Marco Boella

# Analisi Matematica 2

## Esercizi

PEARSON
Education

Composizione: CompoMat s.r.l. - Configni (RI)
Grafica di copertina: Claudia Gigliotti
Stampa: Tip.Le.Co. - San Bonico (PC)



978-88-7192-453-3

Printed in Italy
1ª edizione: marzo 2008

| Ristampa | Anno |
| --- | --- |
| 01 02 03 04 | 10 11 12 |

# Indice

# Introduzione

Séguito del volume *Analisi Matematica 1 e Algebra lineare*, del quale intende essere il completamento, questo libro offre una panoramica degli argomenti che più sovente trovano posto nel programma di un secondo corso di Analisi Matematica: serie di funzioni (con particolare attenzione alle serie di Fourier), funzioni di più variabili, integrazione in più variabili, curve e superfici, campi vettoriali, equazioni differenziali.

Va da sé che siano state effettuate delle scelte. Sono stati sacrificati quegli argomenti che in generale vengono sorvolati, vuoi per mancanza di tempo, vuoi perché ritenuti "fuori portata" rispetto alla preparazione richiesta agli studenti. Ad esempio, nel capitolo sulle equazioni differenziali manca ogni accenno al metodo di variazione delle costanti arbitrarie (un breve cenno non avrebbe avuto alcuna utilità e una trattazione più organica sarebbe senza dubbio diventata eccessivamente ponderosa).

Rispetto al precedente volume, la struttura è rimasta la stessa: ogni capitolo si articola in esercizi svolti ed esercizi proposti; attraverso i primi vengono richiamati gli aspetti della teoria necessari alla comprensione e allo svolgimento degli esercizi e, successivamente, sono illustrate le principali metodologie di soluzione, con un occhio di riguardo alle ingenuità e agli errori che più sovente si riscontrano in sede d'esame. La breve sezione di esercizi proposti intende fornire una opportunità di verifica dell'avvenuto apprendimento.

Valgono, per chi si accosta a una qualsiasi raccolta di esercizi di matematica, le stesse raccomandazioni già esposte nell'introduzione al primo volume, a queste si aggiunge un'ulteriore riflessione: è importante ricordare che il breve riepilogo di nozioni teoriche, che trova posto nei primi esercizi dei vari capitoli, non può *in alcun modo* sostituire uno studio organico della teoria e che è opportuno che questo studio avvenga prima di affrontare gli esercizi. Accade, a volte, che uno studente decida di accostarsi agli esami di matematica concentrandosi innanzitutto sulla soluzione degli esercizi, rimandando a un secondo tempo — in vista dell'orale — lo studio sistematico della teoria. Ritenere che l'aspetto teorico della materia sia secondario, se non superfluo, ai fini dello svolgimento degli esercizi è un equivoco molto pericoloso. Per risolvere un esercizio che non richieda solo calcoli meccanici, la conoscenza della teoria è un prerequisito irrinunciabile.

Quando si finisce di scrivere un libro, si sente la necessità di ringraziare tutte le persone che, a vario titolo e nei modi più diversi, hanno costituito un aiuto durante la stesura. Ringrazio innanzitutto Iole, che in questi mesi mi ha permesso di scrivere questo libro con serenità e libertà, alle volte sacrificando qualche occasione di svago, altre volte tollerando orari di lavoro assai poco ortodossi. Inoltre, un notevole debito di gratitudine va a mia madre, che, come già era accaduto con l'altro volume, si è pazientemente riletta la prima stesura di queste pagine, prodigandosi in consigli e suggerimenti, sempre opportuni, alle volte assolutamente

necessari. Un grazie va anche a tutti i miei colleghi che, in occasione di qualche scambio di vedute, mi hanno aiutato a trovare la strada giusta per concatenare gli argomenti. Ovviamente, rimango il solo responsabile di ciò che ho scritto. Infine, ringrazio di tutto cuore Ester Borgese che in queste settimane di collaborazione ha dimostrato, oltre a una grande disponibilità, un'infinita pazienza di fronte ai miei ritardi.

*Marco Boella*
*Milano, gennaio 2008*

# Simbologia

Nel corso del libro, sono stati utilizzati i simboli seguenti:

| | |
|---|---|
| $A \cup B$ | unione insiemistica di $A$ e $B$:<br>tutti gli elementi che appartengono a $A$ o a $B$. |
| $A \cap B$ | intersezione insiemistica di $A$ e $B$:<br>tutti gli elementi che appartengono a $A$ e a $B$. |
| $A \equiv B$ | $A$ e $B$ coincidono (sono composti dagli stessi elementi). |
| $A \subset B$ | $A$ è un sottoinsieme *proprio* di $B$:<br>tutti gli elementi di $A$ appartengono anche a $B$, ed esiste almeno un elemento di $B$ che non appartiene ad $A$. |
| $A \subseteq B$ | $A$ è un sottoinsieme di $B$, eventualmente coincidente con $B$. |
| $A \setminus B$ | differenza insiemistica:<br>gli elementi di $A$ che non sono elementi di $B$. |
| $\alpha \in A$ | l'elemento $\alpha$ appartiene all'insieme $A$. |
| $\alpha \notin A$ | l'elemento $\alpha$ non appartiene all'insieme $A$. |
| $\mathbb{N}$ | insieme dei numeri interi non negativi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. |
| $\mathbb{N}_*$ | insieme dei numeri interi positivi: $\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. |
| $\mathbb{Z}$ | insieme dei numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. |
| $\mathbb{Q}$ | insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_*\}$. |
| $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ | insieme dei numeri reali, insieme dei numeri complessi. |
| $\{x \in E \,;\, P(x)\}$ | insieme dei numeri in $E$, che verificano la proprietà $P$. |
| $[a, b]$ | intervallo, composto dai numeri reali $x$ per cui $a \leq x \leq b$. |
| $[a, b)$ | intervallo, composto dai numeri reali $x$ per cui $a \leq x < b$. |
| $(a, b)$ | intervallo, composto dai numeri reali $x$ per cui $a < x < b$. |
| $\sup E$ | estremo superiore dell'insieme $E$. |
| $\inf E$ | estremo inferiore dell'insieme $E$. |
| $\max E$ | massimo dell'insieme $E$. |
| $\min E$ | minimo dell'insieme $E$. |
| $\mathrm{Re} z$ | parte reale del numero complesso $z$. |
| $\mathrm{Im} z$ | parte immaginaria del numero complesso $z$. |
| $\lvert z \rvert$ | modulo del numero complesso $z$. |
| $\arg z$ | argomento del numero complesso $z$. |
| $\mathfrak{P}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ | piano e rette, nello spazio a tre dimensioni. |
| $\mathcal{M}(m, n)$ | spazio vettoriale delle matrici a $m$ righe e $n$ colonne. |
| $\mathrm{rk} A$ | rango della matrice $A$. |
| $A^T$ | trasposta della matrice $A$. |
| $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ | vettori nello spazio a tre dimensioni,<br>elementi di generici spazi vettoriali. |
| $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ | prodotto scalare tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ | prodotto vettore tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. |
| $\mathbf{0}$ | vettore le cui componenti sono tutte nulle. |
| $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ | spazi vettoriali generici. |
| $\mathbf{0}_{\mathscr{V}}$ | vettore nullo dello spazio $\mathscr{V}$. |
| $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_i\}$ | sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_i$. |
| $\mathcal{B}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ | basi generiche di spazi vettoriali. |
| $\mathcal{C}$ | base canonica di $\mathbb{R}^n$. |
| $\mathbf{e}_i$ | elementi di $\mathcal{C}$. |
| $\mathcal{L}$ | applicazione lineare tra spazi vettoriali. |
| $f(x) \equiv a$ | funzione di $x$ identicamente uguale a $a$: $\forall x,\ f(x) = a$. |
| $g \circ f(x)$ | funzione composta: $g \circ f(x) = g(f(x))$. |
| $f^{-1}(x)$ | funzione inversa: $f^{-1}(f(x)) = x$. |
| $\limsup$ | massimo limite. |
| $\liminf$ | minimo limite. |
| $\log x$ | logaritmo naturale di $x$. |
| $\log_b x$ | logaritmo in base $b$ di $x$. |
| $H(x)$ | funzione di Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. |
| $\operatorname{sgn} x$ | segno di $x$: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. |
| $\lfloor x \rfloor$ | parte intera di $x$: massimo intero minore o uguale a $x$. |
| $\operatorname{mant} x$ | mantissa di $x$: $x - \lfloor x \rfloor$. |
| $f(x) \sim g(x)$ | equivalenza asintotica, tra infiniti o infinitesimi. |
| $f(x) = o(g(x))$ | $o$-piccolo: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. |
| $\operatorname{grad} f$ | gradiente della funzione $f$. |
| $\mathscr{L}$ | linea, nel piano o nello spazio. |
| $\mathscr{S}$ | superficie nello spazio. |
| $\mathbf{T}$ | versore tangente alla linea $\mathscr{L}$. |
| $\mathbf{N}$ | versore normale della linea $\mathscr{L}$. |
| $\mathbf{B}$ | versore binormale della linea $\mathscr{L}$. |
| $\kappa$ | curvatura della linea $\mathscr{L}$. |
| $\operatorname{div} \mathbf{F}$ | divergenza del campo vettoriale $\mathbf{F}$. |
| $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ | rotore del campo vettoriale $\mathbf{F}$. |
| $\mathcal{U}$ | potenziale del campo vettoriale $\mathbf{F}$. |
| $\mathcal{L}$ | lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}$. |
| $\mathcal{F}$ | flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$. |

# 1

# Serie di funzioni

## 1.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### 1.1.1 Serie di potenze in $\mathbb{R}$

**Esercizio 1.1 — Intervallo di convergenza**

*Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze:*

$$① \sum \frac{x^n}{n}; \qquad ② \sum \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n}}; \qquad ③ \sum n!\,x^n;$$

$$④ \sum \frac{(2x+1)^n}{n^2}; \qquad ⑤ \sum \frac{(x-2)^n}{n!}; \qquad ⑥ \sum x^n.$$

**Soluzione**

Vengono dette serie di potenze le serie di funzioni della forma

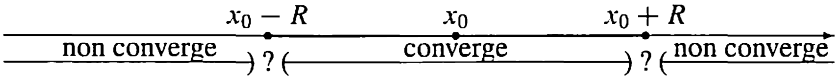
$$\sum_n a_n x^n \quad \text{e} \quad \sum_n a_n (x - x_0)^n,$$

nel primo caso si parla di serie *centrata nell'origine*, nel secondo di serie *centrata in* $x_0$ (ovviamente la seconda è la generalizzazione della prima, d'ora in avanti parleremo della serie centrata in $x_0$); dalla teoria sappiamo che di una serie di potenze è possibile calcolare il *raggio di convergenza* $R$, vi sono tre casi:

$$R = 0, \qquad R = +\infty, \qquad 0 < R < +\infty;$$

nel primo caso ($R = 0$) la serie converge solo se $x = x_0$, nel secondo caso ($R = +\infty$) la serie converge (puntualmente) per ogni valore $x \in \mathbb{R}$, nell'ultimo caso

- la serie converge (puntualmente) se $|x - x_0| < R$, ossia nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$,
- la serie non converge se $|x - x_0| > R$,
- nulla si può dire riguardo al comportamento della serie nei punti $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$.




Per calcolare il raggio $R$, vi sono due formule, che ovviamente forniscono valori uguali[a]:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}};$$

l'uso della prima o della seconda è suggerito dalle ciscostanze. Esaminiamo allora, una alla volta, le serie del testo.

① Si vede immediatamente che

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \Rightarrow \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1;$$

pertanto la serie converge se $-1 < x < 1$, diverge se $x < -1$ o $x > 1$, per studiarne il comportamento in $x = \pm 1$ conviene esaminarla caso per caso: in $x = 1$ e $x = -1$ abbiamo, rispettivamente

$$\sum \frac{x}{n} \overset{[x=1]}{=} \sum \frac{1}{n}, \qquad \sum \frac{x}{n} \overset{[x=-1]}{=} \sum (-1)^n \frac{1}{n},$$

e sappiamo[b] che la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mentre la serie $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ converge; riassumendo, la serie data converge nell'intervallo $[-1, 1)$.

② Mettiamo in evidenza $x$:

$$\sum \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-3)^n}{\sqrt{n}} x^n$$

pertanto

$$a_n = \frac{(-3)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \Rightarrow \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{3};$$

e quindi la serie converge se $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, diverge se $x < -\frac{1}{3}$ o $x > \frac{1}{3}$, per studiarne il comportamento in $x = \pm\frac{1}{3}$, possiamo seguire la stessa via usata

[a] In effetti, sono valide le formule, un po' più generali,

$$R = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \qquad R = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

[b] Confronta il volume *Analisi Matematica 1 e Algebra lineare*, Esercizi 7.10 e 7.17.

poc'anzi, ottenendo per $x = \pm\frac{1}{3}$, rispettivamente

$$\sum \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n}} \overset{\left[x=\frac{1}{3}\right]}{=} \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n}} \overset{\left[x=-\frac{1}{3}\right]}{=} \sum \frac{1}{\sqrt{n}},$$

e sappiamo che la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, mentre la serie $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge; pertanto la serie data converge nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

③ In questo caso $a_n = n!$, quindi

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0;$$

e la serie converge solamente per $x = 0$ (ove in effetti si tratta di una serie di addendi, tutti uguali a zero).

④ Occorre scrivere la serie nella forma $\sum a_n (x - x_0)^n$, quindi

$$\frac{(2x+1)^n}{n^2} = \frac{2^n}{n^2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^n, \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \frac{2^n}{n^2},\ x_0 = -\frac{1}{2};$$

calcoliamo il raggio:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2};$$

quindi la serie converge se $-\frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, cioè per $-1 < x < 0$, e diverge se $x + \frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ o $x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, cioè per $x < -1$ o $x > 0$, per studiarne il comportamento in $x = 0$ e $x = -1$, al solito, sostituiamo:

$$\sum \frac{(2x+1)^n}{n^2} \overset{[x=0]}{=} \sum \frac{1}{n^2}, \qquad \sum \frac{(2x+1)^n}{n^2} \overset{[x=-1]}{=} \sum (-1)^n \frac{1}{n^2},$$

entrambe le serie convergono, pertanto la serie data converge nell'intervallo $[-1, 0]$.

⑤ Abbiamo $x_0 = 2$ e

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty;$$

quindi la serie converge per $-\infty < x - 2 < +\infty$, cioè per $x \in \mathbb{R}$.

⑥ La serie è la (nota) serie geometrica, di ragione $x$, che converge per $-1 < x < 1$ (in effetti, $a_n = 1$ per ogni valore di $n$, e pertanto $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$), sappiamo inoltre che per $x = \pm 1$ la serie diverge; l'intervallo di convergenza è pertanto $(-1, 1)$.

## Esercizio 1.2 — Convergenza uniforme Teorema di Abel, criterio di Weierstrass

*Per ciascuna delle serie dell'esercizio precedente, specificare un intervallo ove la serie converga uniformemente.*

### Soluzione

Se una serie di potenze converge per $x \in (a, b)$, si dimostra che tale serie converge uniformemente in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ con $a < \alpha < \beta < b$; vale inoltre il teorema di Abel[c].

① La serie converge in $[-1, 1)$, allora fissato $\varepsilon > 0$ converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[-1, 1-\varepsilon]$ (la presenza di $x = -1$ è possibile grazie al teorema di Abel).

② Analogamente, la serie converge uniformemente in ogni intervallo della forma $\left[-\frac{1}{3}+\varepsilon, \frac{1}{3}\right]$.

③ Ovviamente in un caso come questo non ha senso parlare di convergenza uniforme.

④ In questo caso, possiamo (volendo) evitare di fare ricorso al teorema di Abel, utilizzando invece il criterio di Weierstrass[d]; poiché per $x \in [-1, 0]$ abbiamo

$$-1 \leq (2x+1) \leq 1, \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{(2x+1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

e la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, allora la nostra serie converge uniformemente nell'intervallo $[-1, 0]$.

⑤ Data l'arbitrarietà dell'intervallo di convergenza, abbiamo che la serie converge uniformemente in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$, con $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

⑥ In nessun caso ci si può spingere fino al bordo dell'intervallo di convergenza, pertanto la serie converge uniformemnte in $[\alpha, \beta]$, con $1 < \alpha < \beta < 1$, ovvero in $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

## Esercizio 1.3 — Serie riconducibili a serie di potenze

*Determinare l'insieme di convergenza delle serie seguenti:*

$$① \sum \frac{(2\sin x)^n}{n}; \qquad ② \sum \frac{e^{nx}}{n^2}; \qquad ③ \sum \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n.$$

---

[c]**Teorema di Abel**: Se la serie di potenze $\sum a_n (x-x_0)^n$, converge negli estremi di un intervallo $[a, b]$, allora converge uniformemente in tutto l'intervallo $[a, b]$.

[d]**Criterio di Weierstrass**: Data una serie di funzioni $\sum f_n(x)$, se per $x \in [a, b]$ si ha che $i) |f_n(x)| \leq c_n$ e $ii) \sum c_n$ converge, allora la serie di partenza converge uniformemente in tutto l'intervallo $[a, b]$.

**Soluzione**

Sovente, è possibile studiare la convergenza di una serie, trasformandola in una serie di potenze.

① Ponendo $t = 2\sin x$, ricaviamo la serie $\sum \frac{t^n}{n}$, che converge per $t \in [-1, 1)$, la serie data converge pertanto per $-1 \leq 2\sin x < 1$, ovvero per

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi.$$

② Ponendo $t = e^x$, la serie diventa $\sum \frac{t^n}{n^2}$, che converge per $t \in [-1, 1]$, considerato allora che $e^x > 0$, la serie data converge pertanto per $e^x \leq 1$, ovvero per $x \in (-\infty, 0]$.

③ Ponendo $t = \frac{x}{1+x}$, otteniamo la serie $\sum \frac{t^n}{\sqrt{n}}$, che converge per $t \in [-1, 1)$, la serie data converge pertanto per $-1 \leq \frac{x}{1+x} < 1$, ovvero per $x \in (-1, +\infty)$.

**Osservazione importante**: *Le serie di MacLaurin delle funzioni elementari*

Un posto importante, tra le serie di potenze, è occupato dalle serie di MacLaurin delle funzioni elementari, le elenchiamo qui di seguito, ciascuna con il proprio raggio di convergenza:

- $f(x) = e^x$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = +\infty;$$

- $f(x) = \operatorname{Ch} x$ — (i termini pari dello sviluppo di $e^x$):

$$\operatorname{Ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \qquad R = +\infty;$$

- $f(x) = \operatorname{Sh} x$ — (i termini dispari dello sviluppo di $e^x$):

$$\operatorname{Sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = +\infty;$$

- $f(x) = \cos x$ — (come $\operatorname{Ch} x$, ma a segni alterni):

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad R = +\infty;$$

- $f(x) = \sin x$ — (come $\operatorname{Sh} x$, ma a segni alterni):

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = +\infty;$$

- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ — (la serie geometrica):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad R = 1;$$

- $f(x) = \log(1+x)$ — (senza i fattoriali, a segni alterni):

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad R = 1;$$

- $f(x) = \arctan x$ — (senza i fattoriali, solo potenze dispari a segni alterni):

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad R = 1;$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ — ("serie binomiale")[e]:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad R = 1.$$

### Esercizio 1.4 — Serie di Taylor

*Facendo uso delle serie di MacLaurin delle funzioni elementari, scrivere la serie di Taylor delle seguenti funzioni, nei punti specificati, specificandone raggio di convergenza:*

| | |
|---|---|
| ① $f(x) = e^x$ *in* $x_0 = 1$; | ② $f(x) = e^{-3x}$ *in* $x_0 = e$; |
| ③ $f(x) = \log 2x$ *in* $x_0 = 2$; | ④ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ *in* $x_0 = 1$. |

### Soluzione

In tutti questi esercizi, il "trucco" consiste nel manipolare l'espressione analitica della funzione da sviluppare in modo da poter utilizzare gli sviluppi di MacLaurin, noti.

① Dobbiamo mettere in evidenza $x - 1$, osservando che $x = x - 1 + 1$:

$$f(x) = e^x = e^{x-1+1} = e \cdot e^{x-1} = e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n;$$

serie di potenze ove $a_n = \frac{e}{n!}$ e $x_0 = 1$, avente raggio $R = +\infty$, convergente quindi per $x \in \mathbb{R}$.

---

[e]Per il significato di $\binom{\alpha}{n}$, confronta il volume precedente, Esercizio 1.4.

② Osservando che $-3x = -3(x-e) - 3e$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-3x} = e^{-3(x-e)-3e} = e^{-3e} \cdot e^{-3(x-e)} \\ &= e^{-3e} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[-3(x-e)]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 3^n}{n! e^{3e}} (x-e)^n; \end{aligned}$$

serie di potenze ove $a_n = \frac{(-3e)^n}{n! e^{3e}}$ e $x_0 = e$, avente raggio $R = +\infty$, convergente quindi per $x \in \mathbb{R}$.

③ Vogliamo centrare la serie in $x_0 = 2$, e perciò mettiamo in evidenza $(x-2)$ scrivendo $2x = 2(x-2)+4$; inoltre la funzione logaritmo di cui conosciamo lo sviluppo ha la forma "$\log(1+\square)$", osserviamo allora che

$$\begin{aligned} \log 2x = \log[4 + 2(x-2)] &= \log\left(4\left[1 + \frac{1}{2}(x-2)\right]\right) \\ &= \log 4 + \log\left[1 + \frac{1}{2}(x-2)\right], \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \log 4 + \log\left[1 + \frac{1}{2}(x-2)\right] = \log 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n \\ &= \log 4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 2^n} (x-2)^n, \end{aligned}$$

serie di potenze ove $a_0 = \log 4$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 2^n}$ e $x_0 = 2$, avente raggio $R = 2$; convergente quindi per $x \in (0, 4]$.

④ In questo caso, dobbiamo ricondurci alla serie geometrica:

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3-[(x-1)-1]} = -\frac{1}{4-(x-1)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)},$$

quindi

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{4^{n+1}} (x-1)^n$$

serie di potenze ove $a_n = -\frac{1}{4^{n+1}}$ e $x_0 = 1$, avente raggio $R = 4$; convergente quindi per $x \in (-3, 5)$.

### Esercizio 1.5 — Integrazione per serie

*Calcolare con un errore inferiore a* $10^{-6}$ *il seguente integrale:*

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

### Soluzione

La funzione $e^{-x^2}$ non è integrabile in termini finiti, per calcolare approssimativamente il valore dell'integrale proposto si può allora sfruttare il teorema di integrazione per serie[f]. Poiché

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n},$$

e tale serie converge per $x \in \mathbb{R}$, è assicurata la convergenza uniforme in $[0, 1]$, e quindi

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{2n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}.$$

L'ultima serie scritta è una serie a segni alterni, che verifica il teorema di Leibniz[g], pertanto è convergente e l'errore che si commette arrestando la somma al posto $k$-esimo è (in valore assoluto) minore del primo termine trascurato, poiché

$$\left.\frac{1}{n!(2n+1)}\right|_{n=8} = \frac{1}{685440} \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{1}{n!(2n+1)}\right|_{n=9} = \frac{1}{6894720},$$

con un errore inferiore a $10^{-6}$ possiamo arrestare la somma a $n = 8$ ottenendo

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{n=0}^{8} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} = \frac{1098032417}{1470268800} \simeq 0.746824\ldots$$

[f] **Teorema di integrazione per serie**: Data la serie di funzioni $\sum f_n(x)$, se tale serie converge uniformemente nell'intervallo $[a, b]$, allora l'integrale della serie e la serie degli integrali coincidono, in simboli

$$\int_a^b \left[\sum f_n(x)\right] \mathrm{d}x = \sum \left[\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

[g] Confronta il volume precedente, Esercizio 7.17, in nota.

## Esercizio 1.6 — Derivazione per serie

*Sfruttando il teorema di derivazione per serie, sapendo che per* $-1 < x < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

*scrivere lo sviluppo in serie di*

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

*precisando dove tale sviluppo converge.*

### Soluzione

Perché sia possibile mettere in relazione la derivata della serie con la serie delle derivate, occorre applicare il teorema di derivazione per serie[h]; notiamo che

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

dette allora $f_n(x) = x^n$, verifichiamo le tre ipotesi del teorema (sia $\varepsilon > 0$ fissato):

i) le $f_n$ sono continue e derivabili nell'intervallo $(-1, 1)$,
ii) la serie delle derivate $f_n'$: $\sum nx^{n-1}$ converge uniformemente nell'intervallo $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$,
iii) la serie $\sum x^n$ converge per $x_0 = 0$ e $x_0 \in (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$,

allora è possibile derivare la serie di partenza termine a termine, e pertanto

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1},$$

tale uguaglianza è valida per ogni valore di $x \in (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ (notiamo che anche la serie delle derivate converge – semplicemente – nell'intervallo $(-1, 1)$).

---

[h] **Teorema di derivazione per serie**: Date le serie

$$(1)\ \sum f_n(x), \qquad (2)\ \sum f_n'(x),$$

se sono verificate le seguenti ipotesi: *i*) le $f_n$ sono continue nell'intervallo $(a, b)$, *ii*) la serie (2) converge uniformemente in $(a, b)$, *iii*) la serie (1) converge per $x = x_0 \in (a, b)$, allora valgono le seguenti tesi: *i*) la serie (1) converge uniformemente in $(a, b)$ (quindi converge a una funzione continua), *ii*) la serie (1) converge a una funzione derivabile in $(a, b)$, *iii*) è possibile derivare la (1) termine a termine, cioè

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum f_n(x)\right) = \sum f_n'(x).$$

### 1.1.2 Serie di Fourier

**Esercizio 1.7 — Funzioni $2\pi$-periodiche definite analiticamente su un periodo**

*Disegnare il grafico in $[-2\pi, 3\pi]$ della funzione $f$ avente le seguenti caratteristiche:*

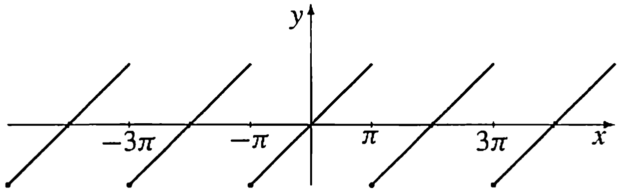
- *$f$ è $2\pi$-periodica,*
- *$f(x) = x$ se $x \in [-\pi, \pi)$;*

*calcolare inoltre*

$$f(0),\ f(2),\ f(4),\ f(6),\ f(8),\ f(10).$$

**Soluzione**

Poiché $f(x) = x$ se $x \in [-\pi, \pi)$, ne conosciamo il grafico attorno all'origine, poiché inoltre $f$ è $2\pi$-periodica, possiamo riprodurre "con lo stampino" tale grafico negli altri intervalli di ampiezza $2\pi$, come in figura:




in simboli:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi & -3\pi \leq x < -\pi \\ x & -\pi \leq x < \pi \\ x - 2\pi & \pi \leq x < 3\pi \\ x - 4\pi & 3\pi \leq x < 5\pi \end{cases}$$

Per calcolare $f(0)$ e $f(2)$, poiché entrambi i valori si trovano nell'intervallo $[-\pi, \pi)$, ove l'espressione analitica di $f$ è $f(x) = x$, abbiamo $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$, invece i valori 4, 6, 8 si trovano in $[\pi, 3\pi)$, ove l'espressione analitica di $f$ è $f(x) = x - 2\pi$, pertanto

$$f(4) = 4 - 2\pi, \quad f(6) = 6 - 2\pi, \quad f(8) = 8 - 2\pi;$$

infine, 10 si trova in $[3\pi, 5\pi)$, e quindi $f(10) = 10 - 4\pi$.

**Esercizio 1.8 — Funzioni $2\pi$-periodiche definite su mezzo periodo e dotate di particolari simmetrie**

*Disegnare i grafici in $[-2\pi, 3\pi]$ delle funzioni $f$ e $g$ aventi le seguenti caratteristiche:*

- *$f$ e $g$ sono entrambe $2\pi$-periodiche,*
- *$f$ è pari, $g$ è dispari,*

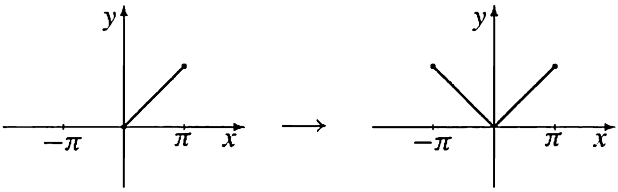
- $f(x) = x$ *se* $x \in [0, \pi]$*;*
- $g(x) = x - \pi$ *se* $x \in [\pi, 2\pi)$, $g(2\pi) = 0$*;*

*calcolare inoltre*

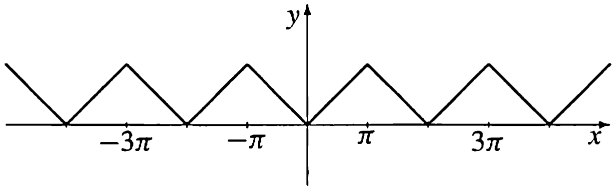
$$f(0),\ f(2\pi),\ f(-\pi); \qquad g(0),\ g(-\pi),\ g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

**Soluzione**

Di entrambe le funzioni di questo esercizio, è data l'espressione analitica su metà del periodo, l'altra metà può essere ricavata in base a considerazioni sulla loro simmetria. Per quanto riguarda $f$, sappiamo che $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq \pi$, il fatto poi che $f$ sia pari ci indica che $f(x) = -x$ se $-\pi \leq x \leq 0$:



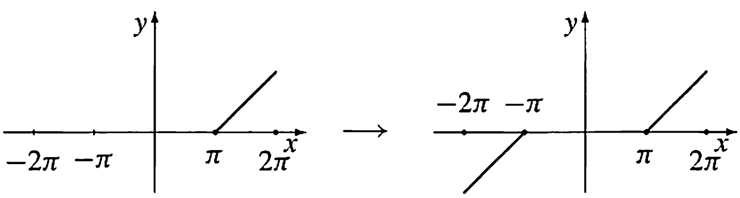

ovverosia, $f(x) = |x|$ se $-\pi \leq x \leq \pi$; a questo punto, sapendo che $f$ è $2\pi$-periodica, possiamo completarne il grafico:



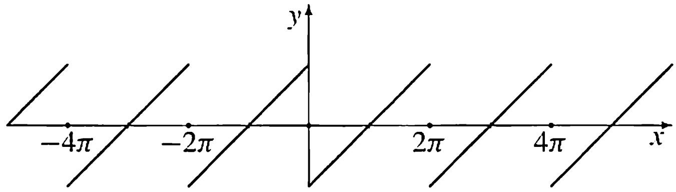

in simboli:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2\pi| & -3\pi \leq x \leq -\pi \\ |x| & -\pi \leq x \leq \pi \\ |x - 2\pi| & \pi \leq x \leq 3\pi \\ |x - 4\pi| & 3\pi \leq x \leq 5\pi \end{cases}$$

Si vede immediatamente che $f(0) = f(2\pi) = 0$, mentre $f(-\pi) = 1$.
Per quanto riguarda $g$, sappiamo che $g(x) = x - \pi$ se $\pi \leq x < 2\pi$, $g(2\pi) = 0$, inoltre $g$ è dispari, possiamo allora "riflettere" l'intervallo $[\pi, 2\pi]$ nell'intervallo $[-2\pi, -\pi]$:



usando ora la $2\pi$-periodicità, possiamo "traslare" la funzione a sinistra dall'intervallo $[\pi, 2\pi]$ all'intervallo $[-\pi, 0]$, e allo stesso modo possiamo "traslare" la funzione a destra dall'intervallo $[-2\pi, -\pi]$ all'intervallo $[0, \pi]$, facendole acquistare la forma definitiva:




in simboli:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 2k\pi \\ x + \pi & -2\pi < x < 0 \\ x - \pi & 0 < x < 2\pi \\ x - 3\pi & 2\pi < x < 4\pi \end{cases}.$$

Si vede immediatamente che $g(0) = 0$, $g(-\pi) = 0$ e che $g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.

### Esercizio 1.9 — Sviluppabilità in serie di Fourier

*Stabilire quali delle seguenti funzioni (tutte $2\pi$-periodiche, definite su un periodo) sono sviluppabili in serie di Fourier, precisando il criterio usato:*

① $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 15 - x^2 & 1 < x < 5 \\ 0 & 5 \le x < 2\pi \end{cases}$ ; ② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \le \pi \\ 2\pi - x & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$ ;

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & 0 < x < \pi \\ \pi & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ ;

*per quali valori di $x$ la serie converge effettivamente alla funzione indicata?*

### Soluzione

Dalla teoria sappiamo che una funzione periodica[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sviluppabile in serie di Fourier se vale una delle due condizioni seguenti:

- $f$ è limitata e monotona a tratti su un periodo,
- il quadrato di $f$ è integrabile su un periodo;

[1]Attenzione: se il valore di $f$ è assegnato solo su di un periodo $[0, T]$, allora $f$ è continua se

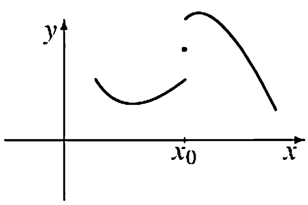
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to T^-} f(x).$$

(osserviamo che la prima implica la seconda, la citiamo ugualmente poiché si tratta di una condizione che può essere verificata più agevolmente). Inoltre, se la funzione $f$ è continua in $x_0$, allora la serie di Fourier converge al valore della funzione, viceversa se in $x_0$ è presente una discontinuità di prima specie (ma $f$ è limitata e monotona a tratti):

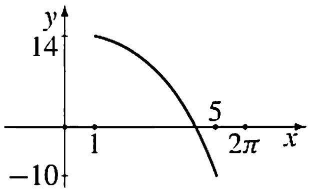
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f_-(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f_+(x_0), \qquad f_-(x_0) \neq f_+(x_0),$$

allora (quale che sia il valore che $f$ assume in $x_0$) il valore della serie in $x_0$ è la media aritmetica dei due valori:

$$\frac{f_-(x_0) + f_+(x_0)}{2}$$

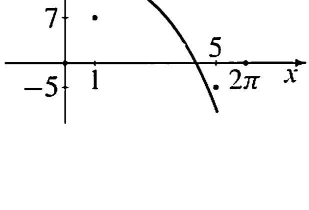



① La funzione su $[0, 2\pi]$ ha la forma seguente:

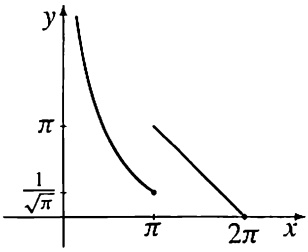



è limitata e monotona a tratti, quindi è sviluppabile in serie di Fourier, e la serie converge a $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ se $x \neq 1$ e $x \neq 5$, ove converge al punto medio del salto:

$$\text{in } x = 1, \quad \frac{0+14}{2} = 7 \qquad \text{in } x = 5, \quad \frac{-10+0}{2} = -5$$



② La funzione su $(0, 2\pi]$ ha la forma seguente:

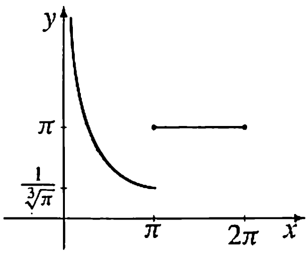



La funzione non è limitata, perché sia sviluppabile in serie di Fourier $f^2$ deve essere integrabile, ossia deve esistere finito

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{x} \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)^2 \, dx$$

il primo integrale è un integrale improprio, che non converge, pertanto $f$ non è sviluppabile secondo Fourier[j].

③ La funzione su $(0, 2\pi]$ ha la forma seguente:




Osserviamo che non è limitata, come nel caso precedente perché sia sviluppabile in serie di Fourier $f^2$ deve esistere finito

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi^2 \, dx = 3\sqrt[3]{\pi} + \pi^3,$$

quindi $f$ è sviluppabile in serie di Fourier. Per quanto riguarda la convergenza della serie, essa converge a $f$ in tutti i punti ove è continua, in $x = \pi$ la serie converge al punto medio del salto

$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} + \pi}{2} = \frac{\sqrt[3]{\pi^2} + \pi^2}{2\pi}$$

mentre nulla si può dire sul comportamento della serie per $x = 0$.

[j]Confronta il volume *Analisi Matematica 1 e Algebra lineare*, Esercizio 9.24.

## Esercizio 1.10 — Serie di Fourier di funzioni $2\pi$-periodiche

*Scrivere la serie di Fourier associata a ciascuna delle seguenti funzioni $2\pi$-periodiche, precisando per quali valori di $x$ la serie converge effettivamente alla funzione indicata:*

① $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$; ② $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ \pi & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$;

③ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi^2 & x = 0 \\ x^2 & 0 < x < 2\pi \end{cases}$; ④ $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases}$.

### Soluzione

Ciascuna delle funzioni sopra elencate è sviluppabile in serie di Fourier. In generale, se una funzione $2\pi$-periodica $f$ è sviluppabile in serie di Fourier, si ha che

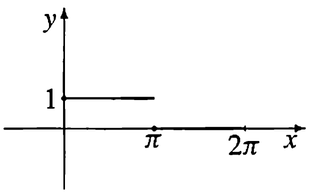
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

ove i coefficienti $a_n$ e $b_n$ sono dati dalle formule

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x,$$

(in queste formule, l'intervallo di integrazione $I$ è un qualsiasi intervallo di lunghezza $2\pi$, scelto in base alla funzione da integrare).

① La funzione, definita su $[0, 2\pi)$, è




scegliamo come intervallo di integrazione $I = (0, 2\pi)$ e usiamo l'espressione analitica di $f$, avremo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, \mathrm{d}x \right\} = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos nx \, \mathrm{d}x \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} \Big( \sin n\pi - \sin 0 \Big) = 0; \end{aligned}$$

notando che $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} 1 \sin nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin nx \, dx\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\Big(\cos n\pi - \cos 0\Big) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}; \end{aligned}$$

la serie di Fourier associata alla funzione $f$ è allora

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx.$$

Osserviamo che, nei coefficienti $b_n$, la presenza di $1-(-1)^n$ al numeratore fa sì che, se $n$ è pari, il numeratore valga 2, mentre se $n$ è dispari, il numeratore si annulli:

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

inoltre, se $n$ è pari, si può scrivere $n = 2k$, con $k = 1, 2, \ldots$, mentre se $n$ è dispari si può scrivere $n = 2k-1$, sempre con $k = 1, 2, \ldots$, sostituendo queste due espressioni di $n$ troviamo

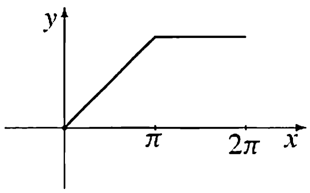
$$b_{2k} = \frac{2}{2k\pi} = \frac{1}{k\pi}, \qquad b_{2k-1} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

possiamo, allora, "depurare" la serie di tutti i termini nulli e scrivere che

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2kx.$$

Sappiamo che la serie converge alla funzione nei punti ove $f$ è continua, mentre nei punti di discontinuità converge a metà del "salto", pertanto la serie converge a $f$ in tutti i punti eccetto $x = k\pi$, nei quali la serie assume il valore $\frac{1}{2}$, mentre la funzione assume il valore 1 se $k$ è pari, e il valore 0 se $k$ è dispari.

② La funzione, definita su $[0, 2\pi)$, è



quindi scegliamo come intervallo di integrazione $I = (0, 2\pi)$ e abbiamo l'espressione analitica di $f$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{3}{2}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos nx\,\mathrm{d}x\right\};$$

integrando per parti, si ha

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

mentre

$$\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos nx\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0,$$

ne segue che

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi};$$

per quanto riguarda $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin nx\,\mathrm{d}x\right\},$$

integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x &= \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x \\ &= -\pi\frac{\cos n\pi}{n} + \underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}_{=0} = -\pi\frac{(-1)^n}{n},\end{aligned}$$

mentre

$$\int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin nx\,\mathrm{d}x = \pi\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{\pi[1-(-1)^n]}{n},$$

ne segue che

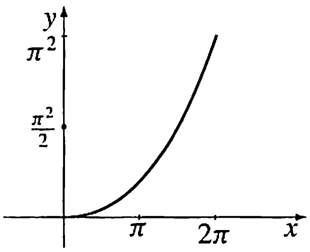
$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1-(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n};$$

la serie di Fourier associata alla funzione $f$ è allora

$$f(x) \sim \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx - \frac{1}{n} \sin nx.$$

Anche in questo caso, la serie converge ai valori assunti dalla funzione per ogni $x$, eccettuati i valori $x = 2k\pi$, ove la funzione vale 0, mentre la serie converge a $\frac{\pi}{2}$.

③ La funzione, definita su $[0, 2\pi)$, è




scegliamo come intervallo di integrazione $I = (0, 2\pi)$ e usiamo l'espressione analitica di $f$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx;$$

integriamo per parti:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \frac{\sin nx}{n}\, dx$$

$$= \underbrace{\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \left[2x \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2 \frac{\cos nx}{n^2}\, dx}_{=0} = \frac{4\pi}{n^2},$$

pertanto

$$a_n = \frac{4}{n^2};$$

per quanto riguarda $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$$

integriamo nuovamente per parti:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left[ -x^2 \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x \frac{\cos nx}{n} \, dx$$

$$= \underbrace{\left[ -x^2 \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi}}_{=-4\pi^2/n} + \underbrace{\left[ 2x \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2 \frac{\sin nx}{n^2} \, dx}_{=0} = -\frac{4\pi^2}{n},$$

pertanto

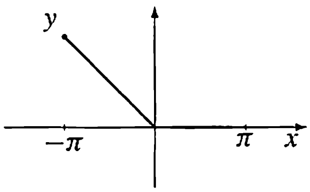
$$b_n = -\frac{4\pi}{n}$$

la serie di Fourier associata alla funzione $f$ è allora

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx.$$

Anche in questo caso, la serie converge al valore di $f(x)$ in tutti i punti diversi da $2k\pi$, se $x = 2k\pi$, sia la funzione, sia la serie valgono $\frac{\pi^2}{2}$; possiamo allora dire che la serie converge (puntualmente) alla funzione per ogni $x$.

④ La funzione, definita su $[-\pi, \pi)$, è




scegliamo come intervallo di integrazione $I = (-\pi, \pi)$ e usiamo l'espressione analitica di $f$, abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} -x \, dx + \int_0^{\pi} 0 \, dx \right\} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} -x \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} 0 \cos nx \, dx \right\},$$

integriamo per parti:

$$\int_{-\pi}^{0} -x \cos nx \, dx = \left[ -x \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} -\frac{\sin nx}{n} \, dx$$

$$= \underbrace{\left[ -x \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{0}}_{=0} + \left[ \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

pertanto

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2};$$

analogamente

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} 0\sin nx \, dx\right\},$$

integriamo per parti:

$$\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx \, dx = \left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \underbrace{\int_{-\pi}^{0} -\frac{\cos nx}{n}\, dx}_{=0} = -\frac{(-1)^n\pi}{n},$$

pertanto

$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n};$$

la serie di Fourier associata alla funzione $f$ è allora

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

Anche in questo caso la serie converge alla funzione nei punti ove $f$ è continua, nei punti ove $f$ è discontinua (cioè $x = (2k+1)\pi$) la funzione vale $\pi$, mentre la serie converge a $\frac{\pi}{2}$.

### Esercizio 1.11 — Serie di Fourier di funzioni $2\pi$-periodiche dotate di particolari simmetrie

*Scrivere la serie di Fourier associata a ciascuna delle seguenti funzioni $2\pi$-periodiche, precisando per quali valori di $x$ la serie converge effettivamente alla funzione indicata:*

① $f(x)$ *dispari, tale che* $f(x) = x^2$ *se* $0 \leq x < \pi$, *e* $f(\pi) = 0$;
② $f(x)$ *pari, tale che* $f(x) = e^x$ *se* $0 \leq x \leq \pi$;
③ $f(x) = x^2$ *se* $-\pi < x \leq \pi$;
④ $f(x) = x^3$ *se* $-\pi < x \leq \pi$.

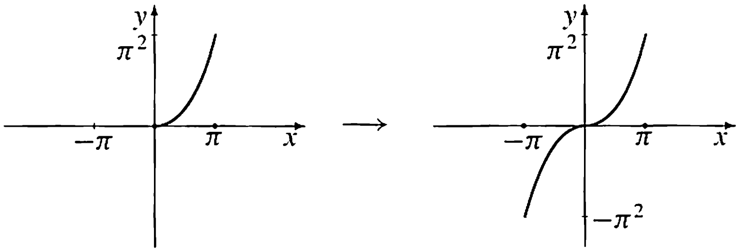
### Soluzione

Se vogliamo sviluppare in serie di Fourier una funzione (ovviamente $2\pi$-periodica) pari o dispari, possiamo sfruttare tali simmetrie per semplificare i conti, infatti tra le due funzioni da integrare (ossia $f(x)\cos nx$ e $f(x)\sin nx$) ve ne sarà una pari e una dispari, se pensiamo allora di integrarle sull'intervallo $(-\pi, \pi)$ l'integrale di quella dispari si annullerà, mentre l'integrale di quella pari è uguale al doppio dell'integrale calcolato su $(0, \pi)$, in formule:

$$f(x) \text{ pari}, \quad \Rightarrow \quad b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx,$$

$$f(x) \text{ dispari}, \quad \Rightarrow \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx.$$

① Il grafico della funzione $f$ su $[0, \pi]$, opportunamente "riflesso" su $[-\pi, 0]$, è




La funzione è dispari, quindi $a_n = 0$ per ogni valore di $n$, per quanto riguarda $b_n$ se non usassimo la simmetria dovremmo scrivere l'espressione analitica di $f$ in tutto l'intervallo $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < \pi \\ -x^2 & -\pi < x \le 0 \end{cases}$$

e integrare quest'ultima:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-x^2)\sin nx \, dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx\right\},$$

sfruttando la simmetria, invece (e integrando per parti...)

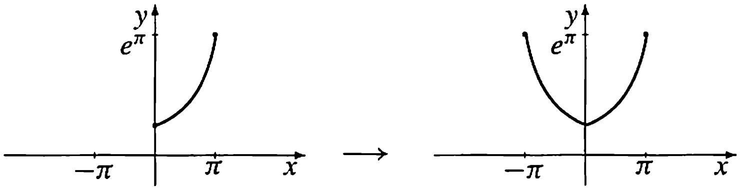
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \ldots = \frac{(-1)^n(4 - 2n^2\pi^2) - 4}{n^3\pi}.$$

La serie associata a $f$ è allora

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(4 - 2n^2\pi^2) - 4}{\pi n^3} \sin nx;$$

e converge in ogni punto alla funzione $f$, anche $f$ infatti assume il valore 0 in corrispondenza dei punti $x = (2k + 1)\pi$.

② Il grafico della funzione $f$ su $[0,\pi]$, opportunamente "riflesso" su $[-\pi,0]$, è




La funzione è pari, pertanto $b_n = 0$ per ogni valore di $n$; per il calcolo degli $a_n$ è ovviamente più comodo servirsi delle simmetrie, abbiamo

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(e^{\pi}-1),$$

per quanto riguarda $a_n$, con un po' di conti[k] si trova che

$$\int e^x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{1+n^2}(\cos nx + n\sin nx) + C,$$

quindi

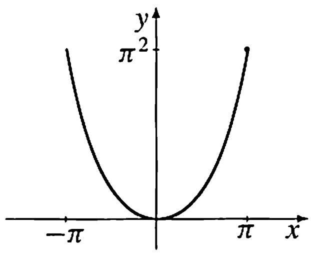
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+n^2)\pi}\big[(-1)^n e^{\pi}-1\big].$$

La serie associata a $f$ è

$$f(x) \sim \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(1+n^2)\pi}\big[(-1)^n e^{\pi}-1\big]\cos nx;$$

poiché $f$ è continua su $\mathbb{R}$, questa serie converge in ogni punto alla funzione $f$.

