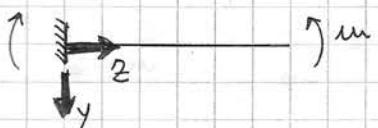


$M_A = -Fz$  viene generato intorno  
quale asse?

Ovviamente l'asse  $x$ .  $M_A = M_A^x$

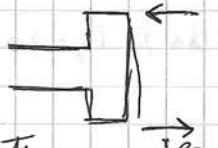
Se  $x$  e  $y$  sono gli assi

principali della nostra sezione di trave l' $M_x$  genera sulla  
trave una flessione retta.



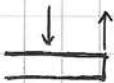
l'incastramento reagisce con una  
coppia uguale e contraria.

se la trave avesse una parte finale così



potremmo supporre queste due forze che moltiplicate per le  
loro distanze ci generano momento.

Le ~~coppie~~  $x$  rappresenta una direzione principale dell'inerzia  
della sez. trasversale anche in questo caso ci troveremo in  
flessione retta.

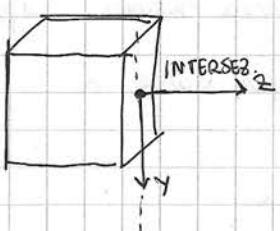
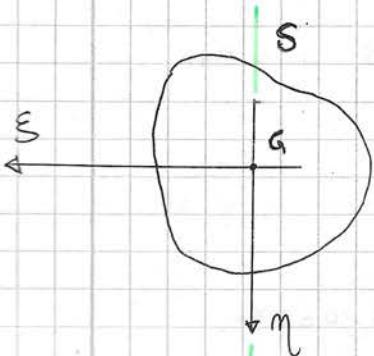


qual'è il piano in cui queste forze mi  
generano momento?



Il piano  $yz$  è detto piano delle sollecitazioni

l'asse di sollecitazione è l'intersezione del piano delle sollecitazioni  
con la sezione trasversale della trave.



Se invece fossimo in regime di flessione retta intorno all'asse  $y$   
 quale sarà il piano di sollecitazione? piano  $x-z$   
 e quindi l'asse  $x$ .

$$\begin{cases} M = \frac{-C}{ME} xy \\ N_x = \frac{-C}{2ME} (Mz^2 - x^2 + y^2) \\ N_y = \frac{-C}{ME} yz \end{cases}$$

IN REGIME  
DI FLESSIONE  
RETTA

Per essere valida deve rispettare tutte le condizioni del DESAINT VENANT:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{1}{m} \epsilon_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} dx + \gamma_{yz} dy = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Dal capitolo delle basi laterali avremo

$$M_x = \pm \int_A G_z y da \quad \text{quindi non dovremo preoccuparci di}$$

$\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  perché saranno nulle.

$$G_z = ?$$

$$G_z = E \epsilon_z$$

$$G_z = E \cdot \frac{C}{E} y = Cy.$$

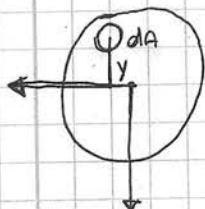
$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{C}{E} y$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$M_x = \int_A G_z y da \quad \text{di conseguenza sciviamo}$$

$$M_x = \int_A Cy^2 da \rightarrow C \int_A y^2 da = M_x$$



$y^2 da$  per questa sezione rappresenta il momento di inerzia per l'asse  $x$

$$y^2 da = dI_x$$

$$\text{Allora } C = \frac{M_x}{I_x}$$

$C = \text{costante di integrazione}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \frac{M_x}{m I_x E} xy \\ v = - \frac{M_x}{2 m E I_x} (m z^2 - x^2 + y^2) \\ w = \frac{M_x}{E I_x} yz \end{array} \right.$$

la  $\sigma_z$  che avevamo detto essere  $= Cy$  sarà:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{questo è l'altra formula di NAVIER.}$$

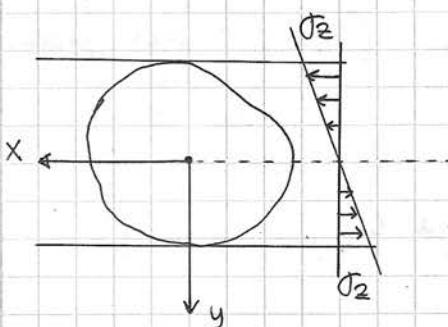
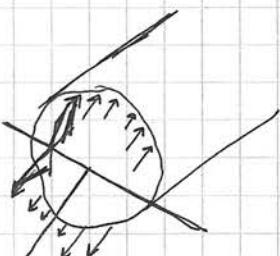


DIAGRAMMA TENSIONI

Le tensioni si annullano ai margini nell'asse biaxcentrico.

Attenzione: queste tensioni sono rappresentate nel piano ribaltato.



$\rightarrow$  piano ribaltato.



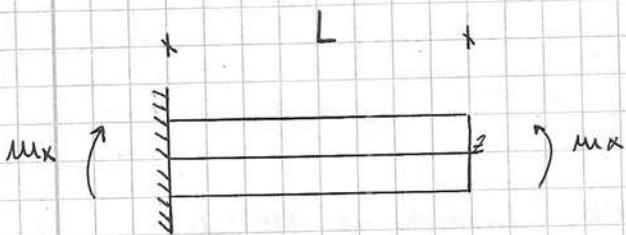
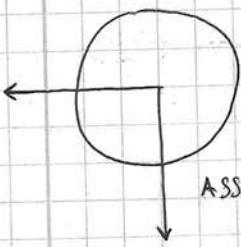
$\rightarrow$  m (FIBRE TESE SOTTO)

praticamente trasduciamo in termini di tensione nel materiale quello che succede col momento  $M_x$

Nediamo che  $y=0 \rightarrow \sigma_z=0$  e rappresenta tutti i punti di tensione nulla

L'asse x si chiama asse neutro (dove tutte le tensioni sono 0)





Questo asse  $z$  ha per coordinate  $(0, 0)$  nel piano com  $x, y$

Supponiamo che la trave e' lunga  $L$

$V_B = ?$  A questo di  $z$  mettiamo  $L$  e  $x$  e  $y$  0

$$V = - \frac{M}{2EI} (Mz^2 - x^2 + y^2)$$

$$V = - \frac{M}{2EI} (M L^2) = - \frac{ML^2}{2EI}$$

Se guardiamo nello schema di cui sotto avremo lo stesso risultato.

Se sono caratterizzati da  $x, y = 0$  e  $z = L$

$$u = - \frac{M}{EI_x} xy \quad e \quad w = \frac{M}{EI_x} yz \quad saranno = 0$$

per tutta la trave

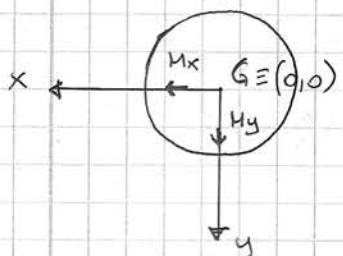
Quindi avremo solo spostamenti lungo  $y$ .

X asse neutro, piano di flessione yz  $\rightarrow$  asse di flessione y.

L'asse di sollecitazione è esagonato all'asse neutro.

L'asse di flessione è ortogonale all'asse neutro.

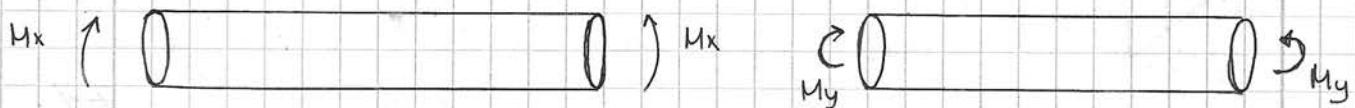
### FLESSIONE DEVIATA



Questi due assi hanno proprietà biconcentrici e sono direzioni principali.

Nettore momento  $M_x \leftarrow$

Nettore momento  $M_y \downarrow$



quindi  $u, v, w$  saranno somme di 2 caratteristiche di sollecitazione una volta per x e una per y.  
Somma di due aliquote.

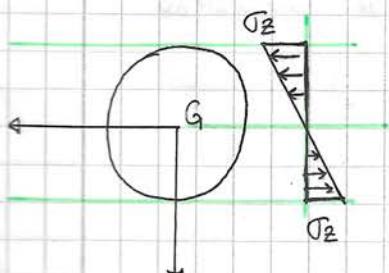
$\sigma_z$  stavolta sarà calcolato anche lungo y.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (\text{FORMULA DI NAVIER})$$

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x \quad \text{per una convenzione}$$

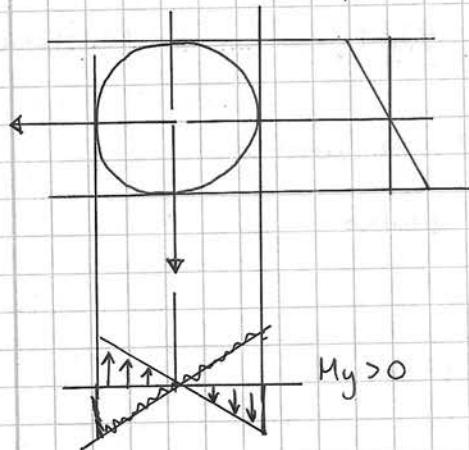
di segni sarà <

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \left( -\frac{M_y}{I_y} x \right) \quad (\text{FORMULA BINOMIA DELLA FLESSIONE DEVIATA})$$



la formula di Navier ci diceva che il diagramma delle tensioni varia linearmente lungo y e si annulla quando  $y=0$  (BARICENTRO o ASSE NEUTRO)

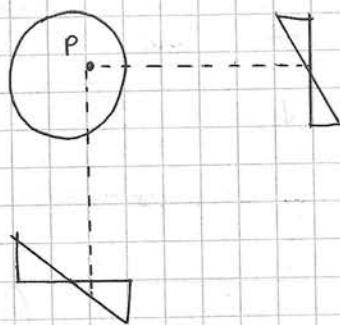
Diagramma tracciato considerando  $M_x > 0$ , infatti dove  $y$  è positivo avremo trazione, con  $y$  negativo compressione



anche se disegniamo le tensioni nel piano sono però ortogonali alla rett. trasversale

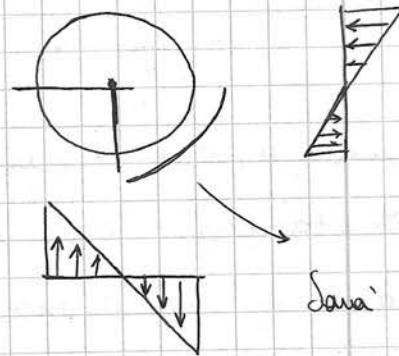
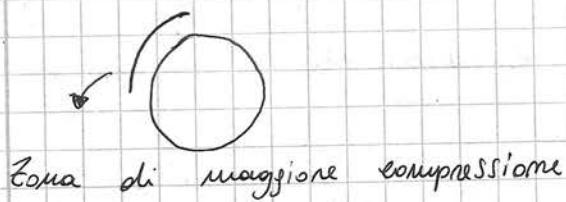


Quanto vale la tensione in un punto  $P(x, y)$ ?



Somma di due aliquote date  
a  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ .

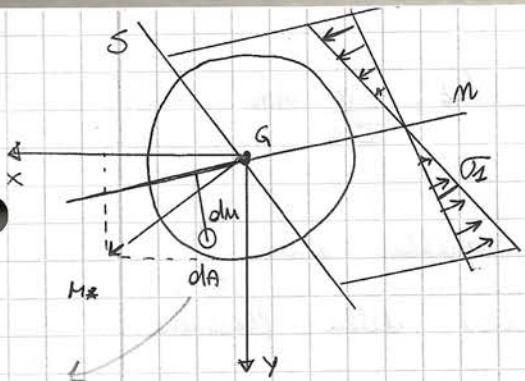
massima tensione di trazione?



Sarà sicuramente  
in questa  
zona

Come tracciare l'asse neutro?

Neotremo dal diagramma dove ci saranno forze che si equilibrano a 0 tra compress. e trazione e uniamo il punto sotto al bocentro



elemento  
areale.  
Ci agisce  
una  $\sigma_z$

Possiamo pensare che a questo momento  
l'elemento venga associato un asse sli-

sollecitazione

L'asse di sollecitazione è perpendicolare  
al momento.

Se c'è un asse di sollecitazione potremo immaginare anche  
un asse neutro.

Ie diagramma delle sollecitazioni tendra a  
annullarsi vicino l'asse neutro ma quando ci  
allontaniamo da esso il diagramma del momento uscirà

Facciamo un equilibrio alla notazione intorno all'asse n.  
e chiamiamo  $dm$  la distanza tra l'asse neutro e le  
permettendo areale.

$\sigma_z \cdot dm \cdot dm =$  momento elementare rispetto all'asse neutro  
generato dalla tensione in  $dm$  0

$\int_A \sigma_z \cdot dm \cdot dm =$  momento generato da tutte le tensioni rispetto  
all'asse neutro

$$\text{Eq alla not: } M_m = \int_A \sigma_z \cdot dm$$

↳ proiezione del vettore momento sull'asse neutro.

chiamiamo con  $\sigma_1$  la tensione che manca a distanza  
unitaria dall'asse neutro. di conseguenza:

$$\sigma_z = \sigma_1 + dm$$

$$M_m = \int_A \sigma_1 \cdot dm \cdot dm \cdot dm \Rightarrow M_m = \sigma_1 \cdot \int_A dm^2$$

questo termine è  
un area  $da$  per una distanza  
al quadrato  
da asse  
neutro.

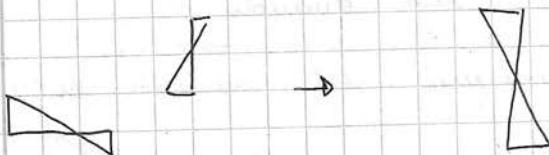
$$M_m = \sigma_1 I_m$$

$$I_m (\text{momento di inerzia})$$

$$J_1 = \frac{J_Z}{dm} \rightarrow M_m = \frac{J_Z}{dm} \cdot I_m \rightarrow J_Z = \frac{M_m}{I_m} dm$$

questa  $J_Z$  è formalmente identica a quella nel caso di flessione retta solo nel caso della flessione deviata è data dalla proiezione del momento sull'asse neutro (quindi non tutto il momento) e il momento di inerzia è rispetto all'asse neutro.

NON AVREMO PIÙ BISOGNO DI FARE UN DOPPIO DIAGRAMMA  
DELLA TENSIONE



Tutto ciò a patto che si conosca l'asse neutro.

Ora faremo un equilibrio sulla notazione intorno all'asse di SOLLECITAZIONE

$M_s$  il momento non ha componenti rispetto l'asse  $s$ . perché sono esattamente ortogonali.

Se prendiamo l'area da avremo momento generato da

$$\int_A J_Z \cdot da \cdot ds = 0$$

↙  
FORZE INTERNE (AREA)

↗ FORZE ESTERNE ( $M_s = 0$ )

$$J_Z = J_1 \cdot dm$$

$$\int_A J_1 \cdot da \cdot dm \cdot ds = 0$$

$$J_1 \int_A dm \cdot ds \cdot da = 0$$

momento centriplugo  $I_{ms}$

$I_{ms} = 0$  ciò vuol dire che l'asse  $m$  e  $s$  sono CONIUGATI

Ora facciamo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z.

Frazze esterne: Abbiamo solo un momento flettente.

quindi 0

$$0 = \int_A G_z dm \rightarrow G_1 dm = G_2 \rightarrow 0 = \int_A T_1 dm \cdot da$$

$$0 = T_1 \int_A dm \cdot da \rightarrow \text{momento statico.}$$

$S_m = 0$  se il momento statico <sup>(m)</sup> e' 0

l'asse m e' ~~biacentrale~~ bicancentrico.

Abbiamo ottenuto ora tutto cio' 3 informazioni:

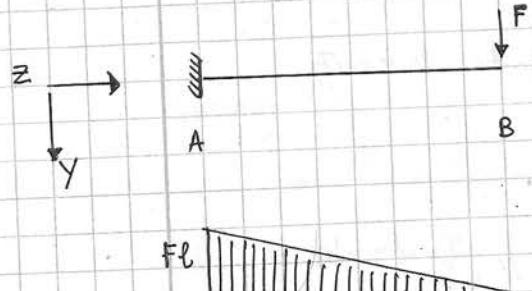
1) Possiamo trattare la flessione slevata quasi come una flessione retta.  $G_z = \frac{M_x}{I_x} dm$

2) Asse neutro e Asse di sollecitazione sono coincidenti

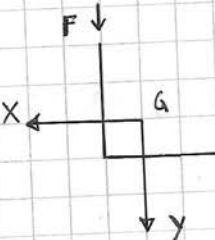
3) Asse di flessione e' ortogonale all'asse neutro. (cio' ci aiuta con gli spostamenti)

Noto l'asse di sollecitazione come troviamo e' asse neutro?

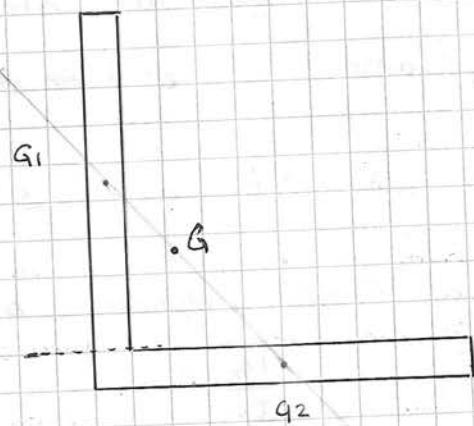
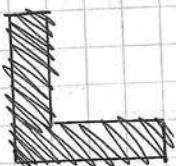
con una ellisse centrale d'inerzia potremo fare una costruzione della direzione coincidente



Supponiamo che la sezione della trave sia ad L

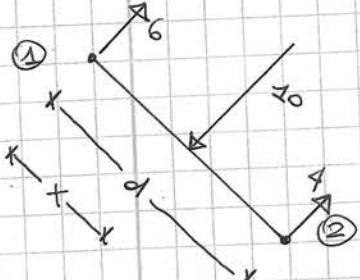


$$M_x = -F \cdot L$$



le Baricentri si troveranno sulla retta che congiunge i due baricentri delle figure spaccate.

Se le rettangoli 1 e rettangolo 2 fossero uguali avremmo il baricentro nella metà. Se il Rettangolo 1 è più grande del rettangolo 2 il baricentro sarà più spostato sul rettangolo 1.



massa rett. ① e massa rett. ②

schematizziamo le masse come vettori masse.

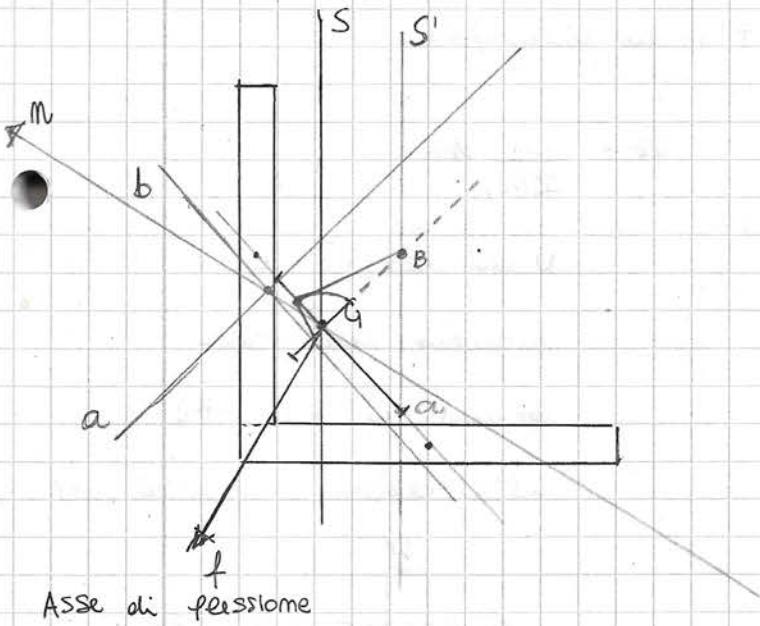
$$\text{Se } m_1 = 6 \quad m_2 = 4$$

Eq. alla rotazione: intorno al punto 1.

$$-10x + 4d = 0$$

$$x = \frac{4d}{10} \quad x = 0,4d$$

quindi il baricentro è posizionato a 0,4d rispetto al punto ① e 0,6d rispetto al punto ②



Asse di flessione

Annemo l'asse di sollecitazione  
verticale perché  $F \downarrow$  è  
perfettamente verticale

Siamo in flessione  
deviata perché la retta  
S non coincide con  
messuna direzione  
principale ( $\xi, \eta$ )

Il punto B quindi si sposta lungo l'asse di flessione

Calcoliamo l'asse neutro (m CONIUGATO s)

- 1) si sceglie  $s'$ , si individua il punto a, si calcola la retta a' di cui a è un centro relativo.
- 2) si prolunga il diametro alla retta  $s'$ , troviamo un punto (B). Cerchiamo la retta di cui B è centro r.

Per la nostra trave lo spostamento in  $v_B$  in flessione retta era  $\frac{FL^3}{3EI}$  (flessione retta)

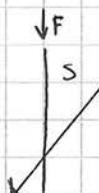
In questo caso però il punto B si sposta lungo l'asse di flessione che quindi sarà dato da:

Annemo la forza sull'asse s  
flessione ci sarà una  
multiplica  $F \cdot \cos(\alpha)$

l'asse di sollecitazione e flessione

$$\text{diventa: } S_B = \frac{F \cdot \cos(\alpha) \cdot L^3}{3EI_m}$$

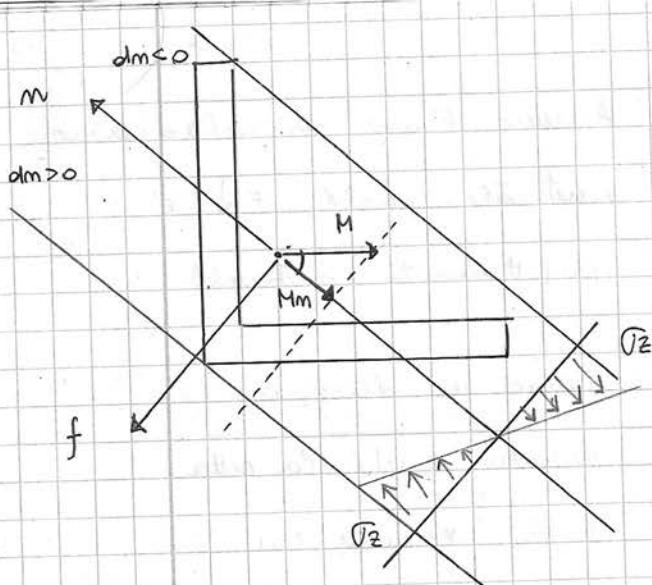
$$v_B = S_B \cdot \cos(\alpha)$$



ma sul piano di  
componente che  
dove  $\alpha$  è l'angolo tra

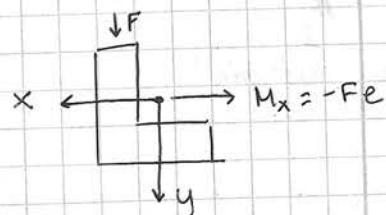
Spostamento totale di B nel piano  
di flessione

Formula momento



$$G_z = \frac{M_m}{I_m} dm$$

Nella sezione di incastro della trave abbiamo un  $M_x = -F_e$   
nella sezione si orienterà così



$M_m$  viene dalla proiezione di ~~f~~ f su m

$M_m$  quindi è negativo  $\rightarrow$  NON CONCORDE CON ~~m~~ m

$I_m$  è sempre positivo perché è una lunghezza

$dm \rightarrow$  dove avremo distanze negative avremo T positive

dove avremo distanze positive avremo T negative

## FLESSIONE COMPOSTA

(SFORZO NORMALE ECCENTRICO)

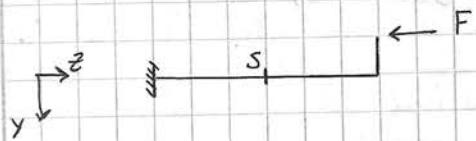
Questo è una sovrapposizione di uno sforzo normale, una flessione lungo  $x$  e una flessione lungo l'asse  $y$

TERNA  
BARICENTRICA



Si studiano insieme perché  $N, M_x, M_y$  (dove riconosciamo che  $x$  e  $y$  sono assi principali d'inerzia per  $M_x, M_y$ ) generano tutti e 3 di  $\sigma$  null'asse  $z$ .