③ La funzione, definita su $(-\pi,\pi]$, è




[k]Confronta il precedente volume, Esercizio 9.35.

si tratta di una funzione pari, pertanto $b_n = 0$, per quanto riguarda gli $a_n$ abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

e, integrando per parti,

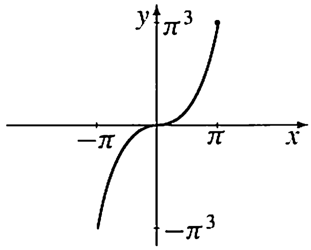
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \ldots = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Pertanto la serie associata a $f$ è

$$f(x) \sim \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx;$$

e questa serie converge in ogni punto al valore della funzione $f$.

④ Il grafico della funzione $f$ in $(-\pi, \pi]$ è




a stretto rigore, $f$ non è una funzione dispari, poiché la periodicità implica che $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^3$, tuttavia nel calcolare gli integrali il valore che $f$ assume nel singolo punto $x = \pm\pi$ non ha alcuna importanza, e i calcoli procedono come se $f$ fosse una funzione dispari, quindi $a_n = 0$, mentre (sempre con successive integrazioni per parti)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx = \ldots = (-1)^n \frac{2}{n^3}(6 - n^2\pi^2).$$

Pertanto la serie associata a $f$ è

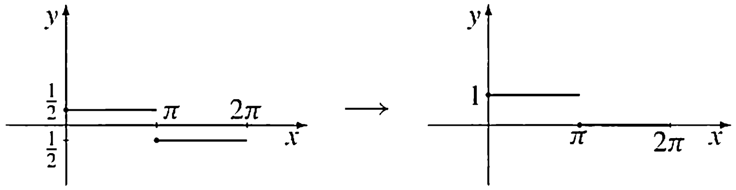
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{n^3}(6 - n^2\pi^2)\sin nx;$$

e questa serie converge al valore della funzione $f$ ovunque, tranne che in $x = (2k+1)\pi$, poiché in tali punti la funzione assume il valore $\pi^3$, mentre la serie si annulla.

**Osservazione:** La funzione studiata al punto ① dell'Esercizio 10 aveva il seguente sviluppo:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\sin 2kx,$$

da cui si vede che $a_0 = 1$ e $a_n = 0$ se $n \geq 1$, abbiamo però visto che una serie formata da soli seni è lo sviluppo di Fourier di una funzione dispari, e in effetti quella funzione poteva essere vista come una funzione dispari (eccettuati al più alcuni punti, come nell'ultimo esempio dell'esercizio precedente), traslata verso l'alto di una quantità pari a $\frac{a_0}{2}$:




## Esercizio 1.12 — Serie di Fourier di funzioni $T$-periodiche

*Scrivere la serie di Fourier associata a ciascuna delle seguenti funzioni periodiche, precisando per quali valori di $x$ la serie converge effettivamente alla funzione indicata:*

① $f(x)$ *1-periodica, tale che* $f(x) = e^x$ *se* $0 \leq x < 1$;

② $f(x)$ *2-periodica, pari, tale che* $f(x) = x$ *se* $0 \leq x \leq 1$;

③ $f(x)$ *4-periodica, dispari, tale che* $f(x) = x(2-x)$ *se* $0 \leq x \leq 2$.

### Soluzione

Se una funzione è $T$-periodica, anziché $2\pi$-periodica, è ugualmente sviluppabile in serie di Fourier, occorre – idealmente – riportare con un'opportuna dilatazione l'intervallo di periodicità di $f$ al solito intervallo:

$$[0, T] \longrightarrow [0, 2\pi], \qquad \text{oppure} \qquad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \longrightarrow [-\pi, \pi].$$

In effetti, occorre semplicemente sostituire le formule solite con le seguenti:

$$a_n = \frac{1}{T/2} \int_I f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{T/2} \int_I f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \mathrm{d}x,$$

ove l'intervallo di integrazione $I$ è un qualsiasi intervallo di lunghezza $T$; anche se la funzione è pari o dispari, la modifica procede in maniera analoga:

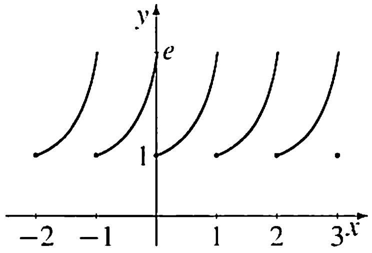
$$f(x) \text{ pari}, \qquad \Rightarrow \qquad b_n = 0, \qquad a_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \mathrm{d}x,$$

$$f(x) \text{ dispari}, \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \mathrm{d}x;$$

e in ogni caso la serie di Fourier diventa

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right).$$

① Il grafico della funzione è




$f$ non è né pari né dispari, occorre calcolare tutti i coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{1/2}\int_0^1 e^x \, dx = 2(e-1);$$

e poiché

$$\int e^x \cos \alpha x \, dx = \frac{e^x}{1+\alpha^2}\big[\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x\big],$$

$$\int e^x \sin \alpha x \, dx = \frac{e^x}{1+\alpha^2}\big[\sin \alpha x - \alpha \cos \alpha x\big],$$

ponendo $\alpha = 2n\pi$, ricaviamo che

$$a_n = \frac{1}{1/2}\int_0^1 e^x \cos(2n\pi x)\, dx = \frac{4(e-1)}{1+4n^2\pi^2},$$

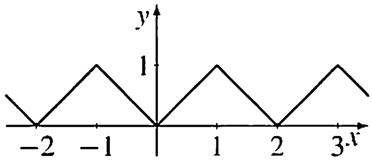
$$b_n = \frac{1}{1/2}\int_0^1 e^x \sin(2n\pi x)\, dx = -\frac{4n\pi(e-1)}{1+4n^2\pi^2},$$

e quindi, raccogliendo, la serie di Fourier associata a $f$ è

$$f(x) \sim (e-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(e-1)}{1+4n^2\pi^2}\Big[\cos(2n\pi x) - n\pi \sin(2n\pi x)\Big];$$

essa converge a $f$ in tutti i punti, salvo $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ove $f$ vale 1, mentre la serie vale $\frac{e+1}{2}$.

② La funzione 2-periodica, pari, che in $0 \le x \le 1$ vale $x$ è la funzione 2-periodica che in $-1 \le x \le 1$ vale $|x|$, il suo grafico è:



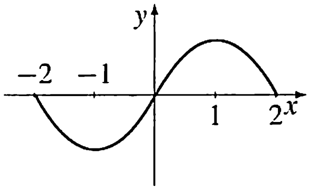
poiché è pari, $b_n = 0$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{2/2}\int_0^1 x \, dx = 1, \qquad a_n = \frac{2}{2/2}\int_0^1 x\cos(n\pi x) \, dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2};$$

la serie associata a $f$, che converge a $f$ in tutto $\mathbb{R}$, è

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x).$$

③ Il grafico di $f$ in un periodo (diciamo $[-2, 2]$) è:




poiché è dispari, $a_n = 0$, mentre

$$b_n = \frac{2}{4/2}\int_0^2 x(2 - x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \, dx = \frac{16}{n^3\pi^3}(1 - (-1)^n);$$

la serie associata a $f$, che converge a $f$ in tutto $\mathbb{R}$, è

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16[1 - (-1)^n]}{n^3\pi^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

## Esercizio 1.13 — Serie di Fourier – Armoniche

*Determinare ampiezza e fase delle armoniche della serie di Fourier associata alla funzione $f$ $2\pi$-periodica tale che $f(x) = x^2$ se $0 \leq x < 2\pi$.*

### Soluzione

Se una funzione è sviluppabile in serie di Fourier con

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

significa che si può vedere $f$ come la somma del termine noto $\frac{a_0}{2}$, che rappresenta il *valor medio* della funzione $f$ su un periodo, più una serie di armoniche:

$$f(x) \sim \text{ valor medio } + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx + \vartheta_n).$$

È allora possibile modificare l'espressione della serie in maniera da riscriverla in quest'ultimo modo; infatti[l] raccogliamo $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ nel termine di grado $n$ della serie:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right],$$

le due frazioni che compaiono nella parentesi quadra hanno le seguenti caratteristiche (facilmente verificabili), entrambe sono comprese tra $-1$ e $1$:

$$-1 \leq \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \leq 1,$$

e la somma dei loro quadrati vale 1:

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2 = 1;$$

esiste allora un valore $\vartheta_n$ tale che

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \cos\vartheta_n \qquad \text{e} \qquad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = -\sin\vartheta_n,$$

e pertanto

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right] \\ &= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\,[\cos\vartheta_n \cos nx - \sin\vartheta_n \sin nx] = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\vartheta_n). \end{aligned}$$

Ciò significa che, per $n$ fissato, il termine $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ corrisponde a una singola cosinusoide di ampiezza $\alpha_n$ e fase $\vartheta_n$, ove $\alpha_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ e $\vartheta_n$ è individuato dalle relazioni[m]

$$\cos\vartheta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \qquad \text{e} \qquad \sin\vartheta_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

Abbiamo già visto che lo sviluppo in serie di Fourier di $f$ è

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx.$$

[l]Dalla trigonometria, sappiamo che $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

[m]Scrivere che $\vartheta_n = \arctan\frac{-b_n}{a_n}$ può non essere corretto: è corretto se $a_n > 0$, mentre se $a_n < 0$ allora $\vartheta_n = \pi + \arctan\frac{-b_n}{a_n}$; ovviamente entrambe le formule perdono di significato se $a_n = 0$, ma in tal caso la trasformazione da operare è immediata: $b_n \sin nx = b_n \cos(nx - \frac{\pi}{2})$.

pertanto il valor medio di $f$ è $\frac{4}{3}\pi$, mentre (i coefficienti $a_n$ sono positivi):

$$\alpha_n = \frac{4}{n}\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{n^2}}, \qquad \vartheta_n = \arctan(n^2\pi).$$

## Esercizio 1.14 — Convergenza della serie di Fourier Regolarità della somma

*Stabilire, in base alla teoria, quali tra le seguenti serie di Fourier convergono effettivamente a una funzione, elencando le proprietà riguardanti tale funzione che si possono dedurre immediatamente dall'espressione della serie*:

① $\pi - 2 + \sum \left[\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n!}\sin nx\right]$; ② $\pi^2 + \sum \left[\frac{(-1)^n}{2^n}\cos nx\right]$;

③ $4 + \sum \left[\frac{1}{n^2}\cos 2nx + \frac{1}{n!}\sin 2nx\right]$; ④ $\sum \left[\frac{1}{n}\cos n\pi x + \frac{1}{n!}\sin n\pi x\right]$;

⑤ $\pi + \sum \left[\frac{1}{2^n}\sin 2n\pi x\right]$.

### Soluzione

Data la generica serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

per stabilirne la convergenza è possibile percorrere due strade:

- usare il Criterio di Dirichlet[n],
- usare il Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni (vedi nota d): poiché

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|,$$

  se la serie $\sum |a_n| + |b_n|$ converge, allora la serie di Fourier converge (uniformemente), e quindi la funzione cui converge è continua.

Inoltre, poiché derivando la funzione termine a termine, otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n\, b_n)\cos nx - (n\, a_n)\sin nx,$$

è sufficiente riapplicare a quest'ultima i criteri di convergenza, per controllare se la serie di partenza converge a una funzione derivabile.

[n] **Criterio di Dirichlet:** Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono monotone decrescenti e tendono a zero, allora la serie di Fourier converge in tutti i punti, tranne al più in $x = 2k\pi$.

① Notiamo innazitutto che la serie converge a una funzione $2\pi$-periodica, il cui valor medio su un intervallo di periodicità è $(\pi - 2)$, per studiarne la convergenza possiamo applicare il criterio di Weierstrass:

$$\left|\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{1}{n!}\sin nx\right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n!},$$

e, poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n!}$ convergono entrambe, la serie di Fourier converge uniformemente, quindi la somma è continua; passiamo alle derivate, per la derivata prima otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n}\sin nx + \frac{n}{n!}\cos nx,$$

a questa serie non possiamo applicare il criterio di Weierstrass, infatti tutto ciò che possiamo dire riguardo il termine generale è che

$$\left|-\frac{1}{n}\sin nx + \frac{n}{n!}\cos nx\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)!},$$

e la $\sum \frac{1}{n}$ non converge, applichiamo allora il criterio di Dirichlet: poiché le successioni $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{(n-1)!}$ tendono entrambe monotonamente a zero, la serie delle derivate converge; non altrettanto si può dire della serie delle derivate seconde: in effetti, se calcoliamo le derivate seconde otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\cos nx + \frac{n(n-1)}{n!}\sin nx,$$

e questa serie non converge, poiché $\cos nx$ non tende a zero, se $n \to +\infty$.

② La funzione, $2\pi$-periodica, ha media $\pi^2$, ed è una funzione pari, infatti la serie è formata da soli coseni. Inoltre, poiché il coefficiente della serie delle derivate $k$-esime è a parte il segno

$$\frac{n^k}{2^n},$$

convergono le serie relative a tutte le derivate.

③ La situazione, per quanto riguarda la convergenza, è analoga a quella analizzata al punto ①, le uniche differenze risiedono nel valor medio della funzione, in questo caso uguale a 4, e nella periodicità: i termini $\cos 2nx$ e $\sin 2nx$ indicano che la funzione in esame è $\pi$-periodica, come abbiamo visto nell'Esercizio 12, nel caso che la funzione sia $T$-periodica $\cos nx$ viene sostituito da $\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$, ricaviamo allora che

$$\frac{2n\pi}{T}x = 2nx, \quad \Leftrightarrow \quad T = \pi.$$

④ In questo caso la funzione è 2-periodica, mentre l'assenza di un termine noto indica che la funzione è a media nulla su un intervallo di periodicità. Passiamo alla convergenza: anche qui come nell'esame della derivata prima in ①, non è possibile applicare il criterio di Weierstrass, ma unicamente il criterio di Dirichlet: la serie di Fourier converge, tranne in $x = 0$ e nei punti periodici rispetto a $x = 0$: $x = 2k$; la serie delle derivate non converge.

⑤ La funzione è 1-periodica e ha media $\pi$, anche in questo caso, come al punto ②, tutte le serie delle derivate convergono. La serie è una serie di soli seni, quindi converge a una funzione dispari, la presenza del termine noto $\pi$ provoca una traslazione nel senso delle $y$ positive (analogamente a quanto era accaduto con la serie al punto ① dell'Esercizio 10).

### Esercizio 1.15 — Applicazioni: calcolo di serie numeriche Uguaglianza di Parseval

*Usando le serie determinate al punto ② dell'Esercizio* 10 *e ai punti ③,④ dell'Esercizio* 11. *calcolare la somma delle seguenti serie numeriche*:

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$; ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; ③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$; ④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$; ⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

### Soluzione

Le serie di Fourier possono essere usate anche per calcolare la somma di alcune serie numeriche. Vi sono due strade per ottenere ciò:

- scrivere la somma della serie in corrispondenza di un ben preciso valore di $x$, conoscendo poi a cosa tale serie converga, abbiamo il risultato cercato;
- usare l'uguaglianza di Parseval (se $f$ è $T$-periodica):

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}[f(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

① ② Sappiamo che se $f(x) = x^2$ per $-\pi < x \le \pi$ allora

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,$$

e che la serie converge in ogni punto alla funzione $f$. Scriviamo questa serie per $x = 0$ e per $x = \pi$:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos 0, \qquad f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos n\pi;$$

sappiamo che $f(0) = 0$ e $f(\pi) = \pi^2$, mentre $\cos 0 = 1$ e $\cos n\pi = (-1)^n$, osservando che $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$ e sostituendo troviamo

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}, \qquad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2};$$

infine, raccogliendo 4 fuori dalla serie, e lasciando quest'ultima in evidenza,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

③ Sappiamo che data

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ \pi & \pi \le x < 2\pi \end{cases},$$

la serie a essa associata è

$$f(x) \sim \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx - \frac{1}{n} \sin nx;$$

la serie converge a $f$ in tutti i punti $x \neq 2k\pi$, in tali punti $f$ si annulla, mentre la serie converge a $\frac{\pi}{2}$. Poniamo allora $x = 0$ ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$):

$$\frac{\pi}{2} \sim \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi};$$

analogamente a quanto fatto al punto ① dell'Esercizio 10, osserviamo che i termini della serie possono essere riscritti:

$$\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

ponendo allora $n = 2k$ se $n$ è pari e $n = 2k - 1$ se $n$ è dispari, possiamo mettere in evidenza solo i termini con $n$ dispari:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k-1)^2\pi} = \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2};$$

riordiniamo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

④ Usiamo la disuguaglianza di Parseval, ancora con la serie del punto ① :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x^2]^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\frac{4}{n^2}\right)^2,$$

ossia:

$$\frac{2}{5}\pi^4 = \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4},$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right)\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

⑤ Sappiamo che, se $f(x) = x^3$ per $-\pi < x \leq \pi$ allora

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3}(6 - n^2\pi^2)\sin nx.$$

Anche in questo caso sfruttiamo l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x^3]^2\,dx = \frac{1}{2}(0)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\frac{2}{n^3}(6 - n^2\pi^2)\right)^2,$$

ossia, con un poco di algebra,

$$\frac{2}{7}\pi^6 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^6}[36 - 12n^2\pi^2 + n^4\pi^4];$$

la serie a secondo membro è positiva e convergente, possiamo spezzarla (dopo aver raccolto 4):

$$\frac{2}{7}\pi^6 = 4\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{36}{n^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-12n^2\pi^2}{n^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4\pi^4}{n^6}\right],$$

poiché dai punti precedenti sappiamo già che $\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, si ottiene infine:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{36}\left[\frac{1}{14}\pi^6 + 12\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} - \pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right] = \frac{\pi^6}{945}.$$

## 1.2 Esercizi proposti

**16** Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$① \sum \frac{(x-2)^n}{\operatorname{Ch} n}; \qquad ② \sum x^n \operatorname{Sh} n; \qquad ③ \sum (nx)^n; \qquad ④ \sum \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

$$\left[① \; x \in (2-e, 2+e); ② \; x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right); ③ \; x = 0 \text{ (raggio} = 0); ④ \; \mathbb{R}\right]$$

**17** Calcolare, con un errore minore di $10^{-6}$ l'integrale

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx.$$

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} = \frac{258019}{831600} \simeq 0.31026816\ldots\right]$$

**18** Calcolare i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier delle seguenti funzioni:

① $f$: $2\pi$-periodica, tale che $f(x) = x$ se $x \in [0, 2\pi)$;
② $f$: $2\pi$-periodica, tale che $f(x) = x^3$ se $x \in [0, 2\pi)$;
③ $f$: $2\pi$-periodica, dispari, tale che $f(x) = x(\pi - x)$ se $x \in [0, \pi]$;
④ $f$: $2\pi$-periodica, pari, tale che $f(x) = \sin x$ se $x \in [0, \pi]$;
⑤ $f$: 2-periodica, pari, tale che $f(x) = x(1-x)$ se $x \in [0, 1]$;
⑥ $f$: 3-periodica, tale che $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se $x \in [0, 3)$.

$$\left[① \; a_0 = 2\pi, a_n = 0 \; \forall n \geq 1, b_n = -\frac{2}{n}\right]$$

$$\left[② \; a_0 = 4\pi^3, a_n = \frac{12\pi}{n^2}, b_n = \frac{4}{n^3}(3 - 2\pi^2 n^2)\right]$$

$$\left[③ \; a_n = 0 \; \forall n \geq 0, b_n = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)\right]$$

$$\left[④ \; a_0 = \frac{4}{\pi}, a_n = \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)}, b_n = 0 \;\; \forall n \geq 1\right]$$

$$\left[⑤ \; a_0 = \frac{1}{3}, a_n = -\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}, b_n = 0 \;\; \forall n \geq 1\right]$$

$$\left[⑥ \; a_0 = 2, a_n = 0 \; \forall n \geq 1, b_n = \frac{2}{\pi n}\left((-1)^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)\right]$$

**19** Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$① \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}; \qquad ② \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}; \qquad ③ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

$$\left[① \; \frac{\pi^2}{8}; ② \; \frac{\pi^4}{96}; ③ \; \frac{\pi - 1}{2}\right]$$

**20** Determinare ampiezza e fase delle armoniche delle serie di Fourier associate alle seguenti funzioni:

① $f$ $2\pi$-periodica, tale che $f(x) = x^3$ se $0 \leq x < 2\pi$;
② $f$ $2\pi$-periodica, tale che $f(x) = x(\pi - x)$ se $-\pi \leq x < \pi$.

$$\left[ \text{① v.m.} = 2\pi^3,\, \alpha_n = \frac{4}{n}\sqrt{9\pi^2 + \frac{(3-2n^2\pi^2)^2}{n^2}},\, \vartheta_n = \arctan\frac{2n^2\pi^2 - 3}{3n\pi} \right]$$

$$\left[ \text{② v.m.} = -\frac{\pi^2}{3},\, \alpha_n = \frac{2}{n}\sqrt{\pi^2 + \frac{4}{n^2}},\, \vartheta_n = \arctan\frac{-n\pi}{2} \right]$$

## 1.2.1 Suggerimenti

**Per l'esercizio 19 ①:** Usare la serie al punto ② dell'Esercizio 10.

**Per l'esercizio 19 ②:** Usare la serie al punto ② dell'Esercizio 12.

**Per l'esercizio 19 ③:** Usare la serie al punto ① dell'Esercizio 18.

# 2

# Funzioni di più variabili

## 2.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### 2.1.1 Domini, curve di livello, continuità

**Esercizio 2.1 — Domini**

*Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni di più variabili:*

① $f(x, y) = \log(xy - 1)$; ② $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 - xy}}{xy}$;

③ $f(x, y) = \dfrac{1}{\log(xy - 1)}$; ④ $f(x, y) = \sqrt{y - x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2 - y}$;

⑤ $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{y + x}{y + |y|}}$; ⑥ $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z^2} + \log_z(x^2 - x + y^2)$.

**Soluzione**

Per determinare il dominio di una funzione $f(x)$, abbiamo visto che occorre verificare che siano soddisfatte delle condizioni, le più frequenti sono:

- se compare un rapporto, il denominatore dev'essere diverso da zero,
- se compare una radice quadrata, il radicando dev'essere maggiore o uguale a zero;
- se compare un logaritmo, l'argomento dev'essere strettamente maggiore di zero;
- se compare la funzione arcsin (o la sua gemella arccos), l'argomento dev'essere compreso tra $-1$ e $1$, estremi inclusi; ...

ciascuna di queste relazioni impone una condizione sulla $x$, e il dominio di $f$ è costituito dai valori di $x$ che verificano tutte le condizioni elencate. Accade l'analogo anche per le funzioni di più variabili: il dominio di $f(x, y)$ è costituito dalle coppie $(x, y)$ che verificano tutte le condizioni assegnate.

① In questo caso, l'unica condizione è data da $xy > 1$, il dominio $D$ è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x > 0 \\ y > \dfrac{1}{x} \end{cases}, \begin{cases} x < 0 \\ y < \dfrac{1}{x} \end{cases} \right\},$$

nel piano, si tratta dei punti che, data l'iperbole $y = \frac{1}{x}$, nel primo quadrante si trovano al di sopra di essa e nel terzo quadrante si trovano al di sotto di essa.

② In questo caso, vi sono due richieste:

$$\text{i) } 1 - xy \geq 0, \qquad \text{ii) } xy \neq 0;$$

quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1, xy \neq 0\};$$

si tratta di quella parte di piano compresa tra i due rami dell'iperbole $y = \frac{1}{x}$, iperbole inclusa; a questi punti occorre togliere però i punti dell'asse $x$ e dell'asse $y$, ove il prodotto $xy$ è uguale a zero.

③ Anche in questo caso, vi sono due condizioni

$$\text{i) } xy - 1 > 0, \qquad \text{ii) } \log(xy - 1) \neq 0;$$

quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, xy \neq 2\};$$

la prima condizione è la stessa già comparsa in ①, in più la seconda condizione richiede che i punti non si trovino sull'iperbole $y = \frac{2}{x}$.

④ Ancora due condizioni:

$$\text{i) } y - x^2 + 1 \geq 0, \qquad \text{ii) } 1 - x^2 - y \geq 0;$$

quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\};$$

ossia la parte di piano compresa tra le due parabole $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

⑤ Elenchiamo le richieste:

$$\text{i) } \frac{x + y}{y + |y|} \geq 0, \qquad \text{ii) } y + |y| \neq 0;$$

osserviamo che $y + |y| = 0$ se $y \leq 0$, pertanto la seconda richiesta impone $y > 0$; alla luce di questo, la prima richiesta diventa $x + y \geq 0$, che è verificata dai punti che si trovano al di sopra della bisettrice del secondo e quarto quadrante, quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, y > 0\};$$

si tratta del primo quadrante e della parte del secondo quadrante che si trova al di sopra della bisettrice, inclusa la bisettrice, escluso l'asse delle ascisse.

⑥ Abbiamo questa volta una funzione di tre variabili, le condizioni da porre sono[a]:

$$\text{i) } 1 - z^2 \geq 0, \qquad \text{ii) } x^2 + y^2 - x > 0, \qquad \text{iii) } z > 0;$$

la prima e la terza condizione, combinate, impongono che $0 < z \leq 1$; la seconda condizione richiede che $x$ e $y$ siano le coordinate di un punto che si trova all'esterno della circonferenza centrata in $(\frac{1}{2}, 0)$, di raggio $\frac{1}{2}$:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}, 0 < z \leq 1 \right\}.$$

### Esercizio 2.2 — Curve di livello – Insiemi di livello

*Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni di due variabili:*

$$① \ f(x, y) = x^2 y^2 - 4xy; \qquad ② \ f(x, y) = ye^{xy};$$

*determinare gli insiemi di livello delle seguenti funzioni di tre variabili:*

$$③ \ f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2; \qquad ④ \ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

### Soluzione

Se consideriamo una funzione di due variabili $f(x, y)$ e imponiamo che valga un fissato $k \in \mathbb{R}$, scriviamo l'equazione $f(x, y) = k$; se interpretiamo $z = f(x, y)$ come l'equazione di una superficie nello spazio, $f(x, y) = k$ equivale a intersecare questa superficie con i piani orizzontali $z = k$; le linee ottenute da tali intersezioni[b] sono dette *linee di livello* di $f$. In modo analogo, se abbiamo una funzione di tre variabili $f(x, y, z)$ e poniamo $f(x, y, z) = k$, ciò che otterremo sarà in genere l'equazione di una superficie, nello spazio. In genere, non è sempre possibile ricondursi a un'equazione esplicita, qui sotto sono elencati alcuni casi in cui ciò è possibile.

① Le curve di livello hanno equazione $x^2y^2 - 4xy = k$, ponendo $xy = t$ quest'equazione diventa $t^2 - 4t - k = 0$, da cui $t = 2 \pm \sqrt{4 + k}$, quindi:
- se $k < -4$, non vi è alcuna curva di livello,
- se $k = -4$, la curva di livello $x^2y^2 - 4xy = -4$ è data da entrambi i rami dell'iperbole $y = \frac{2}{x}$,
- se $k > -4$, la curva di livello $x^2y^2 - 4xy = k$ è costituita dalla coppia di iperboli $y = \frac{1}{x}(2 \pm \sqrt{4 + k})$.

[a] Anche la base del logaritmo dev'essere positiva.

[b] Non si tratta sempre di linee; per esempio, se intersechiamo la superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con i piani $z = k$ otteniamo delle circonferenze di raggio $\sqrt{k}$ centrate nell'origine se $k > 0$, non otteniamo niente se $k < 0$, e se $k = 0$ otteniamo un solo punto: l'origine.

② La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$. L'equazione $ye^{xy} = k$ può essere, in generale, scritta in funzione di $x$:

$$ye^{xy} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 & k = 0 \\ x = \frac{1}{y}\log\frac{k}{y} & k \neq 0 \end{cases}$$

da cui si vede che, se $k = 0$, la curva $ye^{xy} = 0$ è costituita dall'asse $x$ (ove $y = 0$), mentre se $k \neq 0$ la curva può essere messa in forma esplicita con $x$ in funzione di $y$.

③ Gli insiemi di livello hanno la forma $2x^2+3y^2+z^2 = k$, per $k < 0$ non esiste alcun punto, per $k = 0$ si trova l'origine, per $k > 0$ una famiglia di elissoidi concentrici.

④ Gli insiemi di livello hanno la forma $x^2 + y^2 - z^2 = k$; per $k = 0$ si tratta del cono retto $z^2 = x^2 + y^2$, per $k > 0$ troviamo la famiglia di iperboloidi a una falda, per $k < 0$ la famiglia di iperboloidi a due falde.

### Esercizio 2.3 — Limiti in due variabili

*Calcolare i seguenti limiti, o mostrare che non esistono:*

① $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x+y}$; ② $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+3y^3}{3x^2+5y^2}$;

③ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$; ④ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(\sin x)^2\log(2-y)}{x^2+y^2-2y+1}$.

### Soluzione

Per calcolare un limite in due variabili, è in genere opportuno ricondursi a un limite in una variabile sola, tale limite esprime il fatto che ci avviciniamo al punto $(x_0, y_0)$ da una particolare direzione, tuttavia per dimostrare che il limite esiste occorre poter dimostrare che il valore cui la funzione tende è *indipendente dal modo* con cui $(x, y)$ tende a $(x_0, y_0)$, non solo dalla direzione fissata. Un accorgimento cui si fa sovente ricorso consiste nell'utilizzare le coordinate polari, mostrando che esiste una funzione $g(\varrho)$ indipendente da $\vartheta$ per la quale, se $l$ è il presunto limite, si ha che

$$\left|f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) - l\right| \leq g(\varrho) \overset{\varrho\to 0}{\to} 0.$$

Viceversa, per dimostrare che un limite non esiste, è sufficiente mostrare che, tendendo a $(x_0, y_0)$ da due diverse direzioni (o in modo diverso), si ottengono risultati diversi[c].

[c]Osserviamo peraltro che, come nel caso a una variabile sola, in genere il punto $(x_0, y_0)$ non appartiene all'insieme di definizione di $f$.

① Si vede immediatamente che, se ci avviciniamo all'origine percorrendo l'asse $x$ oppure percorrendo la bisettrice del primo quadrante, si ottengono risultati diversi: se ci avviciniamo a $(0,0)$ lungo l'asse $x$ percorriamo i punti di forma $(\alpha, 0)$, e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x+y} \overset{(x,y)=(\alpha,0)}{=} \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha+3\cdot 0}{\alpha+0} = 2;$$

mentre se ci avviciniamo a $(0,0)$ lungo la bisettrice percorriamo i punti di forma $(\alpha, \alpha)$, e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x+y} \overset{(x,y)=(\alpha,\alpha)}{=} \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha+3\alpha}{\alpha+\alpha} = \frac{5}{2};$$

pertanto il limite non esiste.

② Usando le coordinate polari:

$$(x, y) \to (0,0) \quad \leftrightarrow \quad (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) \to (0,0) \quad \leftrightarrow \quad \varrho \to 0,$$

il limite diventa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+3y^3}{3x^2+5y^2} \overset{(x,y)=(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta)}{=} \lim_{\varrho\to 0} \frac{2\varrho^4\cos^4\vartheta+3\varrho^3\sin^3\vartheta}{3\varrho^2\cos^2\vartheta+5\varrho^2\sin^2\vartheta};$$

semplificando $\varrho^2$, il limite che otteniamo è dato da un prodotto tra $\varrho$, che tende a zero, e una quantità che in ogni caso si mantiene limitata, poiché $3\cos^2\vartheta + 5\sin^2\vartheta = 3 + 2\sin^2\vartheta \geq 3$, quindi:

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho \frac{(2\varrho\cos^4\vartheta + 3\sin^3\vartheta)}{3+2\sin^2\vartheta} = 0.$$

③ Un esempio, per mostrare che *non è sufficiente* controllare che il limite sia lo stesso lungo tutte le rette: innanzitutto la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

è identicamente nulla in tutti i punti dell'asse $x$ e dell'asse $y$, pertanto

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0;$$

se adesso scegliamo di avvicinarci all'origine lungo una qualsiasi altra retta $y = mx$ (con $m \neq 0$, infatti lungo gli assi abbiamo già studiato il comportamento di $f$), il limite diventa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{y=mx}{=} \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^4x^2} = 0;$$

ma se ci avviciniamo all'origine lungo la curva $y^2 = x$ troviamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{x=y^2}{=} \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2};$$

pertanto il limite non esiste. Notiamo altresì che, se avessimo voluto usare le coordinate polari, avremmo avuto

$$f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) = \frac{\varrho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\varrho^2\cos^2\vartheta + \varrho^4\sin^4\vartheta} = \frac{\varrho\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + \varrho^2\sin^4\vartheta};$$

nell'ultima frazione, anche raccogliendo $\varrho$, non otteniamo un'espressione maggiorabile indipendentemente da $\vartheta$, il limite pertanto non esiste.

④ In questo caso, possiamo usare le coordinate polari centrate in $(0, 1)$:

$$(x,y)\to(0,1) \quad \leftrightarrow \quad (\varrho\cos\vartheta, 1+\varrho\sin\vartheta)\to(0,1) \quad \leftrightarrow \quad \varrho\to 0,$$

quindi (ponendo $(x,y) = (\varrho\cos\vartheta, 1+\varrho\sin\vartheta)$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(\sin x)^2\log(2-y)}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\big(\sin(\varrho\cos\vartheta)\big)^2\log\big(2-(1+\varrho\sin\vartheta)\big)}{\varrho^2\cos^2\vartheta + \varrho^2\sin^2\vartheta},$$

ricordando[d] che per $\square \to 0$

$$\sin\square \sim \square, \qquad \log(1+\square)\sim\square,$$

il numeratore diventa

$$\big(\sin(\varrho\cos\vartheta)\big)^2\log\big(1-\varrho\sin\vartheta\big)\sim\big(\varrho\cos\vartheta\big)^2\big(-\varrho\sin\vartheta\big)\sim -\varrho^3(\cos^2\vartheta\sin\vartheta)$$

da cui il limite

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\big(\sin(\varrho^2\cos^2\vartheta)\big)^2\log\big(2-(1+\varrho\sin\vartheta)\big)}{\varrho^2\cos^2\vartheta+\varrho^2\sin^2\vartheta} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{-\varrho^3(\cos^2\vartheta\sin\vartheta)}{\varrho^2(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)}$$

$$= -\lim_{\varrho\to 0}\left[\varrho\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\right] = -\lim_{\varrho\to 0}\varrho\underbrace{\left[\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right]}_{\text{limitata}} = 0.$$

### Esercizio 2.4 — Limiti e funzioni continue

*Tutte le funzioni seguenti sono definite in tutto il piano, tranne l'origine; stabilire quali possono essere prolungate con continuità nell'origine:*

① $f(x,y) = \dfrac{x\sqrt{|x^2-y^2|}}{x^2+y^2}$; ② $f(x,y) = \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+2y^2}$; ③ $f(x,y) = \dfrac{e^{x^3}-1}{x^4+y^2}$.

[d] Confronta il volume precedente, Paragrafo 6.1.4.

**Soluzione**

Analogamente a quanto accade con $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, che può essere prolungata a una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ pur di definire $g(0) = 1$, se una funzione $f$ è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne un punto $P_0$, ed esiste finito il limite di $f$ per $(x, y) \to P_0$, è possibile prolungare $f$ a una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo allora i limiti delle funzioni sopra assegnate per $(x, y) \to (0, 0)$; se i limiti esistono sarà possibile prolungare la corrispondente funzione.

① Osserviamo che il limite non esiste; come nel punto ① del precedente esercizio avviciniamoci all'origine da due diverse direzioni: l'asse $x$, con $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$, nel primo caso $\sqrt{x^2} = x$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x^2 - y^2|}}{x^2 + y^2} \overset{(x,y)=(\alpha,0)}{=} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha^2 + 0} = 1;$$

nel secondo caso $\sqrt{x^2} = -x$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x^2 - y^2|}}{x^2 + y^2} \overset{(x,y)=(\alpha,0)}{=} \lim_{\alpha\to 0^-} \frac{\alpha \cdot (-\alpha)}{\alpha^2 + 0} = -1.$$

② Facciamo ricorso alle coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + 2y^2} \overset{(x,y)=(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta)}{=} \lim_{\varrho\to 0} \frac{e^{\varrho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta} - 1}{\varrho^2\cos^2\vartheta + 2\varrho^2\sin^2\vartheta},$$

ricordando che $e^{\square} - 1 \sim \square$ se $\square \to 0$, l'ultimo limite è uguale a

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\varrho^2(1 + \sin^2\vartheta)} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \underbrace{\left[\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{1 + \sin^2\vartheta}\right]}_{\text{limitata}} = 0$$

pertanto $f$ può essere prolungata con continuità nell'origine a

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

③ Facendo nuovamente ricorso a coordinate polari e sviluppi asintotici, il limite di $f$ per $(x, y) \to (0, 0)$ diventa

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^3\vartheta}{\varrho^4\cos^4\vartheta + \varrho^2\sin^2\vartheta} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\cos^3\vartheta}{\varrho^2\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta}$$

questo limite dovrebbe essere indipendente da $\vartheta$, scegliamo $\varrho = \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}$, ovviamente $\varrho \to 0 \leftrightarrow \vartheta \to 0$, la frazione con questa posizione diventa

$$\frac{\dfrac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\cos^3\vartheta}{\dfrac{\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta} = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2\sin^2\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{2\sin\vartheta},$$

l'ultima espressione non tende nemmeno a zero se $\vartheta \to 0$, quindi il limite di partenza non esiste, e la funzione non è prolungabile.

### 2.1.2 Derivabilità e differenziabilità

#### Esercizio 2.5 — Derivate parziali

*Calcolare tutte le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:*

① $f(x, y) = x\sin 2y$; ② $f(x, y) = ye^{xy}$; ③ $f(x, y) = \log y - \log x$;

④ $f(x, y) = x^y$; ⑤ $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$; ⑥ $f(x, y, z) = y\mathrm{Ch}\,\dfrac{x}{z}$.

**Soluzione**

Data una funzione di più variabili, la sua derivata parziale rispetto a una variabile è definita come limite del rapporto incrementale, ove l'incremento viene espresso solo nella direzione corrispondente alla variabile scelta, in sostanza le altre variabili sono trattate alla stregua di costanti; pertanto, per il calcolo consueto delle derivate parziali[e], si usano le solite regole di derivazione, applicate di volta in volta alla variabile rispetto a cui si esegue la derivata. Osserviamo inoltre che in ipotesi molto generali una funzione di due variabili $f(x, y)$ ha due derivate parziali prime e tre derivate parziali seconde, poiché, grazie al Teorema di Schwarz[f], le due derivate miste $f_{xy}$ e $f_{yx}$ coincidono. Allo stesso modo, una funzione di tre variabili ha tre derivate prime e sei derivate seconde.

① Per la derivata rispetto a $x$, $y$ va considerata come una costante, e pertanto $f_x(x, y) = \sin 2y$, viceversa per la derivata rispetto a $y$, è $x$ a essere considerata come una costante, quindi $f_y(x, y) = 2x\cos 2y$. La derivata seconda rispetto a $x$ si ottiene derivando $f_x$ nuovamente rispetto a $x$, poiché $f_x$ non contiene $x$ abbiamo $f_{xx}(x, y) = 0$; calcoliamo la derivata seconda rispetto a

[e] Data la funzione $f$, indicheremo la sua derivata parziale rispetto a $x$ o con $f_x$, o con $\frac{\partial}{\partial x}f$, e così via...

[f] **Teorema di Schwarz:** Se le due derivate $f_{xy}$ e $f_{yx}$ sono entrambe definite in un aperto $A$, e sono continue in $(x_0, y_0)$, allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

$y$ derivando nuovamente rispetto a $y$ la $f_y$: $f_{yy}(x, y) = -4x \sin 2y$; possiamo calcolare la derivata "mista" $f_{xy}$ – a nostra scelta – o derivando rispetto a $y$ la $f_x$, o derivando rispetto a $x$ la $f_y$, scegliamo questa seconda strada:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x}(2x \cos 2y) = 2 \cos 2y.$$

② Seguendo la stessa strada, otteniamo

$$f_x(x, y) = y^2 e^{xy}, \quad f_y(x, y) = e^{xy} + yxe^{xy} = e^{xy}(1 + xy);$$

analogamente per le derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = y^3 e^{xy}, \quad f_{xy}(x, y) = e^{xy}(xy^2 + 2y), \quad f_{yy}(x, y) = e^{xy}(2x + x^2 y).$$

③ Poiché la funzione è somma di una funzione della sola $x$ e di una funzione della sola $y$ ogni derivata mista sarà nulla, per quanto riguarda le altre derivate, abbiamo

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{x}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{y}, \quad f_{xx}(x, y) = \frac{1}{x^2}, \quad f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Ovviamente, il loro dominio, come quello di $f$, è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

④ Immediatamente (ricordando che $x$ e $y$ vanno trattate come costanti) ricaviamo:

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \log x;$$

e per le derivate seconde

$$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy}(x,y) = x^{y-1}(1 + y \log x), \quad f_{yy}(x,y) = x^y (\log x)^2.$$

⑤ Si tratta solo di potenze di $x$, $y$ e $z$:

$$f_x(x,y,z) = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma, \quad f_y(x,y,z) = \beta x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma, \quad f_z(x,y,z) = \gamma x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1};$$

e per le derivate seconde

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y, z) &= \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} y^\beta z^\gamma, & f_{yy}(x, y, z) &= \beta(\beta - 1)x^\alpha y^{\beta-2} z^\gamma, \\ f_{zz}(x, y, z) &= \gamma(\gamma - 1)x^\alpha y^\beta z^{\gamma-2}, & f_{xy}(x, y, z) &= \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^\gamma, \\ f_{xz}(x, y, z) &= \alpha\gamma x^{\alpha-1} y^\beta z^{\gamma-1}, & f_{yz}(x, y, z) &= \beta\gamma x^\alpha y^{\beta-1} z^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

⑥ Ricordiamo che la derivata di $\operatorname{Ch} x$ è $\operatorname{Sh} x$:

$$f_x(x, y, z) = \frac{y}{z} \operatorname{Sh} \frac{x}{z}, \quad f_y(x, y, z) = \operatorname{Ch} \frac{x}{z}, \quad f_z(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2} \operatorname{Sh} \frac{x}{z};$$

e per le derivate seconde

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y, z) &= \frac{y}{z^2} \operatorname{Ch} \frac{x}{z}, & f_{yy}(x, y, z) &= 0, \\ f_{zz}(x, y, z) &= \frac{2xy}{z^3} \operatorname{Sh} \frac{x}{z} + \frac{x^2 y}{z^4} \operatorname{Ch} \frac{x}{z}, & f_{xy}(x, y, z) &= \frac{1}{z} \operatorname{Sh} \frac{x}{z}, \\ f_{xz}(x, y, z) &= -\frac{y}{z^2} \operatorname{Sh} \frac{x}{z} - \frac{xy}{z^3} \operatorname{Ch} \frac{x}{z}, & f_{yz}(x, y, z) &= -\frac{x}{z^2} \operatorname{Sh} \frac{x}{z}. \end{aligned}$$

## Esercizio 2.6 — Derivabilità

*Stabilire se ciascuna delle seguenti funzioni è derivabile in* $(0,0)$:

$$① \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}; \quad ② \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$③ \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}; \quad ④ \ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

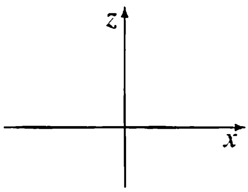
### Soluzione

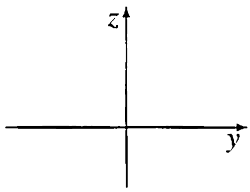
Perché una funzione $f$ sia derivabile nel punto $(x_0,y_0)$ occorre e basta che esistano finiti i due limiti che definiscono le derivate parziali in quel punto, ossia

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \qquad f_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Nel caso delle funzioni dell'esercizio precedente, tutte le funzioni e le derivate erano definite in un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, e ciò non poteva dare luogo a comportamenti "critici". Le funzioni di questo esercizio sono tutte *sicuramente* derivabili se $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, vogliamo studiarne la derivabilità nell'origine, poiché ivi la funzione è definita "a tratti".

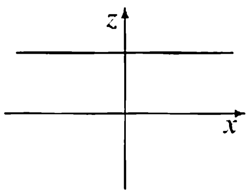
① Osserviamo che in tutti i punti dell'asse $x$, così come in tutti i punti dell'asse $y$ la funzione $f$ si annulla, se disegnamo le sezioni della superficie definita da $f$ nel piano $xz$ e nel piano $yz$ otteniamo:

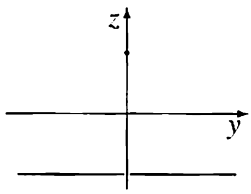



pertanto nell'origine esistono entrambe le derivate parziali, ed entrambe valgono 0, essendo derivata di una funzione costante. La funzione $f$ è allora derivabile nell'origine.

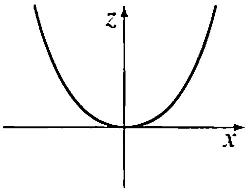
② La funzione $f$ vale 1 in tutti i punti dell'asse $x$, vale $-1$ in tutti i punti dell'asse $y$, eccetto che nell'origine, i grafici delle sezioni sono:

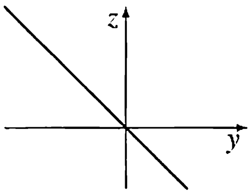


la derivata parziale rispetto a $x$ esiste nell'origine, ma (poiché $f(0, y)$ non è nemmeno continua nell'origine) non è così per la derivata rispetto a $y$, $f$ pertanto non è derivabile nell'origine.

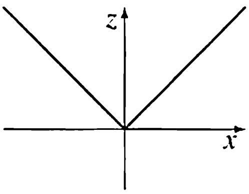
③ Lungo gli assi la funzione $f$ vale $f(x, 0) = x^2$, $f(0, y) = -y$:

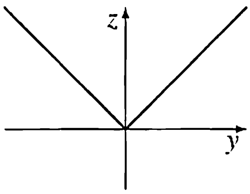





quindi $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = -1$, la funzione è derivabile nell'origine.

④ Lungo gli assi la funzione $f$ vale $f(x, 0) = |x|$, $f(0, y) = |y|$:






ovviamente, $f$ non è derivabile nell'origine.

### Esercizio 2.7 — Derivabilità e continuità

*Stabilire se ciascuna delle funzioni dell'esercizio precedente è continua nell'origine.*

### Soluzione

① La funzione non è continua nell'origine, passando infatti alle coordinate polari, il limite diventa

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\varrho^2 \cos^2\vartheta + \varrho^2 \sin^2\vartheta} = \cos\vartheta \sin\vartheta.$$

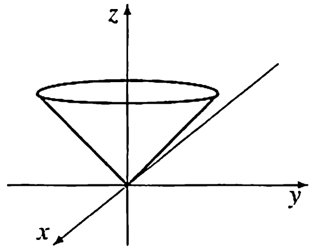
② Abbiamo già visto, lungo gli assi, che la funzione non è continua nell'origine.

③ La funzione è continua nell'origine: infatti

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^4 \cos^4\vartheta - \varrho^3 \sin^3\vartheta}{\varrho^2 \cos^2\vartheta + \varrho^2 \sin^2\vartheta} = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \underbrace{\left[ \frac{\varrho \cos^4\vartheta - \sin^3\vartheta}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} \right]}_{\text{limitata}} = 0.$$

④ La funzione è continua in $\mathbb{R}^2$: è una funzione composta da funzioni continue, pertanto continua in tutto il suo insieme di definizione (geometricamente, si tratta di una superficie conica, che ha il suo vertice nell'origine).

Osserviamo allora che la continuità e la derivabilità di una funzione in un punto non sono legate; nei quattro esempi precedenti, abbiamo potuto vedere funzioni che nell'origine erano:




- né continue né derivabili (punto ②),
- continue, ma non derivabili (punto ④),
- continue e derivabili (punto ③),
- derivabili, ma non continue (punto ①);

i primi tre casi si possono anche verificare con funzioni di una sola variabile, il quarto è prerogativa delle funzioni di due o più variabili.

### Esercizio 2.8 — Gradiente

*Scrivere il gradiente di ciascuna delle funzioni seguenti, nel punto indicato:*

① $f(x, y) = \sin(x^2 y) + x - 3y^2$, *in* $(1, \pi)$; ② $g(x, y, z) = z^2 \log \frac{x^3}{y^2}$, *in* $(4, -3, 2)$.

### Soluzione

Data una funzione di due variabili $f(x, y)$, si chiama *gradiente* di $f$ (nel punto $(x_0, y_0)$) il vettore costruito con le derivate parziali prime nel punto $(x_0, y_0)$, ossia[g]:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0)]\mathbf{i} + [f_y(x_0, y_0)]\mathbf{j}.$$

① Derivando, otteniamo

$$f_x(x, y) = 2xy\cos(x^2 y) + 1, \qquad f_y(x, y) = x^2 \cos(x^2 y) - 6y,$$

e $f_x(1, \pi) = 2\pi \cos(\pi) + 1 = 1 - 2\pi$, $f_y(1, \pi) = 1\cos(\pi) - 6\pi = -1 - 6\pi$; pertanto

$$\operatorname{grad} f(1, \pi) = [1 - 2\pi]\mathbf{i} + [-1 - 6\pi]\mathbf{j}.$$

[g]Analogamente, per una funzione di tre variabili:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = [f_x(x_0, y_0, z_0)]\mathbf{i} + [f_y(x_0, y_0, z_0)]\mathbf{j} + [f_z(x_0, y_0, z_0)]\mathbf{k}.$$

② Le derivate prime sono

$$f_x(x, y, z) = \frac{3z^2}{x}, \qquad f_y(x, y, z) = -\frac{2z^2}{y}, \qquad f_z(x, y, z) = 2z \log \frac{x^3}{y^2},$$

e $f_x(4, -3, 2) = 3$, $f_y(4, -3, 2) = \frac{8}{3}$, $f_z(4, -3, 2) = 4 \log \frac{64}{9}$, quindi

$$\operatorname{grad} f(4, -3, 2) = 3\mathbf{i} + \frac{8}{3}\mathbf{j} + \left(4 \log \frac{64}{9}\right) \mathbf{k}.$$

### Esercizio 2.9 — Differenziabilità

*Stabilire se ciascuna delle seguenti funzioni è differenziabile nel punto a fianco indicato:*

① $f(x, y) = \log \dfrac{x+y}{y+1}$, *in* $(3, 4)$;

② $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, *in* $(0, 0)$;

③ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, *in* $(1, 2)$;

④ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, *in* $(0, 0)$;

⑤ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, *in* $(0, 0)$.

### Soluzione

Una funzione di due variabili $f$ si dice differenziabile nel punto $(x_0, y_0)$ se

$$\lim_{(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y) \to (0,0)} \frac{\overbrace{f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) - f(x_0, y_0)}^{\Delta f} - \overbrace{[f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0)\, \mathrm{d}y]}^{\mathrm{d}f}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = 0.$$

Il termine $\mathrm{d}f$ prende il nome di *differenziale primo* di $f$ (nel punto $(x_0, y_0)$). Sappiamo che affinché una funzione $f$ sia differenziabile nel punto $(x_0, y_0)$ dev'essere ivi continua.

① Un criterio di facile utilizzo è costituito dal teorema del differenziale totale[h]. Poiché

$$f_x(x, y) = \frac{1}{x+y}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+1},$$

ed entrambe queste funzioni sono continue in tutto un intorno del punto $(3, 4)$, $f$ è differenziabile in $(3, 4)$.

② Usiamo nuovamente il teorema del differenziale totale: la funzione non è continua nell'origine, quindi, sebbene sia derivabile in $(0, 0)$, non è ivi differenziabile.

③ La funzione (la stessa del punto precedente) è continua e derivabile con continuità in tutto un intorno del punto $(1, 2)$, è quindi differenziabile nel punto considerato.

④ Occorre applicare la definizione di $f$ poiché essa è definita a tratti, in modo analogo al punto ① dell'Esercizio 6 si verifica che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, quindi (passando a coordinate polari con $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)$)

$$\lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = \lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} - 0 - [0\cdot\mathrm{d}x + 0\cdot\mathrm{d}y]}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}$$

$$= \lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^3}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\varrho^3} = \cos^2\vartheta\sin\vartheta \neq 0,$$

pertanto la funzione non è differenziabile nell'origine.

⑤ Anche in questo caso applichiamo la definizione; osservato che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$:

$$\lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = \lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} - 0 - [0\cdot\mathrm{d}x + 0\cdot\mathrm{d}y]}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}$$

$$= \lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^3}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^3}}$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^4\cos\vartheta\sin^3\vartheta}{\varrho^3} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\vartheta\sin^3\vartheta = 0$$

pertanto la funzione è differenziabile nell'origine.

[h]**Teorema del differenziale totale:** Se le derivate parziali prime di $f$ sono continue in un intorno del punto $(x_0, y_0)$, allora $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$..

## Esercizio 2.10 — Differenziale primo

*Scrivere il differenziale primo di ciascuna delle funzioni seguenti, nel punto indicato*:

① $f(x, y) = 2x^2y + x^3y^2$, *in* $(1, 2)$; ② $g(x, y, z) = \dfrac{x^2y^3}{z^4}$, *in* $(4, -3, 2)$.

### Soluzione

In entrambi i casi, sfruttiamo il teorema del differenziale totale.

① La funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$, è pertanto differenziabile nel punto indicato; abbiamo

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4xy + 3x^2y^2 \\ f_y(x, y) &= 2x^2 + 2x^3y \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} f_x(1, 2) &= 20 \\ f_y(1, 2) &= 6 \end{aligned} \quad ;$$

pertanto $\mathrm{d}f(1, 2) = 20\,\mathrm{d}x + 6\,\mathrm{d}y$.

② La funzione è continua e derivabile con continuità in $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$; poiché $(4, -3, 2)$ è interno a $D$, $g$ è ivi differenziabile. Abbiamo

$$g_x(x, y, z) = \frac{2xy^3}{z^4}, \quad g_y(x, y, z) = \frac{3x^2y^2}{z^4}, \quad g_z(x, y, z) = -4\frac{x^2y^3}{z^5};$$

da cui

$$g_x(4, -3, 2) = -\frac{27}{2}, \quad g_y(4, -3, 2) = 27, \quad g_z(4, -3, 2) = 54;$$

e quindi $\mathrm{d}f(4, -3, 2) = -\frac{27}{2}dx + 27dy - 54dz$.

## Esercizio 2.11 — Piano tangente al grafico di una funzione

*Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x, y) = 4x^2y + 2xy^3$ *in corrispondenza del punto* $P(-2, 3)$.

### Soluzione

Data una funzione $f$ differenziabile nel punto $(x_0, y_0)$, l'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(x_0, y_0)$ è data da

$$z - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0).$$

Calcoliamo le derivate prime:

$$f_x(x, y) = 8xy + 2y^3, \quad f_y(x, y) = 4x^2 + 6xy^2, \quad f_x(-2, 3) = 6, \quad f_y(-2, 3) = -92;$$

quindi, poiché $f(-2, 3) = -60$, l'equazione è

$$z + 60 = 6(x + 2) - 92(y - 3) \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 92y - z = -228.$$

## Esercizio 2.12 — Definizione di derivata direzionale

*Calcolare, usando la definizione, la derivata direzionale nel punto $P(1, 2)$ della funzione*

$$f(x, y) = x^4 + 3y^3 - xy,$$

*nella direzione del versore* $\mathbf{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

### Soluzione

Data una funzione $f(x, y)$ e un versore $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, la *derivata direzionale* di $f$ nella direzione del versore $\mathbf{v}$ nel punto $(x_0, y_0)$ è data (se esiste) dal seguente limite:

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Pertanto

$$D_{\mathbf{w}} f(1, 2) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, 2 - \frac{1}{2}t\right) - f(1, 2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^4 + 3\left(2 - \frac{1}{2}t\right)^3 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(2 - \frac{1}{2}t\right) - 23}{t}$$

(sviluppando i binomi e raccogliendo le potenze di $t$...)

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\sqrt{3} - \frac{35}{2}\right)t + \left(9 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{8}\right)t^3 + \frac{9}{16}t^4}{t} = \sqrt{3} - \frac{35}{2}.$$

## Esercizio 2.13 — Derivata direzionale - Formula del gradiente

*Calcolare, se esistono, le seguenti derivate direzionali:*

① *derivata di* $f(x, y) = e^{x^2 y} - xy^3$ *in* $P(2, -1)$ *nella direzione del versore* $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$;

② *derivata di* $f(x, y) = \sin xy$ *in* $P(2, \frac{\pi}{3})$ *nella direzione della bisettrice del secondo quadrante;*

③ *derivata di* $f(x, y) = x^2 e^{3y}$ *in* $P(1, -1)$, *nella direzione individuata dal vettore* $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$;

④ *derivata di*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*in* $P(0, 0)$, *nella direzione del vettore* $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

**Soluzione**

Se una funzione $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ allora la derivata direzionale nella direzione del versore $\mathbf{v}$ si può calcolare con la cosiddetta *formula del gradiente*:

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}.$$

① La funzione è continua e derivabile con continuità in tutto il piano, è pertanto differenziabile, vale allora la formula del gradiente, poiché

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xye^{x^2y} - y^3, \\ f_y(x, y) = x^2e^{x^2y} - 3xy^2, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{grad} f(2, -1) = (1-4e^{-4})\mathbf{i}+(4e^{-4}-6)\mathbf{j},$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(2, -1) &= \left((1 - 4e^{-4})\mathbf{i} + (4e^{-4} - 6)\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})\right) \\ &= \frac{6 + \sqrt{3} - 4(1 + \sqrt{3})e^{-4}}{2}. \end{aligned}$$

② Anche questa funzione è differenziabile ovunque, utilizziamo la formula del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = y \cos xy, \\ f_y(x, y) = x \cos xy, \end{cases} \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

il versore diretto come la bisettrice del secondo quadrante è

$$\mathbf{v} = \left(\cos\frac{3}{4}\pi, \sin\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

e pertanto

$$D_{\mathbf{v}} f\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\pi}{6}\mathbf{i} - \mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 1\right).$$

③ Anche questa funzione è differenziabile ovunque, e

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xe^{3y}, \\ f_y(x, y) = 3x^2e^{3y}, \end{cases} \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(1, -1) = 2e^{-3}\mathbf{i} + 3e^{-3}\mathbf{j},$$

il versore corrispondente al vettore $\mathbf{v}$ si ottiene dividendo $\mathbf{v}$ per il suo modulo:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}),$$

pertanto, usando la formula del gradiente,

$$D_{\mathbf{w}} f(1, -1) = \left(2e^{-3}\mathbf{i} + 3e^{-3}\mathbf{j}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = -\frac{11}{\sqrt{29}}e^{-3}.$$

④ Abbiamo visto (al punto ④ dell'Esercizio 9) che la funzione non è differenziabile nell'origine, dobbiamo allora fare ricorso alla definizione, il versore che ci interessa è, come al punto precedente,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j});$$

osserviamo inoltre che

$$f\left(0 + \frac{3}{5}t, 0 - \frac{4}{5}t\right) = \frac{\left(\frac{3}{5}t\right)^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}t\right)}{\left(\frac{3}{5}t\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}t\right)^2} = -\frac{36}{125}t;$$

quindi (ricordando che $f(0,0) = 0$):

$$D_{\mathbf{w}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{36}{125}t}{t} = -\frac{36}{125}.$$

## Esercizio 2.14 — Proprietà del gradiente Legame con derivata direzionale e linee di livello

① *Data la funzione $f(x, y) = x^2y + xe^y$, scrivere l'equazione della retta tangente alla linea di livello passante per il punto $(e, 1)$.*
② *Data la funzione $f(x, y) = x^2y + y^3 - 2xy^2 + x^3 - y$, stabilire il massimo valore delle derivate direzionali calcolate nel punto $(2, 1)$; qual è la direzione corrispondente alla derivata trovata?*

### Soluzione

Data una funzione $f$, differenziabile in un punto $(x_0, y_0)$, il gradiente grad $f(x_0, y_0)$ ha due importanti proprietà:

- grad $f$ è perpendicolare alla linea di livello di $f$ passante per $(x_0, y_0)$,
- grad $f$ individua la *direzione di massima crescita* di $f$, ossia la direzione in cui $f$ cresce più rapidamente.

① Poiché

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy + e^y, \\ f_y(x, y) = x^2 + xe^y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\, f(e, 1) = 3e\mathbf{i} + 2e^2\mathbf{j},$$

la retta cercata è la retta perpendicolare a grad $f$ e passante per $(e, 1)$, la cui equazione[i] è

$$\begin{bmatrix} x-e \\ y-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3e \\ 2e^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2ey = 5e.$$

② Sappiamo che la derivata direzionale massima si ha nella direzione del gradiente; poiché

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy - 2y^2 + 3x^2, \\ f_y(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4xy - 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(2,1) = 14\mathbf{i} - 2\mathbf{j},$$

il versore corrispondente alla derivata direzionale cercata è

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(2,1)|}[\operatorname{grad} f(2,1)] = \frac{1}{10\sqrt{2}}[14\mathbf{i} - 2\mathbf{j}],$$

e il massimo della derivata direzionale è[j]

$$D_{\mathbf{v}} f(2,1) = [14\mathbf{i} - 2\mathbf{j}] \cdot \frac{1}{10\sqrt{2}}[14\mathbf{i} - 2\mathbf{j}] = 10\sqrt{2}.$$

### Esercizio 2.15 — Formula di Taylor-MacLaurin per funzioni di più variabili

*Scrivere il polinomio di Taylor–MacLaurin arrestato al II ordine di ciascuna delle seguenti funzioni, centrato nel punto indicato:*

① $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + xy - x$, $\quad P(2,-1)$;
② $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + xy - x$, $\quad P(0,0)$;
③ $f(x,y) = x^y$, $\quad P(2,2)$;
④ $f(x,y) = e^x \log(1-y) + \sin 2xy$, $\quad P(0,0)$;
⑤ $f(x,y,z) = xyz$, $\quad P(1,2,3)$;
⑥ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$, $\quad P(1,-1,0)$.

### Soluzione

Il polinomio di Taylor arrestato al II ordine di una funzione di due variabili $f(x,y)$, centrato nel punto[k] $(x_0, y_0)$ si può scrivere

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(x_0,y_0) + \Big([f_x](x-x_0) + [f_y](y-y_0)\Big) + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\Big([f_{xx}](x-x_0)^2 + 2[f_{xy}](x-x_0)(y-y_0) + [f_{yy}](y-y_0)^2\Big) \end{aligned}$$

---

[i] L'equazione della retta passante per il punto $(x_0, y_0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ è data da

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0.$$

[j] La cosa ha ovviamente carattere generale: il massimo della derivata direzionale di $f$ in un punto ove $f$ è differenziabile è dato da $|\operatorname{grad} f|$.

[k] Poiché tutte le derivate che compaiono nella formula sono valutate nel punto $(x_0, y_0)$, omettiamo per brevità di scriverlo: al posto di $f_{xy}(x_0, y_0)$ scriveremo $[f_{xy}]$.

in modo analogo si scriverà il polinomio di Taylor per $f(x, y, z)$.

① Occorre valutare le derivate prime e seconde:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + y - 1 \\ f_y(x,y) = -6y^2 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(2,-1) = 10 \\ f_y(2,-1) = -4 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = 6x \\ f_{xy}(x,y) = 1 \\ f_{yy}(x,y) = -12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(2,-1) = 12 \\ f_{xy}(2,-1) = 1 \\ f_{yy}(2,-1) = 12 \end{cases};$$

pertanto (infatti $f(2,-1) = 6$)

$$T_2(x,y) = 6 + 10(x-2) - 4(y+1) + \frac{1}{2}\Big(12(x-2)^2 + 2(x-2)(y+1) + 12(y+1)^2\Big).$$

② La funzione è già scritta sotto forma di polinomio in $x$ e $y$, pertanto essa stessa è il polinomio cercato, poiché occorre fermarsi al secondo ordine, vanno eliminati i termini di grado più elevato, otteniamo

$$T_2(x,y) = -x + xy.$$

③ Osservato che $f(2,2) = 2^2 = 4$, occorre valutare le derivate prime e seconde:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = yx^{y-1} \\ f_y(x,y) = x^y \log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(2,2) = 4 \\ f_y(2,2) = 4\log 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2} \\ f_{xy}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\log x) \\ f_{yy}(x,y) = x^y(\log x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(2,2) = 2 \\ f_{xy}(2,2) = 2(1 + 2\log 2) \\ f_{yy}(2,2) = 4\log^2 2 \end{cases};$$

pertanto

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & 4 + 4(x-2) + [4\log 2](y-2) + \\ & + \frac{1}{2}\Big(2(x-2)^2 + 2[2 + 4\log 2](x-2)(y-2) + [4\log^2 2](y-2)^2\Big). \end{aligned}$$

④ Per determinare il polinomio di MacLaurin che ci interessa, possiamo seguire lo stesso procedimento adottato finora. In alternativa, poiché la funzione $f$ è composta da funzioni di una sola variabile delle quali è noto il polinomio, ricaviamo $T_2$ a partire dagli sviluppi dell'esponenziale, del logaritmo e del seno, tralasciando, nel prodotto, le potenze di grado maggiore di 2; poiché

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \log(1-y) = -y + \frac{y^2}{2} + \dots, \quad \sin 2xy = 2xy + \dots$$

allora

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(-y+\frac{y^2}{2}\right)+2xy \\
&= -y-xy+\frac{y^2}{2}+2xy = -y+xy+\frac{y^2}{2}.
\end{aligned}
$$

⑤ Per una funzione di tre variabili la formula rimane simile; occorrono ancora le derivate prime e seconde:

$$
\begin{cases} f_x(x,y,z)=yz \\ f_y(x,y,z)=xz \\ f_z(x,y,z)=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(1,2,3)=6 \\ f_y(1,2,3)=3 \\ f_z(1,2,3)=2 \end{cases}
$$

e, osservato che $f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=0$,

$$
\begin{cases} f_{xy}(x,y,z)=z \\ f_{xz}(x,y,z)=y \\ f_{yz}(x,y,z)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xy}(1,2,3)=3 \\ f_{xz}(1,2,3)=2 \\ f_{yz}(1,2,3)=1 \end{cases},
$$

pertanto ($f(1,2,3)=6$)

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = 6 + \Big(6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)\Big) + \\
+\frac{1}{2}\Big(6(x-1)(y-2)+4(x-1)(z-3)+2(y-2)(z-3)\Big).
\end{aligned}
$$

⑥ Notiamo che $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$, quindi $f(1,-1,0)=0$,

$$
f_x(x,y,z)=f_y(x,y,z)=f_z(x,y,z)=2(x+y+z),
$$

e nel punto $(1,-1{,}0)$ abbiamo $f_x(1,-1{,}0)=f_y(1,-1{,}0)=f_z(1,-1{,}0)=0$; inoltre

$$
f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=f_{xy}=f_{xz}=f_{yz}=2,
$$

pertanto

$$
T_2(x,y,z)=(x-1)^2+(y+1)^2+z^2+2(x-1)(y+1)+2(x-1)z+2(y+1)z.
$$

## Esercizio 2.16 — Posizione reciproca di superficie e piano tangente Hessiano

*Stabilire se in ciascuno dei punti*

$$
P_1(0,0), \qquad P_2(2,2) \qquad e \qquad P_3(1,3)
$$

*il piano tangente attraversa o meno la superficie definita dalla funzione* $z=f(x,y)=8x^2+y^2-y^3-x^4$.

**Soluzione**

Data la funzione $f$, e dato il piano tangente a essa nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la differenza tra le quote nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$ della superficie definita da $f$ e del piano tangente è data (a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, rispetto alla distanza tra $(x_0, y_0)$ e $(\bar{x}, \bar{y})$) dai termini di secondo grado dello sviluppo di Taylor:

$$f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2,$$

se questa espressione è sempre positiva (negativa) nell'intorno di $(x_0, y_0)$, possiamo affermare con sicurezza che la superficie si trova sempre sopra (sotto) il piano tangente. La teoria permette di risolvere tale questione con l'analisi della matrice (che prende il nome di *matrice hessiana*[1])

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Infatti tutto dipende dagli autovalori di $H$:

1) se sono entrambi positivi, allora la superficie è tutta al di sopra del piano tangente,
2) se sono entrambi negativi, allora la superficie è tutta al di sotto del piano tangente,
3) se uno è positivo e uno è negativo, allora la superficie e il piano tangente si intersecano,
4) se uno dei due autovalori è nullo, nulla si può dire.

Poiché il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori, nel caso di una matrice $2 \times 2$ è sufficiente osservare il segno del determinante di $H$:

| | | |
|---|---|---|
| $\det H(x_0, y_0) > 0$ | $\det H(x_0, y_0) < 0$ | $\det H(x_0, y_0) = 0$ |
| casi 1) e 2) | caso 3) | caso 4) |

e, se il determinante è maggiore di 0, è sufficiente guardare il segno di $f_{xx}(x_0, y_0)$ (o, che è lo stesso, $f_{yy}(x_0, y_0)$):

- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$: la superficie è al di sopra del piano,
- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$: la superficie è al di sotto dello stesso.

[1]Dal nome del matematico tedesco Ludwig Otto Hesse (1811–1874).

Per rispondere quindi alla domanda dell'esercizio, scriviamo l'hessiano nei tre punti considerati, innanzitutto

$$f_{xx}(x, y) = 16 - 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2 - 6y,$$

pertanto

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ H(2,2) = \begin{bmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \ H(1,3) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix};$$

in base alla casistica prima stilata, possiamo concludere che nel punto $P_0$ la superficie sta tutta al di sopra del piano tangente, nel punto $P_1$ tutta al di sotto, nel punto $P_2$ il piano tangente attraversa la superficie.

### 2.1.3 Ottimizzazione libera e vincolata

**Esercizio 2.17 — Estremi liberi - 1**
**Hessiano diverso da zero**

*Determinare i punti di massimo e minimo relativo libero della funzione*

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + \frac{1}{2}(x - y)^2 - x + y.$$

**Soluzione**

Se la funzione $f$ di cui cerchiamo massimi e minimi liberi è definita in un insieme aperto, ed è differenziabile in tutti i punti di tale insieme, si cercano i punti in cui grad $f = 0$, ossia i punti con piano tangente orizzontale, e in tali punti si studia poi l'hessiano: se la superficie si trova al di sopra del piano tangente siamo in presenza di un minimo, se la superficie si trova al di sotto del piano tangente siamo in presenza di un massimo, se la superficie attraversa il piano tangente siamo in presenza di un *punto di sella*, e non vi è né minimo né massimo. Invece, se la funzione non è differenziabile in tutti i punti del proprio insieme di definizione, oltre allo studio dei punti di differenziabilità è necessario esaminare singolarmente i punti di non differenziabilità.

La funzione è continua e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto gli unici candidati massimi e minimi sono i punti ove grad $f = 0$; le derivate prime sono

$$f_x(x, y) = 3x^2 + (x - y) - 1, \quad f_y(x, y) = -3y^2 - (x - y) + 1;$$

porre grad $f = 0$ equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + x - y = 1 \\ 3y^2 + x - y = 1 \end{cases};$$

tenendo la prima delle due equazioni e sostituendo alla seconda la differenza membro a membro tra prima e seconda troviamo

$$\begin{cases} 3x^2 + x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases};$$

poiché $x^2 - y^2 = 0$ significa alternativamente $y = x$ o $y = -x$, abbiamo due sistemi:

$$\text{i)} \begin{cases} 3x^2 + x - y = 1 \\ x = y \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} 3x^2 + x - y = 1 \\ x = -y \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\text{i)} \quad P_1\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad P_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \qquad \text{ii)} \quad P_3(-1, 1), \quad P_4\Big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big);$$

in ciascuno di questi punti calcoliamo l'hessiano, le derivate seconde di $f$ sono:

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 1, \quad f_{xy}(x, y) = -1, \quad f_{yy}(x, y) = -6y + 1;$$

pertanto $\det H(x, y) = 1 + 6(x - y) - 36xy$, e

$$\det H\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = -11 < 0, \qquad \det H\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = -11 < 0,$$

e

$$\det H(-1, 1) = 25, \qquad \det H\Big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big) = 9;$$

$P_1$ e $P_2$ sono pertanto punti di sella, in $P_3$ e $P_4$ vi è un minimo o un massimo, calcolando la derivata seconda rispetto a $x$ troviamo

$$f_{xx}(-1, 1) = -5 < 0, \qquad f_{xx}\Big(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big) = 3 > 0,$$

e quindi in $P_3$ abbiamo un massimo, mentre in $P_4$ un minimo.

### Esercizio 2.18 — Estremi liberi – 2 Hessiano uguale a zero

*Determinare i punti di massimo e minimo relativo libero delle seguenti funzioni:*

① $f(x, y) = x^4 + y^4$;
② $f(x, y) = x^4 - y^4$;
③ $f(x, y) = x^4 + y^4 + 8xy - 4x^2 - 4y^2$;
④ $f(x, y) = 2x^4 - 8x^2y^2 + 11y^4$;
⑤ $f(x, y) = y^2(y + 2x - x^2)$.

### Soluzione

Tutte le funzioni elencate sono differenziabili su $\mathbb{R}^2$, i massimi e minimi liberi possono esistere solo in corrispondenza di punti in cui il piano tangente è orizzontale.

① Ponendo grad $f = 0$ troviamo

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_1(0,0);$$

si verifica immediatamente che $\det H(0,0) = 0$, siamo nel caso dubbio: nulla si può dire a priori sul comportamento di $f$ in $P_1$. È però immediato vedere che

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) > 0 \text{ se } (x,y) \neq (0,0),$$

pertanto la funzione $f$ ha nell'origine un minimo.

② Ponendo grad $f = 0$ troviamo

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_1(0,0);$$

si verifica immediatamente che $\det H(0,0) = 0$, siamo nuovamente nel caso dubbio. Vediamo che l'origine è un punto di minimo se consideriamo la restrizione di $f$ lungo l'asse $x$, mentre è un punto di massimo se consideriamo la restrizione di $f$ lungo l'asse $y$:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^4 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è min}, \\ f(0,y) &= -y^4 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è max}; \end{aligned}$$

pertanto l'origine non è né massimo né minimo per $f$.

③ Ponendo grad $f = 0$ troviamo

$$\begin{cases} 4x^3 + 8y - 8x = 0 \\ 4y^3 + 8x - 8y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^3 + 2y - 2x = 0 \\ y^3 + 2x - 2y = 0 \end{cases} ;$$

tenendo la prima delle due equazioni e sostituendo alla seconda la somma membro a membro tra prima e seconda troviamo

$$\begin{cases} x^3 + 2y - 2x = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} ;$$

$x^3 + y^3 = 0$ è soddisfatta solo se $y = -x$, con questa scelta, la prima delle due equazioni diventa $x^3 - 4x = 0$, che ha come soluzioni $x = 0, \pm 2$, ricordando che $y = -x$ le tre radici del sistema sono

$$P_1(0,0), \qquad P_2(2,-2), \qquad P_3(-2,2).$$

Abbiamo

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 8 & 8 \\ 8 & 12y^2 - 8 \end{bmatrix} \Rightarrow H(2,-2) = H(-2,2) = \begin{bmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{bmatrix},$$

per cui $P_2$ e $P_3$ sono punti di minimo, invece nell'origine $H(0,0) = 0$, quindi nulla si può dire sulla natura di $P_1(0,0)$. Nei due casi precedenti era stato facile stabilire la natura dell'origine, o perché (nel punto ①) era evidente che la funzione era la somma di due quantità non negative, o perché (nel punto ②) era stato semplice determinare due direzioni rispetto alle quali l'origine aveva comportamento differente. Nel caso in esame, non abbiamo immediatamente disponibile una strada simile; osservando però che $8xy-4x^2-4y^2 = -4(x-y)^2$, possiamo riscrivere la funzione nella forma $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$; a questo punto si vede che la funzione $f$ è composta di due addendi $A_1$ e $A_2$, uno non negativo, l'altro non positivo:

$$f(x,y) = \underbrace{[x^4 + y^4]}_{A_1 \geq 0} + \underbrace{[-2(x-y)^2]}_{A_2 \leq 0};$$

nell'intorno dell'origine $A_1$ è un infinitesimo del IV ordine, $A_2$ – se è diverso da zero – è un infinitesimo del II ordine, pertanto l'andamento di $f$ sarà governato da $A_2$ se $A_2 \neq 0$, mentre se $A_2 = 0$ sarà governato da $A_1$ che comunque non si annulla. Studiamo allora il comportamento di $f$ se $y = 0$ (caso in cui $A_2$ non si annulla) e se $y = x$ (caso in cui $A_2$ si annulla):

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^4 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è max}, \\ f(x,x) &= 2x^4 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è min}; \end{aligned}$$

pertanto l'origine non è né massimo né minimo per $f$.

④ Imponendo grad $f = 0$ ricaviamo come unica soluzione $P(0,0)$, inoltre nell'origine $H(0,0) = 0$. Anche in questo caso, per studiare il comportamento della funzione in $(0,0)$ possiamo vedere se si riesce a esprimere $f$ come somma di potenze con esponente pari; in effetti,

$$2x^4 - 8x^2y^2 + 11y^4 = 2(x^2 - 2y^2)^2 + 7y^4,$$

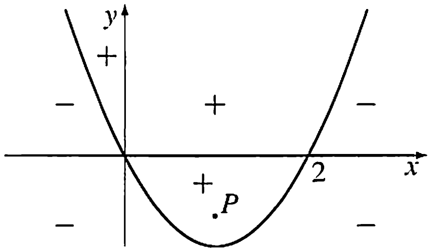
e quindi, essendo $f$ la somma di due oggetti sempre positivi fuori dall'origine, è positiva, tranne nell'origine ove vale 0; pertanto proprio nell'origine troviamo un punto di minimo.

⑤ Imponendo grad $f = 0$ ricaviamo

$$\begin{cases} 2y^2 - 2xy^2 = 0 \\ 3y^2 + 4xy - 2x^2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2y^2(1-x) = 0 \\ y(3y + 4x - 2x^2) = 0 \end{cases}$$

le soluzioni di questo sistema sono il punto $P(1, -\frac{2}{3})$ e tutti i punti $Q_\alpha(\alpha, 0)$ aventi ascissa qualsiasi e ordinata nulla; in $P$ l'hessiano è positivo, mentre $f_{xx} < 0$, pertanto $P$ è punto di massimo, mentre in tutti i punti $Q_\alpha$ l'hessiano vale 0.

Notiamo che $f(\alpha, 0) = 0$, per decidere la natura dei punti $Q_\alpha$ potrebbe essere utile, allora, stabilire il segno di $f$: $f$ si annulla sull'asse $x$ e lungo la parabola $y = x^2 - 2x$, è maggiore di 0 al di sopra della parabola e minore di 0 al di sotto




se osserviamo allora i punti dell'asse $x$, notiamo che per $0 < x < 2$ i punti sono punti di minimo (debole), per $x < 0$ e $x > 2$ sono punti di massimo (debole), infine $Q_0(0, 0)$ e $Q_2(2, 0)$ non sono né punti di massimo né punti di minimo.

## Esercizio 2.19 — Estremi liberi – 3 Accorgimenti particolari

*Determinare i punti di massimo e minimo relativo libero delle seguenti funzioni:*

① $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 5y^2}$;
② $f(x, y) = e^{3x^2 y + y^3 + 12x - 15y}$;
③ $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

### Soluzione

In questo esercizio, sono elencati alcuni "trucchi" utili per affrontare esercizi di ottimizzazione.

① Osserviamo che $f$ è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ (il radicando infatti non è mai negativo), le derivate prime sono

$$f_x(x, y) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{5y}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}},$$

$f$ è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, eccetto che in $(0, 0)$, annullando grad $f$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}} = 0 \\ \\ \dfrac{5y}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}} = 0 \end{cases},$$

che non ha soluzione; la funzione non possiede alcun punto con piano tangente orizzontale. Sarebbe errato concludere che $f$ non ammette massimi né minimi, infatti il nostro studio non ha tenuto conto del punto $(0, 0)$: nell'origine infatti non esiste il piano tangente, tuttavia l'origine è punto di minimo per $f$, poiché $f(0, 0) = 0$ mentre $f(x, y) > 0$ se $(x, y) \neq (0, 0)$.

② Poiché la funzione esponenziale è monotona crescente, i punti di massimo e minimo di $f(x, y)$ sono gli stessi della funzione

$$g(x, y) = \log f(x, y) = 3x^2y + y^3 + 12x - 15y.$$

Osserviamo che $g$, come $f$, è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, imponendo allora grad $g = 0$ troviamo

$$\begin{cases} 6xy + 12 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} P_1(1, -2), & P_2(-1, 2), \\ P_3(-2, 1), & P_4(2, -1). \end{array}$$

Poiché

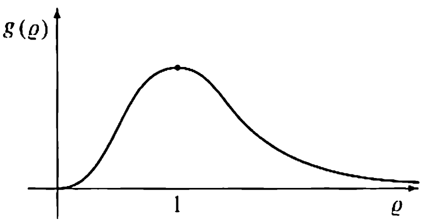
$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow \det H(x, y) = 36(y^2 - x^2),$$

si vede che

$$\begin{array}{llll} \det H(1, -2) > 0 & f_{xx}(1, -2) < 0 & \Rightarrow & \text{massimo}, \\ \det H(-1, 2) > 0 & f_{xx}(-1, 2) > 0 & \Rightarrow & \text{minimo}, \\ \det H(-2, 1) < 0 & & \Rightarrow & \text{punto di sella}, \\ \det H(2, -1) < 0 & & \Rightarrow & \text{punto di sella}. \end{array}$$

③ La funzione può essere vista come funzione di una sola variabile, nel nostro caso la distanza dall'origine $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$f(x, y) = g(\varrho) = \varrho^2 e^{-\varrho^2} \qquad (\text{con } \varrho \geq 0)$$




il grafico di $f$ si ottiene facendo ruotare la linea individuata da $g$ attorno all'asse $z$, pertanto l'origine è un punto di minimo, mentre tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di massimo (debole).

### Esercizio 2.20 — Estremi liberi per funzioni di più di due variabili

*Calcolare massimi e minimi relativi liberi delle seguenti funzioni:*

① $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3x - 3y - 4z$;

② $f(x, y, z) = 2\dfrac{y}{x} + yz + \log x + \log y - 2z$.

## Soluzione

Qualora una funzione abbia più di due variabili, la ricerca di massimi e minimi liberi avviene in modo analogo a quello già visto per le funzioni di due variabili, l'unica differenza consiste nell'analisi dell'hessiano: poiché quello che ci interessa è il segno degli autovalori, nel caso di una matrice $3 \times 3$ (o, più in generale, $n \times n$) il determinante non costituisce più un indicatore completo del loro comportamento. Dato che l'hessiano è una matrice reale e simmetrica, e pertanto possiede solo autovalori reali, un metodo di facile applicazione per determinare il segno di tali autovalori consiste nell'applicare al suo polinomio caratteristico la regola dei segni di Cartesio[m].

① La funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^3$, gli unici estremi possibili si hanno in corrispondenza di punti con grad $f = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2y - x - 3 = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -1, y = 1, z = 2;$$

calcoliamo l'hessiano, e valutiamolo in $P(-1, 1, 2)$:

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow H(-1, 1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

con poco sforzo si vede subito che i tre autovalori sono tutti positivi, e pertanto la funzione $f$ ha in $P$ un minimo.

② Anche in questo caso, la funzione è differenziabile nel suo insieme di definizione $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$, annulliamone il gradiente:

$$\begin{cases} -\dfrac{2y}{x^2} + \dfrac{1}{x} = 0 \\ \dfrac{2}{x} + z + \dfrac{1}{y} = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 4, y = 2, z = -1;$$

[m]**Regola dei segni:** Data un'equazione di grado $n$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

essa ha tante radici positive quanti i cambi di segno tra i coefficienti, e tante radici negative quante le permanenze di segno.

calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{4y}{x^3}-\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^2} & 0 \\ -\frac{2}{x^2} & -\frac{1}{y^2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H(4,2,-1)=\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il polinomio caratteristico di $H(4,2,-1)$ è

$$\lambda^3+\frac{3}{16}\lambda^2-\frac{33}{32}\lambda+\frac{1}{16}$$

i segni dei coefficienti sono $+\ +\ -\ +$, nell'ordine abbiamo:

$$+ \text{ permanenza } + \text{ cambio } - \text{ cambio } +,$$

pertanto l'hessiano ha due autovalori positivi e un autovalore negativo; il punto $P(4,2,-1)$ non è né di massimo né di minimo.

## Esercizio 2.21 — Estremi vincolati - Moltiplicatori di Lagrange

*Determinare gli estremi delle seguenti funzioni sotto i vincoli specificati*:

① $f(x,y)=x^2y,\quad 2x+y=6;$
② $f(x,y)=x^2+y^2,\quad 3x-2y=6;$
③ $f(x,y)=x^3+y^3,\quad y^2-x^2=1;$
④ $f(x,y)=x^2+y^2,\quad 4x^2+y^2=1;$
⑤ $f(x,y,z)=2x-3y-z,\quad x^2+y^2+z^2=4;$
⑥ $f(x,y,z)=x^2y^3z,\quad 2x-3y-z=0.$

### Soluzione

Un problema che si può presentare consiste nel dover determinare massimi e minimi di una funzione $f$ nell'ipotesi che le sue variabili non siano libere di assumere qualsiasi valore, ma siano vincolate da una (o più) equazioni. Vi sono allora due possibili strategie: se l'equazione che definisce il vincolo è particolarmente semplice, e si può esprimere una delle variabili in funzione dell'altra, allora si può sostituire quest'espressione nella funzione; se invece l'equazione che definisce il vincolo non è "semplice", si utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: data la funzione $f(x,y)$ e il vincolo $\varphi(x,y)=0$, costruiamo la funzione $L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ e ne cerchiamo i massimi e minimi, che si riveleranno massimi e minimi per $f$ sotto il vincolo $\varphi$.

① In un caso come questo, conviene sostituire $y=6-2x$ nell'equazione di $f$, abbiamo allora $f(x,6-2x)=6x^2-2x^3$, che possiede un minimo in $x=0$ e un massimo in $x=2$, la funzione $f$ avrà allora minimo (rispetto al vincolo $2x+y=6$) in $P_1(0,6)$ e massimo in $P_2(2,2)$.

② Operiamo come nel caso precedente, ponendo $y = \frac{3}{2}x - 3$ troviamo

$$f\left(x, \frac{3}{2}x - 3\right) = x^2 + \left(\frac{3}{2}x - 3\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - 9x + 9,$$

questa funzione ha minimo per $x = \frac{18}{13}$, pertanto la funzione $f$ avrà minimo (vincolato) in $(\frac{18}{13}, -\frac{12}{13})$ e non avrà massimo[n].

③ Usiamo i moltiplicatori di Lagrange, avendo cura di riscrivere l'equazione del vincolo nella forma $\varphi(x, y) = 0$, ossia $y^2 - x^2 - 1 = 0$:

$$L(x, y; \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(y^2 - x^2 - 1),$$

ponendo grad $L = 0$, e imponendo che i punti trovati appartengano al vincolo troviamo il sistema

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \text{vincolo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ y^2 - x^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

la prima e la seconda equazione danno rispettivamente $x = 0, \frac{2}{3}\lambda$ e $y = 0, -\frac{2}{3}\lambda$, abbiamo quindi quattro punti

$$P_1\,(0,0), \quad P_2\left(\frac{2\lambda}{3}, 0\right), \quad P_3\left(0, -\frac{2\lambda}{3}\right), \quad P_4\left(\frac{2\lambda}{3}, -\frac{2\lambda}{3}\right);$$

$P_1$, $P_2$ e $P_4$ non soddisfano l'equazione del vincolo per alcun valore di $\lambda$, se invece vi inseriamo le coordinate di $P_3$ otteniamo

$$\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{3}{2},$$

in definitiva, le soluzioni del sistema sono costituite dai punti $P_3$, con $\lambda = \pm\frac{3}{2}$:

$$x_1 = 0, y_1 = 1, \lambda_1 = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = 0, y_2 = -1, \lambda_2 = \frac{2}{3};$$

l'hessiano è

$$H(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 2\lambda & 0 \\ 0 & 6y + 2\lambda \end{bmatrix},$$

[n]Geometricamente, abbiamo determinato il punto della retta $3x-2y = 6$ avente minima distanza dall'origine, non può esistere un punto a distanza massima.

e nei punti considerati abbiamo

$$H\left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} \end{bmatrix}, \qquad H\left(0, -1, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix};$$

pertanto $(0, 1)$ è punto di minimo e $(0, -1)$ è punto di massimo per la funzione $f$ con il vincolo $y^2 - x^2 - 1 = 0$.

④ In un caso come questo, possiamo essere tentati di sostituire $y^2 = 1 - 4x^2$ (ricavato dal vincolo) nella funzione, ottenendo una funzione della sola $x$: $g(x) = 1 - 3x^2$, a questo punto, noteremmo che la funzione $g$ ha un massimo in $x = 0$ e nessun minimo, e potremmo concludere che la funzione $f$ ha massimo nei punti $(x, y)$ corrispondenti, mentre non ha minimo; tale deduzione è completamente *errata*![0]
Se vogliamo sostituire la $y$ all'interno di $f$, dobbiamo innanzitutto ricavarne l'espressione dal vincolo, e otteniamo:

$$\text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \begin{cases} y = \sqrt{1 - 4x^2} & y > 0 \\ y = -\sqrt{1 - 4x^2} & y < 0 \end{cases}$$

le funzioni di cui determinare massimo e minimo sono allora

$$\begin{cases} g_1(x) = f(x, \sqrt{1 - 4x^2}) & |x| \leq \frac{1}{2} \\ [2ex] g_2(x) = f(x, -\sqrt{1 - 4x^2}) & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases},$$

entrambe queste funzioni hanno massimo assoluto in $x = 0$ e due minimi assoluti (simmetrici) in $x = \pm\frac{1}{2}$, nel caso di $g_1$ l'uguaglianza $x = 0$ corrisponde a $y = 1$, nel caso di $g_2$ l'uguaglianza $x = 0$ corrisponde a $y = -1$; viceversa per entrambe le $g_i$ se $x = \pm\frac{1}{2}$ allora $y = 0$. Radunando le informazioni, abbiamo che la funzione $f$ ha due massimi assoluti in $(0, 1)$ e $(0, -1)$, due minimi assoluti in $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$.

⑤ Utilizziamo nuovamente i moltiplicatori di Lagrange:

$$L(x, y, z; \lambda) = 6x - 3y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4),$$

ponendo grad $L = 0$ e ricordando l'equazione del vincolo troviamo il sistema

$$\begin{cases} 6 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ -2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases},$$

[0]In effetti, stiamo cercando gli estremanti di una funzione continua in corrispondenza di un vincolo (un'ellisse) chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass (vedi nota successiva) l'esistenza è garantita.

dalle prime tre equazioni otteniamo $x = -\frac{3}{\lambda}$, $y = \frac{3}{2\lambda}$ e $z = \frac{1}{\lambda}$, inserendo questi dati nella quarta troviamo $\lambda^2 = \frac{49}{16}$, quindi $\lambda = \pm\frac{7}{4}$ e abbiamo due soluzioni:

$$x_1 = -\frac{12}{7}, y_1 = \frac{6}{7}, z_1 = \frac{4}{7}, \lambda_1 = \frac{7}{4}$$
$$x_2 = \frac{12}{7}, y_2 = -\frac{6}{7}, z_2 = -\frac{4}{7}, \lambda_2 = -\frac{7}{4};$$

l'hessiano in tutti i punti $(x, y, z)$ ha la seguente forma:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix},$$

e i suoi tre autovalori sono tutti e tre uguali a $\lambda$, pertanto in corrispondenza di $P_1(-\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7})$ $(\lambda > 0)$ avremo un minimo, e in corrispondenza di $P_2(\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{7})$ $(\lambda < 0)$ avremo un massimo.

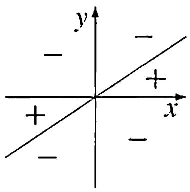
⑥ In questo caso, possiamo ricavare una variabile in funzione delle altre due dall'equazione del vincolo e sostituirla nell'espressione di $f$:

$$z = 2x - 3y, \quad \Rightarrow \quad g(x, y) = f(x, y, 2x - 3y) = x^2y^3(2x - 3y),$$

cerchiamo massimi e minimi (liberi) di $g$, annullando il gradiente otteniamo:

$$\begin{cases} g_x = 6x^2y^3 - 6xy^4 = 0 \\ g_y = 6x^3y^2 - 12x^2y^3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6xy^3(x - y) = 0 \\ 6x^2y^2(x - 2y) = 0 \end{cases}$$

sono soluzione di questo sistema tutti i punti dell'asse $x$ (della forma $(\alpha, 0)$) e tutti i punti dell'asse $y$ (della forma $(0, \beta)$), inoltre in tutti questi punti l'hessiano si annulla; poiché $g(\alpha, 0) = g(0, \beta) = 0$ possiamo studiare il segno di $g$: è composta da tre fattori: $x^2$, $y^3$ e $(2x - 3y)$, $x^2$ è sempre positivo, $y^3$ è positivo al di sopra dell'asse $x$ e negativo al di sotto, $(2x - 3y)$ è positivo al di sotto della retta $y = \frac{2}{3}x$ e negativo al di sopra, pertanto combinando questi risultati il segno di $g$ è rappresentato nella seguente figura:




quindi l'origine e i punti dell'asse $x$ non sono né massimi né minimi, infatti in ogni loro intorno vi sono punti con $g > 0$ e con $g < 0$, i punti dell'asse $y$ sono invece punti di massimo (debole), infatti in ogni loro intorno si trovano solo punti con $g < 0$. Per tornare alla funzione $f$, osserviamo che il generico punto $(0, \beta)$ di $\mathbb{R}^2$ corrisponde, grazie all'equazione del vincolo, al punto $(0, \beta, -3\beta) \in \mathbb{R}^3$, tutti questi punti sono di massimo per $f$ sotto il vincolo $2x - 3y - z = 0$.

## Esercizio 2.22 — Estremi assoluti - 1 Domini chiusi e limitati

*Calcolare il massimo e il minimo assoluto delle seguenti funzioni nei domini accanto specificati:*

① $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$, $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$;
② $f(x, y) = x^2 + y^2 + x - 4y$, $\{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
③ $f(x, y) = xy$, $\{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

### Soluzione

Per una funzione $f(x, y)$ definita e continua in un dominio chiuso e limitato, vale il teorema di Weierstrass[p]. Osserviamo che tutte le funzioni di questo esercizio verificano tale condizione.
La ricerca di punti di massimo e minimo, in questa tipologia di esercizi, si svolge così: innanzitutto si cercano eventuali estremi liberi di $f$ *interni* al dominio (annullando il gradiente, e semmai analizzando il comportamento di $f$ negli eventuali punti di non differenziabilità), dopodiché si procede a studiare il comportamento di $f$ lungo la linea che costituisce la frontiera del dominio in esame, combinando i risultati avremo trovato massimi e minimi assoluti di $f$.