ESEMPIO:



nella sezione  $s$  ci sarà  
uno sforzo normale  $N$  e  
un momento flettente  $M_x$ .

In uno spazio 3D

con forza eccentrica caricata sia verticalmente che orizzontalmente  
s'avrà  $N, M_x, M_y$

non non

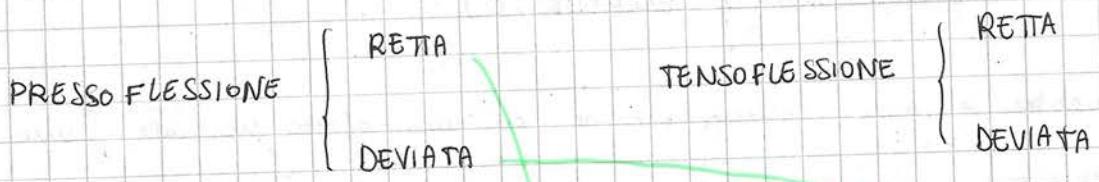
la flessione composta può prendere anche due mori particolari

- PRESSOFLESSIONE : quando abbiamo uno sforzo normale di compressione associato a uno o due momenti flettenti

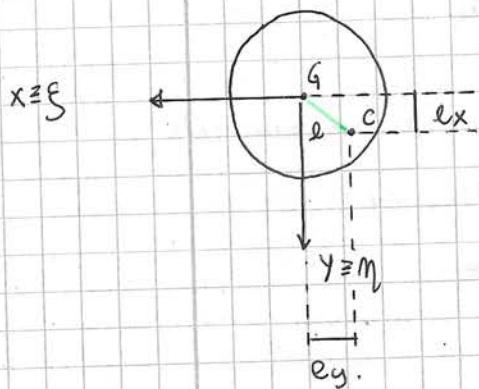
- TENSOFLESSIONE : sforzo normale di trazione  $\sigma$

nel esempio nella morsola precedente avevamo pressoflessione perché  $\leftarrow F$  è di compressione

Possiamo ancora suddividerli in



ovvero possiamo avere solo un momento flettente o due



Se applichiamo uno sforzo normale nel centro c avremo sicuramente uno sforzo normale e poi un momento intorno a  $x = N \cdot ex$  e intorno a  $y = N \cdot ey$

N

$$N \cdot ex = M_x$$

Per questa flessione composta ci interessa  $\bar{J}_z$

$$N \cdot ey = M_y.$$

useremo la sovrapposizione degli effetti

$$\bar{J}_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \rightarrow \bar{J}_z \text{ da flessione retta lungo l'asse } y.$$

$\bar{J}_z$  dello sforzo normale centrato

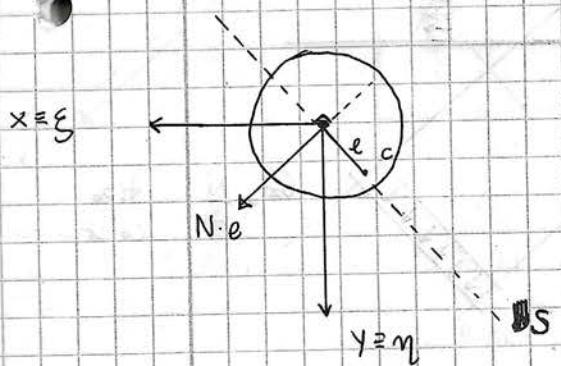
$\bar{J}_z$  da flessione retta intorno all'asse x

Ma possiamo anche considerare una sola eccentricità e avere uno sforzo normale N e un momento  $N \cdot e$

Quindi o dividiamo in  $ex$  e  $ey$  o consideriamo

un solo asse e generico (BARICENTRO - PUNTO)

l'asse vettore del momento generato da  $N$  rispetto al baricentro lungo e è ortogonale



L'asse di sollecitazione è ortogonale a  $N$  e quindi scopriamo che l'asse generato da  $e$  è proprio quell'asse di sollecitazione.

Se questo è un asse di s. probabilmente ci darà un asse neutro e poi flettente.

$(\sigma_z)$

Se ci poniamo nel baricentro, la tensione all'baricentro vale  $\frac{N}{A}$

Allora se nel caso di flessione retta è deviata dove l'asse neutro era bicantrico perché il momento statico rispetto all'asse neutro era 0 questa volta scopriamo che l'asse neutro non è bicantrico.

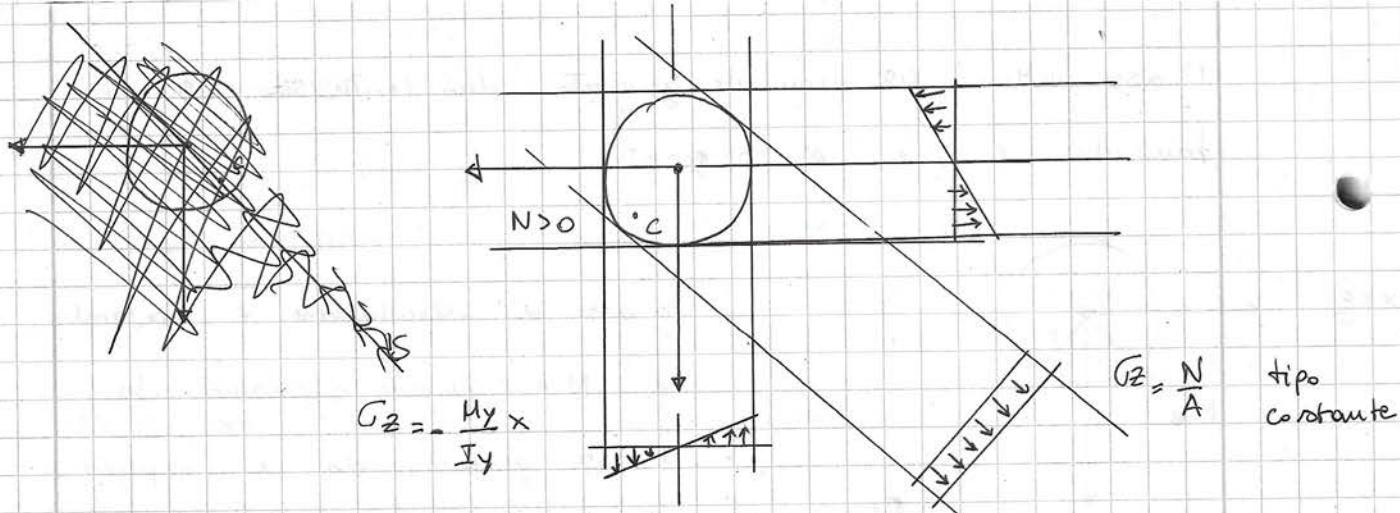
Nella flessione composta am è il luogo dei punti con  $\sigma_z = 0$   
(tensione nulla)

Eq. Asse neutro:  $[\sigma_z = 0]$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

Se ci poniamo di passare per il baricentro di coordinate  $G = (0,0)$   $(x,y)$  avremo:

$$\frac{N}{A} + 0 + 0 = \frac{N}{A}$$



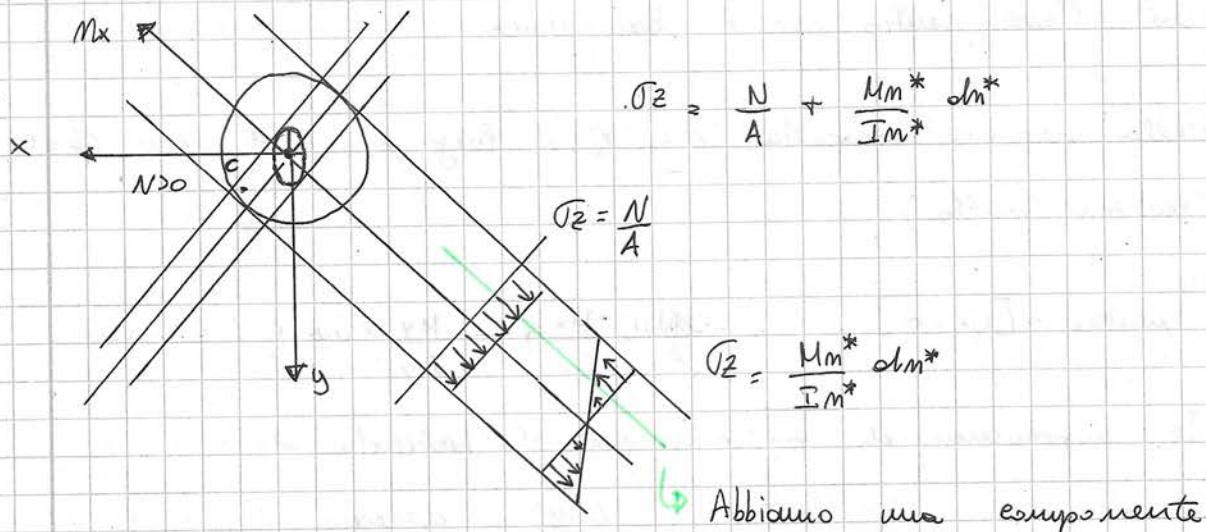
la tensione è data da 3 aliquote

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad \sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} \quad \sigma_z = \frac{M_y x}{I_y}$$

Mettiamo conto che in C ci sia  $N > 0$

Sui diagrammi individueremo il valore tensione di un generico punto nel corpo come somma tra vettori nei 3 diagrammi

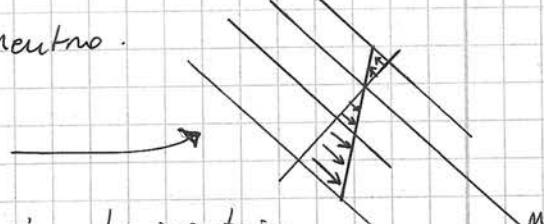
Supponiamo di avere l'asse neutro:

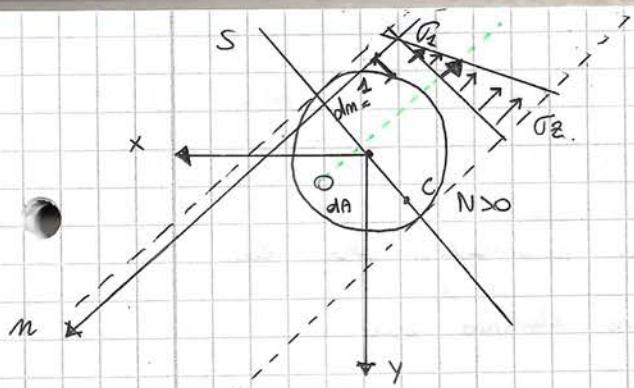


$\sigma_z$  di trazione da sforzo normale  $N/A$  e una  $\sigma_z$  di compressione da  $\frac{M_m * d/m *}{I_m *}$  si bilancia restando generando una retta da  $\sigma_z = 0$  che sarebbe qui solo il nostro vero asse neutro.

Diagramma complesso  $\sigma_{TOT}$ .

Abbiamo scoperto che l'asse neutro non è bicantrico.





$\sigma_2$  = area di sollecitazione

$m$  = asse neutro non biaxiale

proviamo a scrivere un  
EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE LUNGO  $z$ :

Assumendo per forze esterne lo sforzo  $N > 0$  all' punto  $c$   
forze interne è  $\sigma_2$ .

$N = \sigma_2$  se prendiamo un generico elemento areale  
 $da$  avrà una generica  $\sigma_2$  nel diagramma.

$$N = \int_A \sigma_2 da$$

della  $\sigma_1$  la tensione che leggiamo a distanza unitaria  
dell' asse neutro, avremo:  $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot dm$

$$N = \int_A \sigma_1 dm da \rightarrow \sigma_1 \int_A dm da$$

momento statico dell'area A  
rispetto all'asse neutro.