① La funzione $f$ è differenziabile ovunque, annullando il gradiente di grad $f$ troviamo

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

quindi grad $f = 0$ in $P(1, 1)$, che è interno al dominio; per valutarne la natura, esaminiamo l'hessiano:

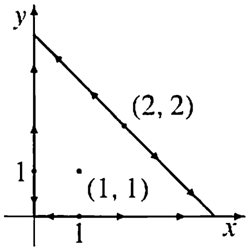
$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \det H(1, 1) = 3 > 0$$

pertanto $P$ è un punto di minimo (libero) per $f$, studiamo il comportamento di $f$ lungo la frontiera:

- lungo il segmento $\{0 \leq x \leq 4, y = 0\}$ la funzione vale $f(x, 0) = x^2 - x$: è un arco della parabola avente concavità rivolta verso l'alto e vertice in $x = \frac{1}{2}$,
- lungo il segmento $\{x = 0, 0 \leq y \leq 4\}$ la funzione vale $f(0, y) = y^2 - y$: è la stessa parabola del punto precedente,
- lungo il segmento $\{0 \leq x \leq 4, x + y = 4\}$ la funzione vale $f(x, 4 - x) = 3(x - 2)^2$: ha un minimo in $x = 2$ e due massimi in $x = 0$ e $x = 4$;

radunando queste informazioni in un grafico (in cui le frecce indicano il verso di crescita della funzione) abbiamo

[p] **Teorema di Weierstrass:** Una funzione $f$ definita e continua in un insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluto.

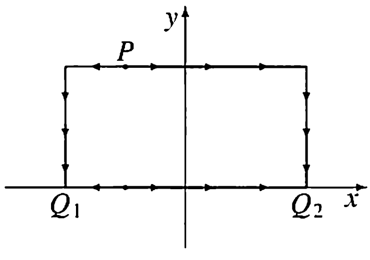



Poiché, grazie al teorema di Weierstrass, sappiamo che $f$ deve avere massimo e minimo assoluto, per trovarli è sufficiente confrontare i valori di $f(x, y)$ in corrispondenza dei punti trovati: si trova che $P(1, 1)$ è minimo assoluto mentre entrambi i punti $(0, 4)$ e $(4, 0)$ sono massimi assoluti (l'origine, invece, è un massimo relativo).

② Anche in questo caso, la funzione è differenziabile ovunque, il gradiente di $f$ si annulla unicamente in $(-\frac{1}{2}, 2)$, che non interessa, in quanto esterno al dominio. All'interno del rettangolo allora, non vi è alcun estremo, il comportamento di $f$ sulla frontiera è il seguente:

- lungo il segmento $\{-1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ la funzione vale $f(x, 0) = x^2+x$: è un arco della parabola avente concavità rivolta verso l'alto e vertice in $x = -\frac{1}{2}$,
- lungo il segmento $\{-1 \leq x \leq 1, y = 1\}$ la funzione vale $f(x, 1) = x^2+x-3$: la stessa parabola del punto precedente, traslata verso il basso,
- lungo il segmento $\{x = -1, 0 \leq y \leq 1\}$ la funzione vale $f(-1, y) = y^2 - 4y$: un arco della parabola avente concavità rivolta verso l'alto e vertice in $y = 2$,
- lungo il segmento $\{x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$ la funzione vale $f(1, y) = y^2 - 4y + 2$: la stessa parabola del punto precedente, traslata verso l'alto;

il grafico corrispondente a questa situazione è




Vi è allora un unico candidato minimo: il punto $P(-\frac{1}{2}, 1)$, che è necessariamente il minimo assoluto; i due candidati massimi sono i punti $Q_1(-1, 0)$ e $Q_2(1, 0)$ confrontando le quote abbiamo $f(-1, 0) = 0$, $f(1, 0) = 2$ pertanto il massimo assoluto è $Q_2$; mentre $Q_1$ è un punto di massimo relativo.

③ La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, annullandone il gradiente si trova l'origine, avente hessiano negativo; quindi la funzione non possiede punti di massimo o minimo nell'interno del dominio. Per studiare il comportamento di $f$ lungo la frontiera, possiamo parametrizzare la circonferenza:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad -\pi \le t \le \pi,$$

lungo la frontiera allora abbiamo

$$g(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4\cos t \sin t = 2\sin 2t$$

e in $[-\pi, \pi]$ la funzione $g$ ha due massimi assoluti in $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = -\frac{3}{4}\pi$ e due minimi assoluti in $t = -\frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{3}{4}\pi$; riportandoci alle coordinate $xy$, la funzione $f$ sulla frontiera ha due punti di massimo in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, due punti di minimo in $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, che sono anche i punti di massimo e minimo assoluto.

### Esercizio 2.23 — Estremi assoluti - 2 Domini illimitati

*Stabilire se le seguenti funzioni (già studiate negli esercizi precedenti) ammettono massimo o minimo assoluto nel loro insieme di definizione:*

① $f(x, y) = x^3 - y^3 + \frac{1}{2}(x - y)^2 - x + y$;
② $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 5y^2 - xy}$;
③ $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
④ $f(x, y, z) = 2\frac{y}{x} + yz + \log x + \log y - 2z$.

### Soluzione

Tutte le funzioni di questo esercizio sono definite in domini non limitati, per determinare la presenza di massimi o minimi assoluti per una funzione di questo genere occorre stabilirne il comportamento quando $x$ o $y$ tendono a $\infty$:

- se si riesce a determinare una direzione lungo la quale $f$ tende a $+\infty$, allora $f$ non potrà ammettere massimo assoluto,
- se si riesce a determinare una direzione lungo la quale $f$ tende a $-\infty$, allora $f$ non potrà ammettere minimo assoluto;

se invece, per esempio, la funzione tenderà a $+\infty$ comunque ci si allontani dall'origine allora l'esistenza di un minimo assoluto dipenderà dal comportamento di $f$ al finito.

① Se osserviamo il comportamento di $f$ lungo la retta $y = x$ abbiamo $f(x, x) = -2x$, poiché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x, x) = -\infty,$$

la funzione non ha né massimo né minimo assoluto.

② Sappiamo che $f$ ha nell'origine un minimo, osserviamo che $f(0,0) = 0$ mentre $f(x, y) > 0$ se $(x, y) \neq (0,0)$, per cui l'unico punto ove $f$ si annulla è minimo assoluto. Per quanto riguarda il massimo assoluto, è sufficiente osservare che, lungo l'asse $x$ per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \to +\infty} 2|x| = +\infty;$$

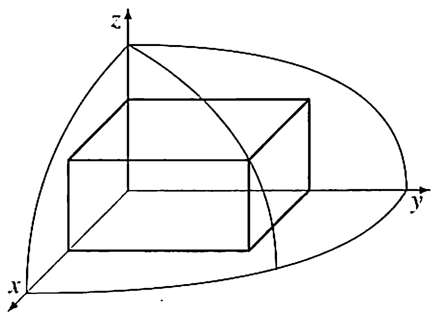
e $f$ non può ammettere massimo assoluto.

③ Abbiamo già visto che il grafico di $f$ è una superficie ottenuta ruotando attorno all'asse $z$ una linea che ha minimo assoluto in $\varrho = 0$ e massimo assoluto in $\varrho = 1$, la funzione avrà pertanto minimo assoluto in $(0,0)$ e massimo assoluto in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

④ Sappiamo che la funzione non ha estremi liberi interni al dominio, per mostrare che non esistono massimi o minimi assoluti è sufficiente osservare che $f(1, 1, z) = 2 - z$, questa funzione al tendere di $z$ a $\pm\infty$ tende a $\mp\infty$.

## Esercizio 2.24 — Calcolo di estremi assoluti – Applicazioni

*Consideriamo i parallelepipedi retti aventi tre facce appoggiate sui piani coordinati e il vertice opposto sulla superficie ellittica* $4x^2 + 3y^2 + z^2 = 24$, *determinare il parallelepipedo avente volume massimo.*




### Soluzione

Sappiamo che il volume di un parallelepipedo avente lati $x, y, z$ vale $V = xyz$; inoltre, poiché il vertice lontano dai piani coordinati deve appartenere alla superficie $4x^2 + 3y^2 + z^2 = 24$, possiamo esprimere una delle variabili in funzione delle altre, per esempio $z = \sqrt{24 - 4x^2 - 3y^2}$. Con tale scelta di $z$, il volume diventa funzione delle sole $x$ e $y$:

$$V = f(x, y) = xy\sqrt{24 - 4x^2 - 3y^2},$$

dobbiamo cercare il massimo di questa funzione per $(x, y) \in D$ ove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 + 3y^2 \leq 24\};$$

osserviamo subito che $f(x, y)$ è uguale a zero sui bordi di $D$, mentre è maggiore di 0 all'interno, il massimo di $f$ sarà quindi un punto interno a $D$, poiché inoltre $f$ è differenziabile in tutto l'interno di $D$, tale massimo dev'essere un punto che annulla il gradiente di $f$, deve allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y(24 - 8x^2 - 3y^2)}{\sqrt{24 - 4x^2 - 3y^2}} = 0 \\ \dfrac{x(24 - 4x^2 - 6y^2)}{\sqrt{24 - 4x^2 - 3y^2}} = 0 \end{cases}$$

poiché cerchiamo punti interni a $D$, possiamo trascurare $x = 0$ e $y = 0$, occorre allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} 24 - 8x^2 - 3y^2 = 0 \\ 24 - 4x^2 - 6y^2 = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}, y = \frac{2}{3}\sqrt{6};$$

e quindi $z = 2\sqrt{2}$, poiché il punto trovato è l'unico punto interno a $D$, è senz'altro il massimo che cercavamo; il volume massimo è allora

$$V_{\max} = f\left(\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{6}.$$

### 2.1.4 Funzioni implicite

**Esercizio 2.25 — Teorema di Dini per $f(x, y) = 0$**

*In base al teorema di Dini, stabilire per quali tra le seguenti equazioni si può garantire che definiscano implicitamente una funzione $y(x)$ nell'intorno del punto indicato:*

① $e^{xy} + x - y - e = 0$, $P(1, 1)$;
② $3xy^2 - x^3y + 3xy - 48 = 0$, $P(2, 3)$;
③ $y^2 + \log(xy) + \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - 1 = 0$, $P(1, 1)$;
④ $x^3y - xy^3 + ye^x - y = 0$, $P(0, 1)$.

**Soluzione**

Sovente, a una equazione del tipo $f(x, y) = 0$ corrisponde nel piano una curva; preso un punto appartenente alla curva, ci interessa determinare se in un intorno di quel punto si può esprimere la curva con un'equazione del tipo $y = y(x)$; una condizione sufficiente a che ciò sia possibile è data dal teorema di Dini[q].

[q]**Teorema di Dini:** Data $f(x, y)$, se $f$ è continua e derivabile nel punto $(x_0, y_0)$ e inoltre $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, allora nell'intorno di $(x_0, y_0)$ esiste una funzione $y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x_0, y_0) = 0$; inoltre $y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$.

① Sia $f(x, y) = e^{xy} + x - y - e$, osserviamo che $f$ è continua e derivabile in $(1, 1)$, inoltre $f(1, 1) = 0$ e, visto che $f_y(x, y) = xe^{xy} - 1$, $f_y(1, 1) = e - 1 \neq 0$. Valgono allora le ipotesi del teorema di Dini, e l'equazione definisce una funzione $y(x)$ nell'intorno di $x = 1$.

② Detta $f(x, y) = 3xy^2 - x^3y + 3xy - 48$, osserviamo che $f$ è continua e derivabile in $(2, 3)$, inoltre $f(2, 3) = 0$ e, poiché $f_y(x, y) = 6xy - x^3 + 3x$, $f_y(2, 3) = 34 \neq 0$. Valgono allora le ipotesi del teorema di Dini, e l'equazione definisce una funzione $y(x)$ nell'intorno di $x = 2$.

③ Detta $f(x, y) = y^2 + \log(xy) + \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - 1$, osserviamo che $f$ è continua e derivabile in $(1, 1)$, inoltre $f(1, 1) = 0$ e, poiché $f_y(x, y) = 2y + \frac{1}{y}$, $f_y(1, 1) = 3 \neq 0$. Valgono allora le ipotesi del teorema di Dini, e l'equazione definisce una funzione $y(x)$ nell'intorno di $x = 1$.

④ Detta $f(x, y) = x^3y - xy^3 + ye^x - y$, osserviamo che $f$ è continua e derivabile in $(0, 1)$, inoltre $f(0, 1) = 0$, ma, poiché $f_y(x, y) = x^3 - 3xy^2 + e^x - 1$, $f_y(0, 1) = 0$. Le ipotesi del teorema di Dini non sono tutte verificate, e non possiamo garantire che questa equazione definisca una funzione $y(x)$ nell'intorno di $x = 0$.

## Esercizio 2.26 — Grafico qualitativo nell'intorno di un punto assegnato di una funzione definita implicitamente da $f(x, y) = 0$

*Disegnare un grafico qualitativo nell'intorno del punto indicato delle funzioni definite implicitamente nei punti ①, ② e ③ dell'esercizio precedente.*

### Soluzione

Per disegnare un grafico qualitativo di una funzione $f(x)$ nell'intorno di un punto $x_0$, è in generale sufficiente conoscere i valori $f(x_0)$, $f'(x_0)$ e $f''(x_0)$. Vogliamo disegnare un grafico qualitativo delle $y(x)$ definite implicitamente nell'esercizio precedente, ovviamente $y(x_0) = y_0$, per conoscere la derivata prima $y'(x_0)$ possiamo usare la tesi del teorema di Dini, ma poiché abbiamo bisogno anche della derivata seconda, seguiremo un'altra strada.

① Poiché $(x_0, y_0) = (1, 1)$, sappiamo che $y(1) = 1$, per determinare $y'(1)$ e $y''(1)$ riprendiamo l'equazione $e^{xy} + x - y - e = 0$ e riscriviamola mettendo in evidenza che la variabile $y$ è diventata $y(x)$:

$$e^{xy(x)} + x - y(x) - e \equiv 0,$$

quella che abbiamo scritto qui sopra è un'espressione il cui primo membro è funzione della sola variabile $x$ (anche attraverso la funzione $y(x)$) che lungo $y(x)$ si mantiene identicamente nulla; calcoliamo le derivate rispetto a $x$ di entrambi i membri, che essendo identici avranno derivate identiche:

$$e^{xy(x)}(y(x) + xy'(x)) + 1 - y'(x) \equiv 0$$

possiamo adesso porre $x = 1$ in questa identità, sappiamo che $y(1) = 1$, l'unica quantità a rimanere incognita sarà $y'(1)$:

$$e^{1 \cdot 1}[1 + 1 \cdot y'(1)] + 1 - y'(1) = 0, \quad \Rightarrow \quad y'(1) = \frac{1+e}{1-e};$$

pertanto $y'(1) < 0$ e la funzione $y(x)$ è decrescente nell'intorno di $x = 1$. Per calcolare la derivata seconda $y''(1)$ deriviamo nuovamente rispetto a $x$ l'identità $e^{xy(x)}(y(x) + xy'(x)) + 1 - y'(x) \equiv 0$:

$$e^{xy(x)}[y(x) + xy'(x)]^2 + e^{xy(x)}[2y'(x) + xy''(x)] - y''(x) = 0,$$

sostituendo $x = 1$, $y(1) = 1$ e $y'(1) = \frac{1+e}{1-e}$ troviamo

$$e\left[1 + \frac{1+e}{1-e}\right]^2 + e\left[2\frac{1+e}{1-e} + y''(1)\right] - y''(1) = 0 \Rightarrow y''(1) = \frac{2e(e^2-3)}{(e-1)^3}$$

e $y''(1) > 0$. La funzione $y(x)$ passa per il punto $(1, 1)$, è decrescente e ha la concavità rivolta verso l'alto.

② Ripetiamo lo stesso procedimento del punto precedente: da $3x[y(x)]^2 - x^3y(x) + 3xy(x) - 48 \equiv 0$ derivando otteniamo

$$3[y(x)]^2 + 6xy'(x) - 3x^2y(x) - x^3y'(x) + 3y(x) + 3xy'(x) \equiv 0$$

ponendo $x = 2$ e sostituendo poi $y(2) = 3$ troviamo

$$3[y(2)]^2 + 12y'(2) - 12y(2) - 8y'(2) + 3y(2) + 6y'(2) = 0 \overset{y(2)=3}{\Rightarrow} 10y'(2) = 0,$$

quindi $y'(2) = 0$, deriviamo nuovamente, raccogliendo troviamo:

$$6y(x)y'(x) + 12y'(x) + 9xy''(x) - 6xy(x) - 6x^2y'(x) - x^3y''(x) \equiv 0,$$

ponendo $x = 2$, $y(2) = 3$ e $y'(2) = 0$ troviamo $y''(2) = \frac{18}{5} > 0$. La funzione $y(x)$ passa quindi per il punto $(2, 3)$, e ivi ha un minimo.

③ Anche questa volta ripetiamo il procedimento, da $[y(x)]^2 + \log x + \log[y(x)] + \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - 1 \equiv 0$ derivando otteniamo:

$$2y(x)y'(x) + \frac{1}{x} + \frac{y'(x)}{y(x)} + 4\cos(\pi x) \equiv 0,$$

sostituendo $x = 1$, troviamo

$$2y(1)y'(1) + 1 + \frac{y'(1)}{y(1)} + 4\cos(\pi) = 0 \quad \overset{y(1)=1}{\Rightarrow} \quad 3y'(1) = 3,$$

quindi $y'(1) = 1$, procediamo:

$$2[y'(x)]^2 + 2y(x)y''(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{y''(x)y(x) - [y'(x)]^2}{[y(x)]^2} - 4\pi\sin(\pi x) \equiv 0,$$

poniamo $x = 1$:

$$2[y'(1)]^2 + 2y(1)y''(1) - 1 + \frac{y''(1)y(1) - [y'(1)]^2}{[y(1)]^2} = 0 \quad \overset{\substack{y(1)=1\\ y'(1)=1}}{\Rightarrow} \quad y''(1) = 0,$$

quindi in $x = 1$ la funzione può avere un flesso, per una conferma ci occorre la derivata terza:

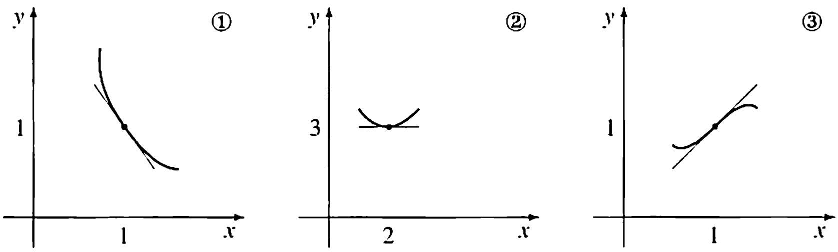
$$4y'(x)y''(x)+2y'(x)y''(x) + 2y(x)y'''(x)+\frac{2}{x^3}+$$

$$+\frac{y'''(x)y(x)-y''(x)y'(x)}{[y(x)]^2}-2\frac{y''(x)y'(x)y(x)-[y'(x)]^3}{[y(x)]^3} - 4\pi^2\cos(\pi x) \equiv 0,$$

da cui, sostituendo $x = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 0$ ricaviamo

$$y'''(1) = -\frac{4}{3}(1+\pi^2).$$

pertanto la funzione ha un flesso discendente in $x = 1$.
I grafici qualitativi delle tre funzioni sono i seguenti:




**Esercizio 2.27 — Formula di Taylor per $y(x)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$**

*Dopo aver verificato che l'equazione*

$$e^{xy} - \sin(xy) - y = 0$$

*definisce implicitamente una funzione $y(x)$ nell'intorno del punto $P(0, 1)$, scriverne la formula di MacLaurin arrestata al III ordine con il resto secondo Peano.*

**Soluzione**

Detta $f(x, y) = e^{xy}-\sin(xy)-y$, osserviamo che $f_y(x, y) = xe^{xy}-x\cos(xy)-1$ e che $f(0, 1) = 0$ mentre $f_y(0, 1) = -1 \neq 0$; le ipotesi del teorema di Dini sono soddisfatte. Per scrivere la formula di MacLaurin arrestata al III ordine abbiamo bisogno, oltre a $y(0) = 1$, di $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$. Come nel precedente esercizio, deriviamo l'identità $e^{xy(x)} - \sin(xy(x)) - y(x) \equiv 0$ rispetto a $x$:

$$[e^{xy(x)} - \cos(xy(x))][y(x) + xy'(x)] - y'(x) \equiv 0$$

la derivata seconda è

$$[e^{xy(x)} + \sin(xy(x))][y(x) + xy'(x)]^2 +$$
$$+[e^{xy(x)} - \cos(xy(x))][2y'(x) + xy''(x)] - y''(x) \equiv 0$$

la derivata terza

$$[e^{xy(x)} + \cos(xy(x))][y(x) + xy'(x)]^3 +$$
$$+[e^{xy(x)} - \cos(xy(x))][3y''(x) + xy'''(x)] +$$
$$+3[e^{xy(x)} + \sin(xy(x))][y(x) + xy'(x)][2y'(x) + xy''(x)] - y'''(x) \equiv 0$$

sostituendo nella prima $x = 0$, $y(0) = 1$ troviamo $y'(0) = 0$, sostituendo questo valore nella seconda troviamo $y''(0) = 1$, sostituendo $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ nell'ultima troviamo $y'''(0) = 2$, pertanto la formula di MacLaurin cercata è

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

## Esercizio 2.28 — Teorema di Dini per $f(x, y, z) = 0$

*Stabilire, in base al teorema di Dini, se l'equazione*

$$\mathrm{Ch}\,(xz) + \cos(xy) - yz = 0$$

*definisce implicitamente una funzione $z(x, y)$ nell'intorno del punto $P(0, 1, 2)$.*

### Soluzione

In maniera del tutto analoga al caso bidimensonale, il teorema di Dini stabilisce una condizione sufficiente per l'univoca risolubilità di un'equazione in tre variabili $f(x, y, z) = 0$: per poterla risolvere rispetto a $z$, ossia per poter esprimere univocamente la funzione $z(x, y)$, basta che, in corrispondenza di una radice $(x_0, y_0, z_0)$, sia $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Nel nostro caso, detta $f(x, y, z) = \mathrm{Ch}\,(xz) + \cos(xy) - yz$, osserviamo che $f(0, 1, 2) = 0$ e che, poiché $f_z(x, y, z) = x\mathrm{Sh}\,(xz) - y$, $f_z(0, 1, 2) = -1 \neq 0$, le ipotesi del teorema di Dini sono verificate, pertanto nell'intorno del punto $P(0, 1, 2)$ l'equazione definisce implicitamente una funzione $z(x, y)$.

## Esercizio 2.29 — Piano tangente a una superficie definita implicitamente da $f(x, y, z) = 0$

*Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $z(x, y)$ dell'esercizio precedente, precisando se il piano tangente attraversa o meno nel punto $P(0, 1, 2)$ il grafico della funzione.*

**Soluzione**

Abbiamo già controllato che le ipotesi del teorema di Dini siano verificate. L'equazione del piano tangente è

$$z - z(0,1) = z_x(0,1)(x-0) + z_y(0,1)(y-1);$$

sappiamo che $z(0,1) = 2$, per determinare $z_x(0,1)$ e $z_y(0,1)$ deriviamo rispetto a $x$ e a $y$ l'identità di partenza, ove $z$ è diventata $z(x,y)$: $f(x,y,z(x,y)) = \mathrm{Ch}\,[xz(x,y)] + \cos(xy) - yz(x,y) \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \mathrm{Sh}\,(xz(x,y))[z(x,y) + xz_x(x,y)] - y\sin(xy) - yz_x(x,y) \equiv 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \mathrm{Sh}\,(xz(x,y))[xz_y(x,y)] - x\sin(xy) - z(x,y) - yz_y(x,y) \equiv 0 \end{cases}$$

sostituendo $x = 0$, $y = 1$, $z(0,1) = 2$ troviamo

$$-z_x(0,1) = 0 \qquad -2 - z_y(0,1) = 0,$$

perciò $z_x(0,1) = 0$, $z_y(0,1) = -2$ e l'equazione del piano tangente è $z - 2 = -2(y-1)$, ossia $2y + z = 4$.

Per decidere se il piano tangente attraversa o meno la funzione, occorrono le derivate seconde (scriveremo $z$ anziché $z(x,y)$... per brevità):

$$\begin{cases} \mathrm{Ch}\,(xz)[z + xz_x]^2 + \mathrm{Sh}\,(xz)[2z_x + xz_{xx}] - y^2\cos(xy) - yz_{xx} \equiv 0 \\ \\ \mathrm{Ch}\,(xz)[z + xz_x][xz_y] + \mathrm{Sh}\,(xz)[z_y + xz_{xy}] + \\ \\ \qquad - \sin(xy) - xy\cos(xy) - z_x - yz_{xy} \equiv 0 \\ \\ \mathrm{Sh}\,(xz)[xz_{yy}] + \mathrm{Ch}\,(xz)[xz_y]^2 - x^2\cos(xy) - 2z_y - yz_{yy} \equiv 0 \end{cases}$$

sostituendo $x = 0$, $y = 1$, $z = z(0,1) = 2$, $z_x = z_x(0,1) = 0$ e $z_y = z_y(0,1) = -2$, troviamo

$$\begin{cases} 4\mathrm{Ch}\,(0) - 1 - z_{xx} = 0 \\ -z_{xy} = 0 \\ 4 - z_{yy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{xx}(0,1) = 3 \\ z_{xy}(0,1) = 0 \\ z_{yy}(0,1) = 4 \end{cases};$$

pertanto l'hessiano in $(0,1)$ è

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} z_{xx}(0,1) & z_{xy}(0,1) \\ z_{xy}(0,1) & z_{yy}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

quindi la superficie si trova tutta dalla stessa parte (nella fattispecie: al di sopra, poiché $z_{xx}$ e $z_{yy}$ sono positive) rispetto al piano tangente.

## 2.2 Esercizi proposti

**30** Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni:

① $f(x, y) = \log \dfrac{x}{y}$; ② $f(x, y) = \dfrac{\arccos x}{\arcsin y}$;

③ $f(x, y) = \sqrt{x - x^3 - xy^2}$; ④ $f(x, y) = \log[(x + |x|) + (y + |y|)]$.

$$\left[ ① \; \{x > 0, y > 0\} \cup \{x < 0, y < 0\} \right]$$
$$\left[ ② \; \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, y \neq 0\} \right]$$
$$\left[ ③ \; \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \ge 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \ge 1 \\ x \le 0 \end{array} \right\} \right]$$
$$\left[ ④ \; \mathbb{R}^2 \setminus \{x \le 0, y \le 0\} \right]$$

**31** Determinare le curve di livello delle seguenti funzioni:

① $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$; ② $f(x, y) = \arctan\left(2 - \sqrt{e^{12} + x^2 + y^2 - 2x}\right)$.

$$\left[ ① \begin{cases} k = -1: & x = 0 \\ k \neq -1: & \text{le semirette } y = \dfrac{k-1}{k+1}x, \text{ con } x > 0 \text{ o } x < 0 \end{cases} \right]$$
$$\left[ ② \; \text{le circonferenze } (x - 1)^2 + y^2 = K, \; (K \ge 0) \right]$$

**32** Calcolare i seguenti limiti

$$① \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}; \qquad ② \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \sin(xy)}{x^4 + y^2},$$

$$[① \; 0; \; ② \; \nexists]$$

**33** Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni nei punti a fianco specificati:

① $f(x, y) = (x^2 + y)(x + 3y + e^{x^2 y})$, in $(0, 1)$;

② $f(x, y) = \dfrac{x + y}{ye^x + 1}$, in $(0, 1)$;

③ $f(x, y) = e^{x \sin y}$, in $(1, 1)$;

④ $f(x, y) = (x + y)^{2x - 3y}$, in $(2, 1)$.

$$\left[ ① \; \mathbf{i} + 7\mathbf{j}; \; ② \; \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} \right]$$
$$\left[ ③ \; e^{\sin 1}[(\sin 1)\mathbf{i} + (\cos 1)\mathbf{j}]; \; ④ \; (1 + 6 \log 3)\mathbf{i} + (1 - 9 \log 3)\mathbf{j} \right]$$

**34** Calcolare, se esistono, le seguenti derivate direzionali:

① derivata di $f(x, y) = x + xy - y^3 - x^2y$ in $P(2, -1)$ nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$;

② derivata di $f(x, y) = e^{\sin x \cos y}$ in $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ nella direzione della bisettrice del primo quadrante;

③ derivata di $f(x, y) = \log \frac{x}{y}$ in $P(2, 1)$, nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

$$\left[① \frac{31}{5};\ ② 0;\ ③ \frac{6}{\sqrt{29}}\right]$$

**35** Data $f(x, y) = x \sin xy + y \cos x$, calcolare il valore massimo che può assumere la sua derivata direzionale nel punto $P(\frac{\pi}{6}, 0)$.

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36}\right]$$

**36** Scrivere il polinomio di Taylor arrestato al II ordine delle seguenti funzioni, nel punto indicato:

① $f(x, y) = \sin(2x)(y + e^{-xy}) - 2\log(x + y)$, in $(0, 1)$;

② $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, in $(-1, 1)$;

③ $f(x, y) = \log(2x + \cos(xy))$, in $(1, \pi)$;

④ $f(x, y) = e^{-xy^2} + \cos(2x^2y)$, in $(0, \pi)$;

⑤ $f(x, y, z) = 2x(y + 1)^2 + e^{yz^2} - \cos(xyz)$, in $(1, 0, -2)$.

$$\left[① T_2 = 2x - 2(y - 1) - x^2 + 4x(y - 1) + (y - 1)^2\right]$$

$$\left[② T_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}(x + 1)(y - 1) + \frac{1}{4}(y - 1)^2\right]$$

$$\left[③ T_2 = 2(x - 1) + \frac{\pi^2 - 4}{2}(x - 1)^2 + \pi(x - 1)(y - \pi) + \frac{1}{2}(y - \pi)^2\right]$$

$$\left[④ T_2 = 2 - \pi^2 x + \frac{\pi^4}{2}x^2 - 2\pi x(y - \pi)\right]$$

$$\left[⑤ T_2 = 2 + 2(x - 1) + 8y + 12y^2 + 4(x - 1)y - 4y(z + 2)\right]$$

**37** Determinare massimi e minimi liberi delle seguenti funzioni:

① $f(x, y) = x^2y - 2xy^2 - y$; ② $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4y$;

③ $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy^2 - 15x$; ④ $f(x, y) = x(x^2 + 6y + 3y^2)$;

⑤ $f(x,y) = xy^2 - 2y^2 - x^2$; ⑥ $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^4$;
⑦ $f(x,y) = 2x^3 - 3y^2 + 6xy$; ⑧ $f(x,y) = 2x^2 - x^4 - 2x^2y^2$.

[① $\nexists$; ② min in $(0,-2)$; ③ min in $(\sqrt{5},0)$, max in $(-\sqrt{5},0)$]
[④ min in $(1,-1)$, max in $(-1,-1)$; ⑤ max in $(0,0)$]
[⑥ min in $(-1,1)$ e $(1,-1)$; ⑦ max in $(-1,-1)$]
[⑧ max in $(\pm 1,0)$ e $(0,\alpha)$ $|\alpha| < 1$, min in $(0,\alpha)$ $|\alpha| > 1$]

**38** Determinare (se esistono) massimi e minimi assoluti di $f(x,y)$ negli insiemi indicati a fianco:

① $x^2 + y^2 + 2y$, $2y - 3x = 11$;
② $(x+y)^2 + (y-2)^2 - 4xy$, $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

[① min in $(-3,1)$; ② min in $(1,\frac{3}{2})$, max in $(1,0)$]

**39** Scrivere il polinomio di Taylor arrestato al III ordine delle funzioni $y(x)$ definite implicitamente dalle seguenti equazioni nell'intorno dei punti indicati

① $x^2e^{-xy} + 2x(y-1) = -1$, $(1,0)$;
② $\cos(x^2y) - \log(1+xy) + y = 2$, $(0,1)$;
③ $xy - ye^{x-2} + \sqrt{x^2+y^2}$, $(2,0)$.

$$\left[① \; T_3 = -(x-1)^2 - (x-1)^3; \; ② \; T_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$

$$\left[③ \; T_3 = -(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^3\right]$$

# 3

# Integrazione multipla

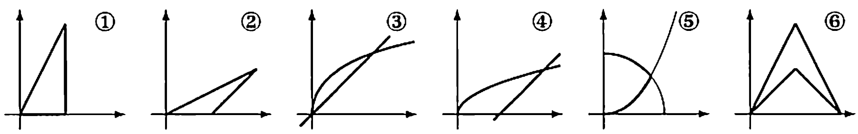
## 3.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### 3.1.1 Domini in $\mathbb{R}^2$

**Esercizio 3.1 — Domini in coordinate cartesiane
Domini $x$-semplici e $y$-semplici**

*Esprimere mediante opportune disequazioni contenenti le coordinate cartesiane $x$ e $y$ i seguenti domini:*

① $D_1$: *triangolo avente vertici nell'origine e nei punti* $(1, 0)$ *e* $(1, 2)$;
② $D_2$: *triangolo avente vertici nell'origine e nei punti* $(1, 0)$ *e* $(2, 1)$;
③ $D_3$: *porzione limitata del piano* $xy$ *compresa tra* $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x$;
④ $D_4$: *porzione limitata del piano* $xy$ *al di sotto di* $y = \sqrt{x}$ *e al di sopra dell'asse* $x$ *e della retta* $y = x - 2$;
⑤ $D_5$: *porzione di cerchio* $x^2 + y^2 \leq 1$ *contenuta nel primo quadrante, al di sopra della parabola* $y = x^2$;
⑥ $D_6$: *poligono* $OABC$ *avente vertici nei punti* $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 0)$ *e* $C(1, 2)$.




**Soluzione**

In generale le disequazioni necessarie a definire un dominio si ottengono dalle equazioni delle linee che definiscono le frontiere scritte, a seconda dei casi, come $y = y(x)$ o come $x = x(y)$.

① Il dominio $D_1$ è costituito dai punti $(x, y)$ all'interno del triangolo mostrato in figura; possiamo esprimerli agevolmente sia assegnando le $y$ in funzione delle $x$, sia assegnando le $x$ in funzione delle $y$; nel primo caso, $x$ può assumere qualsiasi valore tra 0 e 1 e, fissata la $x$, i punti di $D_1$ si trovano al di sotto della retta $y = 2x$, e pertanto la loro ordinata $y$ può assumere solo valori maggiori di 0 e minori di $2x$, scriveremo

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\};$$

nel secondo caso, $y$ può assumere qualsiasi valore tra 0 e 2 mentre, fissata la $y$, la $x$ deve assumere valori minori di 1 e maggiori di $\frac{y}{2}$; avremo allora[a]

$$D_1 = \left\{0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

② Anche in questo caso, possiamo esprimere $D_2$ sia assegnando $y$ in funzione di $x$, sia assegnando $x$ in funzione di $y$; notiamo però che se optiamo per esprimere $D_2$ assegnando $y$ in funzione di $x$ sarà necessario "spezzare" la formula, infatti per alcuni valori di $x$ la corrispondente $y$ varia tra 0 e $\frac{x}{2}$, mentre per altri valori la $y$ varia tra $x - 1$ e $\frac{x}{2}$, quindi:

$$D_2 = \left\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\right\} \cup \left\{1 \leq x \leq 2, x - 1 \leq y \leq \frac{x}{2}\right\};$$

più comoda risulta invece l'espressione di $D_2$ assegnando $x$ in funzione di $y$:

$$D_2 = \{0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq y + 1\}.$$

③ Anche in questo caso, entrambe le scelte possono andare bene:

$$D_3 = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\} \text{ oppure } D_3 = \{0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\};$$

notiamo che nel secondo caso le equazioni che compaiono nell'espressione di $D_3$ sono lievemente più semplici (non compare la radice quadrata).

④ Siamo in un caso analogo al ②: l'espressione di $D_4$ è senz'alcun dubbio più semplice se scritta in funzione di $y$; osserviamo che il punto d'intersezione tra la retta $y = x - 2$ e la curva $y = \sqrt{x}$ è il punto $P(4, 2)$, quindi

$$D_4 = \{0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}.$$

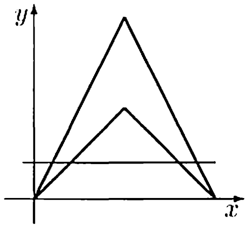
⑤ In questo caso, conviene esprimere $D_5$ in funzione di $x$: osserviamo che la parabola $y = x^2$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si incontrano (nel I quadrante) nel punto di ascissa $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, pertanto

$$D_5 = \left\{0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, x^2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

⑥ Tutti gli esempi precedenti contemplavano domini che erano contemporaneamente $x$-semplici e $y$-semplici, cioè domini per i quali si poteva scegliere se esprimere la frontiera con $y$ in funzione di $x$ o $x$ in funzione di $y$, e la scelta era dettata unicamente da ragioni di comodità.

[a] D'ora in avanti, quando non ci saranno ambiguità, ometteremo la dicitura "$(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$".

In un caso come questo, invece, la situazione è differente, il dominio non è più $x$-semplice, infatti vi sono dei valori della $y$ (quelli tra 0 e 1, per capirci) in corrispondenza dei quali la $x$ non varia in un intervallo, graficamente: una retta $y = \alpha$ con $0 < \alpha < 1$ attraversa $D_6$ in due intervalli distinti:




invece, $D_6$ è $y$-semplice, anche se la sua espressione va "spezzata" in due parti[b]:

$$D_6 = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\} \cup \{1 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq 4 - 2x\}.$$

### Esercizio 3.2 — Domini in coordinate polari

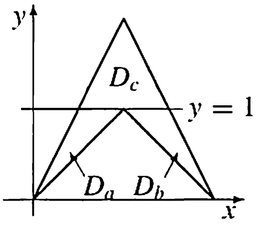
*Esprimere mediante opportune disequazioni contenenti le coordinate polari $\varrho$ e $\vartheta$ i seguenti domini:*

① $D_1$: *porzione del primo quadrante interna alla circonferenza* $x^2 + y^2 = 2$;
② $D_2$: *porzione di piano compresa tra le circonferenze* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 4$, *al di sopra dell'asse delle ascisse e al di sotto della retta* $y = \sqrt{3}x$;
③ $D_3$: *porzione del primo quadrante interna alla circonferenza* $x^2 + y^2 - x = 0$;
④ $D_4$: *porzione del primo quadrante esterna alla circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$ *e al di sotto della retta* $x + y = 3$;
⑤ $D_5$: *porzione del primo quadrante interna alla circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$ *e esterna alla circonferenza* $x^2 + y^2 - 2y = 0$;
⑥ $D_6$: *porzione di piano interna ad entrambe le circonferenze* $x^2 + y^2 - 2x = 0$ *e* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

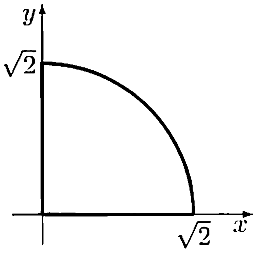
### Soluzione

① Dobbiamo descrivere, in termini di $\varrho$ e $\vartheta$, il quarto di cerchio di raggio $\sqrt{2}$ che si trova nel primo quadrante:

[b]In ogni caso, è sempre possibile considerare $D_6$ come unione di tre domini $x$-semplici, dividendolo con la retta $y = 1$, in questo caso $D_6 = D_a \cup D_b \cup D_c$, con



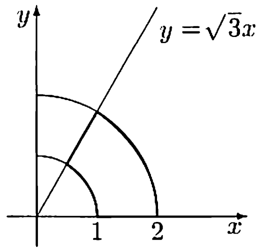

$$D_a = \left\{0 \leq y \leq 1, \tfrac{y}{2} \leq x \leq y\right\}$$
$$D_b = \left\{0 \leq y \leq 1, 2 - y \leq x \leq 2 - \tfrac{y}{2}\right\}$$
$$D_c = \left\{1 \leq y \leq 2, \tfrac{y}{2} \leq x \leq 2 - \tfrac{y}{2}\right\}$$




si ottiene immediatamente

$$D_1 = \left\{0 \leq \varrho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

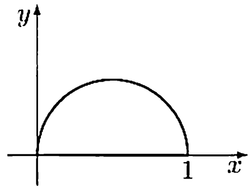
② $D_2$ è il seguente:




indipendentemente da $\vartheta$, $\varrho$ varia tra 1 e 2; $\vartheta$ è compreso tra 0 e $\arctan\sqrt{3}$ quindi

$$D_2 = \left\{1 \leq \varrho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\right\}.$$

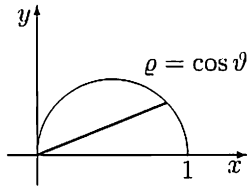
③ $D_3$ è dato dal mezzo cerchio compreso nel primo quadrante:




osserviamo che l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 - x = 0$, scritta in coordinate polari, diventa

$$(\varrho\cos\vartheta)^2 + (\varrho\sin\vartheta)^2 - \varrho\cos\vartheta = 0, \quad \Rightarrow \quad \varrho(\varrho - \cos\vartheta) = 0,$$

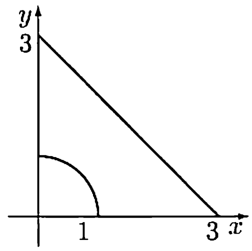
poiché $\varrho = 0$ solo nell'origine, le coordinate polari dei punti della semicirconferenza sono legate dall'equazione $\varrho = \cos\vartheta$ (valida se $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$) si vede allora che, fissato un angolo $\vartheta$, i corrispondenti valori di $\varrho$ (vedi figura)




variano tra 0 e $\cos\vartheta$, pertanto[c]

$$D_3 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le \cos\vartheta\right\}.$$

④ Il disegno del dominio $D_4$ è



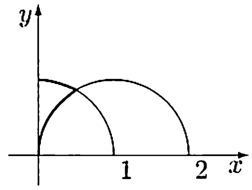

si vede immediatamente che $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ e che $\varrho \ge 1$, per determinare il secondo estremo di variazione di $\varrho$ in funzione di $\vartheta$ riscriviamo in coordinate polari l'equazione della retta $x + y = 3$ e risolviamola rispetto a $\varrho$:

$$\varrho\cos\vartheta + \varrho\sin\vartheta = 3, \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{3}{\cos\vartheta + \sin\vartheta};$$

pertanto

$$D_4 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 1 \le \varrho \le \frac{3}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}\right\}.$$

⑤ Il disegno di $D_5$ è

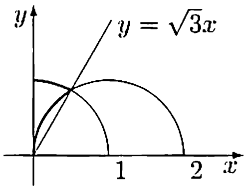



mettendo a sistema le equazioni delle due circonferenze, otteniamo le coordinate dei due punti ove esse si intersecano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

[c]Come regola generale, per esprimere i domini in coordinate polari conviene scrivere $\varrho$ dipendente da $\vartheta$.

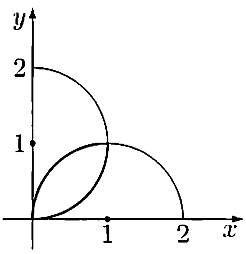
osserviamo che la retta che passa per l'origine e per il punto d'intersezione delle due circonferenze nel I quadrante è $y = \sqrt{3}x$:



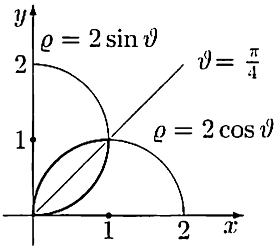

tale retta, abbiamo già visto, corrisponde a $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, quindi per quanto riguarda $D_5$ abbiamo $\frac{\pi}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$; per ciascun valore di $\vartheta$, la prima intersezione della semiretta "$\vartheta$ = costante" con il dominio è sulla circonferenza $\varrho = 2\cos\vartheta$, l'ultima sulla circonferenza $\varrho = 1$, cioè i corrispondenti valori di $\varrho$ variano tra $2\cos\vartheta$ e 1, quindi

$$D_5 = \left\{\frac{\pi}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\, 2\cos\vartheta \le \varrho \le 1\right\}.$$

⑥ Il dominio $D_6$ è




abbiamo già ricavato l'equazione in coordinate polari della circonferenza centrata in $(1, 0)$: $\varrho = 2\cos\vartheta$, in modo analogo l'equazione dell'altra circonferenza è $\varrho = 2\sin\vartheta$, e ovviamente le due circonferenze si intersecano in corrispondenza di $\vartheta = \frac{\pi}{4}$:




e quindi su ogni semiretta "$\vartheta$ = costante", la prima intersezione con il dominio avviene nell'origine ($\varrho = 0$), l'ultima in corrispondenza di $\varrho = 2\sin\vartheta$ prima e $\varrho = 2\cos\vartheta$ poi:

$$D_6 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4},\, 0 \le \varrho \le 2\sin\vartheta\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le \varrho \le 2\cos\vartheta\right\}.$$

## 3.1.2 Integrali doppi

### Esercizio 3.3 — Integrali doppi e integrali iterati

*Scrivere sotto forma di integrale iterato l'integrale doppio*

$$\iint_D (\sqrt{x} + xy^2)\, dx\, dy,$$

*ove D è il triangolo avente vertici nell'origine e nei punti* $(1, 0)$ *e* $(1, 1)$, *considerando D sia come dominio x-semplice sia come dominio y-semplice.*

**Soluzione**

Dato l'integrale doppio

$$I = \iint_T f(x, y)\, dx\, dy,$$

da trasformare in integrale iterato, se il dominio $T$ è $x$-semplice

$$T = \{a \le y \le b, h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

la trasformazione in integrale iterato è

$$I = \int_a^b \left( \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b dy \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y)\, dx;$$

mentre, se il dominio $T$ è $y$-semplice

$$T = \{\alpha \le x \le \beta, g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

la trasformazione in integrale iterato è

$$I = \int_\alpha^\beta \left( \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_\alpha^\beta dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Esprimendo $D$ come dominio $x$-semplice e come dominio $y$-semplice otteniamo, rispettivamente

$$D = \{0 \le y \le 1, y \le x \le 1\}, \qquad D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

pertanto, considerando $D$ $x$-semplice

$$\iint_D (\sqrt{x} + xy^2)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{x=y}^{x=1} (\sqrt{x} + xy^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{x=y}^{x=1} \right\} dy = \int_0^1 \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^4 \right) dy$$

$$= \left[ \frac{2}{3}y - \frac{4}{15}\sqrt{y^5} + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{10}y^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

invece, considerando $D$ $y$-semplice

$$\iint_D (\sqrt{x}+xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=x} (\sqrt{x}+xy^2)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \left\{ \left[ \sqrt{x}y + \frac{1}{3}xy^3 \right]_{y=0}^{y=x} \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( \sqrt{x^3} + \frac{1}{3}x^4 \right) \mathrm{d}x$$
$$= \left[ \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{1}{15}x^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

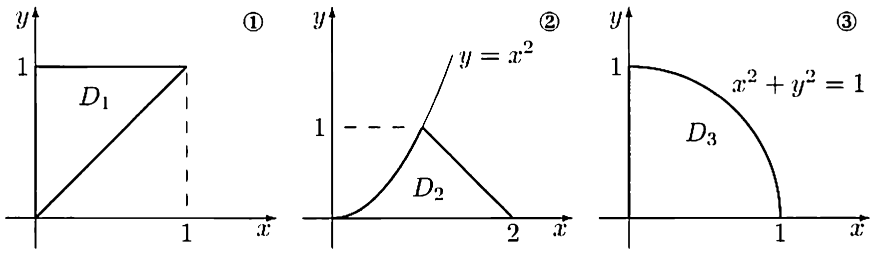
Ovviamente, i due valori coincidono.

## Esercizio 3.4 — Integrali in coordinate cartesiane Scelta dell'ordine di integrazione

*Calcolare i seguenti integrali doppi:*

$$① \iint_{D_1} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \qquad ② \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \qquad ③ \iint_{D_3} x^2y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

*ove*




### Soluzione

La scelta dell'ordine di integrazione può, come nell'esercizio precedente, essere libera. Entrambi gli integrali portano allo stesso risultato, in uno dei due casi i conti erano di poco più leggeri, ma entrambe le scelte potevano essere valide. Vi sono altri casi in cui una scelta oculata dell'ordine d'integrazione permette di eseguire calcoli decisamente più semplici, e addirittura casi in cui la scelta è obbligata, nel senso che in una delle due opzioni si giunge a integrali non calcolabili in termini finiti.

① $D_1$ può essere scritto sia $x$-semplice, sia $y$-semplice, rispettivamente

$$D = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}, \qquad D = \{0 \le x \le 1, x \le y \le 1\};$$

e i due integrali iterati sono, rispettivamente,

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x=0}^{x=y} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=x}^{y=1} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Notiamo che nel secondo caso non è possibile iniziare il calcolo, poiché non esiste, in termini finiti, la primitiva di $e^{-y^2}$, nel primo caso, invece, integrando per sostituzione:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x=0}^{x=y} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\,e^{-y^2}\right]_{x=0}^{x=y} \mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \ldots = \frac{e-1}{2e}.$$

② Nel calcolo di questo integrale la scelta dell'ordine non è così necessaria, tuttavia può essere guidata dalla volontà di non eseguire conti inutili: se decidiamo di esprimere $D_2$ $x$-semplice, otteniamo

$$D_2 = \{0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 2-y\},$$

mentre, considerando $D_2$ $y$-semplice, siamo costretti a "spezzarlo":

$$D_2 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\} \cup \{1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\};$$

questo comporterebbe il calcolo di due integrali, al posto dell'unico integrale da calcolare nel primo dei due modi; ritorniamo alla prima delle due alternative e otteniamo

$$\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} xy\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left((2-y)^2y - y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4y - 5y^2 + y^3\right)\mathrm{d}y = \ldots = \frac{7}{24}.$$

③ Anche in questo caso non vi sono "obblighi", ma solo considerazioni dettate dalla semplicità; innanzitutto è possibile esprimere $D_3$ in ambo i modi, con espressioni del tutto equivalenti:

$$D_3 = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}, \quad D_3 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\};$$

i due corrispondenti integrali sono

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x^2y^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} x^2y^3\,\mathrm{d}y,$$

nell'integrale a sinistra, integrando $x^2$, troviamo (a parte le costanti) $x^3$, dovendo poi sostituire $x = \sqrt{1-y^2}$ rimane da integrare in $\mathrm{d}y$ una funzione con la radice; viceversa, se scegliamo l'integrale a destra, trasformiamo $y^3$ in $y^4$, e la radice scompare:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} x^2y^3\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left\{\left[\frac{1}{4}x^2y^4\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\right\} \mathrm{d}x$$

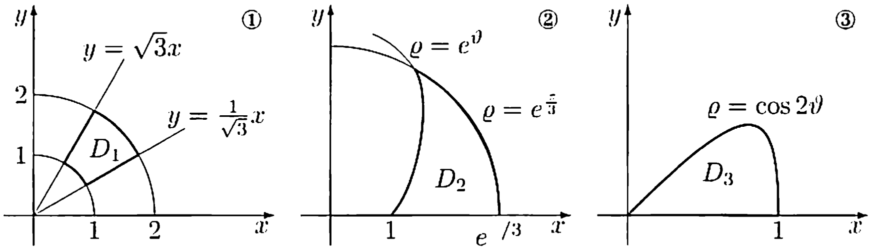
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x^2 - 2x^4 + x^6\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{105}.$$

## Esercizio 3.5 — Integrali in coordinate polari

*Calcolare i seguenti integrali doppi*

$$① \iint_{D_1} 12xy \, dx \, dy; \qquad ② \iint_{D_2} \frac{y}{x^2+y^2} \, dx \, dy; \qquad ③ \iint_{D_3} x \, dx \, dy.$$

*ove*




### Soluzione

Gli integrali in coordinate polari sono un caso particolare e frequente di integrali con cambiamento di variabili, non occorre calcolare lo jacobiano, perché dalla teoria sappiamo che

$$dx \, dy \quad \longrightarrow \quad \varrho \, d\varrho \, d\vartheta;$$

è bene ricordare questa semplice formula. Come già detto, nell'impostare gli integrali in coordinate polari conviene (fatti salvi alcuni casi sporadici) esprimere la frontiera del dominio d'integrazione con $\varrho$ in funzione di $\vartheta$; ci atterremo a questa regola.

① Si vede immediatamente che

$$D_1 = \left\{ \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, \, 1 \leq \varrho \leq 2 \right\};$$

inoltre, la funzione integranda, scritta in coordinate polari, diventa

$$12xy = 12(\varrho \cos \vartheta)(\varrho \sin \vartheta) = 12\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

pertanto

$$\iint_{D_1} 12xy \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\vartheta \int_{\varrho=1}^{\varrho=2} (12\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta)\varrho \, d\varrho$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[3\varrho^4 (\cos \vartheta \sin \vartheta)\right]_{\varrho=1}^{\varrho=2} d\vartheta = 45 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta = \ldots = \frac{45}{4}.$$

② Le due linee $\varrho = e^{\vartheta}$ e $\varrho = e^{\pi/3}$ si intersecano se $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, pertanto

$$D_2 = \left\{ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}, \, e^{\vartheta} \leq \varrho \leq e^{\frac{\pi}{3}} \right\};$$

e la funzione integranda è

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\varrho \sin\vartheta}{(\varrho\cos\vartheta)^2 + (\varrho\sin\vartheta)^2} = \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta;$$

l'integrale doppio diventa allora[d]

$$\iint_{D_2} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\vartheta \int_{\varrho=e^\vartheta}^{\varrho=e^{\frac{\pi}{3}}} \left(\frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\right)\varrho\,d\varrho$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\varrho\sin\vartheta]_{\varrho=e^\vartheta}^{\varrho=e^{\frac{\pi}{3}}}\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}}\sin\vartheta - e^\vartheta\sin\vartheta\right)d\vartheta$$
$$= \left[-e^{\frac{\pi}{3}}\cos\vartheta - \frac{e^\vartheta}{2}\left(\sin\vartheta - \cos\vartheta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(3-\sqrt{3})-2}{4}.$$

③ Per ciascun valore di $\vartheta$, per cui la semiretta uscente dall'origine interseca $D_3$, abbiamo che $\varrho$ è compreso tra 0 e $\cos 2\vartheta$, pertanto

$$D_3 = \left\{0 \le \vartheta \le \hat{\vartheta}, 0 \le \varrho \le \cos 2\vartheta\right\};$$

per determinare $\hat{\vartheta}$, osserviamo che $\hat{\vartheta}$ è l'unico valore del primo quadrante a cui corrisponde $\varrho = 0$, quindi $\cos 2\hat{\vartheta} = 0 \Leftrightarrow \hat{\vartheta} = \frac{\pi}{4}$; la funzione integranda è semplicemente $x = \varrho\cos\vartheta$, pertanto[e]

$$\iint_{D_3} x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=\cos 2\vartheta} (\varrho\cos\vartheta)\varrho\,d\varrho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{3}\varrho^3\cos\vartheta\right]_{\varrho=0}^{\varrho=\cos 2\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\vartheta)^3\cos\vartheta\,d\vartheta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\vartheta)^3\cos\vartheta\,d\vartheta = \left[\begin{array}{c}\sin\vartheta = u\\ \cos\vartheta\,d\vartheta = du\end{array}\right] = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-u^2)^3\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1-3u^2+3u^4-u^6\right)du = \ldots = \frac{59}{560}\sqrt{2}.$$

---

[d]Ricordiamo che

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right).$$

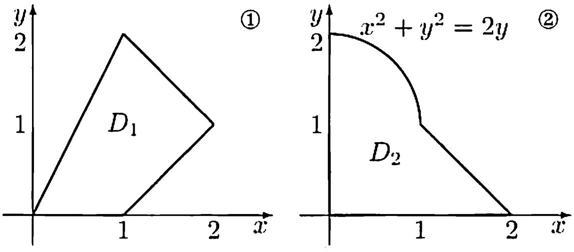
[e]Dalla trigonometria: $\cos 2\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta$.

### Esercizio 3.6 — Additività degli integrali – Quando "spezzare" i domini

*Calcolare i seguenti integrali doppi:*

$$① \iint_{D_1} (x + 2y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y; \qquad ② \iint_{D_2} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

*ove*




#### Soluzione

A volte, non è possibile calcolare un integrale doppio in un'unica volta, ed è necessario "spezzare" il calcolo in due o più integrali.

① $D_1$ è sia $x$-semplice sia $y$-semplice, non appaiono motivi che ci obblighino a scegliere una o l'altra strada, esprimiamo allora le frontiere con $y$ in funzione di $x$:

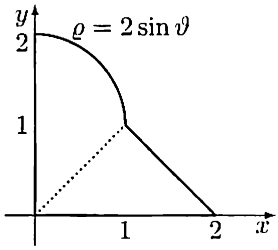
$$D_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\} \cup \{1 \le x \le 2, x - 1 \le y \le 3 - x\};$$

pertanto

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} (x + 2y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=2x} (x + 2y)\, \mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{y=x-1}^{y=3-x} (x + 2y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[xy + y^2\right]_{y=x-1}^{y=3-x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 6x^2\, \mathrm{d}x + \int_1^2 (8 - 2x^2)\, \mathrm{d}x = \ldots = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

② Data la geometria del dominio e l'espressione analitica della funzione, possiamo spezzare $D_2$ come in figura
calcoleremo l'integrale esteso alla parte inferiore in coordinate cartesiane, quello esteso alla parte superiore in coordinate polari, poiché $D_2 = D_{2\,\mathrm{inf}} \cup D_{2\,\mathrm{sup}}$ e

$$D_{2\,\mathrm{inf}} = \{0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - y\}, \quad D_{2\,\mathrm{sup}} = \left\{\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le 2 \sin\vartheta\right\};$$




avremo

$$\iint_{D_2} x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{D_{2\,\mathrm{inf}}} x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \iint_{D_{2\,\mathrm{sup}}} (\varrho\cos\vartheta)\varrho\ \mathrm{d}\varrho\ \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{x=y}^{x=2-y} x\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=2\sin\vartheta} (\varrho\cos\vartheta)\varrho\ \mathrm{d}\varrho\ \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=y}^{x=2-y} \mathrm{d}y + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\varrho^3\cos\vartheta\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2\sin\vartheta} \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (4-4y)\ \mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\vartheta\cos\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \ldots = \frac{3}{2}.$$

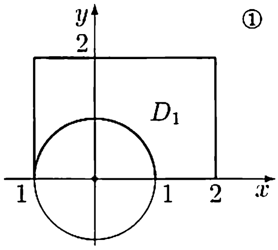
## Esercizio 3.7 — Uso di simmetrie

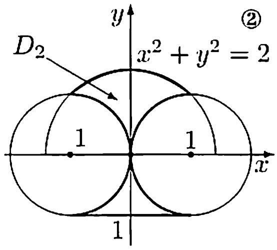
*Calcolare i seguenti integrali doppi:*

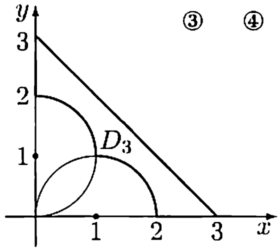
① $\displaystyle\iint_{D_1} xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y;$ ② $\displaystyle\iint_{D_2} (x^2y + x^4y^3)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y;$

③ $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{x-y}{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y;$ ④ $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{x+y}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$

*ove*



**Soluzione**

Data una funzione di due variabili $f(x, y)$ diremo che

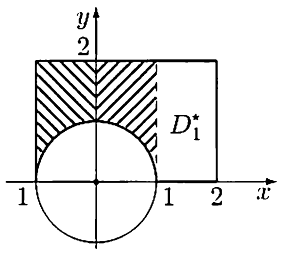
- $f$ è dispari rispetto a $x$ se
$$f(-x, y) = -f(x, y), \qquad \forall y,$$
- $f$ è pari rispetto a $x$ se
$$f(-x, y) = f(x, y), \qquad \forall y.$$

Sappiamo che in una variabile sola un integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine di una funzione simmetrica può essere semplificato: se $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & f \text{ dispari} \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & f \text{ pari} \end{cases}$$

la stessa situazione si ripete in più variabili se integriamo rispetto a una certa variabile su un dominio simmetrico *rispetto a quella variabile* una funzione pari o dispari *rispetto a quella variabile.*

① Il dominio d'integrazione presenta una porzione simmetrica rispetto all'asse $y$, ossia tra $x$ positive e $x$ negative:




poiché $f(x, y) = xy$ e $f(-x, y) = -xy = -f(x, y)$, la funzione $f$ è dispari *rispetto a* $x$, e pertanto gli integrali di $f$ sui due domini tratteggiati si elidono, e l'integrale su $D_1$ equivale all'integrale su $D_1^* = \{1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$:

$$\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1^*} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{x=1}^{x=2} xy\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=1}^{x=2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^2 3y\,\mathrm{d}y = 3.$$

② La funzione $f$ è:

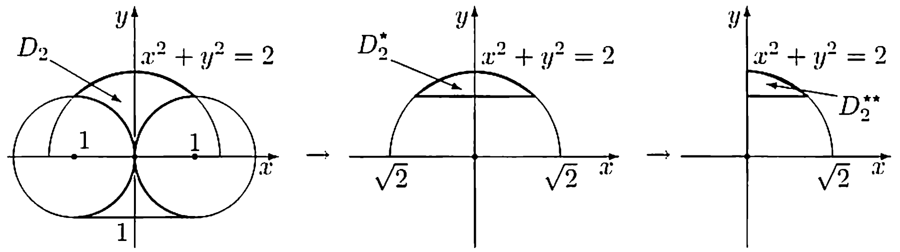
– dispari rispetto a $y$:

$$f(x,-y) = x^2(-y) + x^4(-y)^3 = -(x^2y + x^4y^3) = -f(x,y),$$

– pari rispetto a $x$:

$$f(-x,-y) = (-x)^2y + (-x)^4y^3 = x^2y + x^4y^3 = f(x,y);$$

poiché $D_2$ presenta simmetrie sia rispetto a $x$ sia rispetto a $y$, utilizziamo entrambe queste proprietà. Innanzitutto, $f$ è dispari rispetto a $y$, quindi integrali su domini simmetrici rispetto all'asse delle ascisse si elidono, possiamo allora trascurare l'integrale sulla porzione di $D_2$ compresa tra $y = -1$ e $y = -1$:




inoltre $f$ è pari rispetto a $x$: anziché integrarla su $D_2^*$ possiamo integrarla sulla metà destra $D_2^{**}$, e moltiplicare il risultato per 2:

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_2^*} f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_2^{**}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Analogamente quanto abbiamo fatto nel punto ③ dell'Esercizio 4, data la presenza di una radice quadrata comunque si esprima l'equazione della circonferenza, frontiera di $D_2^{**}$, conviene tenere conto della presenza, nella funzione integranda, di potenze dispari in $y$; per questo scegliamo

$$D_2^{**} = \left\{0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\},$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} (x^2y + x^4y^3)\,dx\,dy &= 2\iint_{D_2^{**}} (x^2y + x^4y^3)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^1 dx \int_{y=1}^{y=\sqrt{2-x^2}} (x^2y + x^4y^3)\,dy \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4y^4\right]_{y=1}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2(1-x^2) + x^4(3-4x^2+x^4)\right) dx = \ldots = \frac{64}{315}.
\end{aligned}$$

③ In questo caso, la funzione integranda non è né pari né dispari (e, d'altronde, il dominio $D_3$ non è simmetrico rispetto ad alcuno degli assi). Tuttavia, si vede subito che $D_3$ è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante; affinché anche $f$ possieda la stessa simmetria, occorre verificare il legame tra $f(a,b)$ e $f(b,a)$ (infatti $(a,b)$ e $(b,a)$ sono due punti simmetrici rispetto alla bisettrice); osserviamo che

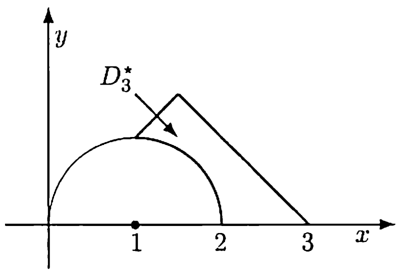
$$f(a,b) = \frac{a-b}{a+b} = -\frac{b-a}{a+b} = -f(b,a),$$

e pertanto la funzione $f$ esibisce, rispetto alla bisettrice $y = x$, un comportamento "dispari". Senza alcun conto ulteriore, allora, possiamo concludere che l'integrale doppio dell'esercizio vale 0.

④ Il dominio $D_3$ è lo stesso del precedente integrale, questa volta

$$f(a,b) = \frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{b+a}{b^2+a^2} = f(b,a),$$

e quindi $f$ è "pari" rispetto alla bisettrice; l'integrale su $D_3$ è allora il doppio dell'integrale su $D_3^*$:




inoltre, scegliamo di esprimere $D_3^*$ in coordinate polari: con conti analoghi a quelli svolti nei punti ③ e ④ dell'Esercizio 2, troviamo

$$D_3^* = \left\{ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}, 2\cos\vartheta \le \varrho \le \frac{3}{\cos\vartheta + \sin\vartheta} \right\},$$

inoltre, la funzione $f$ scritta in coordinate polari è

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{\varrho\cos\vartheta + \varrho\sin\vartheta}{(\varrho\cos\vartheta)^2 + (\varrho\sin\vartheta)^2} = \frac{1}{\varrho}(\cos\vartheta + \sin\vartheta);$$

pertanto

$$\iint_{D_3} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\iint_{D_3^*} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\varrho = 2\sin\vartheta}^{\varrho = \frac{3}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}} (\cos\vartheta + \sin\vartheta)\,d\varrho$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big[\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\Big]_{\varrho = 2\sin\vartheta}^{\varrho = \frac{3}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}} d\vartheta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(3 - (\cos\vartheta + \sin\vartheta)2\sin\vartheta\Big)\,d\vartheta$$

$$\left[\text{poiché} \int \sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{4}\right]$$

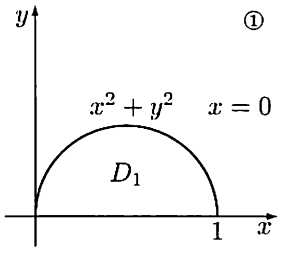
$$= 2\left[3\vartheta + \cos^2\vartheta - \frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi.$$

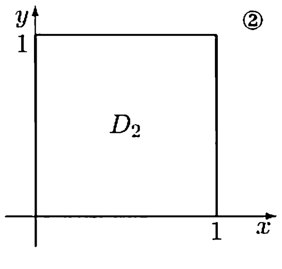
### Esercizio 3.8 — Applicazioni geometriche: volumi e aree

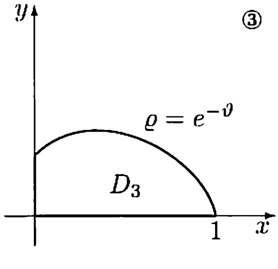
① *Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse $z$ compreso tra il piano $xy$ e la parte di paraboloide di equazione $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, che si proietta verticalmente nel dominio $D_1$ indicato in figura.*

② *Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse $z$ compreso tra il piano $xy$ e la parte di superficie di equazione $z = f(x, y) = y^4 - x^2$, che si proietta verticalmente nel dominio $D_2$ indicato in figura.*

③ *Calcolare l'area del dominio $D_3$ indicato in figura.*




### Soluzione

Dato un dominio $T$ del piano e una funzione $f(x, y) \geq 0$ definita su $T$, l'integrale doppio esteso a $T$ di $f$ rappresenta, (in analogia con quanto accade in una variabile sola) il volume del solido compreso tra il piano $xy$ e la superficie definita dalla funzione $f$, che si proietta in $T$; sempre in analogia con quanto accade in una variabile, se la funzione cambia segno in $T$, il volume del solido va calcolato integrando su $T$ il valore assoluto di $f$: $|f|$. Inoltre, ponendo $f = 1$ su $T$, l'integrale doppio della funzione costante uguale a 1 rappresenta l'area di $T$.

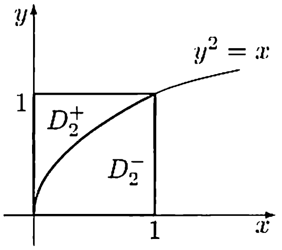
① La funzione $f$ è negativa in tutti i punti di $D_1$: il volume cercato è allora l'integrale doppio di $f$ su $D_1$, cambiato di segno, poiché

$$D_1 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le \cos\vartheta\right\},$$

e $f$ scritta in coordinate polari è $x^2 + y^2 - 1 = \varrho^2 - 1$, avremo[f]:

$$\begin{aligned} V &= -\iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 - 1\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=\cos\vartheta} (\varrho^2 - 1)\varrho\,\mathrm{d}\varrho \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}\varrho^4 - \frac{1}{2}\varrho^2\right]_{\varrho=0}^{\varrho=\cos\vartheta} \mathrm{d}\vartheta = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4\vartheta - 2\cos^2\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{12\vartheta + 8\sin 2\vartheta + \sin 4\vartheta}{32} - 2\frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{64}\pi. \end{aligned}$$

② La funzione integranda è $f(x, y) = y^4 - x^2 = (y^2 - x)(y^2 + x)$, e pertanto è positiva se $y^2 > x$ e negativa altrove, quindi cambia segno in $D_2$; suddividiamo $D_2$ nei due insiemi $D_2^+$ e $D_2^-$ ove essa è positiva e negativa, rispettivamente:




il volume cercato è allora

$$V = \iint_{D_2} |f| = \iint_{D_2^+} f + \iint_{D_2^-} (-f) = \iint_{D_2^+} f - \iint_{D_2^-} f;$$

un'alternativa a questa scomposizione consiste nel calcolare l'integrale doppio esteso a tutto $D_2$, e sottrarre al risultato il doppio dell'integrale su $D_2^-$:

$$V = \iint_{D_2^+} - \iint_{D_2^-} = \iint_{D_2^+} + \iint_{D_2^-} - \iint_{D_2^-} - \iint_{D_2^-} = \int_{D_2} -2\iint_{D_2^-}.$$

---

[f]Poiché

$$\int \cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{4} \quad \text{e} \quad \int \cos^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{12\vartheta + 8\sin 2\vartheta + \sin 4\vartheta}{32}$$

Considerata la relazione $y^2 = x$, conviene esprimere la frontiera di $D_2^-$ con $x$ in funzione di $y$:

$$D_2^- = \{0 \le y \le 1, y^2 \le x \le 1\},$$

e quindi il volume cercato è

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_2} (y^4 - x^2)\,dx\,dy - 2\iint_{D_2^-} (y^4 - x^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{x=0}^{x=1} (y^4 - x^2)\,dx - 2\int_0^1 dy \int_{x=y^2}^{x=1} (y^4 - x^2)\,dx \\ &= \int_0^1 \left[xy^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} dy - 2\int_0^1 \left[xy^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(y^4 - \frac{1}{3}\right) dy - 2\int_0^1 \left(y^4 - y^6 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y^6\right) dy = \frac{34}{105}. \end{aligned}$$

③ Abbiamo ricordato che l'area di una regione piana $T$ può essere vista come l'integrale doppio della funzione $f \equiv 1$ esteso a $T$; possiamo esprimere $D_3$ come

$$D_3 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le e^{-\vartheta}\right\},$$

pertanto l'area cercata è

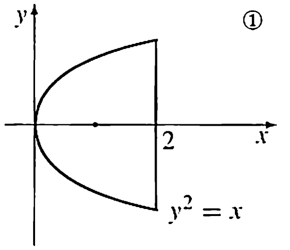
$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_3} 1\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=e^{-\vartheta}} 1 \cdot \varrho\,d\varrho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\varrho^2\right]_{\varrho=0}^{\varrho=e^{-\vartheta}} d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1 - e^{-\pi}}{4}. \end{aligned}$$

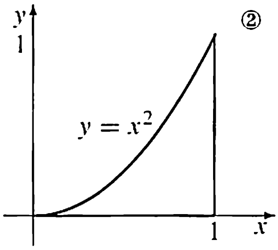
## Esercizio 3.9 — Applicazioni fisiche: masse e baricentri

① *Calcolare le coordinate del baricentro della lamina omogenea (la densità è costante e vale $\delta$) indicata in figura.*

② *Calcolare la massa e le coordinate del baricentro della lamina indicata in figura, sapendo che la densità superficiale vale $\delta(x, y) = x + 1$.*

③ *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'origine delle lamine dei punti precedenti.*



## Soluzione

Data una regione piana $T$, e data una funzione $\delta(x, y)$ non negativa su $T$, interpretando $\delta$ come densità superficiale di massa, relativa alla lamina rappresentata dalla regione $T$, l'integrale doppio esteso a $T$ della funzione $\delta$ rappresenta la massa $M$ della lamina $T$:

$$M = \iint_T \delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Valgono inoltre le seguenti formule, per il calcolo delle coordinate $(x_B, y_B)$ del baricentro della lamina e per il calcolo del momento d'inerzia $\mathcal{M}_{(x_0,y_0)}$ della lamina rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per il punto $(x_0, y_0)$:

$$x_B = \frac{1}{M}\iint_T x\,\delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \qquad y_B = \frac{1}{M}\iint_T y\,\delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{M}_{(x_0,y_0)} = \iint_T ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

① Chiamiamo $D_1$ il dominio corrispondente alla figura:

$$D_1 = \left\{0 \le x \le 2, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\right\}.$$

allora, usando le formule elencate sopra, abbiamo

$$M = \iint_{D_1} \delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \delta\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} \mathrm{d}y = 2\delta\int_0^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \frac{8\delta}{3}\sqrt{2};$$

per quanto riguarda le coordinate del baricentro, per simmetria $y_B = 0$, mentre

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{\frac{8\delta}{3}\sqrt{2}}\iint_{D_1} x\,\delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{3\sqrt{2}}{16}\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} x\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{8}\int_0^2 x\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}}{8}\left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_0^2 = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

② Detto $D_2$ il dominio

$$D_2 = \left\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} M &= \iint_{D_2} \delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=x^2} (x + 1)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[y(x + 1)\right]_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^3 + x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

e, per il baricentro,

$$x_B = \frac{1}{\frac{7}{12}} \iint_{D_2} x\,\delta(x, y)\,dx\,dy = \frac{12}{7}\int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} x(x+1)\,dy$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left[yx(x+1)\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \frac{12}{7}\int_0^1 \left(x^4 + x^3\right) dx = \frac{27}{35},$$

$$y_B = \frac{1}{\frac{7}{12}} \iint_{D_2} y\,\delta(x, y)\,dx\,dy = \frac{12}{7}\int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} y(x+1)\,dy$$

$$= \frac{12}{7}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2(x+1)\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \frac{6}{7}\int_0^1 \left(x^5 + x^4\right) dx = \frac{11}{35}.$$

③ Il momento d'inerzia rispetto all'origine è dato (per la generica lamina) da

$$\mathcal{M}_{(0,0)} = \iint_T (x^2 + y^2)\delta(x, y)\,dx\,dy.$$

Per la lamina del punto ①:

$$\mathcal{M}_{(0,0)} = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)\,\delta\,dx\,dy = \delta\int_0^2 dx \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= \delta\int_0^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx = 2\delta\int_0^2 \left(x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right) dx$$

$$= 2\delta\left[\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{2}{15}\sqrt{x^5}\right]_0^2 = \frac{592}{105}\delta\sqrt{2}.$$

Per quella del punto ②:

$$\mathcal{M}_{(0,0)} = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)\delta(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} \left(x^3 + x^2 + xy^2 + y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[(x^3 + x^2)y + \frac{x+1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^5 + x^4 + \frac{x^7 + x^6}{3}\right] dx = \ldots = \frac{383}{840}.$$

## 3.1.3 Domini in $\mathbb{R}^3$

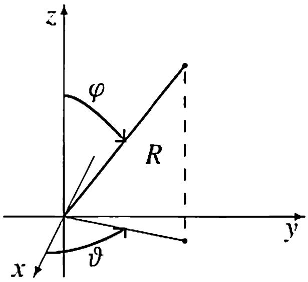
### Esercizio 3.10 — Sistemi di coordinate

*Sia $D$ la porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ contenuta nel primo ottante*[g]*, esprimere $D$ in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.*

### Soluzione

Nello spazio, oltre alle coordinate cartesiane $x$, $y$, $z$ si usano in generale altri due sistemi di coordinate:

- le coordinate cilindriche $\varrho$, $\vartheta$, $z$, ottenute combinando le coordinate polari $\varrho$, $\vartheta$ del piano con la quota $z$, per cui $\varrho \geq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (o anche $\vartheta \in [-\pi, \pi]$) e $z \in \mathbb{R}$;
- le coordinate sferiche $R$, $\vartheta$, $\varphi$, ove $R$ è la distanza del punto dall'origine, $\vartheta$ è l'inclinazione rispetto al semiasse positivo delle ascisse (è lo stesso $\vartheta$ delle coordinate polari) e $\varphi$ è l'inclinazione rispetto al semiasse positivo delle $z$:




$$\begin{cases} x = R \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = R \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = R \cos\varphi \end{cases}$$

pertanto $R \geq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (o anche $\vartheta \in [-\pi, \pi]$) e[h] $\varphi \in [0, \pi]$.

Se vogliamo esprimere $D$ in coordinate cartesiane, è necessario "annidare" una variabile dentro l'altra: si tratta di un ottavo di sfera di raggio 3, per cui, se decidiamo di partire da $x$, $x$ sarà compresa tra 0 e 3, fissato $x$, $y$ sarà compresa tra 0 e $\sqrt{9 - x^2}$, fissato anche $y$, $z$ sarà compresa tra 0 e $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$:

$$D = \left\{ 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\}.$$

---

[g] In analogia con il piano cartesiano, ove al *primo quadrante* corrispondono i punti con $x > 0$ e $y > 0$, nello spazio si chiama *primo ottante* quello costituito dai punti con $x$, $y$ e $z$ positivi.

[h] Osserviamo che, con questa scelta di $\varphi$, $\varphi = 0$ indica i punti del semiasse positivo delle $z$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ indica i punti del piano $xy$ e $\varphi = \pi$ indica i punti del semiasse negativo delle $z$. Esiste anche un'altra scelta per $\varphi$, ossia l'inclinazione di $R$ rispetto al piano $xy$, in tal caso i punti positivi (negativi) dell'asse $z$ sono indicati da $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) e i punti del piano $xy$ sono indicati da $\varphi = 0$, le relazioni tra coordinate cartesiane e sferiche diventano, in tal caso,

$$x = R \cos\varphi \cos\vartheta, \quad y = R \cos\varphi \sin\vartheta, \quad z = R \sin\varphi.$$

In coordinate polari, $\vartheta$ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, poiché siamo nel primo ottante, per quanto riguarda $z$ e $\varrho$, la superficie della sfera si può scrivere $\varrho^2+z^2=9$ pertanto, se esprimiamo $\varrho$ in funzione di $z$ avremo

$$D=\left\{0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},0\le z\le 3,0\le\varrho\le\sqrt{9-z^2}\right\},$$

mentre, se esprimiamo $z$ in funzione di $\varrho$

$$D=\left\{0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},0\le \varrho\le 3,0\le z\le\sqrt{9-\varrho^2}\right\}.$$

Infine, in coordinate sferiche l'espressione di $D$ è immediata:

$$D=\left\{0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},0\le R\le 3,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

### Esercizio 3.11 — Domini in coordinate cartesiane e cilindriche Espressione "per fili" e "per strati"

① *Esprimere in coordinate cartesiane "per fili" e "per strati" il dominio $D_1$, costituito dalla piramide avente vertici nell'origine e in $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.*

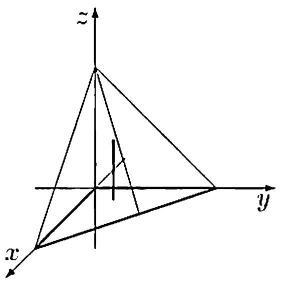
② *Esprimere in coordinate cartesiane e cilindriche "per fili" e "per strati" il dominio $D_2$, costituito dai punti del primo ottante al di sotto del paraboloide $z=1-x^2-y^2$.*

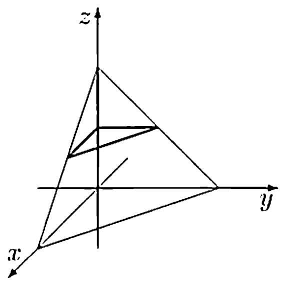
**Soluzione**

Con le due coordinate del piano, era possibile esprimere i domini solo in due modi, poiché nello spazio le coordinate sono tre, vi sono 6 differenti ordini con i quali esprimere i domini, tra questi meritano particolare attenzione i seguenti:

- quello per cui $z$ è la variabile più esterna e, fissato $z$, si procede a fissare le restanti due coordinate ($x$, $y$ in coordinate cartesiane, $\varrho$, $\vartheta$ in coordinate cilindriche) sui domini piani che corrispondono alle varie quote di $z$, la cosiddetta espressione *per strati*;
- quello per cui $z$ è la variabile più interna: si fissano le due coordinate piane ($x$, $y$ oppure $\varrho$, $\vartheta$, come prima) in modo generale, dopodiché per ogni coppia $x$, $y$ (o $\varrho$, $\vartheta$) si fissa la corrispondente $z$, la cosiddetta espressione *per fili*.

① Il dominio $D_1$, con evidenziata la scelta "per fili" e "per strati" è rispettivamente



nel caso "per fili", $x$ e $y$ variano nel triangolo di base $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ e in corrispondenza a ciascuna coppia $(x, y)$ la $z$ varia tra 0 e la superficie $z = 1 - x - y$, quindi

$$D_1 = \left\{\left\{(x, y) \in T\right\}, 0 \leq z \leq 1 - x - y\right\},$$

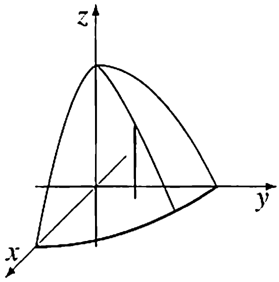
ovvero, esprimendo $T$ in funzione di $x$:

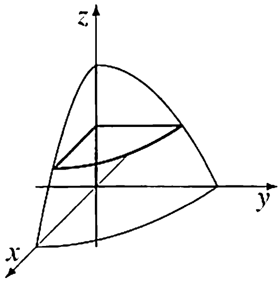
$$D_1 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\};$$

nel caso "per strati", $z$ varia tra 0 e 1, in corrispondenza a tali valori, $x$ e $y$ variano nel triangolo $T_z = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}$ (infatti le equazioni della frontiera di $T_z$ si determinano dall'equazione della superficie $x + y + z = 1$, rispetto alla coppia $x, y$: $x + y = 1 - z$), pertanto

$$D_1 = \{0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - z, 0 \leq y \leq 1 - x - z\}.$$

② Allo stesso modo di prima, abbiamo




Iniziamo dalle coordinate cartesiane; nel caso "per fili", $x$ e $y$ variano nel quarto di cerchio $Q = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e in corrispondenza a ciascuna coppia $(x, y)$ la $z$ varia tra 0 e la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$, quindi

$$D_2 = \left\{\left\{(x, y) \in Q\right\}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\right\},$$

ovvero, esprimendo $Q$ in funzione di $x$:

$$D_2 = \left\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\right\};$$

nel caso "per strati", $z$ varia tra 0 e 1, in corrispondenza a tali valori, $x$ e $y$ variano nel quarto di cerchio $Q_z = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 - z\}$, pertanto (se esprimiamo $Q_z$ in funzione di $x$:

$$D_2 = \left\{0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z}, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - z - x^2}\right\}.$$

In coordinate polari, in ogni caso $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, operando "per fili", partiamo dal quarto di cerchio

$$Q = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} = \left\{0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varrho \leq 1\right\},$$

e in corrispondenza a ciascuna coppia $(\varrho, \vartheta)$ la $z$ varia tra 0 e la superficie $z = 1 - \varrho^2$, quindi

$$D_2 = \left\{\left\{(x, y) \in Q\right\}, 0 \le z \le 1 - \varrho^2\right\},$$

ovvero:

$$D_2 = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le 1, 0 \le z \le 1 - \varrho^2\right\};$$

nel caso "per strati", $z$ varia tra 0 e 1, in corrispondenza a tali valori, $\varrho$ e $\vartheta$ descrivono il quarto di cerchio $Q_z = \{x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1 - z\}$, che in coordinate polari diventa

$$Q_z = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le \sqrt{1-z}\right\},$$

pertanto

$$D_2 = \left\{0 \le z \le 1, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le \sqrt{1-z}\right\}.$$

## Esercizio 3.12 — Scelta del sistema di coordinate

*Esprimere ciascuno dei domini seguenti nei sistemi di coordinate a fianco elencati:*

① $D_1$: *punti del primo ottante al di sotto del paraboloide* $z = x^2+y^2$, *con* $x$ *e* $y$ *entrambi minori di* 1, (*coordinate cartesiane*);

② $D_2$: *punti all'interno del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *compresi tra il piano* $xy$ *e il piano* $2x - 3y + z = 6$, (*coordinate cartesiane e cilindriche*);

③ $D_3$: *punti esterni al cilindro* $x^2+y^2 = 1$ *e interni alla superficie sferica* $x^2+y^2+z^2 = 2$, (*coordinate cilindriche e sferiche*);

④ $D_4$: *punti al di sopra del piano* $xy$, *al di sotto del cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *e all'interno del cilindro* $x^2 + y^2 = 2$, (*coordinate cilindriche e sferiche*).

### Soluzione

Spesso, a seconda del sistema di coordinate scelto, la descrizione di un dominio può semplificarsi o (viceversa) complicarsi.

① Sappiamo che $x$ e $y$ variano tra 0 e 1, e di $z$ abbiamo un'espressione in funzione di $x$ e di $y$ che non è agevole trascrivere in funzione o di $x$ o di $y$, in questo caso ci conviene optare per una descrizione per fili:

$$D_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le x^2 + y^2\}.$$

② Anche in questo caso, visto che $z$ è compreso tra il piano $xy$ e una superficie che dipende da $x$ e $y$, ci conviene operare per fili, in coordinate cartesiane possiamo esprimere il disco di base $x^2 + y^2 \le 1$ sia in funzine di $x$ sia in funzione di $y$, rispettivamente

$$\{-1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

e

$$\{-1 \le y \le 1, -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\},$$

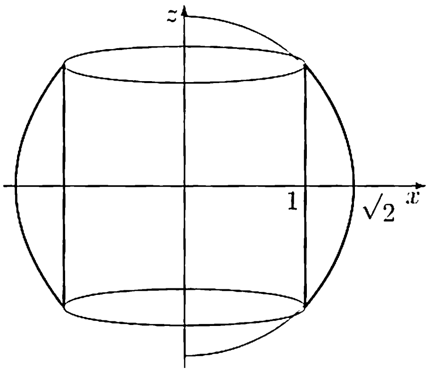
scegliendo la prima delle due:

$$D_2 = \{-1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le 6 - 2x + 3y\}.$$

In coordinate cilindriche, l'espressione del disco di base è immediata, per quanto riguarda $z$, è sufficiente riscriverne i limiti in coordinate polari:

$$D_2 = \{0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le \varrho \le 1, 0 \le z \le 6 - \varrho(2\cos\vartheta - 3\sin\vartheta)\}.$$

③ Data la simmetria di rotazione del dominio, possiamo vederne la sezione nel piano $xz$:




In coordinate cilindriche, la superficie della sfera è $\varrho^2 + z^2 = 2$, esplicitandola rispetto a $z$ abbiamo (per fili):

$$D_3 = \left\{0 \le \vartheta \le 2\pi, 1 \le \varrho \le \sqrt{2}, -\sqrt{2-\varrho^2} \le z \le \sqrt{2-\varrho^2}\right\};$$

in coordinate sferiche l'equazione della superficie della sfera è $R = \sqrt{2}$, mentre quella della superficie del cilindro è $R^2 \sin^2\varphi = 1$, mentre l'angolo di visuale del dominio è $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi$, infatti, tenendo conto che $0 \le \varphi \le \pi$, abbiamo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R^2 \sin^2\varphi = 1 \\ R^2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e pertanto

$$D_3 = \left\{0 \le \vartheta \le 2\pi, \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{\sin\varphi} \le R \le \sqrt{2}\right\};$$

④ L'equazione del cono in coordinate cilindriche è $z = \varrho$, in coordinate sferiche è $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Di nuovo per simmetria $\vartheta \in [0, 2\pi]$, se in coordinate cilindriche (per strati) abbiamo

$$D_4 = \{0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le \varrho \le 1, 0 \le z \le \varrho\};$$

in coordinate sferiche (ricordiamo che l'equazione della superficie del cilindro è $R^2 \sin^2 \varphi = 1$):

$$D_4 = \left\{0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq R \leq \frac{1}{\sin \varphi}\right\}.$$

### 3.1.4 Integrali tripli

**Esercizio 3.13 — Integrali in coordinate cartesiane**
**Integrali "per fili" e "per strati"**

*Calcolare i seguenti integrali:*

$$① \iiint_{D_1} (x + y) \, dx \, dy \, dz; \qquad ② \iiint_{D_2} (z + x - y) \, dx \, dy \, dz;$$

*ove*

- *$D_1$ è il dominio compreso tra il piano $xy$ e il paraboloide $z = x^2 + y^2$, al di sopra del quadrato $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;*
- *$D_2$ è il tetraedro limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $4x + 2y + z = 8$.*

**Soluzione**

① In questo caso possiamo optare per una rappresentazione "per fili" o "per strati". Poiché $z$ è funzione sia di $x$ sia di $y$, e oltretutto $z$ non compare nella funzione integranda, conviene senz'alcun dubbio optare per una rappresentazione "per fili":

$$D_1 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

e quindi

$$\iiint_{D_1} (x + y) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1} dy \int_{z=0}^{z=x^2+y^2} (x + y) \, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1} \left[z(x + y)\right]_{z=0}^{z=x^2+y^2} dy = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1} (x^2 + y^2)(x + y) \, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=1} \left(x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} x y^3 + \frac{1}{4} y^4\right]_{y=0}^{y=1} dx = \ldots = \frac{5}{6}.$$

② Anche in questo caso conviene operare "per fili", il caso è molto simile al dominio $D_1$ dell'Esercizio 11, pertanto

$$D_2 = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - 2x, 0 \le z \le 8 - 4x - 2y\},$$

e pertanto

$$\iiint_{D_2} (z + x - y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} dy \int_{z=0}^{z=8-4x-2y} (z + x - y)\, dz$$

$$= \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} \left[\frac{1}{2}z^2 + (x - y)z\right]_{z=0}^{z=8-4x-2y} dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} \left(32 - 24x + 4x^2 - 24y + 10xy + 4y^2\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[32y - 24xy - 4x^2y - 12y^2 + 5xy^2 + \frac{4}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=4-2x} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \left(4x^3 - 48x + 64\right) dx = 16.$$

**Esercizio 3.14 — Integrali in coordinate cilindriche e sferiche**

*Calcolare i seguenti integrali:*

① $\displaystyle\iiint_{D_1} 8zx^2\, dx\, dy\, dz;$ ② $\displaystyle\iiint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz;$

*ove*

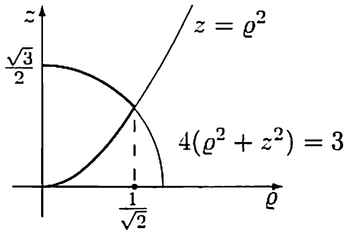
- *$D_1$ è la porzione di spazio al di sopra del paraboloide $z = x^2 + y^2$ e all'interno della sfera $4(x^2 + y^2 + z^2) = 3$,*
- *$D_2$ è l'interno della sfera $x^2 + y^2 + z^2 - x = 0$.*

**Soluzione**

In questi due esercizi, useremo le coordinate cilindriche e sferiche; passando nel piano da coordinate cartesiane a coordinate polari abbiamo visto che l'elemento d'area $dx\, dy$ è diventato $\varrho\, d\varrho\, d\vartheta$, allo stesso modo l'elemento di volume $dV = dx\, dy\, dz$ diventa $dV = \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz$ in coordinate cilindriche e $dV = R^2 \sin\varphi\, dR\, d\varphi\, d\vartheta$ in coordinate sferiche[i].

[i] La formula è valida se le coordinate sferiche sono quelle da noi adottate; se adottiamo le coordinate sferiche con $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ l'elemento di volume è $dV = R^2 \cos\varphi\, dR\, d\varphi\, d\vartheta$.

① Esprimendo la frontiera di $D_1$ in coordinate cilindriche, il paraboloide $z = x^2 + y^2$ diventa $z = \varrho^2$ e la sfera $4(x^2 + y^2 + z^2) = 3$ diventa $4(\varrho^2 + z^2) = 3$, il dominio ha simmetria circolare, la sua sezione (nel piano $\varrho z$) è




mettendo a sistema le equazioni $z = \varrho^2$ e $4(\varrho^2 + z^2) = 3$, si trova $\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, possiamo allora esprimere $D_1$ in coordinate cilindriche "per fili", e dire che

$$D_1 = \left\{ 0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le \varrho \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \varrho^2 \le z \le \sqrt{\frac{3}{4} - \varrho^2} \right\},$$

(ovvero $\varrho \le z \le \frac{1}{2}\sqrt{3 - 4\varrho^2}$) e, ricordando che $\mathrm{d}V = \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}z$, l'integrale triplo diventa

$$\iiint_{D_1} 8zx^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}\varrho \int_{z=\varrho^2}^{z=\frac{1}{2}\sqrt{3-4\varrho^2}} 8z(\varrho\cos\vartheta)^2 \varrho \, \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=\frac{1}{\sqrt{2}}} \varrho^3 \cos^2\vartheta \left[4z^2\right]_{z=\varrho^2}^{z=\frac{1}{2}\sqrt{3-4\varrho^2}} \mathrm{d}\varrho$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=\frac{1}{\sqrt{2}}} (3 - 4\varrho^2 - 4\varrho^4)\varrho^3 \cos^2\vartheta \, \mathrm{d}\varrho$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \left[\frac{3}{4}\varrho^4 - \frac{2}{3}\varrho^6 - \frac{1}{2}\varrho^8\right]_{\varrho=0}^{\varrho=\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{7}{96} \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{7}{96}\pi.$$

② Esprimiamo $D_2$ in coordinate sferiche: $x^2 + y^2 + z^2 - x = 0$ equivale a $R^2 - R\sin\varphi\cos\vartheta = 0$; in modo analogo a quanto fatto nel punto ③ dell'Esercizio 2, ricaviamo $R = \sin\varphi\cos\vartheta$, con $0 \le \varphi \le \pi$ e $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, quindi possiamo esprimere $D_2$ come

$$D_2 = \left\{ 0 \le \varphi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le R \le \sin\varphi\cos\vartheta \right\};$$

infine, ricordando che $\mathrm{d}V = R^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta$,

$$\iiint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{R=0}^{R=\sin\varphi\cos\vartheta} R(R^2 \sin\varphi) \, \mathrm{d}R$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}R^4\right]_{R=0}^{R=\sin\varphi\cos\vartheta} \sin\varphi \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \left(\sin^5\varphi \cos^4\vartheta\right) \mathrm{d}\vartheta$$

(la funzione si può fattorizzare)

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\pi} \sin^5\varphi \, \mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{10}.$$

### Esercizio 3.15 — Applicazioni geometriche: calcolo di volumi

*Calcolare i volumi dei seguenti domini:*

① $D_1$: *interno della sfera* $x^2+y^2+z^2=2$ *al di sopra del cono* $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

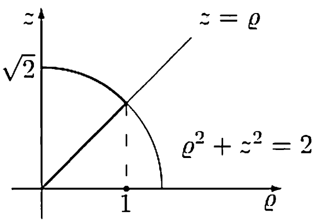
② $D_2$: *interno della sfera* $x^2+y^2+z^2=4$, *compreso tra le superfici* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *e* $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$.