$N = \sigma_1 Sm$  ma  $\sigma_1$  ricavandolo in  $\sigma_2$  si ha:

$$N = \frac{\sigma_2}{dm} Sm$$

e questo ci dà la FORMULA MONOMIA DELLA FLESSIONE COMPOSTA

$$\sigma_2 = \frac{N}{Sm} dm, \text{ ma ancora non sappiamo l'asse neutro dove si trovi.}$$

facciamo un equilibrio alla rotazione intorno all'asse  $m$

FORZE ESTERNE =  $N$

$N$  genera un momento intorno a un dato da  
 $N \cdot \text{distanza da } dm$ .

$$N \cdot dm = \int_A \sigma_2 dm da$$

FORTE INT: generica  $\sigma_2$ .

$$N \cdot dm = \sigma_2 \int_A dm da$$

momento di inerzia rispetto a  $dm$

$$N \cdot dm = \sigma_1 \cdot I_m$$

→

$$N \cdot dm = \frac{\sigma_2}{dm} \cdot I_m \rightarrow$$

$$N \cdot dm = \frac{N \cdot dm}{Sm} \cdot \frac{1}{dm} \cdot I_m$$

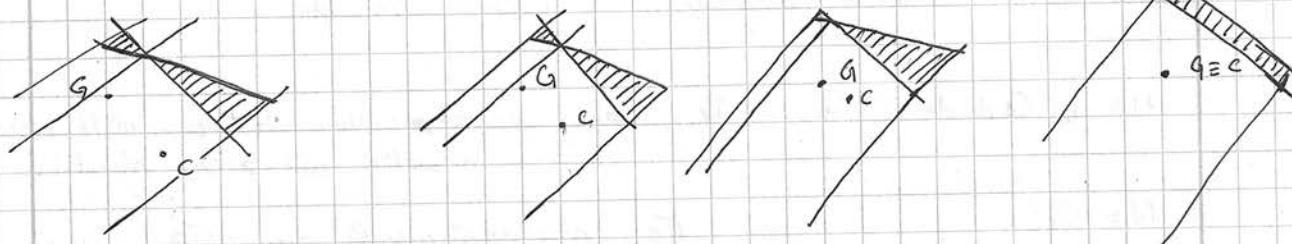
$$d_{cm} = \frac{I_m}{S_m}$$

dal capitolo sulle geometrie di massa ricordiamo che la distanza di una retta dal suo centro relativo era

$$d_{ca} = \frac{|a|}{S_a}$$

Quindi questa equazione ci dice che  $C$  e' il centro relativo dell'asse neutro.

Allora se il centro  $c$  e' relativo a  $a_m$  lo avremo al suo opposto e se  $c$  si avvicina al barycentro  $a_m$  si allontana. Le diagonale  $\overline{Gc}$  quindi diventerà sempre più lontano fino ad arrivare a un valore costante per  $c = \text{barycentro}$



ricordiamo quindi nel caso di slancio normale per  $G \neq C$ .

Quando invece il punto  $C$  tocca a  $a_m$  avremo che  $a_m$  si avvicina a  $G$  e quindi ricorderemo in un normale caso di flessione deviata

$$d_{cm} = \frac{I_m}{S_m} \rightarrow C \text{ e' CENTRO RELATIVO PER } m$$

Eq. notazione intorno all'asse S.

Lo sforzo normale N appartiene proprio a S quindi applicato a C rispetto a S sarà 0.

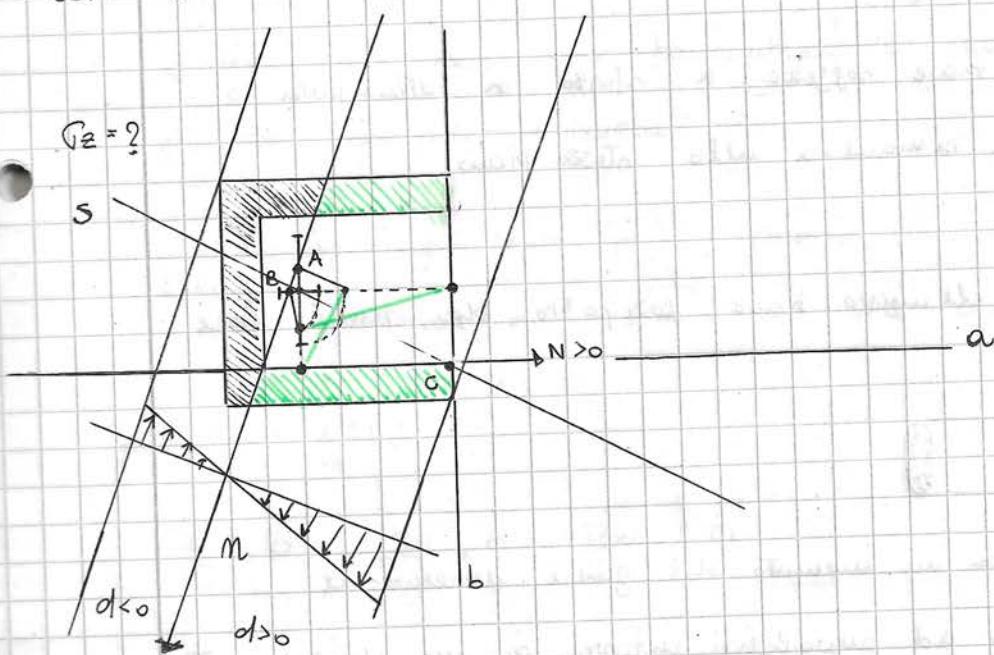
$$O = \int_A \sigma_z da ds$$

$$O = \int_A \sigma_1 ds dm da$$

$$O = G_1 \int_A ds dm da$$

momento  
centrifugo  
Ims.

Se il momento centrifugo di 2 rette è uguale a 0 queste sono direzioni CONIUGATE (in coniugato a s)



A centro nel a

Coniugiamo B-A = retta che ha per cr C

B centro nel b.

m = mom. baricentrale

$$\sigma_z = \frac{N}{S_m} dm$$

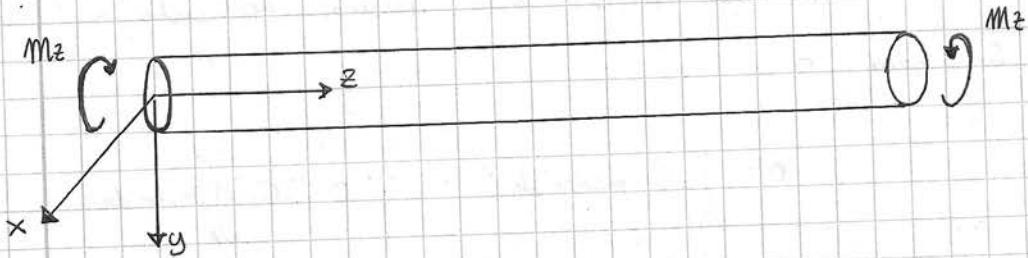
$$\begin{aligned} N &> 0 \\ S_m &> 0 \\ dm &> 0 \rightarrow \sigma_z > 0 \end{aligned}$$

ZONA TESA

ZONA COMPRESSA

Nel baricentro  $\sigma_z(G) = \frac{N}{A}$  la tensione è data sempre da  $N/A$

## TORSIONE

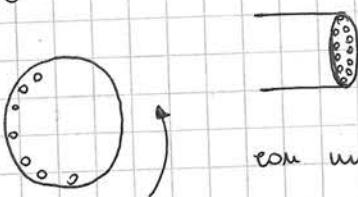


Una delle ipotesi fondamentale del DESAINT VENANT, ovvero la conservazione delle sezioni piane non vale nella torsione

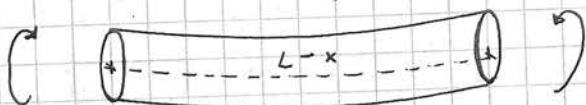
se avevamo una trave soggetta a sfiorzo, si allungava  
si accorciava ma rimaneva nello stesso piano

immaginiamo l'elemento trave composto da tante fibre

lungo l'asse z.



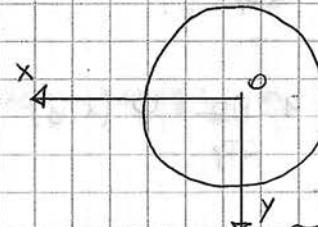
con un momento del genere avremo le  
fibre tendenziali ad avvolgersi intorno a un unico punto  
della trave che rimane immobile



le fibre nella trave da che erano rettilinee adesso  
seguiranno l'andamento del concio curvato  
Se la trave alle due estremità non ha rincoli, la  
lunghezza della fibra prima era L e ora invece  
con la deformazione copri' una distanza che sono'  
L - qualcosa (avvitamento)  
cioè accadrà a ogni fibra della trave.

la fibra subisce un fenomeno di ingobbamento. Ciò è proprio la cosa che fa mancare l'ipotesi di planarità.  
avremo però sempre le equazioni dell'equilibrio elastico.

$$\begin{cases} u = \frac{E}{E} yz \\ v = -\frac{E}{E} xz \\ w = \frac{E}{E} \psi(x, y) \end{cases}$$



{ rappresentano lo spostamento di qualsiasi genere punto.

Nel caso di tensione:

la tensio può non essere biaxcentrica e può non individuare gli ass. principali d'inerzia

$\psi$  = funzione ingobbamento (psi). Questa funzione ci identifica la variazione di forma che ha avuto il corpo.

$$Ex = Ey = \frac{1}{m} Ez$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Se consideriamo i.e.  $\gamma_{xz}$  e i.e.  $\gamma_{yz}$  scopriamo che sono  $\neq 0$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$$

Essendo  $\neq 0$  e  $Ez = 0$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$$

scopriamo che in tensione

le  $\sigma_{x,y,z}$  sono  $= 0$  e  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy} \neq 0$

L'origine della tensio di riferimento identifica la fibra lissa

della trave soggetta a momento torcente

avremo che nel punto  $O(0,0)$   $u, v = 0$

L'origine della tensio qui sopra è funzione ~~dell'incarico~~ di cui  
sinoi applicati alla trave.

$u, v, w$  si riduce a

$$\frac{C}{E} = -q \frac{Mt}{GIp}$$

$$u = -q \frac{M_t}{G I_p} \cdot y^2$$

$$\nu = +q \frac{M_t}{G I_p} \cdot x^2$$

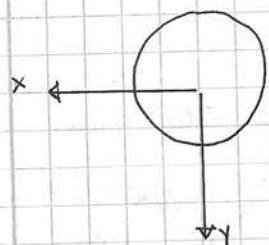
$$w = -q \frac{M_t}{G I_p} \Psi(x, y)$$

questi termini sono definiti e  $I_p$  è il momento di massa polare della sezione.

$$I_p = \int_A x^2 + y^2 dA$$

$q$  è detto fattore di tensione ed è dato da  $\frac{I_p}{I_p - \int_A \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA}$

facciamo una riflessione.

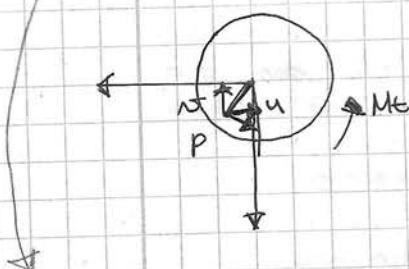


Sopriamo ad esempio che lo spostamento su  $y$  è dato da  $v$ . o spostamento su  $x$  da  $u$ .

$$u = \left( -q \frac{M_t z}{G I_p} \right) y$$

Identifichiamo questo termine con una grandezza fisica più intuitiva.

per  $y$  positiva scopri che lo spostamento ( $u$ ) è negativo



questa formula somiglia a qualcosa qui sotto

q fatt. di tensione,  $M_t$  è il momento,  $G$  e  $I_p$  c'è sono costanti perché in una sezione.

avremo una quantità costante per una lunghezza ( $y$ )

$$u = \left( \frac{q M_t z}{G I_p} \right) y$$

rappresenta un angolo rispetto all'asse  $z$ .

$$\nu = \left( \frac{q M_t z}{G I_p} \right) x$$

Questo angolo vale  $\theta$

$$u = -\theta y \quad v = \theta x \quad \text{di conseguenza, l'angolo di}$$

$$\text{rotazione torsionale} \quad \theta = \frac{q M_t}{G I_p} z$$

essendo funzione di  $z$ , più siamo lontani e più  $\theta$  cresce.

$$d\theta = \frac{q M_t}{G I_p} dz$$

$$\boxed{\theta' = \frac{q M_t}{G I_p} z} \quad \text{angolo specifico di torsione}$$

ovvero, si è l'angolo di un ruotino due sezioni poste a distanza  $z$  l'una dall'altra.

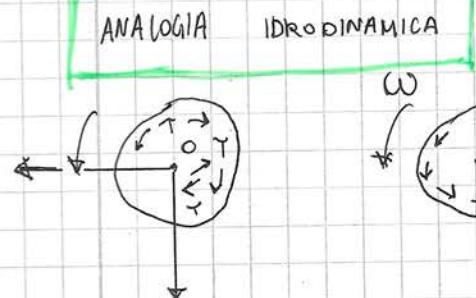
~~~~~

$C_t = \boxed{\text{Rigidità torsionale}} = \text{il momento torcente che applicato a una sezione di una trave genera un angolo specifico di torsione } \theta' = 1$

$$\text{poniamo } \theta' = 1 \quad M_t = \frac{G I_p}{q} \rightarrow \text{Rigidità torsionale } C_t$$

$$1 = \frac{q M_t}{G I_p} \rightarrow \frac{1}{M_t} = \frac{q}{G I_p}$$

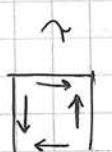
RECIPIENTE



con momento  $M_t$

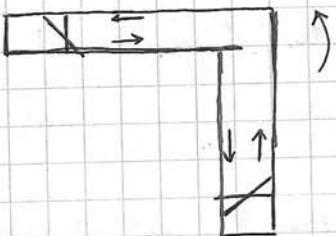
il campo vettoriale  $\gamma$  è uguale  
al campo delle velocità tangenziali  
del fluido quanto il recipiente  
ruota

$$\gamma \equiv v$$

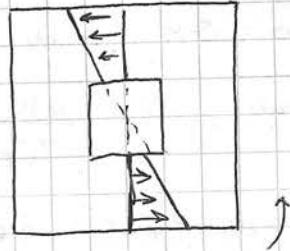


direzioni così come quelli anche le  $\gamma$  della sezione

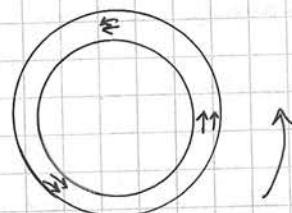
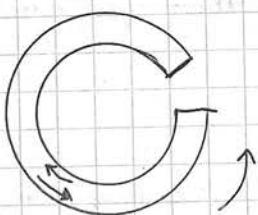
Possiamo una sezione curva e un recipiente curvo. Nel recipiente le parti girovano nella stessa



Sezione compatta  
(aperta)

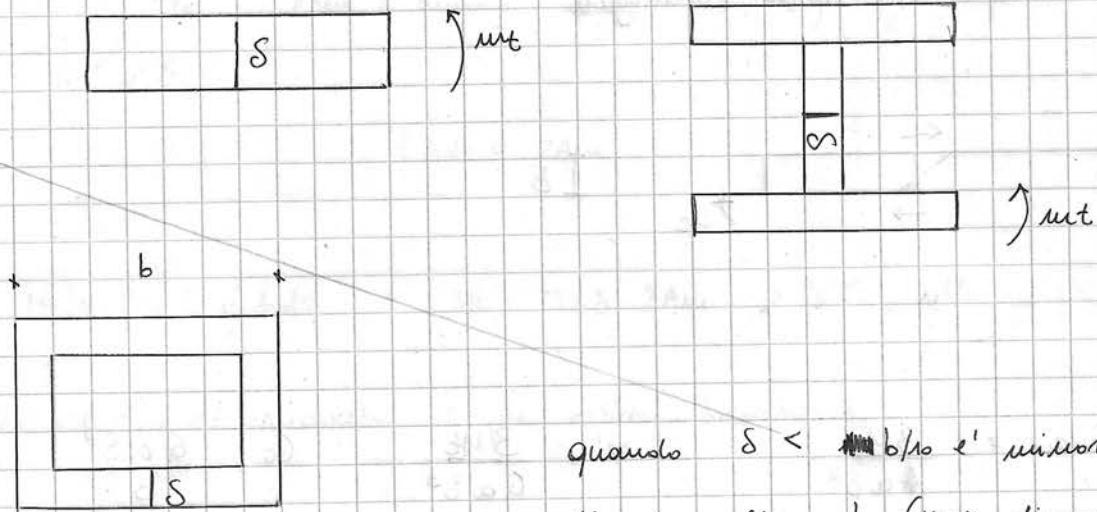


Sezione chiusa



Se pensiamo che questa figura possa essere un tubo con spazio minimo riusciamo a piegare il tubo con sezione aperta.

## SEZIONI APERTE (MONOCONNESSE)



quando  $s < b/10$  e' minore

di 10 volte b (max dimensione

## SEZIONI CHIUSE (BICONNESSE)

della sezione) si dice sezione sottile

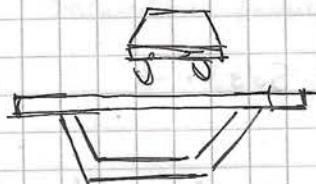
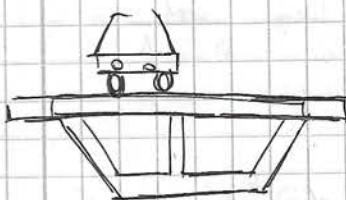
Per qualsiasi sezione, conoscendo  $M_t$  dovremo calcolare

$\gamma_2$ . Per calcolarla avremo bisogno di  $\sigma'$  e  $c_t$

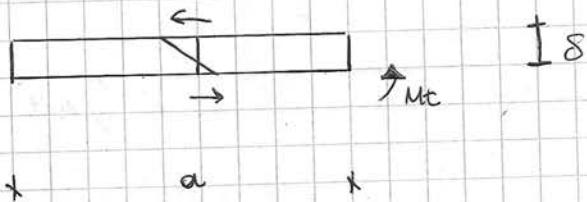
le sezioni chiuse avranno le formule di Bredt mentre le

sezioni aperte verranno calcolate basandosi su sezioni rettangolari allungate.

Queste sezioni sono molto usate ad esempio nei ponti:



Formule per rette allungate



I8

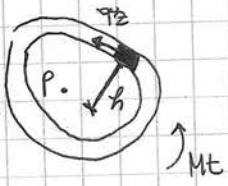
$$T_{\max} = \frac{3Mt}{4aS^2}$$

$$\Theta' = \frac{3Mt}{GaS^3}$$

$$Gt = \frac{GaS^3}{3}$$

Formule di Bredt per rett. chiuse.

Consideriamo una sezione cava e un cubetto della rett. di lunghezza  $ds$  e di spessore  $\delta$ .



Sceglieremo un punto  $P$  qualunque facciamo un eq. alla rett. intorno a  $P$ .

FORZE ESTERNE =  $Mt$

FORZE INTERNE =  $\oint T_2 \cdot S ds \cdot h$

la  $T$  per diventare una forza ha bisogno di essere moltiplicata per l'area di azione

Esempio: un momento poi moltiplichiamo tutto per la distanza da  $P$  ( $h$ )

$\oint$  = integrale circolare

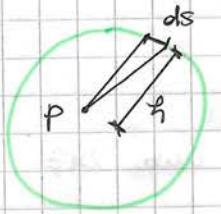
$ds \cdot h$  rappresenta un'area



$T_2 S = \text{cost.}$

$$Mt = T_2 S \oint h ds$$

$\oint h ds$  è uguale a 2 volte l'area della linea media.



$$\text{Area triangolo} \quad \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A_m = \oint \frac{h \, ds}{2}$$

$$\oint h \, ds = 2A_m.$$

$$M_t = \gamma_z S \oint h \, ds \rightarrow M_t = \gamma_z \delta \cdot 2A_m \rightarrow \boxed{\gamma_z = \frac{M_t}{2A_m \delta}}$$

Abbiamo così ricavato  $\gamma$  per sezioni bicommesse.

rotone  $\gamma_z = 2G\theta'$  ie flusso del rotone attraverso una

superficie viene dato dal rotone · superficie

$$(2G\theta') \cdot A_m = \oint \gamma_z \, ds.$$

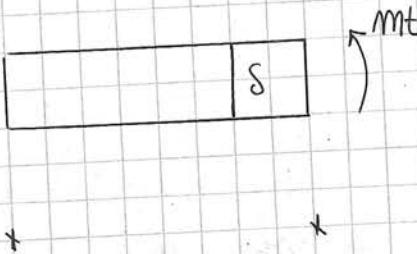
$$(2G\theta') A_m = \oint \frac{M_t}{2A_m \delta} \, ds \quad M_t \text{ e } 2A_m = \text{cost.}$$

$$\frac{M_t}{2A_m} \oint \frac{1}{\delta} \, ds.$$

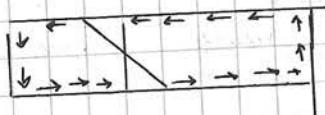
$$\boxed{\Theta' = \frac{M_t}{4A_m^2 G} \oint \frac{1}{\delta} \, ds}$$

Seconda formula di Bredt.

$$C_t = \frac{4A_m^2 G}{\oint \frac{1}{\delta} \, ds} \quad \text{quando } \theta' = 1 \text{ unitario.}$$



Siamo su una rete  
aperta. Anzitutto se  
con comportamento che  
è triangolare.



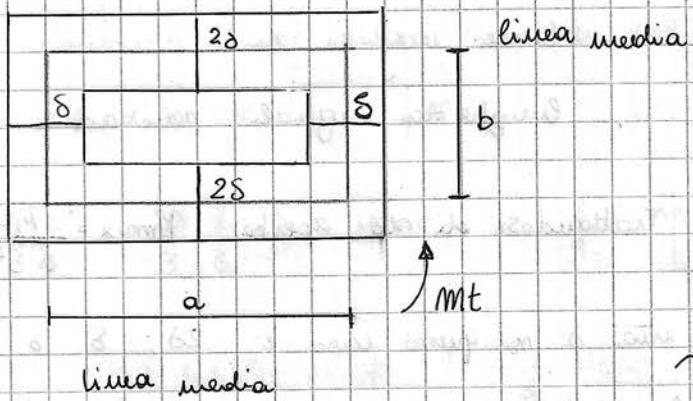
le  $\gamma$  massime saranno pari  
agli estremi e viaggeranno come  
un fluido in un recipiente

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{3Mt}{aS^2}$$

Se T su questi tempi non le convincono?  $\downarrow$   $\uparrow$

Neolitico che Mt ha come valone metà + lungo  
ie tempo | | e metà + lungo

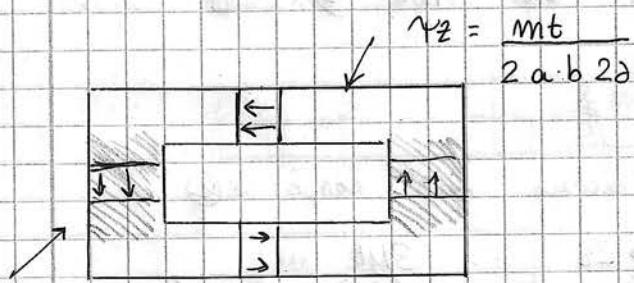
Quando ~~palloncini~~ parliamo di set aperte avremo una lunghezza tra |r ————— t| così elevata da farle diventare molto piccole e considereremo solo quelle lungo 8



Utilizzeremo le formule  
di Brindt

$$\tau_z = \frac{Mt}{2A_m \delta}$$

$$A_m = a \cdot b$$



Le zone di spessore  
minore saranno quelle  
con  $\tau$  maggiore.

$$\tau_z = \frac{Mt}{2ab\delta}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}$$

Eq di Hencky - Von Mises.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2}$$

Eq di Tresca - de Saint Venant.

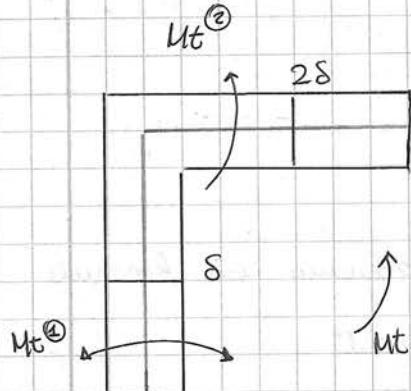
Se dobbiamo risolvere un esercizio avremo da calcolare

$\tau_z$  con  $a$  e  $b$  dati e poi andremo a inserire  $\tau$  in una delle 2  $\sigma_{eq} = \sqrt{\dots}$  dove avremo  $\sigma_z = 0$  e  $\tau_z$  calcolato

Il momento tenente e' già stato degli esercizi.

$$\tau_z = \frac{Mt}{a \delta^2} \cdot \frac{[FL]}{[L \cdot L^2]} = \frac{[F]}{[L^3]}$$

$$\tau_z = \frac{Mt}{2A_m \delta} \cdot \frac{[FL]}{[L^2 \cdot L]} = \frac{[FL]}{[L^2]}$$



l'area media di

lunghezza uguale pari ad  $\delta$

Trattandosi di rete aperta  $T_{\max} = \frac{3Mt}{a\delta^2}$

ma  $\delta$  in questo caso è  $2s$ ,  $\delta$  o tutti e due?

e la lunghezza anche di  $\delta$ ?

la formula la applichiamo al rett ①  $\square$

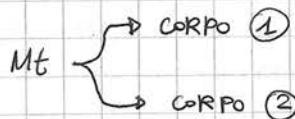
o rett ②  $\square$

Ci aspettiamo che  $\tau_{\max}$  sia sul corpo ①

avente  $\delta$  anziché il  $2 \rightarrow 2s$