### Soluzione

Dato un dominio $T$ di $\mathbb{R}^3$, il volume di $T$ può essere espresso tramite il calcolo dell'integrale triplo della funzione costante $f(x, y, z) \equiv 1$:

$$\mathrm{Volume}(T) = \iiint_T \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

① Possiamo esprimere la frontiera di $D_1$ in coordinate cilindriche: il cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ si traduce in $z = \varrho$ e la sfera $x^2+y^2+z^2 = 2$ si traduce in $\varrho^2+z^2=2$, il dominio ha simmetria circolare, la sua sezione (nel piano $\varrho z$) è si vede immediatamente che le due superfici si incontranto in corrispondenza della circonferenza $\varrho = 1$ ossia $x^2+y^2 = 1$, è allora possibile eseguire il




calcolo del volume con un integrale in coordinate cilindriche; in alternativa, è altrettanto agevole esprimere $D_1$ in termini di coordinate sferiche:

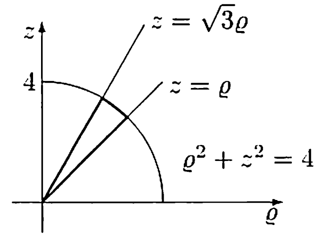
$$D_1 = \left\{0 \le \vartheta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le R \le \sqrt{2}\right\},$$

ricordando che $dV = R \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\vartheta$, il volume diventa

$$V = \iiint_{D_1} dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{R=0}^{R=\sqrt{2}} R \sin\varphi \, dR$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

② Anche $D_2$ è agevolmente espresso in coordinate sferiche; osserviamo innanzitutto che anche $D_2$ ha simmetria circolare, e la sua sezione nel piano $\varrho z$ è




Pertanto la sua espressione è

$$D_2 = \left\{0 \le \vartheta \le 2\pi, \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le R \le 2\right\},$$

ricordando nuovamente che $dV = R \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\vartheta$, il volume diventa

$$V = \iiint_{D_2} dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{R=0}^{R=2} R \sin\varphi \, dR$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

## Esercizio 3.16 — Applicazioni fisiche: masse e baricentri

① *Calcolare le coordinate del baricentro del solido $D$ contenuto nel primo ottante, racchiuso dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e limitato superiormente dal paraboloide $z = x^2 + y^2 + 2$, sapendo che la sua densità di massa è $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + (9 - 2z)$.*
② *Calcolare il momento d'inerzia di $D$ per una rotazione attorno all'asse $z$.*

### Soluzione

Data una regione $T$ di $\mathbb{R}^3$, e data una funzione $\delta(x, y, z)$ non negativa su $T$, interpretando $\delta$ come densità di massa, relativa al solido rappresentato dalla regione $T$, l'integrale triplo esteso a $T$ della funzione $\delta$ rappresenta la massa $M$ del solido $T$:

$$M = \iiint_T \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Valgono inoltre le seguenti formule, per il calcolo delle coordinate $(x_B, y_B, z_B)$ del baricentro del solido:

$$x_B = \frac{1}{M} \iiint_T x\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad y_B = \frac{1}{M} \iiint_T y\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$z_B = \frac{1}{M} \iiint_T z\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

① Operiamo in coordinate cilindriche, innanzitutto

$$D = \left\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le 1, 0 \le z \le 2 + \varrho^2\right\},$$

e quindi

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D \left(x^2 + y^2 + (9 - 2z)\right) dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varrho \int_{z=0}^{z=2+\varrho^2} (\varrho^2 + (9 - 2z))\varrho\, dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left[\varrho^3 z + 9\varrho z - \varrho z^2\right]_{z=0}^{z=2+\varrho^2} d\varrho \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} (14\varrho + 7\varrho^3)\, d\varrho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{35}{4}\right) d\vartheta = \frac{35}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le coordinate del baricentro, la simmetria di $D$ implica che $x_B = y_B$, pertanto

$$x_B = y_B = \frac{1}{M}\iiint_D x\big(x^2 + y^2 + (9-2z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}\mathrm{d}\varrho\int_{z=0}^{z=2+\varrho^2}\varrho\cos\vartheta\big(\varrho^2+(9-2z)\big)\varrho\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}(\cos\vartheta)\big[\varrho^4 z + 9\varrho^2 z - \varrho^2 z^2\big]_{z=0}^{z=2+\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}\big(14\varrho^2+7\varrho^4\big)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varrho$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{91}{15}\right)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{104}{75\pi};$$

invece, per $z_B$,

$$z_B = \frac{1}{M}\iiint_D z\big(x^2 + y^2 + (9-2z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}\mathrm{d}\varrho\int_{z=0}^{z=2+\varrho^2} z\big(\varrho^2+(9-2z)\big)\varrho\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}\left[\frac{1}{2}\varrho^3 z^2 + \frac{9}{2}\varrho z^2 - \frac{2}{3}\varrho z^3\right]_{z=0}^{z=2+\varrho^2}\mathrm{d}\varrho$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\varrho=0}^{\varrho=1}\left(\frac{38}{3}\varrho + 12\varrho^3 + \frac{5}{2}\varrho^5 - \frac{1}{6}\varrho^7\right)\mathrm{d}\varrho$$

$$= \frac{8}{35\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{467}{48}\right)\mathrm{d}\vartheta = \frac{467}{420}.$$

② Analogamente a quanto visto nel caso bidimensionale, il momento d'inerzia di un solido $T$ rispetto all'asse $z$ si ottiene con la formula

$$\mathcal{M}_z = \iiint_T (x^2+y^2)\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

nel nostro caso, quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_z &= \iiint_D (x^2+y^2)\big(x^2+y^2+(9-2z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \mathrm{d}\varrho \int_{z=0}^{z=2+\varrho^2} \varrho^2(\varrho^2+(9-2z))\varrho\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left[\varrho^5 z + 9\varrho^3 z - \varrho^3 z^2\right]_{z=0}^{z=2+\varrho^2} \mathrm{d}\varrho\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left(14\varrho^3 + 7\varrho^5\right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{14}{3}\right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{7}{3}\pi.\end{aligned}$$

## 3.2 Esercizi proposti

**17** Calcolare i seguenti integrali doppi:

① $\displaystyle\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; ② $\displaystyle\iint_{D_2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; ③ $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

① $D_1$: parte di piano $xy$ al di sopra della retta $x+y=2$ e all'interno della circonferenza $x^2+y^2-2x=0$;
② $D_2$: parte di piano $xy$ al di sopra dell'asse $x$, a sinistra della retta $x=1$ e al di sotto della parabola $y=x^2$;
③ $D_3$: parte di piano $xy$ al di sopra dell'asse $x$, all'interno della circonferenza $x^2+y^2=2$ e a destra dell'iperbole $x^2-y^2=1$.

$$\left[① \ \frac{1}{6};\ ② \ \frac{1}{2};\ ③ \ \frac{2\log 2-1}{16}\right]$$

**18** Calcolare i seguenti integrali doppi:

① $\displaystyle\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; ② $\displaystyle\iint_{D_2} (1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; ③ $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

① $D_1$: parte di piano $xy$ al di sopra dell'asse $x$, al di sotto della parabola $y=x^2$ e all'interno della circonferenza $x^2+y^2-2x=0$;
② $D_2$: triangolo $OAB$, con $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$ e $B(0,\sqrt{3})$;
③ $D_3$: interno della circonferenza $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

$$\left[① \ \frac{13}{24};\ ② \ \frac{4}{3}\sqrt{3};\ ③ \ 2\sqrt{2}\right]$$

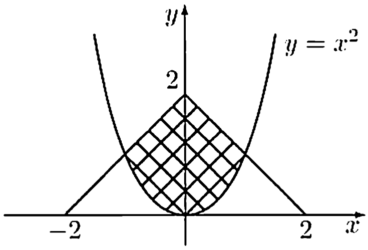
**19** Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse $z$ compreso tra il piano $z=0$ e la superficie di equazione $z=f(x,y)=y^2-x^4$, che si proietta verticalmente nel quadrilatero $OABC$, ove $O = (0,0)$, $A = (3,0)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,3)$.

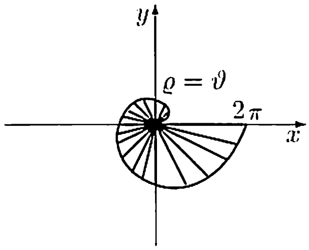
$$\left[\frac{2806}{105}\right]$$

**20** Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse $z$ compreso tra il piano $z = 0$ e la superficie di equazione $z = f(x,y) = x(x^2+y^2-1)$, che si proietta verticalmente nel disco di raggio 1 centrato nel punto $C = (1,0)$.

$$\left[\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right]$$

**21** Calcolare la massa e le coordinate del baricentro delle due lamine indicate in figura, sapendo che la densità superficiale $\delta$ è costante.




$$\left[① \; M = \frac{7}{3}\delta, x_B = 0, y_B = \frac{32}{35}; ② \; M = \frac{4}{3}\pi^3\delta, x_B = \frac{3}{\pi}, y_B = \frac{3}{\pi^2} - 2\right]$$

**22** Calcolare la massa e le coordinate del baricentro delle due lamine dell'esercizio precedente, sapendo che la densità superficiale vale $\delta = 1 + x^2 + y^2$.

$$\left[① \; M = \frac{181}{35}\delta, x_B = 0, y_B = \frac{1754}{1629}\right]$$

$$\left[② \; M = \frac{4}{15}\pi^3(6\pi^2+5), x_B = \frac{15(4\pi^2-11)}{\pi(6\pi^2+5)}, y_B = \frac{-165+110\pi^2-24\pi^4}{\pi^2(6\pi^2+5)}\right]$$

**23** Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$① \iiint_{D_1} x^2y^3z \, dx\, dy\, dz; \qquad ② \iiint_{D_2} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \, dx\, dy\, dz;$$

① $D_1$: dominio compreso tra il piano $z = 0$ e la superficie $z = xy$, quando $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$;

② $D_2$: dominio interno ai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

$$\left[① \; \frac{1}{60}; ② \; \frac{8\log 2 - 5}{16}\right]$$

**24** Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$① \iiint_{D_1} z\sqrt{x^2+y^2} \, dx\, dy\, dz; \qquad ② \iiint_{D_2} xyz^2 \, dx\, dy\, dz;$$

① $D_1$: dominio interno al cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, tra il piano $z = 0$ e la superficie $z = x + 1$;
② $D_2$: dominio del I ottante al di sotto della superficie $z = 1 - x^2 - y^2$.

$$\left[① \frac{14128}{1575}; ② \frac{1}{240}\right]$$

**25** Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$① \iiint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz; \qquad ② \iiint_{D_2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz;$$

① $D_1$: interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$;
② $D_2$: interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, al di sopra del piano $z = 0$.

$$\left[① \frac{\pi}{10}; ② \frac{128}{15}\pi\right]$$

**26** Calcolare la massa e le coordinate del baricentro dei seguenti solidi:

① parallelepipedo $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$, avente densità di massa $\delta(x, y, z) = x + y + z$;
② interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, al di sopra del piano $z = 0$, sapendo che la densità nel punto $P$ è uguale alla distanza di $P$ dall'origine.

$$\left[① M = 18, x_B = \frac{19}{36}, y_B = \frac{10}{9}, z_B = \frac{7}{4}; ② M = 8\pi, x_B = y_B = 0, z_B = \frac{4}{5}\right]$$

# 4

# Curve e superfici

## 4.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### 4.1.1 Curve

#### Esercizio 4.1 — Rappresentazione parametrica

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:*

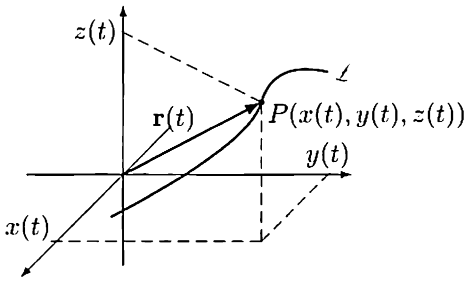
① $\mathcal{L}_1$ : *segmento del piano xy, da* $A(3,-1)$ *a* $B(-1,9)$;
② $\mathcal{L}_2$ : *segmento del piano xy, da* $B(-1,9)$ *a* $A(3,-1)$;
③ $\mathcal{L}_3$ : $x^2+y^2-4x-2y-4=0$, *percorsa in senso orario a partire da* $(5,1)$;
④ $\mathcal{L}_4$ : $(bx)^2+(ay)^2=(ab)^2$, *con* $a>0, b>0$, *percorsa in senso antiorario a partire da* $(0,b)$;
⑤ $\mathcal{L}_5$ : *ramo con* $x>0$ *dell'iperbole* $x^2-y^2=1$, *percorso nel verso delle y crescenti*;
⑥ $\mathcal{L}_6$ : *segmento da* $A(1,2,5)$ *a* $B(3,1,0)$.

#### Soluzione

Data una curva $\mathcal{L}$, la scrittura

$$\mathcal{L}:\mathbf{r}(t)=\big[x(t)\big]\mathbf{i}+\big[y(t)\big]\mathbf{j}+\big[z(t)\big]\mathbf{k},\qquad t\in[a,b]$$

prende il nome di *rappresentazione parametrica* di $\mathcal{L}$, in essa il vettore $\mathbf{r}(t)$ che dall'origine indica il punto $P(x(t),y(t),z(t))$ della curva, corrispondente al valore $t$ del parametro è scritto a partire dalle sue componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$:



notiamo che una curva può avere infinite rappresentazioni parametriche, da queste dipende anche il *verso di percorrenza*, ossia la direzione con cui, al crescere del parametro $t$, il punto $P(x(t), y(t), z(t))$ si muove lungo la curva stessa.

① $\mathcal{L}_1$ è il segmento che unisce $A(3, -1)$ e $B(-1, 9)$, quindi, detto $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = -4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$, i suoi punti appartengono alla retta

$$\mathbf{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

e corrispondono ai valori di $t$ compresi tra $t = 0$ (il punto $A$) e $t = 1$ (il punto $B$); in definitiva

$$\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [3 - 4t]\mathbf{i} + [-1 + 10t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1].$$

② $\mathcal{L}_2$ è la stessa curva del punto precedente, cambia il verso di percorrenza; per ottenere la sua rappresentazione parametrica possiamo ragionare in modo analogo al punto ①, ma possiamo anche usare la seguente tecnica, più generale: se una curva ha la rappresentazione

$$\mathbf{r}(t) = \big[x(t)\big]\mathbf{i} + \big[y(t)\big]\mathbf{j} + \big[z(t)\big]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b],$$

la stessa curva, parametrizzata con verso di percorrenza opposto, è

$$\mathbf{r}(t) = \big[x(b + a - t)\big]\mathbf{i} + \big[y(b + a - t)\big]\mathbf{j} + \big[z(b + a - t)\big]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

(ove naturalmente $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ e $z(\cdot)$ sono le stesse funzioni della precedente rappresentazione). Nel nostro caso, allora, la rappresentazione di $\mathcal{L}_2$ è:

$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [3 - 4(1 - t)]\mathbf{i} + [-1 + 10(1 - t)]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1],$$

e cioè

$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [-1 + 4t]\mathbf{i} + [9 - 10t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1].$$

③ L'equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ è l'equazione di una circonferenza, sappiamo che i punti della generica circonferenza avente centro in $(x_0, y_0)$ e raggio $R$ possono essere descritti dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\alpha \\ y = y_0 + R\sin\alpha \end{cases},$$

se $\alpha \in [0, 2\pi]$ la circonferenza verrà percorsa in senso antiorario a partire dal punto di ascissa massima, se invece $\alpha \in [-\pi, \pi]$ la circonferenza verrà percorsa, sempre in senso antiorario, a partire dal punto di ascissa minima. Nel nostro caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$ e $R = 3$, inoltre a partire dal punto $(5, 1)$ (ossia dal punto di ascissa massima) dobbiamo percorrere la circonferenza in senso orario; possiamo, come nel punto precedente, sostituire $\alpha$ con $2\pi - \alpha$ nella parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos(2\pi - \alpha) \\ y = 1 + 3\sin(2\pi - \alpha) \end{cases},$$

e poiché $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ otteniamo

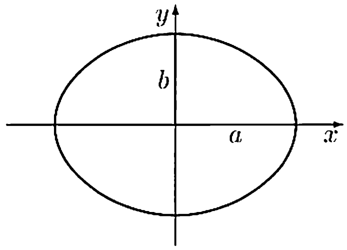
$$\gamma_3 : \mathbf{r}(\alpha) = [2 + 3\cos\alpha]\mathbf{i} + [1 - 3\sin\alpha]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

In alternativa, avremmo potuto osservare che sarebbe stato sufficiente cambiare il segno a $\sin\alpha$.

④ L'equazione $(bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$ (con $a > 0, b > 0$) si può riscrivere come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e questa è l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e assi orizzontale e verticale uguali a $a$ e $b$ rispettivamente:




la parametrizzazione di questa elisse è in genere

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases},$$

e $\alpha$ ha gli stessi limiti visti più sopra per la circonferenza. Nel nostro caso, dobbiamo percorrere l'ellisse in senso antiorario, però a partire dal punto $(0, b)$, possiamo allora sommare $\frac{\pi}{2}$ a $\alpha$, ottenendo

$$\gamma_4 : \mathbf{r}(\alpha) = \left[a\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{i} + \left[b\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi];$$

oppure, osservando che $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$ e $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$,

$$\gamma_4 : \mathbf{r}(\vartheta) = [-a\sin\alpha]\mathbf{i} + [b\cos\alpha]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

⑤ È sufficiente esprimere $x$ in funzione di $y$: poiché $x > 0$ abbiamo $x = \sqrt{1 + y^2}$, scegliamo allora $y$ come parametro (cioè $t = y$) e, poiché $y$ può assumere qualsiasi valore reale, otteniamo

$$\gamma_5 : \mathbf{r}(t) = \left[\sqrt{1 + t^2}\right]\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

⑥ La procedura da seguire è la stessa del punto ①, occorre solo considerare anche le componenti in $z$: poiché $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ abbiamo

$$\mathcal{L}_6 : \mathbf{r}(t) = [1 + 2t]\mathbf{i} + [2 - t]\mathbf{j} + [5 - 5t]\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 1].$$

### Esercizio 4.2 — Nomenclatura

*Stabilire se ciascuna delle seguenti curve è chiusa, semplice, regolare:*

① $\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 4];$

② $\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\pi - |t|]\mathbf{j} + [\sin t]\mathbf{k}, \qquad t \in [-\pi, \pi];$

③ $\mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi];$

④ $\mathcal{L}_4 : \mathbf{r}(t) = [t^2 \operatorname{Sh} t]\mathbf{i} + [e^{-t^2}]\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R};$

⑤ $\mathcal{L}_5 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$ (*elica cilindrica*).

### Soluzione

Una curva

$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = \big[x(t)\big]\mathbf{i} + \big[y(t)\big]\mathbf{j} + \big[z(t)\big]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

si dice *chiusa* se il punto iniziale e il punto finale coincidono: $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$; si dice *semplice* se non passa più volte per uno stesso punto (fatta eccezione, eventualmente, per il punto iniziale e finale nel caso di una curva chiusa):

$$\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b);$$

si dice *regolare* se $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono derivabili e

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \neq 0, \quad \forall t \in (a, b).$$

Controllare se una curva sia chiusa e regolare è immediato, controllare che sia semplice può essere più difficile.

① Osserviamo che

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{r}(4) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

quindi la curva non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 1 + 4 + 4t^2 \neq 0 \quad \forall t \in (0, 4),$$

quindi la curva è regolare; per mostrare che la curva è semplice possiamo ad esempio notare che la componente in $x$, ossia $x(t) = t$, è una funzione *strettamente crescente* del parametro $t$, pertanto due valori diversi di $t$ non possono corrispondere a punti aventi la stessa ascissa, e quindi non possono corrispondere allo stesso punto.

② Osserviamo che

$$\mathbf{r}(-\pi) = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}(\pi) = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

quindi $\mathcal{L}_2$ è chiusa; $\mathcal{L}_2$ non è regolare, infatti $y(t) = \pi - |t|$ non è derivabile in $(-\pi, \pi)$, poiché però l'unico punto di non derivabilità corrisponde a $t = 0$, per $t \neq 0$ abbiamo

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = \sin^2 t + 1 + \cos^2 t = 2 \quad \forall t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi);$$

poiché l'intervallo in cui $\mathcal{L}_2$ non è regolare è stato scomposto in due intervalli ove invece essa è regolare, si dice che $\mathcal{L}_2$ è *regolare a tratti*. Per controllare se $\mathcal{L}_2$ è semplice, cominciamo col vedere se una delle sue componenti può assumere lo stesso valore con diversi valori di $t$, in corrispondenza dei valori trovati controlleremo poi le componenti restanti; $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ se e solo se $t_2 = -t_1$; pensiamo allora che $t_1 = \gamma$ sia positivo, o meglio $0 < \gamma < \pi$ ($\gamma$ dev'essere diverso da $\pi$ perché $\gamma = \pi$ indica il punto finale, e dev'essere diverso da 0, perché altrimenti $t_2 = -t_1 = 0$), ponendo $t_2 = -\gamma$ nella rappresentazione di $\mathcal{L}_2$ troviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\gamma) &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\pi - \gamma]\mathbf{j} + [\sin\gamma]\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(-\gamma) &= [\cos(-\gamma)]\mathbf{i} + [\pi - |-\gamma|]\mathbf{j} + [\sin(-\gamma)]\mathbf{k} \\ &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\pi - \gamma]\mathbf{j} + [-\sin\gamma]\mathbf{k} \end{aligned}$$

la prima e la seconda componente sono uguali, mentre per ogni $\gamma \in (0, \pi)$ abbiamo $\sin(\gamma) \neq -\sin(\gamma)$, quindi $\mathcal{L}_2$ è semplice.

③ Osserviamo che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, quindi la curva è chiusa, inoltre $\forall t \in (0, 2\pi)$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = \sin^2 t + 4\cos^2(2t) = 4 - 15\sin^2 t + 16\sin^4 t > 0,$$

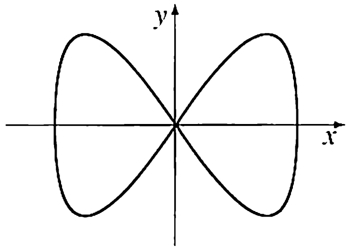
quindi $\mathcal{L}_3$ è regolare. Per controllare se $\mathcal{L}_3$ è semplice, serviamoci della stessa tecnica del punto precedente, poiché $t \in (0, 2\pi)$, $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ se e solo se $t_2 = 2\pi - t_1$, quindi ponendo rispettivamente $t = \gamma$ e $t = 2\pi - \gamma$ troviamo (osservando che $\sin(4\pi - 2\gamma) = -\sin 2\gamma$)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\gamma) &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\sin 2\gamma]\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(2\pi - \gamma) &= [\cos(2\pi - \gamma)]\mathbf{i} + [\sin 2(2\pi - \gamma)]\mathbf{j} \\ &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [-\sin 2\gamma]\mathbf{j} \end{aligned}$$

l'equazione $\sin(2\gamma) = -\sin(2\gamma)$ implica $\sin(2\gamma) = 0$ e per $\gamma \in (0, 2\pi)$ ammette come soluzioni $\gamma = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, ricordando che $t_1 = \gamma$, $t_2 = 2\pi - \gamma$ abbiamo

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{3}{2}\pi \end{cases}, \quad \gamma = \pi \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \pi \\ t_2 = \pi \end{cases}, \quad \gamma = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2}\pi \\ t_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases};$$

nel primo caso leggiamo che $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \mathbf{r}(\frac{3}{2}\pi)$, nel secondo caso $t_1 = t_2$, quindi non corrisponde ad alcun punto doppio, il terzo caso corrisponde al primo; concludendo, la curva ha un punto doppio: $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \mathbf{r}(\frac{3}{2}\pi) = \mathbf{0}$. Il grafico di $\mathcal{L}_3$ è il seguente:




④ Poiché $t$ varia in $\mathbb{R}$, la curva non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = (2t\operatorname{Sh} t + t^2\operatorname{Ch} t)^2 + (-2te^{-t^2})^2,$$

ossia, raccogliendo $t^2$,

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = t^2\left[4e^{-2t^2} + (2\operatorname{Sh} t + t\operatorname{Ch} t)^2\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0;$$

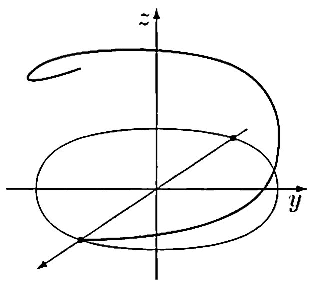
ne segue che $\mathcal{L}_4$ è regolare a tratti, su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre $\mathcal{L}_4$ è semplice, infatti $e^{-t_1^2} = e^{-t_2^2}$ se e solo se, posto $t_1 = \tau$, $t_2 = -\tau$, ma $(-\tau)^2\operatorname{Sh}(-\tau) = -\tau^2\operatorname{Sh}\tau$ e

$$(-\tau)^2\operatorname{Sh}(-\tau) = -\tau^2\operatorname{Sh}\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.$$

⑤ Osserviamo che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ mentre $\mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{i} + 2\pi\mathbf{k}$, quindi $\mathcal{L}_5$ non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \quad \forall t \in (0, 2\pi),$$

quindi $\mathcal{L}_5$ è regolare. Infine, la sua componente rispetto a $z$: $z(t) = t$ è monotona crescente, quindi $\mathcal{L}_5$ è semplice.



## Esercizio 4.3 — Curve piane — Rappresentazione cartesiana

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:*

① $\gamma_1$ : *ramo di parabola* $y = x^2 - 1, \quad x \in [-2, 4];$

② $\gamma_2$ : *semicirconferenza* $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1];$

*date le seguenti curve in forma parametrica, scriverne (ove possibile) la rappresentazione cartesiana, altrimenti spiegare perché non è possibile:*

③ $\gamma_3 : \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + [\cos 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi];$

④ $\gamma_4 : \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi];$

⑤ $\gamma_5 : \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + [\cos 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, \pi];$

⑥ $\gamma_6 : \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [-\pi, \pi].$

### Soluzione

Una curva piana è detta in *forma cartesiana* se è descritta come $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, ovviamente una curva in forma cartesiana può essere sempre riscritta in forma parametrica, ponendo $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$. Viceversa, una curva in forma parametrica non sempre può essere scritta in forma cartesiana, dev'essere possibile esprimere $y(t)$ in funzione di $x(t)$.

① ② Ponendo $x = t$, abbiamo immediatamente:

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + [t^2 - 1]\mathbf{j}, \qquad t \in [-2, 4];$$

$$\gamma_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \left[\sqrt{1 - t^2}\right]\mathbf{j}, \quad t \in [-1, 1].$$

③ Esprimendo $t$ in funzione di $x$, ricaviamo

$$\begin{cases} x = t^3 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ x \in [0, 8\pi^3] \end{cases};$$

pertanto $y(t) = \cos 2t$ diventa $y(t(x)) = f(x) = \cos 2\sqrt[3]{x}$, e l'espressione cartesiana cercata è

$$\gamma_3 : y = \cos 2\sqrt[3]{x}, \qquad x \in [0, 8\pi^3].$$

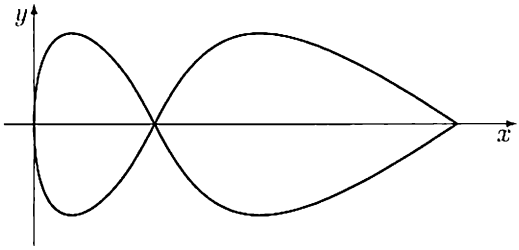
④ Ci troviamo nella stessa situazione del punto precedente, l'unica differenza consiste nel campo di variazione della $x$: da $x = t^3$ con $t \in [-2\pi, 2\pi]$ troviamo $t = \sqrt[3]{x}$ con $x \in [-8\pi^3, 8\pi^3]$, pertanto l'espressione cartesiana è

$$\gamma_4 : y = \sin 2\sqrt[3]{x}, \qquad x \in [-8\pi^3, 8\pi^3].$$

⑤ Anche in questo caso possiamo seguire la strada degli esempi precedenti: da $x = t^2$ con $t \in [0, \pi]$ ricaviamo $t = \sqrt{x}$ con $x \in [0, \pi^2]$, pertanto l'espressione cartesiana è

$$\mathcal{L}_5 : y = \cos 2\sqrt{x}, \qquad x \in [0, \pi^2].$$

⑥ In questo caso, l'espressione $x = t^2$ con $t \in [-\pi, \pi]$ non è invertibile, e quindi non v'è modo di esprimere la curva $\mathcal{L}_6$ in forma cartesiana. In effetti il suo grafico non è il grafico di alcuna funzione:




### Esercizio 4.4 — Curve piane — Rappresentazione polare

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:*

① $\mathcal{L}_1 : \varrho = k\vartheta \qquad \vartheta \in [0, 4\pi]$, *(spirale di Archimede)*;

② $\mathcal{L}_2 : \varrho = \vartheta(2\pi - \vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$;

*date le seguenti curve in forma parametrica, scriverne (ove possibile) la rappresentazione polare, altrimenti spiegare perché non è possibile:*

③ $\mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [2\cos^2 t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, \pi]$;

④ $\mathcal{L}_4 : \mathbf{r}(t) = [t\sqrt{1 - t^2}]\mathbf{i} + [t^2]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1]$;

⑤ $\mathcal{L}_5 : \mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$ (*astroide*).

#### Soluzione

Si dice rappresentazione *polare* di una curva $\mathcal{L}$ una scrittura della forma $\varrho = f(\vartheta)$ ($\vartheta \in [\alpha, \beta]$), ove $\varrho$ e $\vartheta$ sono le cooordinate polari del piano. Il legame tra coordinate cartesiane e polari $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, consente, nel caso di una curva in forma polare, di scriverne immediatamente la forma parametrica:

$$\begin{array}{l} \varrho = f(\vartheta), \\ \quad \Updownarrow \\ \mathbf{r}(\vartheta) = [f(\vartheta)\cos\vartheta]\mathbf{i} + [f(\vartheta)\sin\vartheta]\mathbf{j}, \end{array} \qquad \vartheta \in [\alpha, \beta].$$

Invece, data una curva in forma parametrica, è possibile scriverne la forma polare unicamente se le espressioni $x(t)$ e $y(t)$ si possono fattorizzare come il prodotto della stessa funzione $f(t)$ rispettivamente per $\cos t$ e $\sin t$.

① Ponendo $f(\vartheta) = k\vartheta$, abbiamo immediatamente:

$$\mathcal{C}_1 : \mathbf{r}(\vartheta) = [k\vartheta \cos\vartheta]\mathbf{i} + [k\vartheta \sin\vartheta]\mathbf{j}, \qquad \vartheta \in [0, 4\pi].$$

② Ponendo $f(\vartheta) = \vartheta(2\pi - \vartheta)$, abbiamo immediatamente:

$$\mathcal{C}_2 : \mathbf{r}(\vartheta) = [\vartheta(2\pi - \vartheta)\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\vartheta(2\pi - \vartheta)\sin\vartheta]\mathbf{j}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

③ La curva $\mathcal{C}_3$ è esprimibile in forma polare se è possibile scrivere le sue componenti nella forma

$$[f(\vartheta)\cos\vartheta], \qquad [f(\vartheta)\sin\vartheta];$$

poiché $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, raccogliendo $2\cos t$ possiamo scrivere:

$$[2\cos^2 t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j} = 2\cos t\big[\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}\big],$$

e quindi l'equazione polare di $\mathcal{C}_3$ è $\varrho = 2\cos t$, con $t \in [0, \pi]$.

④ $\mathcal{C}_4$ è esprimibile in coordinate polari, se infatti raccogliamo $t$ nella sua espressione ricaviamo

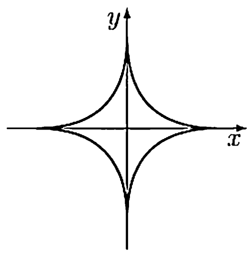
$$[t\sqrt{1-t^2}]\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} = t\left[\sqrt{1-t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}\right],$$

ponendo $t = \sin\vartheta$ e quindi $\sqrt{1-t^2} = \cos\vartheta$, se $t \in [0, 1]$ allora $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e quindi

$$\mathcal{C}_4 : \mathbf{r}(\vartheta) = \sin\vartheta\,[\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}], \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

e l'equazione polare cercata è $\varrho = \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

⑤ La curva $\mathcal{C}_5$ non è immediatamente esprimibile in forma polare: infatti raccogliendo $\cos t$ nella prima componente e $\sin t$ nella seconda non rimane la stessa funzione. Tuttavia, il grafico di $\mathcal{C}_5$ è il seguente:




e, sebbene sia evidente che ad ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$ corrisponda un solo valore di $\varrho$, questo legame non è di immediata scrittura.

## Esercizio 4.5 — Curve intersezione di due superfici

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:*

① $\mathcal{C}_1$: *intersezione del piano* $5x - 2y + z = 4$ *con il cilindro* $x^2 + y^2 = 1$;

② $\mathcal{C}_2$: *intersezione del piano* $2x - z = 3$ *con la superficie* $z^3 - 2x^2 - y^3 + xz = 0$;

③ $\mathscr{L}_3$: *intersezione del cilindro* $x^2 + y^2 - x = 0$ *con la sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *(curva di Viviani).*

## Soluzione

Per trovare una rappresentazione parametrica di una curva intersezione di due superfici, può essere utile incomiciare a identificare un parametro, del quale servirsi poi per descrivere la curva.

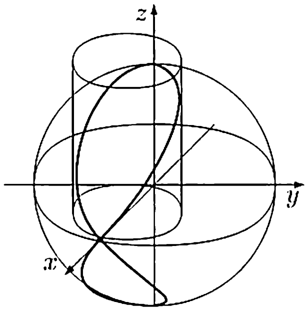
① L'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $5x - 2y + z = 4$ è un'ellisse, i suoi punti sono in corrispodenza biunivoca con i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nel piano $xy$, parametrizziamo allora questa circonferenza con $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, al punto sulla circonferenza, di coordinate $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$ corrisponde sul piano (e quindi sull'intersezione di piano e cilindro) il punto di quota $z = 4 - 5x + 2y = 4 - 5\cos\vartheta + 2\sin\vartheta$, pertanto un'espressione parametrica di $\mathscr{L}_1$ è

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + [4 - 5\cos\vartheta + 2\sin\vartheta]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

② Anche in questo caso, iniziamo a identificare un possibile parametro: dall'equazione del piano possiamo esprimere $z$ in funzione di $x$: $z = 2x - 3$, poiché poi l'equazione della superficie permette di esprimere tutto in funzione di $y$: $y^3 = z^3 - x^2 + xz$ ossia $y = \sqrt[3]{z^3 - x^2 + xz}$, possiamo porre direttamente $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$ e scrivere

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \left[\sqrt[3]{(2t-3)^3 - t^2 + t(2t-3)}\right]\mathbf{j} + [2t - 3]\mathbf{k}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

③ L'intersezione del cilindro, avente asse verticale in corrispondenza del punto $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{1}{2}$, con la sfera di raggio unitario centrata nell'origine è rappresentata da una curva "a otto" che si depone per metà sull'emisfero superiore e per l'altra metà sull'emisfero inferiore.




Per descriverla tutta, è necessario effettuare due interi giri sulla circonferenza di base del cilindro, se per questa circonferenza usiamo la parametrizzazione usuale:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha, \qquad y = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

possiamo porre $\alpha \in [0, 4\pi]$: per $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$ ci troviamo in corrispondenza dell'incrocio, stabiliamo allora che se $\alpha \in [0, 2\pi]$ percorriamo l'anello superiore, mentre se $\alpha \in [2\pi, 4\pi]$ percorriamo l'anello inferiore. Osserviamo che, poiché la metà superiore della sfera ha equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mentre la metà inferiore ha equazione $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, la parametrizzazione di $\mathcal{L}_3$ sarà allora

$$\mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(\alpha) = \begin{cases} \left[\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\dfrac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\right]\mathbf{k} & \alpha \in [0, 2\pi] \\ \left[\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\dfrac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\right]\mathbf{k} & \alpha \in (2\pi, 4\pi] \end{cases};$$

grazie alle formule di bisezione[a], possiamo allora scrivere un'espressione più agevole:

$$\mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(\alpha) = \left[\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]\mathbf{k}, \qquad \alpha \in [0, 4\pi].$$

## Esercizio 4.6 — Vettore tangente a un curva

*Scrivere l'equazione della retta tangente alle curve qui sotto elencate, nel punto indicato:*

① $\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = 2e^t\mathbf{i} - [t^2 + \log t]\mathbf{j}$, $\quad P_1(2e^2, -4 - \log 2)$;

② $\mathcal{L}_2 : \varrho = 2\vartheta$, $\quad P_2(0, \pi)$;

③ $\mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [2\cos t]\mathbf{i} + [t\sin t]\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\quad P_3\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi^2}{36}\right)$.

### Soluzione

Data la curva $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t)$, il vettore tangente a essa in corrispondenza del generico valore di $t$ è dato da[b]

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Per scrivere l'equazione della retta tangente a $\mathcal{L}$ in un certo punto $\bar{P}$, è sufficiente conoscere il valore di $\mathbf{r}'(\bar{t})$ (ove $\bar{t}$ è il valore del parametro corrispondente al punto $\bar{P}$).

[a] Infatti

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} & \alpha \in [0, 2\pi] \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \alpha \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}.$$

[b] Possiamo allora reinterpretare la definizione di curva regolare in $(a, b)$: la curva $\mathcal{L}$ è regolare in $(a, b)$ se $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ pr ogni $t \in (a, b)$.

① Il punto $P_1(2e^2, -4 - \log 2)$ corrisponde al valore $t = 2$, infatti dalla prima componente abbiamo $2e^t = 2e^2$, pertanto $t = 2$, controllando nella seconda componente:

$$-t^2 - \log t \overset{t=2}{=} -4 - \log 2;$$

inoltre, poiché

$$\mathbf{r}'(t) = 2e^t\mathbf{i} - \left[2t + \frac{1}{t}\right]\mathbf{j}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(2) = 2e^2\mathbf{i} - \left[\frac{9}{2}\right]\mathbf{j};$$

pertanto la retta cercata è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^2 \\ -4 - \log 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4e^2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

② Esprimiamo innanzitutto $\mathcal{L}_2$ in forma parametrica:

$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [2\vartheta \cos \vartheta]\mathbf{i} + [2\vartheta \sin \vartheta]\mathbf{j},$$

operando come sopra, osserviamo che $P_2$ corrisponde a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; inoltre

$$\mathbf{r}'(t) = \left[2 \cos \vartheta - 2\vartheta \sin \vartheta\right]\mathbf{i} + \left[2 \sin \vartheta + 2\vartheta \cos \vartheta\right]\mathbf{j}, \Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\mathbf{i} + 2\mathbf{j};$$

e pertanto la retta cercata è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\pi \\ 2 \end{bmatrix}.$$

③ Osserviamo che $P_3$ corrisponde a $t = \frac{\pi}{6}$. Dopodiché

$$\mathbf{r}'(t) = [-2 \sin t]\mathbf{i} + [\sin t + t \cos t]\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \left[\frac{\pi + 4\sqrt{3}}{12}\right]\mathbf{j} + \frac{\pi}{3}\mathbf{k};$$

e pertanto la retta tangente è (moltiplicando $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{6})$ per 12)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \pi/12 \\ \pi^2/36 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -12\sqrt{3} \\ \pi + 4\sqrt{3} \\ 4\pi \end{bmatrix}.$$

### Esercizio 4.7 — Curvatura Cerchio osculatore — Piano osculatore

*Per ciascuna delle curve qui sotto elencate, determinare il raggio di curvatura nel punto indicato:*

① $\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [3t + t^3]\mathbf{i} + [2t^2 + t^4]\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\quad P_1(4, 3, 1)$;

② $\mathcal{L}_2$ : *parabola* $y = x^2$, $\quad P_2(1, 1)$;

③ $\mathcal{L}_3 : \varrho = (1 + \cos\vartheta)$, $\quad P_3\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

*per la curva* $\mathcal{L}_1$ *scrivere l'equazione del piano osculatore, per le curve* $\mathcal{L}_2$ *e* $\mathcal{L}_3$*, scrivere l'equazione del cerchio osculatore.*

### Soluzione

Data $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t)$, dalla teoria sappiamo che la curvatura $\kappa(t)$ di $\mathcal{L}$ nel punto corrispondente al generico $t$ è data da

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Sappiamo inoltre che $\mathbf{r}''(t)$ punta verso l'"interno" della curva $\mathcal{L}$, ossia dalla parte da cui si trova il *cerchio osculatore*, il cui raggio (*raggio di curvatura*) è dato da $R = \frac{1}{\kappa(t)}$; inoltre, se $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ individuano il *piano osculatore* della curva nel punto corrispondente a $t$.

① $P_1$ corrisponde a $t = 1$, inoltre

$$\mathbf{r}'(t) = [3 + 3t^2]\mathbf{i} + [4t + 4t^3]\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{i} + [4 + 12t^2]\mathbf{j};$$

pertanto $\mathbf{r}'(1) = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$. Nel punto $P_1$ la curvatura e il raggio di curvatura sono dati da

$$\kappa = \frac{|-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 48\mathbf{k}|}{|6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}|^3} = \sqrt{\frac{2596}{101^3}}, \qquad R = \sqrt{\frac{101^3}{2596}}.$$

Il piano osculatore di $\mathcal{L}_1$ nel punto $P_1$ ha come vettore perpendicolare $\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)$, ossia $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 48\mathbf{k}$, la sua equazione è pertanto

$$-16x + 6y + 48z = 2, \quad \text{ossia} \quad 8x - 3y - 24z = -1.$$

② Parametrizziamo la parabola $\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, poiché $P_2(1, 1)$ corrisponde a $t = 1$ troviamo che

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \ \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}''(1) = 2\mathbf{j};$$

pertanto la curvatura e il raggio di curvatura quando $t = 1$ valgono[c]

$$\kappa = \frac{|2\mathbf{k}|}{|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|^3} = \frac{2}{25}\sqrt{5}, \qquad R = \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

Il cerchio osculatore di $\mathscr{C}_2$ ha raggio $R$, il suo centro si trova a distanza $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ da $P_2$ nella direzione perpendicolare alla retta tangente, ossia nella direzione perpendicolare a $\mathbf{r}'$, nel verso delle $y$ (crescenti in accordo con il verso di $\mathbf{r}''$), questa direzione è individuata dal vettore $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; per trovare il centro è sufficiente aggiungere alle coordinate di $P_2$ un vettore come $\mathbf{v}$, di lunghezza pari a $R$:

$$[x_C, y_C] = [1, 1] + \frac{5}{2}\sqrt{5}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left[-4, \frac{7}{2}\right]$$

il cerchio osculatore ha quindi centro in $(-4, \frac{7}{2})$ e raggio $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$, l'equazione è

$$(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 + 8x - 7y = 3.$$

③ Esprimiamo $\mathscr{C}_3$ in forma parametrica

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\big[\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}\big],$$

e osserviamo che $P_3$ corrisponde a $t = \frac{\pi}{3}$, poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [-\sin t - 2\cos t \sin t]\mathbf{i} + [\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t]\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}''(t) = [-\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t]\mathbf{i} + [-\sin t - 4\cos t \sin t]\mathbf{j},$$

e quindi

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\mathbf{i} \quad \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \wedge \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}\mathbf{k},$$

pertanto la curvatura e il raggio di curvatura quando $t = \frac{\pi}{3}$ valgono

$$\kappa = \frac{|\frac{9}{2}\mathbf{k}|}{|-\sqrt{3}\mathbf{i}|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad R = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

[c] Si può dimostrare che, se la curva $\mathscr{C}$ è data in forma cartesiana, allora la curvatura nel punto $(x, y(x))$ è data da

$$\kappa = \frac{|y''(x)|}{|1 + [y'(x)]^2|^{(3/2)}}.$$

Il centro del cerchio osculatore è pertanto posto sulla verticale del punto $P_3$, verso il basso (concordemente con $\mathbf{r}''$) a distanza $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ da $P_3$, e cioè nel punto

$$(x_C, y_C) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

e la sua equazione è

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2,$$

ossia $12x^2 + 12y^2 - 18x - 2\sqrt{3}y = 9$.

**Osservazione importante**: *Cerchi osculatori nello spazio*
Anche in $\mathbb{R}^3$ è possibile parlare di cerchi osculatori; tuttavia, a differenza di quanto accade nel piano, la loro equazione si può scrivere sotto forma di intersezione tra il piano osculatore e la sfera che ha lo stesso centro e lo stesso raggio del cerchio osculatore.

### Esercizio 4.8 — Terna intrinseca

*Data la linea*

$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = [t^2 + 1]\mathbf{i} + [t^3 - 2]\mathbf{j} + [2t]\mathbf{k},$$

*scrivere la terna intrinseca relativa al punto* $P(5, 6, 4)$.

### Soluzione

Data la generica linea regolare $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t)$, è detta *terna intrinseca* nel punto $P \in \mathcal{L}$ la terna di versori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ ove

- $\mathbf{T}$ è il *versore tangente* a $\mathcal{L}$ in $P$, diretto come $\mathbf{r}'(t)$ e di lunghezza unitaria, pertanto
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|};$$
- $\mathbf{N}$ è il *versore normale* a $\mathcal{L}$ in $P$, $\mathbf{N}$ punta nella direzione del centro del cerchio osculatore a $\mathcal{L}$ in $P$, pertanto $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ individuano il piano osculatore, inoltre
$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|};$$
- $\mathbf{B}$ è il *versore binormale* a $\mathcal{L}$ in $P$, forma con $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ una terna destrorsa, quindi
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{N}(t).$$

Osserviamo che, se la linea $\mathscr{L}$ ha una generica parametrizzazione in $t$, una volta calcolato $\mathbf{T}$ è più comodo calcolare $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|},$$

e da questo ricavare $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ (sfruttando le proprietà della terna destrorsa).
Nel nostro caso, $P$ corrisponde a $t = 2$. Poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [2t]\mathbf{i} + [3t^2]\mathbf{j} + [2]\mathbf{k}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4},$$

troviamo che

$$\mathbf{T}(t) = \frac{[2t]\mathbf{i} + [3t^2]\mathbf{j} + [2]\mathbf{k}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4}}, \quad \mathbf{T}(2) = \frac{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{164}} = \frac{2}{\sqrt{41}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{41}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{41}}\mathbf{k};$$

inoltre $\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$, pertanto $\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = [-12t]\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}$, e

$$\mathbf{B}(t) = \frac{[-12t]\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}}{\sqrt{36t^4 + 144t^2 + 16}}, \qquad \mathbf{B}(2) = -\frac{6}{\sqrt{73}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{73}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{73}}\mathbf{k}.$$

Infine, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ e quindi

$$\mathbf{N}(2) = -\frac{35}{\sqrt{2993}}\mathbf{i} + \frac{18}{\sqrt{2993}}\mathbf{j} - \frac{38}{\sqrt{2993}}\mathbf{k}.$$

### Esercizio 4.9 — Lunghezza di una curva

*Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:*

① $\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = \left[t^3 + \frac{1}{t} + 2\right]\mathbf{i} + \left[3 + 2\sqrt{3}t\right]\mathbf{j}, \quad t \in [1, 4];$

② $\mathscr{L}_2$ : *parabola* $y = x^2, \quad x \in [-1, 1];$

③ $\mathscr{L}_3 : \varrho = e^{\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \pi];$

④ $\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} - \sqrt{2}t\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2].$

### Soluzione

Data una curva $\mathscr{L} : \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, la lunghezza di $\mathscr{L}$ è data dalla formula

$$\text{lunghezza } (\mathscr{L}) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Si può osservare che, nel caso di una curva scritta in forma cartesiana $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) e nel caso di una curva scritta in forma polare $\varrho = g(\vartheta)$ ($\vartheta \in [\alpha, \beta]$), l'espressione $|\mathbf{r}'(t)|$ diventa

$$|\mathbf{r}'(t)| \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x & \text{in forma cartesiana} \\ \\ \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2} \, \mathrm{d}\vartheta & \text{in forma polare} \end{cases};$$

e quindi, nei due casi, l'integrale diventa

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx, \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{[g(\vartheta)]^2+[g'(\vartheta)]^2}\, d\vartheta.$$

① Abbiamo

$$\mathbf{r}'(t) = \left[3t^2 - \frac{1}{t^2}\right]\mathbf{i} + \left[2\sqrt{3}\right]\mathbf{j}$$

da cui

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(3t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9t^4 - 6 + \frac{1}{t^4} + 12}$$
$$= \sqrt{\left(3t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = 3t^2 + \frac{1}{t^2}$$

pertanto

$$\text{lunghezza}\ (\mathcal{L}_1) = \int_1^4 \left(3t^2 + \frac{1}{t^2}\right) dt = 64 - \frac{1}{4}.$$

② Usando la formula più sopra citata, abbiamo $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1+4x^2}$ e pertanto

$$\text{lunghezza}\ (\mathcal{L}_2) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx,$$

quest'integrale si calcola per sostituzione[d]:

$$2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx = \left[\begin{array}{c} 2x = \mathrm{Sh}\, t \\ 2\, dx = \mathrm{Ch}\, t\, dt \end{array}\right] = \int_0^{\bar t} \sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 t}\,\mathrm{Ch}\, t\, dt$$
$$= \int_0^{\bar t} \mathrm{Ch}^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\bar t} \left(e^t + e^{-t}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\log[2+\sqrt{5}]}$$

in definitiva

$$\text{lunghezza}(\mathcal{L}_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\log[2+\sqrt{5}]} = \sqrt{5} + \frac{\log\left[2+\sqrt{5}\right]}{2}.$$

③ Usando anche in questo caso la formula scritta sopra, poiché $g(\vartheta) = g'(\vartheta) = e^\vartheta$ abbiamo $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[e^\vartheta]^2 + [e^\vartheta]^2} = \sqrt{2}e^\vartheta$, e quindi

$$\text{lunghezza}(\mathcal{L}_3) = \int_0^\pi \sqrt{2}e^\vartheta\, d\vartheta = \sqrt{2}\left(e^\pi - 1\right).$$

[d]Da $2 = \mathrm{Sh}\,\bar t$ si ricava $\bar t = \log[2+\sqrt{5}]$.