$$\frac{3Mt}{a(\delta^2)} \rightarrow \delta^2 \text{ vs } 2s^2$$

ma dovranno prima controllare  $Mt$



$$Mt_{\text{TOTALE}} = Mt_{\text{RETT}①} + Mt_{\text{RETT}②}$$

Dato che si suppone la struttura insolubile nel

piano avremo  $\theta'_1 = \theta'_2$  e cioè ruotano

della stessa quantità le 2 parti

$$\theta'_{\text{TOT}} = \theta'_1 = \theta'_2$$

$$\theta' = \frac{Mt}{Ct}$$

$$\frac{Mt_1}{Ct_1} = \frac{Mt_2}{Ct_2} = \frac{Mt_{\text{TOT}}}{Ct_{\text{TOT}}}$$

$$\underline{Mt^1} = Ct^1 \frac{Mt_{\text{TOT}}}{Ct_{\text{TOT}}}$$

$$Mt^2 = Ct^2 \frac{Mt_{\text{TOT}}}{Ct_{\text{TOT}}}$$

$$Ct^1 = \frac{G a \delta^3}{3} = \text{nel nostro caso } (2s)^3 = \frac{G a 8s^3}{3}$$

$$Ct^2 = \frac{G a \delta^3}{3}$$

$$Ct_{\text{TOT}} = \frac{G a 8s^3}{3} + \frac{G a \delta^3}{3} = \frac{g}{3} G a \delta^3 = 3G a \delta^3$$

$$C_{t \text{ tot}} = 3a\delta^3 G \quad C_{t1} = \frac{8}{3}a\delta^3 \quad C_{t2} = \frac{1}{3}a\delta^3$$

di conseguenza.  $\frac{8}{3}$  vengono assorbiti dal rett 1 e  $\frac{1}{3}$  viene assorbito dal rett 2.

$$M_{t1} = \frac{\frac{8}{3}a\delta^3}{3aG\delta^3} \cdot M_{t \text{ tot}} = \frac{8}{9} M_{t \text{ tot}}$$

$$M_{t2} = \frac{\frac{1}{3}a\delta^3}{3aG\delta^3} M_{t \text{ tot}} = \frac{1}{9} M_{t \text{ tot}}$$

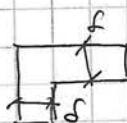
quindi sulla rett 1 e' 2 volte maggiore la  $T$

$$T_2^1 = \frac{\frac{8}{9}Mt \cdot 3}{a(2\delta)^2} = \frac{\frac{8}{3}Mt}{a4\delta^2} = \frac{\frac{8}{3}Mt}{a4\delta^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \frac{Mt}{a\delta^2}$$

$$T_2^2 = \frac{\frac{1}{9}Mt \cdot 3}{a(\delta)^2} = \frac{\frac{1}{3}Mt}{a\delta^2} = \frac{1}{3} \frac{Mt}{a\delta^2}$$

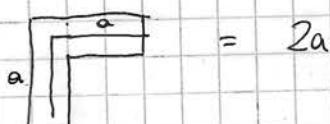
$$\gamma_{\max}^1 > \gamma_{\max}^2$$

Se Abbiamo una struttura con  $S$  costante



possiamo ancora usare  $T_2 = \frac{3Mt}{a\delta^2}$

ma a scomme la lunghezza di tutto il corpo



$$\text{allora } T_2 = \frac{3Mt}{2a\delta^2}$$



$$\delta = \text{costante} \rightarrow \text{per } a = \frac{a}{10}$$

$\gamma_2^2 \max ?$

$$+ 2a + a +$$

(1) Sez monocomessa      (2) Sez bicomessa.

$$M_t = M_t^1 + M_t^2$$

$$\Theta_{\text{tor}}^1 = \Theta_2^1 = \Theta_1^1$$

$$M_t^1 = \frac{C_t^1 M_{t,\text{tor}}}{C_t \text{tor}}$$

$$M_t^2 = \frac{C_t^2 M_{t,\text{tor}}}{C_t \text{tor}}$$

$$C_t^1 = \frac{G a \delta^3}{3} =$$

$$C_t^2 = \frac{4 A_m G}{\oint \frac{1}{\delta} ds} = \frac{4(2a \cdot a)^2 G}{\frac{1}{\delta} \oint ds}$$

↓

$\oint ds$  rappresenta il perimetro  $a + 2a + a + 2a = 6a$

$$\delta = a/10$$

↓

$$C_t^2 = \frac{4 \cdot 4 a^4 G}{\frac{1}{\delta} \cdot 6a}$$

$\frac{1}{\delta}$  puntato fuori

$$\frac{G a (a/10)^3}{3}$$

$$C_t^2 = \frac{2}{3} a^3 \delta G$$

perché  $\delta$  costante

$$M_t^1 = \frac{\frac{G a \delta^3}{3} \cdot M_t}{\frac{G a \delta^3}{3} + \frac{8}{3} a^3 \delta G} = \frac{\frac{a \delta^3}{3}}{\frac{a \delta^3}{3} + \frac{8}{3} a^3 \delta} \cdot M_t$$

$$M_t^2 = \frac{\frac{8}{3} a^3 \delta}{\frac{a \delta^3}{3} + \frac{8}{3} a^3 \delta} \cdot M_t$$

$$C_t \text{tot} = \left[ \frac{a}{3} \cdot \frac{a^3}{1000} + \frac{8}{3} a^3 \cdot \frac{a}{10} \right] G \quad C_t^1 = \left[ \frac{a^4}{3000} \right] G \quad C_t^2 = \left[ \frac{4}{15} a^4 \right] G$$

$$\frac{C_t^1}{C_t \text{tot}} = \frac{\frac{a^4}{3000}}{\dots}$$

$$\frac{C_t^2}{C_t \text{tot}} = \frac{\frac{4}{15} a^4}{\dots}$$

slope over calcolato tutto

$$\gamma_2^2 = \frac{3 \cdot \frac{1}{804} M_t}{a \delta^2} = \frac{\frac{3}{801} M_t}{a \frac{\delta^2}{100}} = \frac{300}{801 a^3} M_t$$

$$\gamma_2^2 = \frac{\frac{800}{801} \text{ Mt}}{\frac{2(2a^2a)}{10}} = \frac{800}{801} \text{ Mt} \cdot \frac{1}{\frac{4}{10} a^3} = \frac{800}{801} \cdot \frac{10}{4} \frac{\text{Mt}}{a^3} = \frac{2000}{801} \frac{\text{Mt}}{a^3}$$

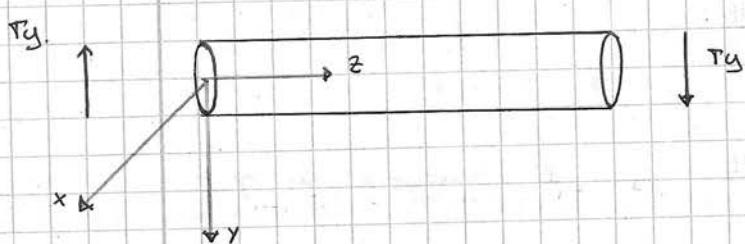
$$\gamma_{\max}^1 = \frac{300}{801} \frac{\text{Mt}}{a^3} = 0,37 \frac{\text{Mt}}{a^3}$$

$$\gamma_{\max}^2 = 2,19 \frac{\text{Mt}}{a^3} \quad \text{e' maggiore di } \gamma$$

sul corpo di Bredt, ma la  $\gamma_{\max}$  ha lo stesso  
ordine di grandezza di  $\gamma_{\max}$ .

TAGUO

$T_y, T_x$

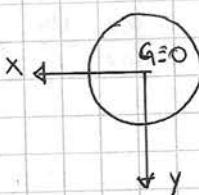


$$x = \xi, y = \eta$$

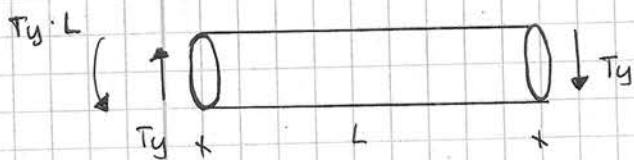
$x, y$  direzioni principali di inerzia

$O \equiv G$  (Baricentro)

Oltre che avere un asse baricentrico, saranno anche direzioni principali di inerzia



Da due forze si genera un momento, quindi il taglio non riesce ad equilibrarsi.



Al taglio e' sempre associato un momento.

$T_y$  mi associa una  $M_x$

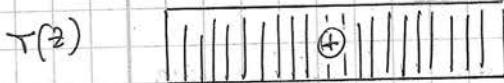


Diagramma taglio cost.

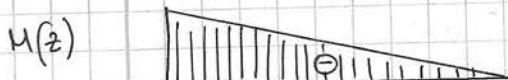
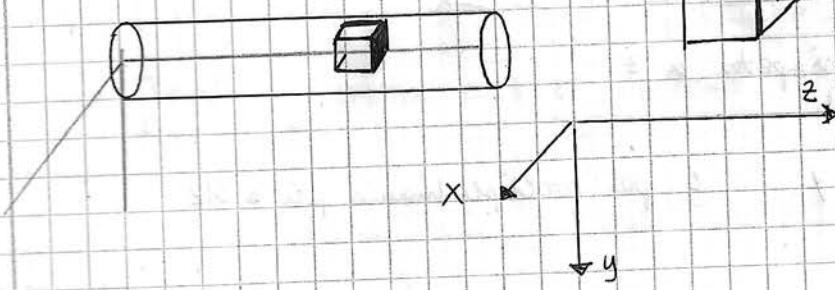


Diagramma momento lineare

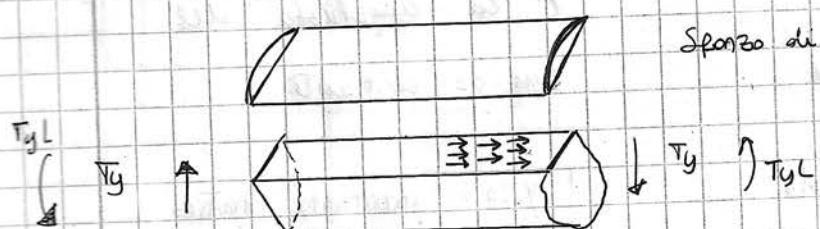
Dalle basi laterali avevamo che  $F_y = \int p_y dA \Rightarrow T_y = \pm \int T_y z dA$  quindi se abbiamo una forza tagliante si spalmano in direzione y come  $\gamma$

le nostre scopo e' capire come si distribuiscono



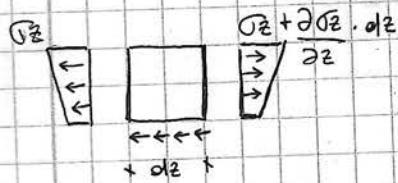
immaginiamo che  
sulla faccia di normale  
 $z$  agisca  $\tau_{zy}$

Quando applichiamo uno sforzo tangenziale si genera una  
forza di scorrimento della trave

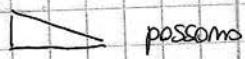


Sforzo di scorrimento = risultante delle  
 $\tau$  lungo i piani

"Se flettiamo un quadretto non avremo difficoltà. Le  
aggiungiamo colla altre pagine rendiamo il corpo solido  
e avremo forze trasmesse che sono bloccanti a far  
scorrere i fogli. Nasce sul piano orizzontale e  
sono spazi tangenziali ( $\tau$ ) chiamati di scorrimento."



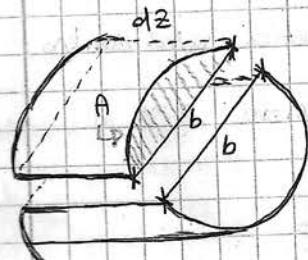
$M_z$  con momento flettente



possano

essere aumentate o diminuite perché è lineare

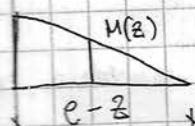
Questa variazione di  $M_z$  sarà equilibrata da uno sforzo nel  
lungo del cubetto.



Parte superiore di profilo

$\tau_z \cdot b \cdot dz$  = Risultante delle forze di  
scorrimento.

$$\tau_z \cdot b \cdot dz \neq \int \frac{\partial M_z}{\partial z} dz dA = 0$$



$$\frac{M(z)}{L-z} = -\frac{\tau_z L}{L}$$

$M_z = \frac{M_x}{I_x} y$  dalle formule di  
NAVIER.

$$M(z) = -\tau_z (L-z)$$

$$M_x = -T_y(l-z) \quad T_z = \frac{-T_y(l-z)}{I_x} y$$

Sì definiamo  $T_z$  rispetto a  $z$ :

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} = \frac{+T_y}{I_x} y \quad \text{e poi moltiplichiamo per } dz$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} \cdot dz = \frac{+T_y}{I_x} y \cdot dz$$

$$T_z \cdot b \cdot dz = - \int_A \frac{T_y y}{I_x} dz dA \quad \text{in questo caso } dz \\ \text{e' la lunghezza del conio= costante.}$$

$$T_z \cdot b = - \frac{T_y}{I_x} \int_A y dA$$

$$T_z = - \frac{T_y}{I_x b} \int_A y dA \quad \int_A y dA = \text{momento statico}$$

ma  $y$  e' quello di flessione retta, quindi  
relativo all'asse neutro.

Quindi avremo  $S_m = \int_A y dA$

$$T_z = - \frac{T_y S_m}{I_x b}$$



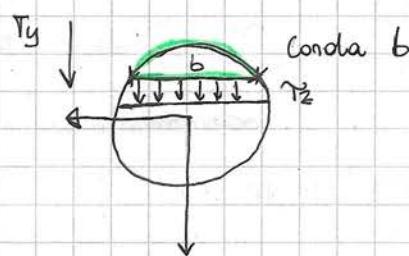
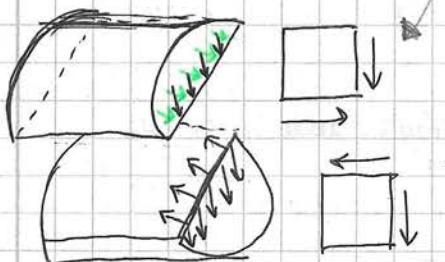
Nella forma più generale:

$$T_z = - \frac{T_f \cdot S_m}{I_m b}$$

$T_f$  = forza tangente

$S_m$  = momento statico asse neutro

$I_m$  = momento d'inerzia asse m.



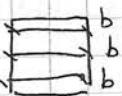
$$T_z = \frac{T_y S_m}{I_x b}$$

Le mostre  
 $T$  sulla  
 $\Delta z$  di

Trave

Quanto più la conda  $b$  è piccola tanto più si considera costante

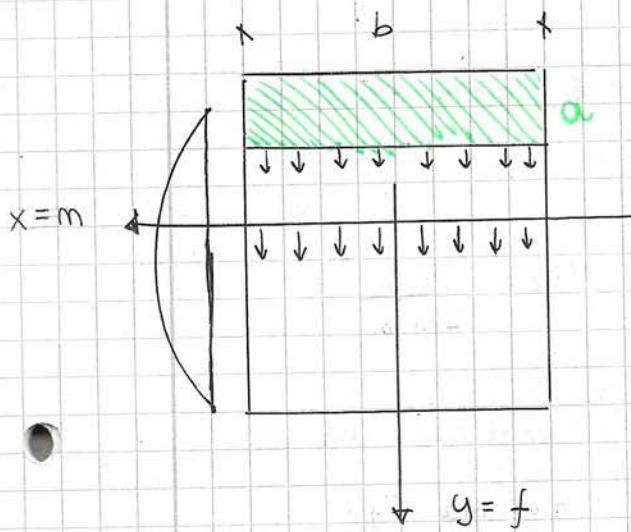
Se la corda fosse costante



avremo che

$$-\frac{T_y \cdot S_m}{I_m \cdot b}$$

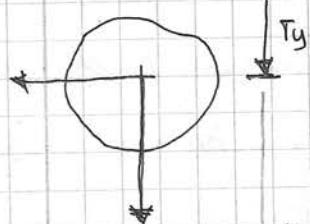
questa parte e' costante



$$\gamma_z = -\frac{T_y \cdot S_m}{I_m \cdot b}$$

CENTRO DI TAGLIO

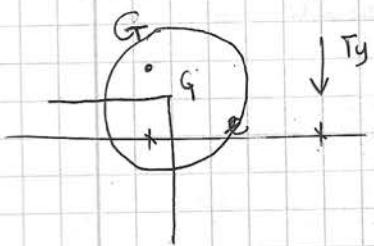
$C_T$  non  $C_t$  (Rigidezza flessionale)



Alli punti della sezione per i quali se passa la forza tagliante non viene generato momento torcente

Probabilmente in questo caso avremo momento torcente

Torcente



$$M_t = T_y \cdot e$$

Il centro di taglio dipende dalla geometria del corpo.

In genere però il centro di taglio  $C_T$  appartiene agli assi di simmetria

Per un rettangolo (2 assi simm)  $C_T$  corrisponde infatti al baricentro.

# PROBLEMI DI UNA SEZIONE

1) DATA UNA SEZIONE ED UNA FORZA TAGLIANTE

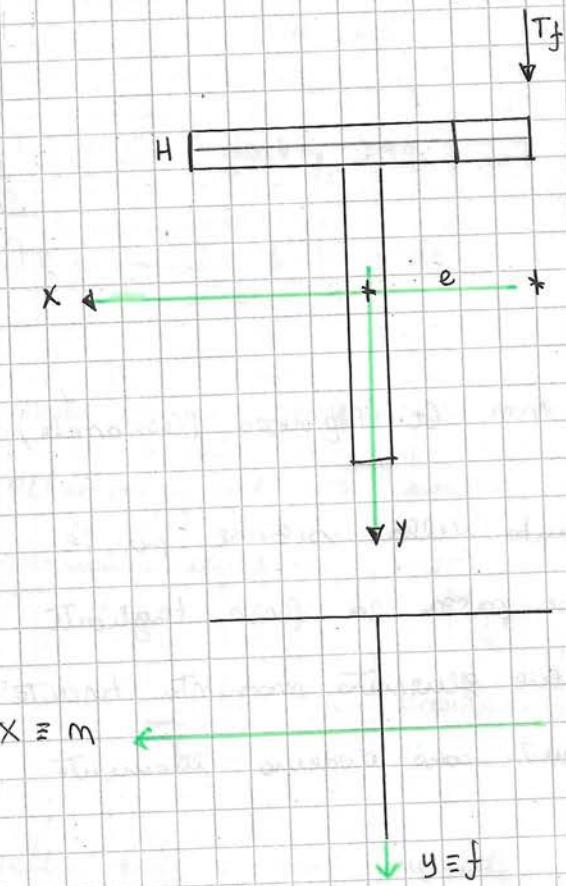
DETERMINARE IL DIAGRAMMA DELLE  $\tau_z$

2) DATA UNA SEZIONE INDIVIDUARE IL CT (CENTRO DI TAGLIO)

NEL CASO DI CALCOLO DI  $\tau_z$  SI USANO LE SOTTE FORMULE

HENRY VON

Questi esercizi si applicano solo su sezioni simmetriche.

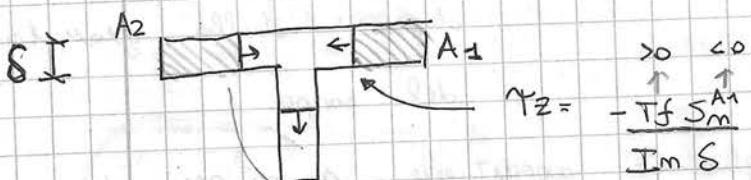


$$\tau_z = -\frac{T_f s_m}{I_m b}$$

Ipotizziamo una forza tagliente  $T_f$

Notiamo che la forza è parallela all'asse y. L'asse y è simmetrico rispetto alla struttura. Avremo un valore e (eccentricità) e quindi anche momento flettente

Se prendiamo la condola H, avremo  $\tau$  piccole in quanto molto lunga.



$$\tau_z = -\frac{T_f s_m^{A_1}}{I_m s}$$

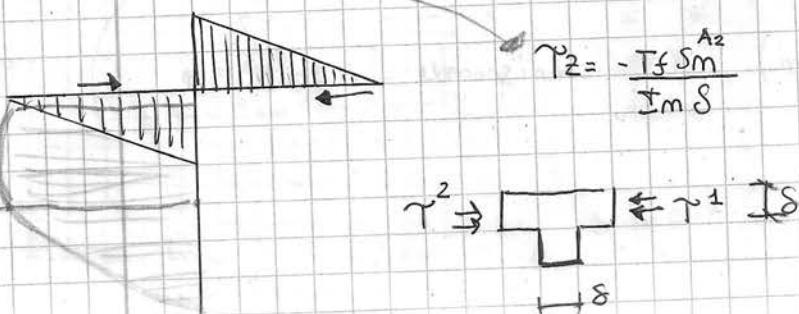
Il momento statico è meglio  
Destra di x DESTRA  
 $T_f > 0 \downarrow$  in giù  
 $\tau_z$  quindi  $> 0$

le

$\tau$

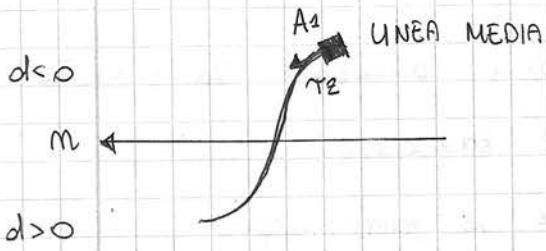
$s$

$T_f$



$$\tau^1 s + \tau^2 s = \tau^3 s$$

equilibrio del modo



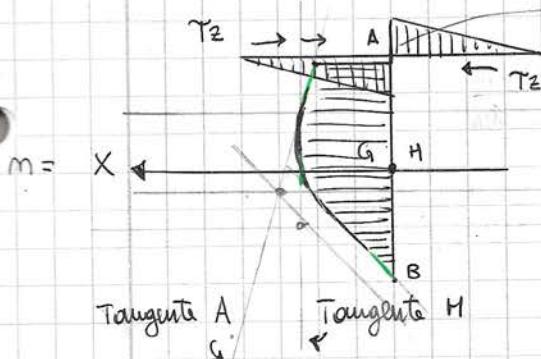
$$\gamma_z = -\frac{T_f S_m}{I_m b}$$

$$\frac{\partial \gamma_z}{\partial s} = -\frac{T_f}{I_m} \cdot dm$$

pendenza  $\gamma_z = -\frac{T_f}{I_m} dm \rightarrow$  distanza asse neutro

Se  $dm$  è costante, la variazione di pendenza è anch'essa costante.

Se  $dm = 0$  avremo tangente nulla (parallela al tratto ←→)



$dm$  in questo punto è costante

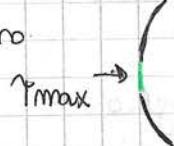
Retta ~~perpendicolare~~ al diagramma nel punto  $\gamma^1 s + \gamma^2 \delta = \gamma^3 \delta$

Per tracciare la parabola prendiamo la media all' punto A-H e dove questa media incontra la tangente al diagramma passerà anche la tangente nulla di H

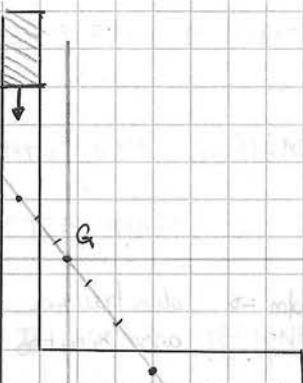
Facciamo la stessa cosa con H-B

Prendiamo la media anche sli AB e col prolungamento di A troveremo un punto di incontro tra tangente A-B e tangente H-B

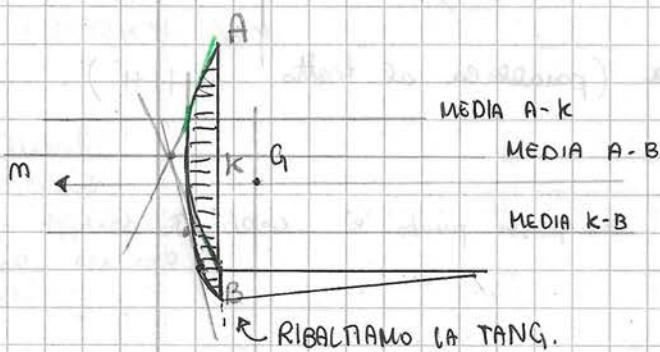
le massime valori di Tela tanglio si legge alla tangente nell'asse neutro



65

 $T_f$ 

48



Come calcolare facilmente il baricentro

Se il primo corpo e' G e l'altro u avremo

$$\frac{d}{10} \quad \text{ora uno e'} \\ \frac{G}{10} \quad \text{e uno } \frac{L_3}{10}$$

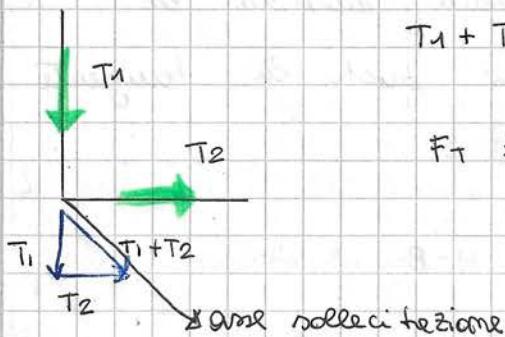
$$\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}$$

$$V_z = -\frac{T_f \cdot S_m}{I_m \cdot d_m}$$

 $A^A + m$ 

medio A-K =  $T_g A$ ,  $T_g K$  medio BK = Punto intersez con  $T_g K$

media AB = punto intersez.  $T_g A$

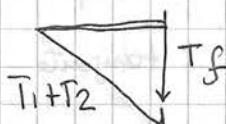


$$T_1 + T_2 = F_T \quad \text{forza tagliente}$$

$$F_T \neq T_f$$

$T_1 + T_2$  e' un vettore

che ci dà l'asse di sollec.



$T_1$  e  $T_2$  sono ottenute dagli integrali del taglio

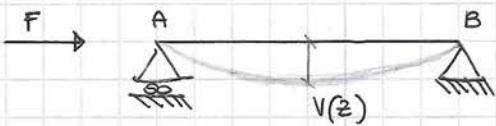
qui solo  $T_1$  e  $T_2$  non generano momento e indicano le C<sub>T</sub> centro di taglio.

## CARICO CRITICO

Quando applichiamo una forza trazione alla trave avremo che si romperà quando  $\sigma_z$  sarà superiore a  $\sigma_{z\text{ di rottura}}$