④ In questo caso $\mathbf{r}'(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ e quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t},$$

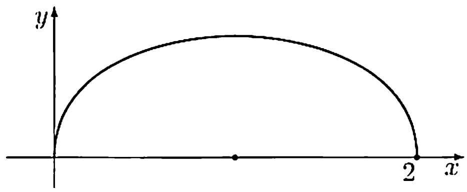
pertanto

$$\text{lunghezza}(\mathcal{L}_4) = \int_0^2 \left(e^t + e^{-t}\right) \mathrm{d}t = e^2 - e^{-2} = 2\operatorname{Sh} 2.$$

### Esercizio 4.10 — Ascissa curvilinea

*Determinare la parametrizzazione in termini dell'ascissa curvilinea s della curva seguente (cicloide):*

$$\mathcal{L}: \mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$




### Soluzione

Data $\mathcal{L}$ : $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, l'ascissa curvilinea $s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco compreso tra $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, ossia

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| \, \mathrm{d}\tau.$$

Per riparametrizzare $\mathcal{L}$ in termini di $s$, è necessario[e] determinare $t$ in funzione di $s$ e scrivere $\mathbf{r}$ in funzione di $s$.
Poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [1 - \cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j}$$

e quindi $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t}$, usando le formule di bisezione ($t \in [0, 2\pi]$, quindi $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$) abbiamo

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2},$$

[e]Dal punto di vista teorico ciò è sempre possibile, infatti $s$ è una funzione crescente in $t$; non è sempre possibile effettuare esplicitamente questa trasformazione nei casi particolari.

pertanto

$$s(t) = \int_0^t 2\sin\frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\tau = 4\left(1-\cos\frac{t}{2}\right);$$

quindi

$$s = s(t) = 4\left(1-\cos\frac{t}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad t = t(s) = 2\arccos\frac{4-s}{4}.$$

La riparametrizzazione cercata è allora

$$\mathcal{L}: \mathbf{r}(s) = \left[2\arccos\frac{4-s}{4} - \sin\left(2\arccos\frac{4-s}{4}\right)\right]\mathbf{i} + \left[1-\cos\left(2\arccos\frac{4-s}{4}\right)\right]\mathbf{j},$$

con $s \in [0, 8]$.

## Esercizio 4.11 — Integrali di linea di prima specie

*Calcolare i seguenti integrali di linea*:

① $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_1} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}s, \qquad \mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [e^{3t}]\mathbf{i} + [e^{4t}]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1];$

② $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_2} x\,\mathrm{d}s, \qquad \mathcal{L}_2 : \textit{parabola } y = x^2, \qquad x \in [0, 3];$

③ $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_3} \frac{yz}{2x+1}\,\mathrm{d}s, \qquad \mathcal{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [t^2]\mathbf{i} + [2t]\mathbf{j} + [\log t]\mathbf{k}, \qquad t \in [1, e].$

### Soluzione

Data la curva

$$\mathcal{L}: \mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j} + [z(t)]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b];$$

e data una funzione $f(x, y, z)$ definita in tutti i punti di $\mathcal{L}$, l'integrale di $f$ lungo $\mathcal{L}$ si calcola trasformando $x$, $y$, $z$ e anche $s$ in funzione di $t$:

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{L}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Questa tipologia di integrali è detta *integrali di linea di prima specie*, si distinguono dagli integrali di seconda specie, di cui parleremo più avanti, per la variabile d'integrazione: nel caso degli integrali di prima specie, la variabile è l'ascissa curvilinea $s$, nel caso degli integrali di seconda specie le variabili d'integrazione sono le coordinate $x$, $y$ e $z$.

① . Abbiamo

$$\mathbf{r}'(t) = 3e^{3t}\mathbf{i} + 4e^{4t}\mathbf{j}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9e^{6t} + 16e^{8t}} = e^{3t}\sqrt{9 + 16e^{2t}},$$

inoltre

$$\frac{x}{y} = \frac{e^{3t}}{e^{4t}} = \frac{1}{e^t};$$

pertanto

$$\int_{\mathcal{L}_1} \frac{x}{y}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{e^t} e^{3t}\sqrt{9 + 16e^{2t}}\, dt = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{9 + 16e^{2t}}\, dt$$

$$= \left[ \begin{array}{c} e^{2t} = u \\ 2e^{2t}\, dt = du \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_0^{e^2} \sqrt{16u + 9}\, du = \ldots = \frac{\sqrt{(16e^2 + 9)^3} - 27}{48}.$$

② In questo caso, poiché anche $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + 4x^2}$ può essere scritto in funzione di $x$, scriviamo tutto l'integrale in funzione di $x$:

$$\int_{\mathcal{L}_2} x\, ds = \int_0^3 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \left[ \begin{array}{c} 4x^2 = u \\ 8x\, dx = du \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{36} \sqrt{1 + u}\, du = \frac{1}{12}\left[\sqrt{(1 + u)^3}\right]_0^{36} = \frac{\sqrt{37^3} - 1}{12}.$$

③ Calcoliamo $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2},$$

$t \in [1, e]$ implica $2t + \frac{1}{t} > 0$, quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = 2t + \frac{1}{t} = \frac{2t^2 + 1}{t};$$

infine

$$\frac{yz}{2x + 1} = \frac{2t \log t}{2t^2 + 1},$$

pertanto

$$\int_{\mathcal{L}_3} \frac{yz}{2x + 1}\, ds = \int_1^e \frac{2t \log t}{2t^2 + 1}\frac{2t^2 + 1}{t}\, dt = 2\int_1^e \log t\, dt$$

$$= 2\big[t \log t - t\big]_1^e = 2.$$

## Esercizio 4.12 — Integrali di linea di prima specie Interpretazione fisica

*Calcolare la massa e le coordinate del baricentro della linea* $\mathcal{L}$ : $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in [1, 4]$, *la cui densità lineare vale*

$$\delta(x, y, z) = \frac{x + z}{3y}.$$

### Soluzione

Se si interpreta la curva $\mathcal{L}$ come un filo avente densità lineare $\delta(x, y, z)$, allora la massa $M$ e l'ascissa del baricentro sono date dagli integrali di linea[f]

$$M = \int_{\mathcal{L}} \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s, \qquad x_B = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{L}} x\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s.$$

Nel nostro caso $\mathbf{r}'(t) = 6t\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{36t^2 + 36 + 9t^4} = \sqrt{9(t^2 + 2)^2} = 3(t^2 + 2);$$

inoltre

$$\delta\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \frac{x + z}{3y} = \frac{3t^2 + t^3}{18t} = \frac{1}{18}(3t + t^2),$$

pertanto

$$M = \int_1^4 \frac{1}{18}(3t + t^2)\, 3(t^2 + 2)\, \mathrm{d}t = \frac{3219}{40}.$$

inoltre

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18} 3t^2(3t + t^2)\, 3(t^2 + 2)\, \mathrm{d}t = \frac{40}{3219} \cdot \frac{181287}{70} = \frac{241716}{7511};\\
y_B &= \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18} 6t(3t + t^2)\, 3(t^2 + 2)\, \mathrm{d}t = \frac{40}{3219} \cdot \frac{7749}{5} = \frac{20664}{1073};\\
z_B &= \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18} t^3(3t + t^2)\, 3(t^2 + 2)\, \mathrm{d}t = \frac{40}{3219} \cdot \frac{1661871}{560} = \frac{553957}{15022}.
\end{aligned}$$

## Esercizio 4.13 — Integrali di linea di prima specie Interpretazione geometrica

*Calcolare l'area A della superficie a generatrici parallele all'asse z compresa tra la linea* $\mathcal{L}$: $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ *e la superficie di equazione* $z = f(x, y) = x\sqrt{2 - y^2}$.

[f] Valgono ovviamente formule analoghe per ordinata e quota del baricentro:

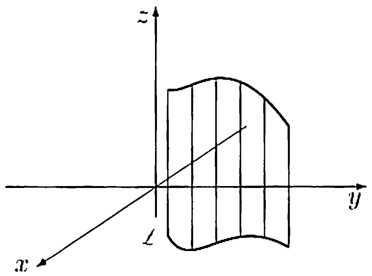
$$y_B = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{L}} y\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s, \qquad z_B = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{L}} z\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s.$$

**Soluzione**

Data una linea $\mathcal{L}$ nel piano $xy$ e data una funzione $f(x, y)$ definita e non negativa in corrispondenza dei punti di $\mathcal{L}$, l'integrale

$$\int_{\mathcal{L}} f(x, y)\, \mathrm{d}s$$

può essere visto come l'area della superficie verticale compresa tra la linea $\mathcal{L}$ nel piano $xy$ e la superficie $z = f(x, y)$:




Nel nostro caso, (usando direttamente la parametrizzazione in $x$)

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + \cos^2 x}, \qquad f(x, \sin x) = x\sqrt{2 - \sin^2 x},$$

pertanto

$$A = \int_{\mathcal{L}} f(x, y)\, \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} x\sqrt{2 - \sin^2 x}\,\sqrt{1 + \cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x(1 + \cos^2 x)\, \mathrm{d}x$$

e, usando le formule di bisezione,

$$\int_0^{\pi} x(1 + \cos^2 x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\left(1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{3}{2}\pi^2.$$

## Esercizio 4.14 — Integrali di linea di seconda specie

*Calcolare i seguenti integrali di linea*:

① $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_1} [xy\, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y]$, $\qquad \mathcal{L}_1 : \begin{cases} \mathbf{r}(t) = [e^{-t}]\mathbf{i} + [te^{2t}]\mathbf{j} \\ \textit{percorsa da } (1, 0) \textit{ a } (e^{-1}, e^2) \end{cases}$ ;

② $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_2} \left[x\, \mathrm{d}x + \frac{y+1}{x+2}\, \mathrm{d}y\right]$, $\qquad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} \textit{parabola } y = x^2, \\ \textit{percorsa da } (0, 0) \textit{ a } (2, 4) \end{cases}$ ;

③ $\displaystyle\int_{\mathcal{L}_3} [xyz\, \mathrm{d}x - xz\, \mathrm{d}z]$, $\qquad \mathcal{L}_3 : \begin{cases} \mathbf{r}(t) = [t^2]\mathbf{i} + [2t]\mathbf{j} + [\log t]\mathbf{k}, \\ \textit{percorsa da } (e^2, 2e, 1) \textit{ a } (1, 2, 0). \end{cases}$

**Soluzione**

Come per gli integrali di prima specie, anche per gli integrali di seconda specie le variabili che compaiono nell'integrale vengono trasformate nel parametro della linea $\mathcal{L}$; mentre nel caso degli integrali di prima specie $\mathrm{d}s$ diventava $|\mathbf{r}'(t)|\ \mathrm{d}t$, ora negli integrali compaiono $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}z$, che diventano rispettivamente

$$\mathrm{d}x = x'(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = y'(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}z = z'(t)\ \mathrm{d}t.$$

① Osserviamo innanzitutto che nella parametrizzazione data per $\mathcal{L}_1$ il parametro $t$ varia da $t = 0$ a $t = 1$, inoltre

$$\mathrm{d}x = -e^{-t}\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = (e^{2t} + 2te^{2t})\ \mathrm{d}t;$$

pertanto

$$\int_{\mathcal{L}_1} [xy\ \mathrm{d}x + \ \mathrm{d}y] = \int_0^1 \left[te^t(-e^{-t})\ \mathrm{d}t + (e^{2t} + 2te^{2t})\ \mathrm{d}t\right]$$
$$= \int_0^1 \left[-t + e^{2t} + 2te^{2t}\right]\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^2 + te^{2t}\right]_0^1 = e^2 - \frac{1}{2}.$$

② Usando $x$ come parametro, $x$ varia da $x = 0$ a $x = 2$, inoltre $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2) = 2x\ \mathrm{d}x$, pertanto

$$\int_{\mathcal{L}_2} \left[x\ \mathrm{d}x + \frac{y+1}{x+2}\ \mathrm{d}y\right] = \int_0^2 \left[x\ \mathrm{d}x + \frac{x^2+1}{x+2} 2x\ \mathrm{d}x\right]$$
$$= \int_0^2 \left[x + \frac{x^2+1}{x+2} 2x\right]\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{2x^3 + x^2 + 4x}{x+2}\right]\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 \left[2x^2 - 3x + 10 - \frac{20}{x+2}\right]\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{58}{3} - 20\log 2.$$

③ Osserviamo innanzitutto che nella parametrizzazione data per $\mathcal{L}_3$, concordemente al verso di percorrenza prescelto, il parametro $t$ varia da $t = e$ a $t = 1$, inoltre ($\mathrm{d}y$ non compare nella formula)

$$\mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}z = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t;$$

pertanto (attenzione agli estremi d'integrazione...)

$$\int_{\mathcal{L}_3} [xyz\ \mathrm{d}x - xz\ \mathrm{d}z] = \int_e^1 \left[2t^3 \log t \cdot (2t)\ \mathrm{d}t - t^2 \log t \cdot \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\right]$$
$$= -\int_1^e \left[4t^4 - t\right] \log t\ \mathrm{d}t = \text{ integrando per parti } = \frac{9 + 25e^2 - 64e^5}{100}.$$

**Osservazione importante**: *Integrali di linea e verso di percorrenza*
Negli integrali di linea di seconda specie, abbiamo appena visto che le variabili d'integrazione sono $x$, $y$ e $z$, pertanto il risultato è legato al verso di percorrenza della linea: se la linea, al crescere del parametro $t$, è percorsa in senso inverso rispetto a quanto richiesto dall'esercizio, in teoria dovremmo cambiare parametrizzazione; tuttavia si riconosce facilmente che questo equivale a scambiare gli estremi d'integrazione (o, che è lo stesso, cambiare di segno il risultato).
Questo problema non riguarda gli integrali di prima specie: poiché la variabile d'integrazione è l'ascissa curvilinea $s$, che *è sempre crescente*.

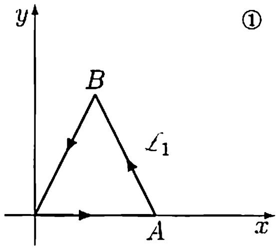
### 4.1.2 Formule di Green

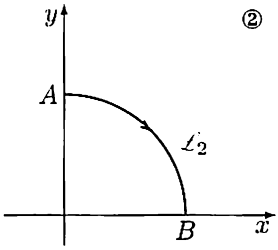
#### Esercizio 4.15 — Trasformazione di integrali di linea in integrali doppi

*Calcolare i seguenti integrali di linea*:

$$① \int_{\mathcal{L}_1} \left[(\sin x^2 - xy)\,dx + (xe^y + y)\,dy\right]; \quad ② \int_{\mathcal{L}_2} \left[ye^x\,dx + (e^x + xy)\,dy\right];$$

*ove* $\mathcal{L}_1$ *è il triangolo* $OAB$, *con* $A(2,0)$ *e* $B(1,2)$, *percorso in senso antiorario; e* $\mathcal{L}_2$ *è l'arco di circonferenza* $x^2 + y^2 = 4$ *percorso in senso orario da* $A(0,2)$ *a* $B(2,0)$.




#### Soluzione

Le formule di Green permettono di trasformare integrali di linea di seconda specie in integrali doppi, e viceversa. Se $D$ è una regione chiusa del piano e $\mathcal{L}$ è la sua frontiera, percorsa in senso antiorario, la formula afferma che

$$\int_{\mathcal{L}} \left[f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\right] = \iint_D \left[g_x(x,y) - f_y(x,y)\right] dx\,dy.$$

Con questa scrittura, si vede come trasformare un integrale di linea (al primo membro) in un integrale doppio (al II membro).

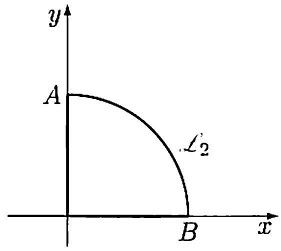
① In questo caso, $\mathcal{L}_1$ dev'essere percorsa in senso antiorario, essa racchiude il triangolo $T$, poiché $f(x, y) = \sin x^2 - xy$ e $g(x, y) = xe^y + y$ avremo

$$\int_{\mathcal{L}_1} \left[(\sin x^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (xe^y + y)\,\mathrm{d}y\right] = \iint_T \left(e^y + x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{4-y}{2}} \left(e^y + x\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xe^y + \frac{1}{2}x^2\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{4-y}{2}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \left(2e^y - ye^y + 2 - y\right) = \ldots = e^2 - 1.$$

② In questo caso, la linea $\mathcal{L}_2$ non è chiusa; possiamo agire nel modo seguente: chiudiamo $\mathcal{L}_2$ completandola con linee di comodo (nella fattispecie: i due segmenti di assi):




usiamo la formula di Green per calcolare l'integrale del testo esteso a tutta la frontiera del quarto di cerchio $D$ (in senso antiorario!), sottraendo i contributi relativi ai segmenti $\overline{OB}$ e $\overline{AO}$ ciò che rimane è il contributo dovuto all'arco $BA$, che cambieremo di segno per ottenere il risultato cercato. Usando la formula di Green, allora

$$\int_{\overline{OB} \cup BA \cup \overline{AO}} \left[ye^x\,\mathrm{d}x + (e^x + xy)\,\mathrm{d}y\right] = \iint_D \left((e^x + y) - e^x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \text{(in coordinate polari)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=2} (\varrho \sin\vartheta)\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \ldots = \frac{8}{3}.$$

Consideriamo ora i segmenti $\overline{OB}$ e $\overline{AO}$: sul primo $y = 0$ (e $\mathrm{d}y = 0$), sul secondo $x = 0$ (e $\mathrm{d}x = 0$), pertanto

$$\int_{\overline{OB}} \left[ye^x\,\mathrm{d}x + (e^x + xy)\,\mathrm{d}y\right] = \int_{x=0}^{x=2} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{\overline{AO}} \left[ye^x\,\mathrm{d}x + (e^x + xy)\,\mathrm{d}y\right] = \int_{y=2}^{y=0} 1\,\mathrm{d}y = -2.$$

Pertanto (il verso di percorrenza è antiorario)

$$\frac{8}{3} = \int_{\overline{OB}} + \int_{BA} + \int_{\overline{AO}} = 0 + \int_{BA} -2,$$

e quindi

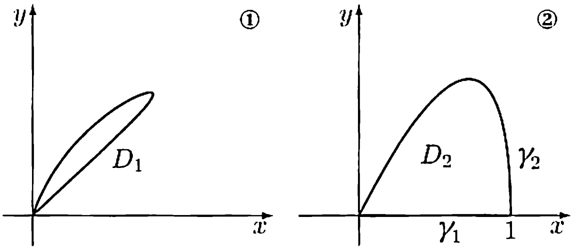
$$\int_{\mathcal{L}_2} \left[ ye^x \, dx + (e^x + xy) \, dy \right] = -\int_{BA} = -\frac{2}{3}.$$

## Esercizio 4.16 — Trasformazione di integrali doppi in integrali di linea

*Calcolare i seguenti integrali doppi:*

$$① \iint_{D_1} x \, dx \, dy; \qquad ② \iint_{D_2} ye^x \, dx \, dy;$$

*ove i rispettivi domini sono:*




*le cui frontiere sono rispettivamente* $\partial D_1 = \mathcal{L}_1$, *con*

$$\partial D_1 = \mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [t(1-t)]\mathbf{i} + [t(e - e^t)]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1];$$

*e* $\partial D_2 = \mathcal{L}_2 = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *con*

$$\gamma_1 : \textit{segmento } \overline{OA}, \textit{ con } A(1, 0)$$
$$\gamma_2 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

### Soluzione

La formula di Green può essere letta anche nel verso opposto, per trasformare un integrale doppio in un integrale di linea. È un accorgimento che si rivela particolarmente utile se la frontiera del dominio d'integrazione è espressa in forma parametrica. L'uguaglianza, letta "da destra a sinistra", può essere applicata in tre modi (la scelta si basa su ragioni di comodo):

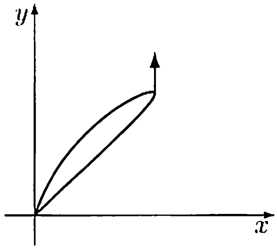
$$\iint_D f_y(x, y) \, dx \, dy = -\int_{\mathcal{L}} f(x, y) \, dx, \qquad \iint_D g_x(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathcal{L}} g(x, y) \, dy,$$

$$\iint_D \left[ g_x(x, y) + f_y(x, y) \right] dx \, dy = \int_{\mathcal{L}} \left[ -f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy \right].$$

① Usando alternativamente la prima o la seconda formula, l'integrale del testo diventa

$$\iint_{D_1} x \, dx \, dy = \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathcal{L}_1} xy \, dx \\ \displaystyle\int_{\mathcal{L}_1} \frac{1}{2} x^2 \, dy \end{cases}$$

scegliamo la prima, poiché $dx = (1 - 2t)\, dt$ è più semplice di $dy = (e - e^t - te^t)\, dt$; per decidere se al crescere di $t$ la linea è percorsa in senso orario o antiorario, osserviamone la prima componente $x(t) = t(1-t)$: essa è dapprima crescente e poi decrescente (la linea si allontana verso destra, per poi ritornare all'origine), in corrispondenza di $t = \frac{1}{2}$ raggiunge l'ascissa massima, per questo valore di $t$ abbiamo $\mathbf{r}'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}(\sqrt{e} - \frac{3}{2})\mathbf{j}$, poiché $\sqrt{e}(\sqrt{e} - \frac{3}{2}) > 0$ il vettore tangente alla curva nel punto $\mathbf{r}(\frac{1}{2})$ punta verso l'alto:




e quindi, quando $t$ va da 0 a 1, $\mathcal{L}_1$ viene percorsa in senso antiorario. Tornando all'integrale

$$\iint_{D_1} x \, dx \, dy = -\int_{\mathcal{L}_1} xy \, dx = -\int_0^1 \big([t(1-t)] \cdot [t(e - e^t)]\big) \cdot (1 - 2t)\, dt$$
$$= -\int_0^1 \big((t^2 - 3t^3 + 2t^4)(e - e^t)\big)\, dt = \ldots = \frac{1501e - 4080}{60} \simeq 0.00235.$$

② Usando la prima o la seconda formula, l'integrale del testo diventa

$$\iint_{D_2} ye^x \, dx \, dy = \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mathcal{L}_2} \frac{1}{2} y^2 e^x \, dx \\ \displaystyle\int_{\mathcal{L}_2} ye^x \, dy \end{cases}$$

scegliamo di usare la prima: osserviamo innanzitutto che $\mathcal{L}_2 = \gamma_1 \cup \gamma_2$, inoltre $\mathcal{L}_2$ va percorsa in senso antiorario, questo significa che

- $\gamma_1$ va percorsa da $O$ a $A$, cioè da $x = 0$ a $x = 1$,
- $\gamma_2$ va percorsa da $A$ a $O$, cioè da $t = 0$ a $t = 1$;

notiamo che il contributo dovuto a $\gamma_1$ è nullo, poiché su $\gamma_1$ abbiamo $y = 0$ e quindi la funzione integranda è nulla, mentre su $\gamma_2$ abbiamo $\mathrm{d}x = -\sin t\ \mathrm{d}t$, e:

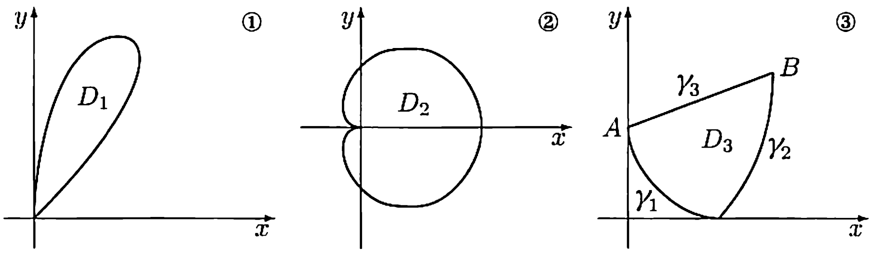
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} y^2 e^x\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin 2t]^2 e^{[\cos t]}(-\sin t)\ \mathrm{d}t \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t e^{\cos t}\sin t\ \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \cos t = u \\ -\sin t\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix} \\ &= -2\int_0^1 (1-u^2)u^2 e^u\ \mathrm{d}u = \ldots = 16e - 44;\end{aligned}$$

quindi

$$\iint_{D_2} ye^x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} y^2 e^x\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} y^2 e^x\ \mathrm{d}x = 44 - 16e.$$

## Esercizio 4.17 — Applicazione delle formule di Green: Calcolo di aree

*Calcolare le aree delle regioni piane $D_1$, $D_2$ e $D_3$ sottoindicate:*




*aventi rispettivamente frontiera $\partial D_1 = \mathcal{L}_1$, $\partial D_2 = \mathcal{L}_2$, con*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [t(1-t)^2]\mathbf{i} + [t - t^2]\mathbf{j}, && t \in [0, 1]; \\ &\mathcal{L}_2 : \varrho = 1 + \cos\vartheta && \vartheta \in [-\pi, \pi] \quad (\textit{cardioide}); \end{aligned}$$

*e $\partial D_3 = \mathcal{L}_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, ove*

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = (\cos t)^3\mathbf{i} + (\sin t)^3\mathbf{j} && t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ &\gamma_2 : \varrho = e^{\vartheta} && \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ &\gamma_3 : \textit{segmento } \overline{AB}. \end{aligned}$$

### Soluzione

Le formule di Green possono essere usate anche per il calcolo di aree di domini piani, poiché l'area di un dominio $D$ (avente frontiera $\mathcal{L}$) è data dall'integrale doppio su $D$ della funzione costante uguale a 1, possiamo (a patto di percorrere $\mathcal{L}$ in senso antiorario) scrivere che

$$\operatorname{area}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{L}} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\mathcal{L}} y\,\mathrm{d}x;$$

combinando le due formule, ne otteniamo una terza:

$$\operatorname{area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}} \left[x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\right],$$

che si rivela particolarmente utile nel caso in cui $\mathcal{L}$ sia data in forma polare $\varrho = g(\vartheta)$, infatti in questo caso $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = [g(\vartheta)]^2\,\mathrm{d}\vartheta$.

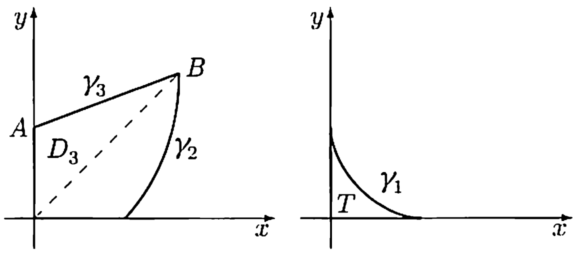
① Osserviamo che, al crescere di $t$, la linea $\mathcal{L}_1$ è percorsa in senso antiorario, possiamo allora usare la prima formula, e poiché $\mathrm{d}y = (1-2t)\,\mathrm{d}t$

$$\operatorname{area}(D_1) = \int_{\mathcal{L}} x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [t(1-t)^2](1-2t)\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{60}.$$

② La frontiera di $D_2$ è espressa in coordinate polari, e poiché al crescere di $\vartheta$ è percorsa in senso antiorario, abbiamo (usando le formule di bisezione):

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(D_2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_2} \left[x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi} (1+\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (3+\cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{3}{2}\pi\,.\end{aligned}$$

③ La frontiera di $D_3$ è definita a tratti, occorre sommare il contributo relativo a ciascun arco (avendo cura di percorrerla tutta in senso antiorario); in alternativa si può calcolare l'area del dominio $D_3^* = D_3 \cup T$, e sottrarre poi al risultato l'area di $T$:




Osserviamo che $D_3^*$ è composto da un triangolo e dal dominio $\{0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \varrho \le e^{\vartheta}\}$; considerando il triangolo $OAB$, avente base $OA$ e altezza relativa a essa data dall'ascissa di $B$,

$$\operatorname{area}(OAB) = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot x_B = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}};$$

considerando il restante dominio,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=e^{\vartheta}} \varrho \,\mathrm{d}\varrho = \ldots = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right);$$

quindi

$$\operatorname{area}(D_3^*) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right).$$

Per determinare l'area di $T$, usiamo la terza formula, e osserviamo che l'espressione $[x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x]$ si annulla sia sul segmento orizzontale sia sul segmento verticale, mentre su $\gamma_1$

$$\mathrm{d}x = -3\cos^2 t \sin t\ \mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}y = 3\sin^2 t \cos t\ \mathrm{d}t,$$

e

$$\begin{aligned} x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x &= [\cos^3 t](3\sin^2 t\cos t\ \mathrm{d}t) - [\sin^3 t](-3\cos^2 t\sin t\ \mathrm{d}t) \\ &= 3\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)\ \mathrm{d}t = \frac{3}{4}(\sin 2t)^2\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} \operatorname{area}(T) &= \frac{1}{2}\int_{\gamma_1}\left[x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x\right] = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{3}{32}\pi. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\operatorname{area}(D_3) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) - \frac{3}{32}\pi.$$

### 4.1.3 Superfici

#### Esercizio 4.18 — Superfici in forma parametrica - 1

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti superfici:*

① $\mathcal{S}_1$ : *sfera di raggio 3, centrata in* $C(2, 0, 1)$;
② $\mathcal{S}_2$ : *cilindro* $x^2 + z^2 = 4$, *con* $y \in [0, 5]$;
③ $\mathcal{S}_3$ : *cono* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
④ $\mathcal{S}_4$ : *porzione di sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *contenuta nel I ottante.*

#### Soluzione

Come per le linee era possibile scrivere una rappresentazione parametrica $\mathbf{r}(t)$, dipendente da un singolo parametro $t$ a valori in un intervallo $[a, b]$, in generale per le superfici esiste una rappresentazione parametrica

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v)]\mathbf{i} + [y(u, v)]\mathbf{j} + [z(u, v)]\mathbf{k}, \qquad (u, v) \in T,$$

dipendente dai parametri $u$ e $v$, al loro variare in un sottoinsieme $T$ del piano $uv$.

① Una rappresentazione parametrica della sfera centrata in $(x_0, y_0, z_0)$ e di raggio $R$ è data (ricordando il significato delle coordinate sferiche $R, \vartheta, \varphi$) da

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = [x_0 + R\sin\varphi\cos\vartheta]\mathbf{i} + [y_0 + R\sin\varphi\sin\vartheta]\mathbf{j} + [z_0 + R\cos\varphi]\mathbf{k},$$
$$\vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

Nel nostro caso

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = [2 + 3\sin\varphi\cos\vartheta]\mathbf{i} + [3\sin\varphi\sin\vartheta]\mathbf{j} + [1 + 3\cos\varphi]\mathbf{k}, \\ \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

② Possiamo vedere il cilindro $\mathcal{S}_2$ come insieme di punti per i quali $x^2 + z^2 = 4$ e $0 \le y \le 5$. Le coppie $(x, z)$ che verificano la relazione $x^2 + z^2 = 4$ sono rappresentate dalle equazioni $(x = 2\cos\alpha, z = 2\sin\alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$ se scegliamo come parametri proprio $\alpha$ e $y$, abbiamo

$$\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(\alpha, y) = [2\cos\alpha]\mathbf{i} + [y]\mathbf{j} + [2\sin\alpha]\mathbf{k}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi], y \in [0, 5].$$

③ Dato $\bar{z} \in \mathbb{R}$, i punti di $\mathcal{S}_3$ aventi quota $\bar{z}$ si trovano sulla circonferenza centrata sull'asse $z$ e avente raggio $|\bar{z}|$, in altre parole le loro coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = \bar{z}^2$; possiamo allora scegliere $\vartheta$ e $z$ come parametri, ricavando

$$\mathcal{S}_3 : \mathbf{r}(\vartheta, z) = [|z|\cos\vartheta]\mathbf{i} + [|z|\sin\vartheta]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

④ Sappiamo che l'equazione parametrica di tutta la sfera è data da

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = [\sin\varphi\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\varphi\sin\vartheta]\mathbf{j} + [\cos\varphi]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

Ricordando il significato di $\vartheta$ e $\varphi$, per ottenere i punti del I ottante $\vartheta$ e $\varphi$ devono variare entrambe in $[0, \frac{\pi}{2}]$, pertanto

$$\mathcal{S}_4 : \mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = [\sin\varphi\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\varphi\sin\vartheta]\mathbf{j} + [\cos\varphi]\mathbf{k}, \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

## Esercizio 4.19 — Superfici in forma parametrica – 2

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti superfici:*

① $\mathcal{S}_1$ :*porzione di cilindro* $x^2 + y^2 = 1$,
*compresa tra il piano* $z = 0$ *e il piano* $x + y + z = 10$;

② $\mathcal{S}_2$ :*superficie a generatrici parallele all'asse* $z$,
*che si proietta verticalmente nella linea* $y = \sin x$ *del piano* $z = 0$,
*compresa tra il piano* $z = 0$ *e il paraboloide* $z = x^2 + y^2 + 2$;

③ $\mathcal{S}_3$ :*porzione di sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *al di sopra del piano* $z = 0$
*e interna al cilindro* $x^2 + y^2 - x = 0$ *(finestra di Viviani).*

## Soluzione

① La generica rappresentazione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ è

$$\mathbf{r}(\vartheta, z) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R};$$

per limitare questa scrittura a $\mathcal{S}_1$, è sufficiente limitare il campo di variazione di $z$, poiché $0 \le z \le 10 - x - y$, e poiché sul cilindro $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$, abbiamo

$$\mathcal{S}_1 : \mathbf{r}(\vartheta,z) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \ \vartheta \in [0,2\pi], z \in [0, 10-\cos\vartheta-\sin\vartheta].$$

② Possiamo seguire la stessa strategia del punto precedente: la superficie verticale che si proietta nella linea $y = \sin x$ ha equazione

$$\mathbf{r}(x, z) = [x]\mathbf{i} + [\sin x]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \qquad x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R};$$

per limitare la porzione che ci interessa, notiamo che $0 \le z \le 2 + x^2 + y^2$, quindi

$$\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(x, z) = [x]\mathbf{i} + [\sin x]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \qquad x \in \mathbb{R}, z \in [0, 2 + x^2 + \sin^2 x].$$

③ Sappiamo che, nel piano $xy$, la circonferenza $x^2 + y^2 - x = 0$ ha equazione polare $\varrho = \cos\vartheta$, con $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il disco interno a essa sarà allora dato da

$$0 \le \varrho \le \cos\vartheta, \qquad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

poiché l'equazione della sfera si può riscrivere come $\varrho^2 + z^2 = 1$, e per $z \ge 0$ abbiamo $z = \sqrt{1 - \varrho^2}$, la parametrizzazione cercata è

$$\mathcal{S}_3 : \mathbf{r}(\varrho,\vartheta) = [\varrho\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\varrho\sin\vartheta]\mathbf{j} + \left[\sqrt{1-\varrho^2}\right]\mathbf{k}, \ \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \varrho \in [0, \cos\vartheta]$$

## Esercizio 4.20 — Superfici in forma cartesiana

*Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti superfici cartesiane:*

① $\mathcal{S}_1$ : *paraboloide* $z = x^2 + y^2$, $\qquad x \in [-2, 4], y \in [0, 1]$;

② $\mathcal{S}_2$ : *paraboloide* $z = x^2 + y^2$, $\qquad x^2 + y^2 \le 1$;

③ $\mathcal{S}_3$ : *porzione di sfera* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\qquad x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$;

*date le seguenti superfici in forma parametrica, scriverne (ove possibile) la rappresentazione cartesiana, altrimenti spiegare perché non è possibile:*

④ $\mathcal{S}_4$ : $\mathbf{r}(u, v) = [v \log u]\mathbf{i} + [v^2]\mathbf{j} + [\sin uv]\mathbf{k}$
$u \in [1, e], v \in [1, 2]$;

⑤ $\mathcal{S}_5$ : $\mathbf{r}(u, v) = [(\alpha + \beta\cos u)\cos v]\mathbf{i} + [(\alpha + \beta\cos u)\sin v]\mathbf{j} + [\beta\sin u]\mathbf{k}$,
$u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$ $\qquad$ (*toro di raggi* $\alpha$ *e* $\beta$, $\alpha > \beta$).

**Soluzione**

Data una superficie in forma cartesiana $z = f(x, y)$, è sempre possibile scriverne l'equazione parametrica, scegliendo $x$ e $y$ come parametri:

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + [f(x, y)]\mathbf{k};$$

data una superficie in forma parametrica, è possibile scriverne l'equazione cartesiana sotto condizioni analoghe a quelle che valgono per le linee.

① È sufficiente applicare quanto appena detto:

$$\mathcal{S}_1 : \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + [x^2 + y^2]\mathbf{k}, \qquad x \in [-2, 4], y \in [0, 1].$$

② Possiamo ripetere pedissequamente quanto fatto nel punto precedente, però dovremmo rendere esplicito il campo di variazione di $x$ e $y$: analogamente a quanto fatto per esprimere in domini degli integrali doppi

$$\{x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\};$$

in alternativa, è più comodo ricorrere alle coordinate polari, scrivendo:

$$\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(\varrho, \vartheta) = [\varrho \cos \vartheta]\mathbf{i} + [\varrho \sin \vartheta]\mathbf{j} + [\varrho^2]\mathbf{k}, \qquad \varrho \in [0, 1], \vartheta \in [0, 2\pi].$$

③ In questo caso, conviene tenere le coordinate cartesiane:

$$\mathcal{S}_3 : \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left[\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right]\mathbf{k}, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 1 - x].$$

④ Poiché $(v > 0)$

$$\begin{cases} x(u, v) = v \log u \\ y(u, v) = v^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u(x, y) = e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} \\ v(x, y) = \sqrt{y} \end{cases}$$

possiamo scrivere $z(u, v)$ in funzione di $x$ e $y$:

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)) = \sin\left(\sqrt{y}e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right);$$

dobbiamo stabilire ora il dominio $D$ in cui far variare $x$ e $y$: poiché $y = v^2$ e $v \in [1, 2]$, sappiamo che $y \in [1, 4]$, inoltre da $x = v \log u$ sostituendo $y$ troviamo

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \log u$$

e poiché $u \in [1, 2]$, $\log u \in [0, 1]$, pertanto

$$0 \leq \frac{x}{\sqrt{y}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt{y}$$

in definitiva $D = \{1 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$; pertanto la superficie $\mathcal{S}_4$ si può scrivere in forma cartesiana:

$$\mathcal{S}_4 : z = \sin\left(\sqrt{y}e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right), \qquad (x, y) \in D.$$

⑤ In nessun caso $\mathcal{S}_5$ può essere scritta in forma cartesiana: poiché vi sono coppie di punti aventi la stessa ascissa e ordinata, ma differente quota, non vi è alcuna funzione $z = f(x, y)$ che le corrisponda.

### Esercizio 4.21 — Piano tangente e vettore normale a una superficie

*Scrivere l'equazione del piano tangente alle superfici indicate, nel punto indicato:*

① $\mathcal{S}_1 : z = x^2y + ye^x$, $\quad P_1(1, 2, 2 + 2e)$;

② $\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(u, v) = [ve^u]\mathbf{i} + [u \log u]\mathbf{j} + [v^2]\mathbf{k}$, $\quad P_2(-e^2, 2\log 2, 1)$;

③ $\mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 = 4$, $\quad P_3(1, \sqrt{3}, 4)$.

#### Soluzione

Data la superficie $\mathcal{S}$, l'equazione del piano tangente a $\mathcal{S}$ in un punto ha espressione diversa, a seconda della forma con cui è assegnata $\mathcal{S}$.

- Se $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ è data in forma cartesiana, il piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

- se $\mathcal{S} : \mathbf{r}(u, v)$ è data in forma parametrica, il piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ ha equazione

$$a\big(x - x(u_0, v_0)\big) + b\big(y - y(u_0, v_0)\big) + c\big(z - z(u_0, v_0)\big) = 0,$$

  ove $a, b, c$ sono le componenti del vettore $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$;
- se $\mathcal{S} : g(x, y, z) = 0$ è data in forma implicita, il piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto $(x_0, y_0, z_0)$ ha equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

  ove $a, b, c$ sono le componenti del vettore $\operatorname{grad} g(x_0, y_0, z_0)$.

① $\mathcal{S}_1$ è data in forma cartesiana, l'ascissa e l'ordinata del punto $P_1$ sono $x = 1$ e $y = 2$, poiché

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy + ye^x \\ f_y(x, y) = x^2 + e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(1, 2) = 4 + 2e \\ f_y(1, 2) = 1 + e \end{cases},$$

l'equazione del piano cercato è $z - (2+2e) = (4+2e)(x-1) + (1+e)(y-2)$, semplificando:

$$(4 + 2e)x + (1 + e)y - z = 4 + 2e.$$

② Osserviamo che il punto $P_2$ si ottiene in corrispondenza di $u = 2$, $v = -1$, abbiamo bisogno di $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(u, v) &= [ve^u]\mathbf{i} + [1 + \log u]\mathbf{j}, & \mathbf{r}_u(2, -1) &= [-e^2]\mathbf{i} + [1 + \log 2]\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= [e^u]\mathbf{i} + [2v]\mathbf{k}, & \mathbf{r}_v(2, -1) &= [e^2]\mathbf{i} + [-2]\mathbf{k}; \end{aligned}$$

pertanto $\mathbf{r}_u(2, -1) \wedge \mathbf{r}_v(2, -1) = [-2-2\log 2]\mathbf{i} + [-2e^2]\mathbf{j} + [-e^2(1+\log 2)]\mathbf{k}$ e quindi cambiando di segno il piano tangente cercato ha equazione

$$[2 + 2\log 2](x + e^2) + [2e^2](y - 2\log 2) + [e^2(1 + \log 2)](z - 1) = 0.$$

③ Possiamo parametrizzare la superficie $\mathcal{S}_3$, o in alternativa possiamo considerarla come definita in forma implicita; in quest'ultimo caso, detta $g(x, y, z) = x^2 + y^2$, si vede subito che $\operatorname{grad} g(1, \sqrt{3}, 4) = 2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$, pertanto l'equazione del piano cercato è

$$2(x - 1) + 2\sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0, \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{3}y = 4.$$

### Esercizio 4.22 — Area di una superficie

*Calcolare l'area delle seguenti superfici:*

① $\mathcal{S}_1 : z = \log(x^2 + y^2)$, $\quad 1 \le x^2 + y^2 \le 16$;

② $\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(u, v) = \sin u\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j} + v \sin u\,\mathbf{k}$, $\quad \dfrac{\pi}{3} \le u \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le v \le 1$;

③ $\mathcal{S}_3$ : *porzione di cilindro* $x^2 + y^2 = 4$ *al di sopra del piano* $z = 0$, *compreso tra i piani* $z = y$ *e* $z = 2y$.

### Soluzione

L'area di una superficie $\mathcal{S}$ è data dall'integrale

$$\operatorname{area}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S,$$

la modalità effettiva di calcolo di questo integrale cambia, a seconda che $\mathcal{S}$ sia data in forma cartesiana o in forma parametrica.

- Se $\mathcal{S}$ è data in forma cartesiana, ossia

  $$\mathcal{S} : z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D,$$

  allora l'integrale di superficie si trasforma in un integrale doppio sul dominio $D$, nelle variabili $x$ e $y$:

  $$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y;$$

- Se $\mathcal{S}$ è data in forma parametrica, ossia

$$\mathcal{S} : \mathbf{r}(u, v), \qquad (u, v) \in T,$$

allora l'integrale di superficie si trasforma in un integrale doppio sul dominio $T$, nelle variabili $u$ e $v$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \iint_T \left|\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

① La superficie è data in forma cartesiana: $z = f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, si ha

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

e quindi

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sqrt{1 + \frac{4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

inoltre

$$D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 16\right\} = \{0 \le \vartheta \le 2\pi, \, 1 \le \varrho \le 4\},$$

abbiamo (passando a coordinate polari)

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(\mathcal{S}_1) &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=1}^{\varrho=4} \sqrt{1 + \frac{4}{\varrho^2}} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho}{2}\sqrt{4 + \varrho^2} + 2\log(\varrho + \sqrt{4 + \varrho^2})\right]_{\varrho=1}^{\varrho=4} \mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2}\sqrt{5} + 2\log\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \mathrm{d}\vartheta = 7\pi\sqrt{5} + 4\pi \log\frac{3 + \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

② $\mathcal{S}_2$ è data in forma parametrica,

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \cos u \mathbf{i} + \mathbf{j} + v \cos u \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_v(u, v) = \sin u \mathbf{k}$$

pertanto $\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v) = \sin u \mathbf{i} - \sin u \cos u \mathbf{j}$, e poiché per $u \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ sicuramente $\sin u \ge 0$

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \sin u\sqrt{1 + \cos^2 u} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

e quindi[g] (ricordando che $T = \{\frac{\pi}{3} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 1\}$)

$$\begin{aligned}
\text{area}(\mathcal{S}_2) &= \iint_T \sin u \sqrt{1+\cos^2 u}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}v \int_{u=\frac{\pi}{3}}^{u=\frac{\pi}{2}} \sin u \sqrt{1+\cos^2 u}\, \mathrm{d}u = \begin{bmatrix} \cos u = t \\ -\sin u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}v \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \mathrm{Sh} \left( 2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).
\end{aligned}$$

③ Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_3$, poiché si tratta del settore del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq y \leq z \leq 2y$, abbiamo:

$$\mathcal{S}_3 : \mathbf{r}(\vartheta, z) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, \pi], z \in [\sin\vartheta, 2\sin\vartheta].$$

inoltre si trova immediatamente che $\mathbf{r}_\vartheta \wedge \mathbf{r}_z = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j}$, pertanto

$$\mathrm{d}S = \left| [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} \right| \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}z = \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}z;$$

e quindi (poiché $T = \vartheta \in [0, \pi], z \in [\sin\vartheta, 2\sin\vartheta]$)

$$\text{area}(\mathcal{S}_3) = \iint_T \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}z = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_{z=\sin\vartheta}^{z=2\sin\vartheta} \mathrm{d}z = \int_0^\pi \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = 2.$$

## Esercizio 4.23 — Integrali di superficie

*Calcolare i seguenti integrali di superficie:*

$$① \iint_{\mathcal{S}_1} xz\, \mathrm{d}S; \qquad ② \iint_{\mathcal{S}_2} \sqrt{1+e^{2x}+e^{2z}}\, \mathrm{d}S;$$

*ove* $\mathcal{S}_1$ *è la porzione di cono* $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ *che si trova nel I ottante e*

$$\mathcal{S}_2 : \mathbf{r}(u, v) = \log u\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \log v\mathbf{k}, \qquad 1 \leq u \leq e, 1 \leq v \leq u.$$

## Soluzione

Dato un integrale di superficie

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}S,$$

ci si riporta, a seconda che $\mathcal{S}$ sia data in forma cartesiana o parametrica, a un integrale doppio su $D$ o su $T$, come spiegato nel precedente esercizio; l'unica aggiunta consiste nella funzione $f(x, y, z)$: se $\mathcal{S}$ è data in forma cartesiana, la funzione integranda diventa $f(x, y, z(x, y))$, se $\mathcal{S}$ è data in forma parametrica, la funzione integranda diventa $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

[g] Per i calcoli, confronta il punto ② dell'Esercizio 9.