Se applichiamo all'elemento trave una forza di compressione però potrebbe succedere che prima di rompersi sbianchi (non si rompe più per effetto del carico ma per instabilità)

Quel malore del carico che porta allo sbiancamento è detto carico critico. Quel carico di compressione che fa rompere la trave per sbiancamento.



Noi abbiamo visto  
la  $V(z)$  già in travi  
mettendoli dove però le  
forze non erano assiali

forse non erano assiali

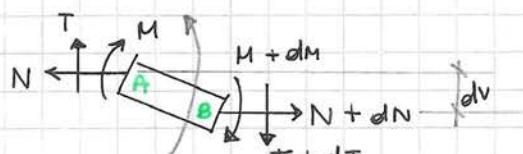
Nella forma più  
generale  $V(z)$  era



uguale a  $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ . Eq. Linea Elastica. (carico trasversale)

Ma  $V(z)$  assiale sarà diverso perché non operiamo in condizione di equilibrio ~~rettilegare~~ (RETTOLEGGARE) ma variabile e variato.

Per un equilibrio variabile dobbiamo studiare la trave con la sua decomposizione elementare



Eq. Equilibrio intorno al punto B.

Immagina  
il carico  
sopra  
+  $dz$  +

$$N \cdot dv - M - T dz + q dz \cdot \frac{dz}{2} + M + dM = 0$$

infinitesimo di  
ordine superiore

$$Nv - T + M = 0$$

Derivare gli v  
rispetto z

$$Ndv - T dz + dM = 0 \quad \text{dividiamo per } dz$$

$$\frac{Ndv}{dz} - T \frac{dz}{dz} + \frac{dM}{dz} = 0$$

$$(Nv')' + q + M'' = 0$$

$$M = -EIv''$$

Abbiamo ridotto tutto per  $\frac{dz}{z}$  e

$$\text{abbiamo scritto } \frac{dT}{dz} = -q$$

cioè divisa da:

$$v(z) = +V(z)$$

$$-EIv'''(z) = T$$

$$v'(z) = -Q$$

$$EIv''(z) = Q$$

$$-EIv''(z) = M$$

$$(Nv')' + q + (-EIv'')''$$

$$q = (EIv'')'' - (Nv')'$$

$$q = EIv'' - Nv'' \Delta$$

$$q = EIv'' + FV'' \quad \text{perché nel nostro caso } N = -F \quad \begin{array}{c} F \\ \rightarrow \\ \Delta \end{array}$$

$$\begin{matrix} \sim & \sim & \sim \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sim & \sim & \sim \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sim & \sim & \sim \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix}$$

$$V'' + \frac{d^2}{dz^2} v'' = 0$$

(abbiamo diviso tutto per  $EI$ )

E' una equazione di 4° grado il cui integrale è particolare.

$$v = \sin(dz) \quad v = \cos(dz) \quad v = z \quad v = \text{cost.}$$

(ovvero possiamo combinare le  $v$  in questi 4 valori e l'equazione sarebbe verificata uguale a 0).

$$v(z) = A \sin(dz) + B \cos(dz) + Cz + D \quad \text{integrale generale.}$$

$q$  lo abbiamo posto uguale a 0 perché ipotizziamo che agiscono solo carichi assiali

$\downarrow q$      $\times$      $\leftarrow q$   
VER.    No    Ass.



N.B. Ci ritroviamo in caso di carico critico solo con forze di COMPRESSIONE

$$V'''' + d^2 V'' = 0$$

$$V(z) = A \sin(dz) + B \cos(dz) + Cz + D =$$

$$V(z=0) = 0 \quad (\text{ABASSAMENTO} = 0)$$

$$-EI v'''(z=0) = 0$$

$$N(z=L) = 0$$

$$-EI N''(z=L) = 0$$

$$N(z) = A \sin(dz) + B \cos(dz) + Cz + D$$

$$N = N(z)$$

$$N'(z) = Ad \cos(dz) - Bd \sin(dz) + C$$

$$N' = -v'(z)$$

$$N''(z) = -Ad^2 \sin(dz) - Bd^2 \cos(dz)$$

$$M = -EI N''(z)$$

$$N'''(z) = -Ad^3 \cos(dz) + Bd^3 \sin(dz)$$

$$T = -EI N'''(z)$$

Scriviamo le v in funzione di  $z = 0$  (condizioni ai limiti)

$$N(z=0) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 + B + 0 + D = 0 \end{array} \right.$$

$$N''(z=0) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 + d^2 B + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

Sistema di 4 equazioni

$$N(z=L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(dL)A + \cos(dL)B + CL + D = 0 \end{array} \right.$$

in 4 incognite omogenee

$$N''(z=L) \quad \left\{ \begin{array}{l} -d^2 \sin(dL)A - d^2 \cos(dL)B + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

(ammette ea soluzione banale)

$$A=0, B=0, C=0, D=0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & d^2 & 0 & 0 \\ \sin dL & \cos dL & L & 1 \\ -d^2 \sin dL & -d^2 \cos dL & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

In questo determinante si presenterà  $\boxed{d}$

$$d^2 = \frac{F}{EI}$$

Se il determinante risulta uguale a 0, potrebbe essere grazie a un  $d$  molto grande. E se  $d \approx 0$  avremo infiniti  $A, B, C, D$ .  $d$  molto grande vuol dire carichi tali da far avere alte trave grandi spostamenti:

Il carico critico dunque è quel valore della forza per le quale si hanno infinite deformazioni di equilibrio quando ugualissimo a 0 le det delle condizioni ai limiti.

$\det A = 0$  equazione di tipo trascendente | perché d compareva come variabile indipendente

$$\Delta L = m\pi \quad \text{soltanto } \det = 0$$

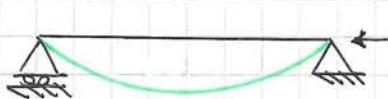
Insieme dei numeri interi  $(0, 1, 2, \dots)$

sia come ~~argomento~~ argomenti di funzioni periodiche

$$F_c = \frac{m^2 \pi^2 EI}{L_0^2}$$

$L_0$  = lunghezza libera di flessione

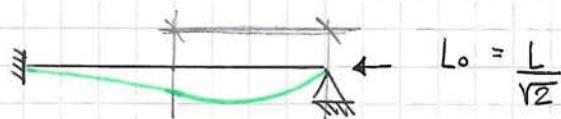
e rappresenta la distanza tra 2 punti di flesso continui nella deformazione



$$L_0 = L$$



$$L_0 = 2L$$



$$L_0 = \frac{L}{12}$$



$$L_0 = \frac{L}{2}$$

(Imastro-incestro ipotizzato di scorrimento seruo' non avremmo carico critico)

$$F_c = \frac{m^2 \pi^2 EI}{L_0^2}$$

se dividiamo per l'area avremo  $\frac{F_c}{A} = \frac{m^2 \pi^2 E}{L_0^2} \frac{I_x}{A}$

ma  $\frac{I_x}{A}$  ci da  $\sigma_f$  quindi possiamo avere  $\sigma_f$  critico

$$F_c = \frac{m^2 \pi^2 E \rho_x^2}{L_0^2}$$

$\rho$  = Raggio di inerzia  $R_0$

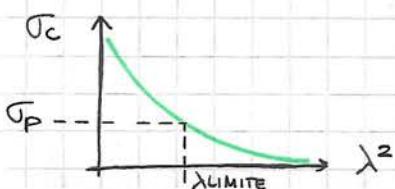
$$\lambda^2 = \frac{L_0^2}{\rho_x^2}$$

$$F_c = \frac{m^2 \pi^2 E}{\lambda^2}$$

$\lambda$  = ampiezza della trave

TRAVE TOZZA: CORTA E SPESSA

TRAVE SNELLA: LUNGA E SOTTILE



(SIGMA PROPORZIONALITA')

Da  $\sigma_f$  individuiamo  $\lambda_{\text{LIMITE}}$  dove andando a dx si aggiusta la curva

$G_0$   $G_0$  = ROTURA