① $\Sigma_1$ è data in forma cartesiana: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, si trova che

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy$$

e il cono si trova nel primo ottante se $(x, y) \in D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, pertanto (passando a coordinate polari)

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} xz\, dS &= \iint_D x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 (\varrho \cos\vartheta)(1 - \varrho)\varrho\, d\varrho = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{12}.\end{aligned}$$

② $\Sigma_2$ è data in forma parametrica, poiché

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \frac{1}{u}\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_v(u, v) = -\mathbf{j} + \frac{1}{v}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v) = \frac{u\mathbf{i} - \mathbf{j} - v\mathbf{k}}{uv},$$

allora ($u$ e $v$ sono entrambi positivi)

$$dS = |\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)|\, du\, dv = \frac{1}{uv}\sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv;$$

inoltre, poiché $x = \log u$ e $z = \log v$, la funzione integranda diventa

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + e^{2x} + e^{2z}} = \sqrt{1 + u^2 + v^2};$$

ricordando infine che $T = \{1 \leq u \leq e, 1 \leq v \leq u\}$, possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} \sqrt{1 + e^{2x} + e^{2z}}\, dS &= \iint_T \sqrt{1 + u^2 + v^2}\frac{1}{uv}\sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv \\ &= \int_1^e du \int_{v=1}^{v=u} \frac{1 + u^2 + v^2}{uv}\, dv = \frac{1}{2}\int_1^e \left[\frac{v^2 + 2(1 + u^2)\log v}{u}\right]_{v=1}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{(u^2 - 1) + 2(1 + u^2)\log u}{u}\right) du = \ldots = \frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$

### Esercizio 4.24 — Integrali di superficie – Interpretazione fisica

*Sia $\Sigma$ la parte di paraboloide $z = x^2 + y^2$ al di sotto del piano $z = 1$. Determinarne la massa e le coordinate del baricentro, sapendo che la densità superficiale è $\delta(x, y, z) = (xy + z + 2)\sqrt{1 + 4z}$.*

**Soluzione**
Se si interpreta la superficie $\mathcal{S}$ come una lamina avente densità superficiale $\delta(x, y, z)$, allora la massa $M$ e l'ascissa del baricentro sono date dagli integrali di superficie[h]

$$M = \iint_{\mathcal{S}} \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}S, \qquad x_B = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} x\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}S.$$

Nel nostro caso, con pochi conti si trova che $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, inoltre il dominio d'integrazione $D$ è costituito dal cerchio centrato nell'origine, di raggio 1, infine la densità superficiale $\delta$, ponendo $z = x^2 + y^2$, diventa

$$\delta(x, y, x^2 + y^2) = (xy + x^2 + y^2 + 2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

pertanto la massa è data da

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\mathcal{S}} \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}S = \iint_D (xy + x^2 + y^2 + 2)(1 + 4x^2 + 4y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} (\varrho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + \varrho^2 + 2)(1 + 4\varrho^2)\varrho\, \mathrm{d}\varrho = \ldots = \frac{47}{6}\pi. \end{aligned}$$

Per la simmetria, $x_B = y_B = 0$ mentre ($z = x^2 + y^2$)

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{6}{47\pi} \iint_D (x^2 + y^2)(xy + x^2 + y^2 + 2)(1 + 4x^2 + 4y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{6}{47\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \varrho^2(\varrho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + \varrho^2 + 2)(1 + 4\varrho^2)\varrho\, \mathrm{d}\varrho = \ldots = \frac{30}{47}. \end{aligned}$$

## 4.2 Esercizi proposti

**25** Scrivere l'equazione della retta tangente alle seguenti curve, nei punti indicati:

① $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + [t - 1]\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, in $P(4, 1, 8)$;

② $\varrho = e^{2\vartheta}$, in $P(0, e^{\pi})$.

[① $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [4 + 4t]\mathbf{i} + [1 + t]\mathbf{j} + [8 + 12t]\mathbf{k}$; ② $y = e^{\pi} - 2x$]

---

[h] Valgono ovviamente formule analoghe per ordinata e quota del baricentro:

$$y_B = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} y\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}S, \qquad z_B = \frac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} z\, \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}S.$$

**26** Calcolare, per ogni valore di $t$ nel relativo intervallo, la curvatura delle seguenti linee:

① ellisse $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$ $(a, b > 0)$, con $t \in [0, 2\pi]$;
② elica cilindrica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$;
③ elica conica $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$;
④ spirale di Archimede $\varrho = 3\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$;
⑤ cicloide $\mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

$$\left[① \ \kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}; \ ② \ \kappa(t) = \frac{1}{2}, \ \forall t\right]$$

$$\left[③ \ \kappa(t) = \sqrt{\frac{t^4 + 5t^2 + 8}{(2 + t^2)^3}}; \ ④ \ \kappa(t) = \frac{2 + t^2}{3\sqrt{(1 + t^2)^3}}; \ ⑤ \ \kappa(t) = \frac{1 - \cos t}{8\sin^3 \frac{t}{2}}\right]$$

**27** Calcolare, per ogni valore di $t \in (0, 2\pi)$, la terna intrinseca dell'elica cilindrica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

$$\left[\mathbf{T}(t) = \frac{[-\sin t]\mathbf{i} + [\cos t]\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \ \mathbf{N}(t) = [-\cos t]\mathbf{i} + [-\sin t]\mathbf{j}\right]$$

$$\left[\mathbf{B}(t) = \frac{[\sin t]\mathbf{i} + [-\cos t]\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}\right]$$

**28** Scrivere l'equazione del cerchio osculatore alle seguenti curve, nei punti indicati:

① ellisse $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$ $(a, b > 0)$, in $P(a, 0)$ e $Q(0, b)$;
② cicloide $\mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}$, in $P(\pi, 2)$;
③ astroide $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}$, in $P(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

$$\left[① \text{ in } P: a^2(x^2 + y^2) - 2a(a^2 - b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = b^4\right]$$

$$\left[① \text{ in } Q: b^2(x^2 + y^2) - 2b(a^2 - b^2)y + (a^2 - b^2)^2 = a^4\right]$$

$$\left[② \ (x - \pi)^2 + (y + 2)^2 = 16; \ ③ \ 4(x - \sqrt{2})^2 + 4(y - \sqrt{2})^2 = 9\right]$$

**29** Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

① astroide $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$;
② elica cilindrica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$;
③ elica conica $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$;
④ spirale di Archimede $\varrho = \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$;
⑤ cicloide $\mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

$$\left[① \ 6; \ ② \ 2\sqrt{2}\pi\right]$$

$$\left[③ \ \log\left(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1 + 2\pi^2}\right) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}\left(2\log\left(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1 + 2\pi^2}\right)\right)\right]$$

$$\left[④ \ \frac{1}{2}\log\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Sh}\left(2\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)\right); \ ⑤ \ 8\right]$$

**30** Determinare la paramerizzazione in termini dell'ascissa curvilinea della linea $\mathcal{L} : \varrho = e^{\vartheta}$, con $\vartheta \in [0, \pi]$.

$$\left[\mathbf{r}(s) = \tfrac{\sqrt{2}+s}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\log\tfrac{\sqrt{2}+s}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\log\tfrac{\sqrt{2}+s}{\sqrt{2}}\right)\right],\ s \in \left[0, \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)\right]\right]$$

**31** Calcolare i seguenti integrali di linea:

$$① \int_{\mathcal{L}_1} (x + y)\,\mathrm{d}s; \qquad ② \int_{\mathcal{L}_2} (x^2 + y^2)^2\,\mathrm{d}s; \qquad ③ \int_{\mathcal{L}_3} \sqrt{2x^2 + z^2}\,\mathrm{d}s;$$

ove

① $\mathcal{L}_1$ è il triangolo avente vertici nell'origine e nei punti $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$;
② $\mathcal{L}_2 : \varrho = e^{\vartheta}$, con $\vartheta \in [0, \pi]$;
③ $\mathcal{L}_3$ è la circonferenza intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con il piano $x = y$.

$$\left[① \sqrt{2} + 1;\ ② \frac{\sqrt{2}}{5}(e^{5\pi} - 1);\ ③ 2\pi\right]$$

**32** Calcolare la massa e la quota $z_B$ del baricentro dell'elica cilindrica

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

sapendo che la sua funzione di densità lineare di massa è

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\left[M = \sqrt{2}\arctan 2\pi,\ z_B = \frac{\log(1 + 4\pi^2)}{2\arctan 2\pi}\right]$$

**33** Calcolare il momento d'inerzia per una rotazione attorno all'asse $z$ dell'elica cilindrica

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

sapendo che la sua funzione di densità di massa è $\delta(x, y, z) \equiv \delta$.

$$\left[\mathcal{M}_z = 2\sqrt{2}\delta\pi\right]$$

**34** Calcolare l'area della superficie a generatrici parallele all'asse $z$, compresa tra il piano $z = 0$ e la funzione $z = x(y + 1)$, e che si proietta nella parabola $y = x^2$, con $x \in [0, \sqrt{2}]$.

$$\left[\frac{93}{20}\right]$$

**35** Calcolare i seguenti integrali di linea:

$$① \int_{\mathcal{L}_1} \left[(x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y\right]; \qquad ② \int_{\mathcal{L}_2} [(3 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y];$$

$$③ \int_{\mathcal{L}_3} \left[(2xy^2 + x)\,\mathrm{d}x + (2x^2y - \sin y)\,\mathrm{d}y\right]; \qquad ④ \int_{\mathcal{L}_4} \left[\frac{z}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}z\right];$$

ove

① $\mathscr{L}_1$ è l'arco di cubica $y = x^3$, da $A(1, 1)$ a $B(2, 8)$;
② $\mathscr{L}_2 : \varrho = 2\vartheta$, con $\vartheta \in [0, \pi]$, orientata a partire da $O(0, 0)$;
③ $\mathscr{L}_3 : \varrho = \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, \pi]$, orientata a partire da $O(0, 0)$;
④ $\mathscr{L}_4$ è l'elica cilindrica $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, con $t \in [0, 2\pi]$, orientata a partire da $A(1, 0, 0)$.

$$\left[① \ \frac{2776}{15};\ ② \ \frac{4\pi^3 - 18\pi}{2};\ ③ \ 0;\ ④ \ 3\pi\right]$$

**36** Calcolare i seguenti integrali di linea:

$$① \int_{\mathscr{L}_1} \left[2(x^2 + y^2)\,dx - (x^2 + y^2)\,dy\right]; \qquad ② \int_{\mathscr{L}_2} \left[x^2 y\,dx - xy^2\,dy\right];$$

ove

① $\mathscr{L}_1$ è il triangolo $ABC$, con $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ e $C(1, 2)$, percorso in senso antiorario;
② $\mathscr{L}_2$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$, percorsa in senso orario.

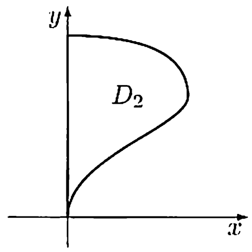
$$\left[① \ \frac{4}{3};\ ② \ 2\pi\right]$$

**37** Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$① \iint_{D_1} x\,dx\,dy; \qquad ② \iint_{D_2} y\,dx\,dy;$$

ove

① $D_1$ è la porzione limitata di piano $xy$ la cui frontiera è costituita dagli assi e dalla curva di equazione $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
② $D_2$ è la porzione limitata di piano $xy$ la cui frontiera è costituita dall'asse $y$ e dalla curva di equazione $\mathbf{r}(t) = [\sin t(1 + \cos t)]\mathbf{i} + [1 + \cos t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, \pi]$.




$$\left[① \ \frac{8}{105};\ ② \ \frac{5}{8}\pi\right]$$

**38** Calcolare l'area dei seguenti domini:

① $D_1$: porzione di piano $xy$ compresa tra l'asse delle ascisse e l'arco di cicloide

$$\mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

② $D_2$: interno dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 16$;

③ $D_3$: interno dell'astroide $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}$, con $t \in [0, 2\pi]$;

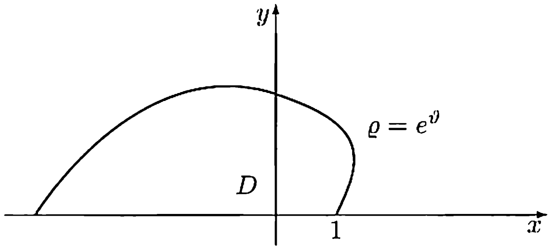
$$\left[① \ \frac{3}{2}\pi;\ ② \ 8\pi;\ ③ \ \frac{3}{8}\pi\right]$$

**39** Calcolare l'area delle seguenti superfici:

① $\mathcal{S}_1$: porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, al di sopra del piano $z = 0$ e interna al cilindro $x^2 + y^2 - x = 0$ (finestra di Viviani);

② $\mathcal{S}_2$ : $\mathbf{r}(u, v) = [(4+\cos u)\cos v]\mathbf{i}+[(4+\cos u)\sin v]\mathbf{j}+[\sin u]\mathbf{k}$, con $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$ (toro di raggi 4 e 1);

③ $\mathcal{S}_3$: porzione di superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ che si proietta verticalmente nel dominio $D$.




$$\left[① \ \pi - 2;\ ② \ 16\pi^2;\ ③ \ \frac{\sqrt{2}}{4}(e^{2\pi} - 1)\right]$$

**40** Calcolare i seguenti integrali di superficie:

$$① \int_{\mathcal{S}_1} (x + y + z)\, \mathrm{d}S; \qquad ② \int_{\mathcal{S}_2} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}S; \qquad ③ \int_{\mathcal{S}_3} \frac{xy + 1}{z}\, \mathrm{d}S;$$

ove

① $\mathcal{S}_1$ è la superficie del cubo $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$;

② $\mathcal{S}_2$ è la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

③ $\mathcal{S}_3$ : $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + [\mathrm{Ch}\, v]\mathbf{k}$, quando $v \in [0, 1]$ e $u \in [0, 1 - v^2]$.

$$\left[① \ 9;\ ② \ 216\pi;\ ③ \ \frac{3}{4}\right]$$

**41** Calcolare la massa e le coordinate del baricentro della superficie conica $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ che si trova al di sopra del piano $z = 0$ sapendo che la densità superficiale è $\delta(x, y, z) = 1 + 4z$.

$$\left[M = \frac{7}{3}\sqrt{2}\pi,\ x_B = y_B = 0, z_B = \frac{3}{7}\right]$$

### 4.2.1 Suggerimenti

**Per l'esercizio 33:** Il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ di una linea $\mathcal{L}$ avente densità $\delta(x, y, z)$ è dato da

$$\mathcal{M}_z = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s.$$

**Per l'esercizio 37②** : Prestare attenzione al verso di percorrenza.

# 5

# Campi vettoriali

## 5.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### Esercizio 5.1 — Campi vettoriali: divergenza, rotore

*Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali:*

$$① \ \mathbf{F}(x, y) = (2xy + e^y)\mathbf{i} + (x^2 + xy)\mathbf{j}; \qquad ② \ \mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j};$$

$$③ \ \mathbf{F}(x, y) = y\cos(xy)\mathbf{i} + x\cos(xy)\mathbf{j}; \qquad ④ \ \mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j};$$

$$⑤ \ \mathbf{F}(x, y, z) = (xy + e^{x^2 z})\mathbf{i} + \left(\log \frac{xy}{z}\right)\mathbf{j} + \cos(xyz)\mathbf{k}.$$

**Soluzione**
Dato un campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k},$$

sono dette rispettivamente *divergenza* di $\mathbf{F}$ e *rotore* di $\mathbf{F}$ le seguenti quantità[a]:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = X_x + Y_y + Z_z,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = \big(Z_y - Y_z\big)\mathbf{i} + \big(X_z - Z_x\big)\mathbf{j} + \big(Y_x - X_y\big)\mathbf{k},$$

ove abbiamo indicato con $X_y$ la derivata parziale rispetto a $y$ della funzione $X(x, y, z)$, e così via. Osserviamo che, se $\mathbf{F}$ è un campo bidimensionale, allora $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ sarà dato semplicemente dalla componente in $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{F}(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y) = \big(Y_x - X_y\big)\mathbf{k}.$$

[a] A volte, si incontra una *notazione vettoriale*: detto *nabla* l'operatore

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k},$$

allora la divergenza e il rotore di $\mathbf{F}$ sono rispettivamente il prodotto scalare e vettore di $\nabla$ con $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}.$$

Osserviamo che, con tale notazione, se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, allora si può scrivere $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

① Poiché $X(x, y) = (2xy + e^y)$ e $Y(x, y) = (x^2 + xy)$, abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + e^y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy) = 2y + x;$$

mentre

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy + e^y)\right)\mathbf{k} = (y - e^y)\mathbf{k}.$$

② Poiché $X(x, y) = 2xy$ e $Y(x, y) = -y^2$, abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}2xy + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) = 2y - 2y = 0;$$

e

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}2xy\right)\mathbf{k} = -2x\mathbf{k}.$$

③ Poiché $X(x, y) = y \cos xy$ e $Y(x, y) = x \cos xy$, abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y \cos xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cos xy) = -(x^2 + y^2) \sin xy;$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x \cos xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y \cos xy)\right)\mathbf{k} \\ &= \Big((\cos xy - xy \sin xy) - (\cos xy - xy \sin xy)\Big)\mathbf{k} = 0.\end{aligned}$$

④ Poiché $X(x, y) = x$ e $Y(x, y) = -y$, abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - 1 = 0;$$

e

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}x\right)\mathbf{k} = 0.$$

⑤ Poiché $X(x, y, z) = xy + e^{x^2 z}$, $Y(x, y, z) = \log \frac{xy}{z}$ e $Z(x, y, z) = \cos(xyz)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy + e^{x^2 z}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{xy}{z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\cos xyz) \\ &= y + 2xze^{x^2 z} + \frac{1}{y} - xy \sin xyz.\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(\cos xyz)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\log\frac{xy}{z}\right)\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(xy+e^{x^2z})-\frac{\partial}{\partial x}(\cos xyz)\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{xy}{z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xy+e^{x^2z})\right)\mathbf{k}$$

$$=\left(-xz\sin xyz+\frac{1}{z}\right)\mathbf{i}+\left(x^2e^{x^2z}+yz\sin xyz\right)\mathbf{j}+\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathbf{k}$$

**Osservazione importante**: *Campi irrotazionali e campi solenoidali*
Un campo vettoriale $\mathbf{F}$ si dice *irrotazionale* se $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ è identicamente nullo, analogamente, $\mathbf{F}$ si dice *solenoidale* se $\operatorname{div}\mathbf{F}$ è identicamente nulla. Le proprietà di essere irrotazionali e solenoidali sono svincolate: i primi quattro esempi dell'esercizio precedente avevano, nell'ordine:

① un campo che non era né irrotazionale né solenoidale,
② un campo solenoidale, ma non irrotazionale,
③ un campo irrotazionale, ma non solenoidale,
④ un campo contemporaneamente solenoidale e irrotazionale.

Infine, vale la pena notare che, qualunque sia $\mathbf{F}$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0.$$

## Esercizio 5.2 — Campi irrotazionali

*Stabilire quali tra i seguenti campi vettoriali sono irrotazionali*:

① $\mathbf{F}(x,y)=[ye^{xy}+6x-1]\mathbf{i}+[xe^{xy}-2y]\mathbf{j}$;

② $\mathbf{F}(x,y)=[\sqrt{y}+e^x]\mathbf{i}+[\frac{x}{2\sqrt{y}}]\mathbf{j}$;

③ $\mathbf{F}(x,y)=\left[\dfrac{y-2x}{(x^2-xy)^2}\right]\mathbf{i}+\left[\dfrac{x}{(x^2-xy)^2}\right]\mathbf{j}$;

④ $\mathbf{F}(x,y)=yx\mathbf{i}-y\mathbf{j}$;

⑤ $\mathbf{F}(x,y,z)=[e^{y\sqrt{z}}-3x^2]\mathbf{i}+[x\sqrt{z}e^{y\sqrt{z}}+1]\mathbf{j}+\left[\dfrac{xy}{2\sqrt{z}}e^{y\sqrt{z}}\right]\mathbf{k}$;

⑥ $\mathbf{F}(x,y,z)=3x^2yz^3\mathbf{i}-x^3z^3\mathbf{j}+3x^3yz^2\mathbf{k}$.

**Soluzione**

Come abbiamo visto nella precedente osservazione, un campo vettoriale $\mathbf{F}$ si dice *irrotazionale* se $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ è identicamente nullo.
Osserviamo poi che, dato che per un campo piano $\mathbf{F}(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$ abbiamo $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (Y_x - X_y)\mathbf{k}$, per cui

$$\mathbf{F} \text{ irrotazionale} \qquad \Leftrightarrow \qquad X_y \equiv Y_x;$$

allo stesso modo, se $\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j} + Z(x, y, z)$,

$$\mathbf{F} \text{ irrotazionale} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} X_y \equiv Y_x \\ X_z \equiv Z_x \\ Y_z \equiv Z_y \end{cases}$$

① $\mathbf{F}$ è irrotazionale, infatti

$$X_y = e^{xy} + xye^{xy} = Y_x.$$

② Come nel punto precedente, $\mathbf{F}$ è irrotazionale:

$$X_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} = Y_x.$$

③ Anche in questo caso $\mathbf{F}$ è irrotazionale:

$$X_y = \frac{xy - 3x^2}{(x^2 - xy)^3} = Y_x.$$

④ $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, infatti

$$X_y = x \neq Y_x = 0.$$

⑤ $\mathbf{F}$ è un campo di $\mathbb{R}^3$, controlliamo le tre condizioni:

$$X_y = \sqrt{z}e^{y\sqrt{z}} = Y_x, \quad X_z = \frac{ye^{y\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} = Z_x, \quad Y_z = xe^{y\sqrt{z}}\left(\frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{y}{2}\right) = Z_y,$$

pertanto $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

⑥ $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, infatti

$$X_y = 3x^2z^3, \quad Y_x = -3x^2z^3, \quad X_y \neq Y_x.$$

## Esercizio 5.3 — Campi conservativi – Potenziali

*Per i campi irrotazionali dell'esercizio precedente, indicare un dominio aperto in cui sono conservativi, determinandone un potenziale.*

**Soluzione**

Dalla teoria sappiamo che, se esiste un dominio aperto *semplicemente connesso*[b] $D$ in cui il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è irrotazionale, e $\mathbf{F}$ è continuo con le sue derivate in $D$ (in simboli: $\mathbf{F} \in C^1(D)$), allora esiste in $D$ un *potenziale* $\mathcal{U}$, ossia una funzione $\mathcal{U}(x, y, z) : D \to \mathbb{R}$ di cui $\mathbf{F}(x, y, z)$ è il gradiente; un campo vettoriale è detto *conservativo* se ammette un potenziale. Osserviamo inoltre che, se $\mathcal{U}$ è un potenziale di $\mathbf{F}$, cioè $\operatorname{grad}\mathcal{U} = \mathbf{F}$, anche $\operatorname{grad}(\mathcal{U} + C) = \mathbf{F}$ e quindi anche $\mathcal{U} + C$ è un potenziale per $\mathbf{F}$, pertanto se $\mathbf{F}$ è conservativo esistono infiniti potenziali di $\mathbf{F}$, che differiscono per una costante. D'ora in avanti, ci poniamo in queste ipotesi, cioè $\mathbf{F}$ sarà irrotazionale e $C^1(D)$.

Per determinare un potenziale di $\mathbf{F}$, vi sono principalmente due metodi, in questo esercizio vedremo il primo: se $\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ è conservativo, e quindi esiste $\mathcal{U}(x, y, z)$, allora

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = X(x, y, z), \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = Y(x, y, z), \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = Z(x, y, z);$$

consideriamo la prima di queste relazioni, se $\mathcal{U}_x = X$ allora per determinare $\mathcal{U}$ prendiamo una primitiva di $X$ (in cui le variabili $y$ e $z$ figurano come costanti):

$$f(x, y, z) = \int X(x, y, z)\, \mathrm{d}x + H(y, z);$$

se adesso deriviamo rispetto a $y$ l'espressione di $f$, il risultato deve corrispondere a $Y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = Y(x, y, z),$$

questa relazione ci permette di determinare la "porzione" di $H(y, z)$ che dipende da $y$, successivamente, riderivando rispetto a $z$ e uguagliando il risultato a $Z(x, y, z)$ troveremo l'espressione definitiva di $\mathcal{U}$, a meno di una costante arbitraria $C$. Useremo questo sistema per trovare i potenziali dei campi vettoriali di questo esercizio.

① Le due funzioni che compongono $\mathbf{F}$ sono continue con le loro derivate in tutto $\mathbb{R}^2$, che è un aperto (e semplicemente connesso), la teoria garantisce l'esistenza di un potenziale, definito anch'esso in tutto $\mathbb{R}^2$. Per determinarlo, poiché $X(x, y) = ye^{xy} + 6x - 1$ e $Y(x, y) = xe^{xy} - 2y$, cerchiamo una primitiva di $X$, poiché ci muoviamo in due variabili, sarà definita a meno di una funzione della sola $y$:

$$f(x, y) = \int \left(ye^{xy} + 6x - 1\right) \mathrm{d}x = e^{xy} + 3x^2 - x + H(y);$$

[b]Un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$ si dice *semplicemente connesso* se ogni linea chiusa $\mathcal{L}$ interna a $D$ può essere deformata con continuità fino a ridurla a un punto senza uscire da $D$.

per trovare l'espressione di $H(y)$, deriviamo il risultato ottenuto rispetto a $y$ e uguagliamolo a $Y(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} + 3x^2 - x + H(y)\right) = Y(x, y) \quad \Rightarrow \quad xe^{xy} + H'(y) = xe^{xy} - 2y,$$

quindi[c] $H'(y) = -2y$, e pertanto $H(y) = -y^2 + C$, in definitiva

$$\mathcal{U}(x, y) = f(x, y) = e^{xy} + 3x^2 - x - y^2 + C.$$

(Ovviamente, il risultato sarebbe stato lo stesso, se avessimo scelto di partire da $Y$, integrando rispetto a $y$ e riderivando il risultato rispetto a $x$:

$$f(x, y) = \int \left(xe^{xy} - 2y\right) \, \mathrm{d}y = e^{xy} - y^2 + K(x);$$

e, derivando $f$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} - y^2 + K(x)\right) = X(x, y) \quad \Rightarrow \quad ye^{xy} + K'(x) = ye^{xy} + 6x - 1$$

da cui[d] $K'(x) = 6x - 1 \Rightarrow K(x) = 3x^2 - x + C$, e i risultati coincidono).

② Le due funzioni che compongono $\mathbf{F}$ sono definite nel semipiano $y > 0$, anche questo semipiano è aperto e semplicemente connesso, pertanto esisterà un potenziale di $\mathbf{F}$ definito per $y > 0$. Seguiamo la strada dell'esempio precedente: poiché $X(x, y) = \sqrt{y} + e^x$ e $Y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ abbiamo

$$f(x, y) = \int \left(\sqrt{y} + e^x\right) \, \mathrm{d}x = x\sqrt{y} + e^x + H(y);$$

riderivando

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x\sqrt{y} + e^x + H(y)\right) = Y(x, y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2\sqrt{y}} + H'(y) = \frac{x}{2\sqrt{y}},$$

perciò indipendentemente da $x$ abbiamo $H'(y) = 0$ e $H(y) = C$, in definitiva il potenziale, definito nel semipiano $y > 0$, è

$$\mathcal{U}(x, y) = f(x, y) = \int \left(\sqrt{y} + e^x\right) \, \mathrm{d}x = x\sqrt{y} + e^x + C.$$

[c] Attenzione: non è un caso che $H'$ dipenda dalla sola $y$. Se così non fosse, il campo F non sarebbe irrotazionale.

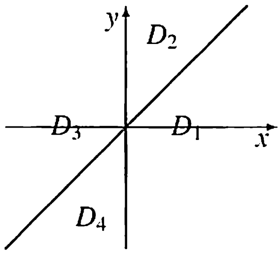
[d] Notiamo una volta di più che, in questo caso, $K$ è indipendente da $y$.

③ Le due funzioni del campo **F** sono definite in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq x\},$$

l'insieme $D$ è aperto, ma non è semplicemente connesso, anzi è formato da quattro insiemi aperti distinti, ciascuno dei quali semplicemente connesso:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < x\}, \qquad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x\},$$
$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > x\}, \qquad D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < x\}.$$




Notiamo che **F** è irrotazionale in $D$, non possiamo però dire che **F** è conservativo in $D$, possiamo dire che **F** è conservativo *in ciascuno dei domini* $D_i$, separatamente. Cerchiamo, seguendo la stessa strada degli esempi precedenti, di determinare $\mathcal{U}$: troviamo

$$f(x, y) = \int \left( \frac{y - 2x}{(x^2 - xy)^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{x^2 - xy} + H(y),$$

riderivando rispetto a $y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2 - xy} + H(y) \right) = Y(x, y) \Rightarrow \frac{x}{(x^2 - xy)^2} + H'(y) = \frac{x}{(x^2 - xy)^2},$$

per cui $H'(y) = 0$ e $H(y) = C$, pertanto troviamo

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy} + C.$$

L'insieme di definizione di $f$ coincide con l'insieme $D$ delle due funzioni $X$ e $Y$, però *è sbagliato* dire che il potenziale di **F** coincide con la $f(x, y)$ trovata: seguendo la teoria, possiamo dire che il campo vettoriale **F** ammette *quattro diversi potenziali* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ e $\mathcal{U}_4$, ciascuno definito sul corrispondente insieme $D_1$, $D_2$, $D_3$ e $D_4$; l'espressione analitica dei potenziali $\mathcal{U}_i$ è la stessa, nel senso che la funzione $\mathcal{U}$ definita in $D$ rappresenta i quattro potenziali:

$$\mathcal{U}_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy} + C_1, \qquad \mathcal{U}_2(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy} + C_2,$$
$$\mathcal{U}_3(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy} + C_3, \qquad \mathcal{U}_4(x, y) = \frac{1}{x^2 - xy} + C_4,$$

ciascuno con il suo insieme di definizione. Notiamo inoltre che queste quattro entità sono "slegate" tra di loro, nel senso che non è possibile prolungarle con continuità attraverso le loro frontiere. Quindi, in altre parole, la funzione $\mathcal{U}$ definita in $D$ non può essere considerata "potenziale in $D$" del campo $\mathbf{F}$.

④ Il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, pertanto non è conservativo e non ammette potenziale.

⑤ Le funzioni $X$, $Y$, $Z$ del campo $\mathbf{F}$ sono continue e derivabili in $z > 0$, che è un aperto semplicemente connesso, pertanto $\mathbf{F}$ è conservativo in tutto il suo insieme di definizione. Agiamo nel solito modo, cominciando con il trovare una primitiva di $X$:

$$f(x, y, z) = \int \left(e^{y\sqrt{z}} - 3x^2\right) \mathrm{d}x = xe^{y\sqrt{z}} - x^3 + H(y, z),$$

possiamo, a scelta, derivare $f$ rispetto a $y$ e uguagliare il risultato a $Y$, o derivare $f$ rispetto a $z$ e uguagliare il risultato a $Z$; optiamo per la seconda scelta:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(xe^{y\sqrt{z}} - x^3 + H(y, z)\right) = Z(x,y,z) \;\Rightarrow\; \frac{xy}{2\sqrt{z}}e^{y\sqrt{z}} + H_z(y,z) = \frac{xy}{2\sqrt{z}}e^{y\sqrt{z}},$$

pertanto (indipendentemente da $x$) $H_z(y, z) = 0$ e quindi $H$ non dipende da $z$, ossia $H(y, z) = H(y)$; ripetiamo allora l'operazione di derivazione di $f$, questa volta rispetto a $y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{y\sqrt{z}} - x^3 + H(y)\right) = Y(x, y, z) \;\Rightarrow\; x\sqrt{z}e^{y\sqrt{z}} + H'(y) = x\sqrt{z}e^{y\sqrt{z}} + 1$$

da cui (indipendentemente da $x$ e $z$) $H'(y) = 1$ e $H(y) = y + C$; riassumendo il potenziale cercato è

$$\mathcal{U}(x, y, z) = f(x, y, z) = xe^{y\sqrt{z}} - x^3 + y + C.$$

⑥ Il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, pertanto non è conservativo e non ammette potenziale.

**Osservazione importante**: *Controllo dei risultati*

È sempre possibile verificare l'esattezza dei propri conti, per la ricerca del potenziale: poiché $\operatorname{grad}\mathcal{U} = \mathbf{F}$, calcolando le derivate parziali di $\mathcal{U}$ dobbiamo riottenere le componenti di $\mathbf{F}$.

### Esercizio 5.4 — Potenziali e costanti arbitrarie

*Dati il campi vettoriali*

$$① \quad \mathbf{F}(x, y) = \left[-y^2e^{-xy^2}\right]\mathbf{i} + \left[-2xye^{-xy^2}\right]\mathbf{j};$$

$$② \quad \mathbf{F}(x, y) = \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(y^2 - x)^2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{2y}{(y^2 - x)^2}\right]\mathbf{j};$$

*dopo aver verificato che sono irrotazionali, determinare per ciascuno il potenziale $\mathcal{U}$ che si annulla in $(1, 2)$, specificandone l'insieme di definizione.*

## Soluzione

① **F** è definito in $\mathbb{R}^2$ e $X_y \equiv Y_x$, infatti

$$X_y = Y_x = 2xy^3e^{-xy^2} - 2ye^{-xy^2};$$

pertanto **F** è conservativo in tutto il piano. Troviamo il potenziale:

$$f(x, y) = \int \left( - y^2e^{-xy^2}\right) \mathrm{d}x = e^{-xy^2} + H(y),$$

e derivando

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy^2} + H(y)\right) = Y(x, y) \quad \Rightarrow \quad -2xye^{-xy^2} + H'(y) = -2xye^{-xy^2},$$

per cui $H'(y) = 0$ e $H(y) = C$, e quindi $\mathcal{U}(x, y) = f(x, y) = e^{-xy^2}+C$. Per determinare il potenziale che si annulla in $(1, 2)$, imponiamo che $\mathcal{U}(1, 2) = 0$: $\mathcal{U}(1, 2) = e^{-4} + C = 0$, per cui $C = -e^{-4}$, quindi il potenziale cercato è $\mathcal{U}(x, y) = e^{-xy^2} - e^{-4}$.

② Osserviamo subito che

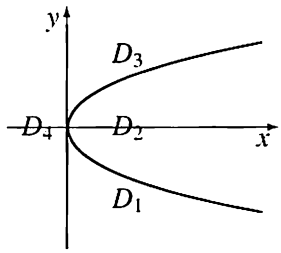
$$X_y = \frac{4y}{(y^2 - x)^3} = Y_x,$$

e pertanto **F** è irrotazionale nel suo insieme di definizione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, x \neq y^2\}.$$

Valgono, per **F**, le stesse osservazioni fatte al punto ③ dell'esercizio precedente: **F** è irrotazionale in $D$, ed è conservativo in ciascuno dei quattro domini

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < -\sqrt{x}\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > \sqrt{x}\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}. \end{aligned}$$



Determiniamone il potenziale:

$$f(x,y) = \int \left( -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(y^2-x)^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2-x} + H(y),$$

e derivando

$$\frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2-x} + H(y) \right) = Y(x,y) \Rightarrow \frac{2y}{(y^2-x)^2} + H'(y) = \frac{2y}{(y^2-x)^2},$$

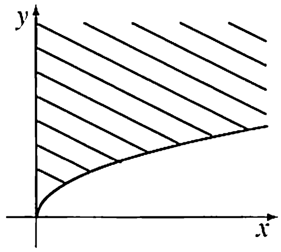
per cui $H'(y) = 0$ e $H(y) = C$, e quindi

$$\mathcal{U}(x,y) = f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2-x} + C.$$

Questa funzione rappresenta una famiglia di potenziali, definiti separatamente in ciascun inseme $D_i$. In modo analogo a prima, per determinare il potenziale che si annulla in $(1,2)$, imponiamo che $\mathcal{U}(1,2) = 0$: $\mathcal{U}(1,2) = \frac{2}{3} + C = 0$, per cui $C = -\frac{2}{3}$; quindi il potenziale cercato è

$$\mathcal{U}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2-x} - \frac{2}{3};$$

osserviamo che $(1,2) \in D_3$, pertanto il potenziale trovato $\mathcal{U}(x,y)$ è tale in $D_3$.




Anche in questo caso (come al punto ③ dell'esercizio precedente) il potenziale $\mathcal{U}$ trovato non si può prolungare con continuità attraverso la frontiera di $D_3$.

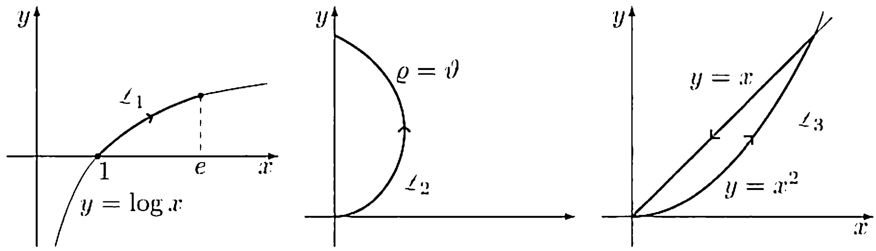
## 5.1.1 Campi vettoriali e linee

### Esercizio 5.5 — Lavori – 1 (caso bidimensionale)

*Dati i seguenti campi vettoriali:*

① $\mathbf{F}(x,y) = 8(x+y)\mathbf{i} + 20xy\mathbf{j}$; ② $\mathbf{G}(x,y) = (4xy^2 + 6x)\mathbf{i} + (4x^2y - 6y^2)\mathbf{j}$;

*calcolare il lavoro compiuto da ciascuno dei due per percorrere le linee di seguito indicate:*




**Soluzione**
Dati un campo vettoriale e una linea (orientata)

$$\mathbf{F}(x, y) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j},$$
$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j}, \qquad t \in [a, b]$$

il lavoro compiuto di $\mathbf{F}$ per spostare il suo punto di applicazione da $A \equiv \mathbf{r}(a)$ a $B \equiv \mathbf{r}(b)$ è dato dall'integrale di linea (di seconda specie)

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{L}} \Big[X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y\Big].$$

Come abbiamo già visto nel precedente capitolo, questo integrale si trasforma in un integrale nella variabile $t$, ponendo nella formula $x(t)$ e $y(t)$ al posto di $x$ e $y$ rispettivamente, e ponendo $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t$, ossia

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_a^b \Big[X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)\Big]\,\mathrm{d}t.$$

Se la linea $\mathcal{L}$ è chiusa, allora il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per compiere un giro[e] (in senso antiorario) lungo $\mathcal{L}$ può essere calcolato ricorrendo alla formula di Green. Infine, se $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la linea che congiunge $A$ e $B$ è uguale alla differenza dei valori di un potenziale $\mathcal{U}$ di $\mathbf{F}$ tra $B$ e $A$: $\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A)$; ne segue che in questo caso l'integrale è indipendente dalla linea scelta $\mathcal{L}$, purché tutta contenuta in un insieme $D$ in cui la funzione $\mathcal{U}$ è il potenziale di $\mathbf{F}$. In particolare, se la linea è chiusa, allora il lavoro di $\mathbf{F}$ è nullo[f].

① Parametrizziamo: $\mathcal{L}_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + [\log t]\mathbf{j}$, con $t \in [1, e]$, allora

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,;$$

inoltre

$$X(x(t), y(t)) = 8(t + \log t), \qquad Y(x(t), y(t)) = 20t\log t,$$

[e]Questo lavoro viene a volte chiamato *circuitazione*.

[f]Una definizione alternativa di campo conservativo è: "Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $D$ se il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo *ogni* linea chiusa contenuta in $D$ è nullo".

pertanto, visto che $\mathcal{L}$ è orientata da $(1, 0)$ a $(e, 1)$, il lavoro cercato è[g]:

$$\mathcal{L} = \int_1^e \left([8(t + \log t)] + [20t \log t]\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_1^e \left(8t + 28 \log t\right) \mathrm{d}t = \ldots = 4e^2 + 24.$$

Passiamo a $\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [t \cos t]\mathbf{i} + [t \sin t]\mathbf{j}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, abbiamo

$$\begin{cases} X\big(x(t), y(t)\big) = 8t(\cos t + \sin t) \\ Y\big(x(t), y(t)\big) = 20t^2 \cos t \sin t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = [\cos t - t \sin t]\, \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = [\sin t + t \cos t]\, \mathrm{d}t \end{cases},$$

pertanto

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(8t(\cos t + \sin t)[\cos t - t \sin t] +$$

$$+ (20t^2 \cos t \sin t)[\sin t + t \cos t]\Big) \mathrm{d}t = \ldots = 5\pi^2 - 40 - \frac{\pi^3}{6}.$$

Infine, $\mathcal{L}_3$. È definita in due tratti distinti, chiameremo $\gamma_1$ il tratto che va da $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e $\gamma_2$ il tratto che ritorna all'origine. Il lavoro complessivo $\mathcal{L}$ è la somma dei lavori $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ relativi a $\gamma_1$ e $\gamma_2$ rispettivamente.

- Per $\gamma_1$ (che è assegnata in forma cartesiana, pertanto useremo $x$ come variabile d'integrazione, e quindi $\mathrm{d}y = y'(x)\, \mathrm{d}x = 2x\, \mathrm{d}x$) abbiamo

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^1 \Big([8(x + x^2)] + [20x \cdot x^2](2x)\Big) \mathrm{d}x = \ldots = \frac{44}{3};$$

- per $\gamma_2$ (ancora assegnata in forma cartesiana, poiché $y = x$, immediatamente $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$), osservando che dev'essere percorsa da $x = 1$ a $x = 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_2 = \int_1^0 \left([8(x + x)] + [20x^2]\right) \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{44}{3};$$

pertanto $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = 0$.

---

[g]Osserviamo che, se una linea è data in forma cartesiana $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, non è necessario riparametrizzarla: è sufficiente calcolare il lavoro rispetto alla variabile $x$, ponendo ovviamente nelle formule $y = y(x)$ e $\mathrm{d}y = y'(x)\, \mathrm{d}x$:

$$L = \int_a^b \Big(X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y'(x)\Big) \mathrm{d}x.$$

Allo stesso risultato potevamo pervenire usando la formula di Green[h]: detto $D$ il dominio interno a $\mathcal{L}_3$, ossia $D = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, possiamo scrivere

$$\int_{\mathcal{L}_3} \Big[8(x+y)\,\mathrm{d}x + 20xy\,\mathrm{d}y\Big] = \iint_D \big[20y - 8\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

e pertanto

$$\mathcal{L} = \iint_D \big[20y - 8\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (20y - 8)\,\mathrm{d}y = \ldots = 0.$$

② Osserviamo che, date $X(x, y) = 4xy^2 + 6x$ e $Y(x, y) = 4x^2y - 6y^2$, $X_y = Y_x = 8xy$; pertanto **G** è irrotazionale su tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi anche conservativo; i lavori richiesti possono allora essere calcolati come "differenza di potenziale" tra il punto finale e il punto iniziale della linea. Con pochi conti, analoghi a quelli dell'Esercizio 4, si trova che $\mathcal{U}(x, y) = 2x^2y^2 + 3x^2 - 2y^3 + C$, poniamo per comodità $C = 0$; quindi:

- per $\mathcal{L}_1$, il punto iniziale è $(1, 0)$, il punto finale è $(e, 1)$, pertanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}(e, 1) - \mathcal{U}(1, 0) = 5e^2 - 5;$$

- per $\mathcal{L}_2$, il punto iniziale è $(0, 0)$, il punto finale è $(0, \frac{\pi}{2})$, pertanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \mathcal{U}(0, 0) = -\frac{\pi^3}{4};$$

- $\mathcal{L}_3$ è chiusa, quindi $L = 0$.

**Osservazione importante:** *Linee chiuse e lavori*
Al punto ① dell'esercizio precedente, abbiamo calcolato il lavoro del campo **F** lungo la linea $\mathcal{L}_3$, e abbiamo trovato $\mathcal{L} = 0$, ciò non deve stupire, poiché non è in contrasto con il fatto che **F** non sia conservativo. Ribadiamo che: *se* un campo vettoriale *è* conservativo *allora* il lavoro compiuto in corrispondenza di *ogni* linea chiusa è nullo; viceversa *se* un campo vettoriale *non è* conservativo, vi sono linee chiuse in corrispondenza delle quali il lavoro è nullo.

### Esercizio 5.6 — Lavori – 2 (caso tridimensionale)

*Dati i seguenti campi vettoriali:*

① $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz + y)\mathbf{i} + (x^2y + 4)\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$;

② $\mathbf{G}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 1)\mathbf{k}$;

[h] Confronta l'Esercizio 4.15.

*calcolare il lavoro compiuto da ciascuno dei due per percorrere le linee sotto indicate:*

- $\mathcal{L}_1$ : $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$, *con* $t \in [-1, 2]$, *percorsa da* $P(4, 2, -8)$ *a* $Q(1, -1, 1)$;
- $\mathcal{L}_2$: *ellisse, intersezione del cilindro retto* $x^2 + y^2 = 1$ *con il piano* $x + 2y - z = -3$, *percorsa in senso antiorario se guardata "dall'alto".*

## Soluzione

Per i campi vettoriali e le linee in $\mathbb{R}^3$ valgono formule analoghe a quelle elencate nel caso di $\mathbb{R}^2$: se $\mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j} + [z(t)]\mathbf{k}$ con $t \in [a, b]$ e $A \equiv \mathbf{r}(a)$, $B \equiv \mathbf{r}(b)$ allora

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_a^b \Big[X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big]\, dt.$$

Inoltre, se $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro è la differenza di potenziale tra $B$ e $A$.

① $\mathcal{L}_1$ viene percorsa dal punto corrispondente a $t = 2$ al punto corrispondente a $t = -1$; abbiamo

$$x(t) = t^2, \ y(t) = t, \ z(t) = -t^3, \qquad dx = 2t\, dt, \ dy = dt, \ dz = -3t^2\, dt;$$

pertanto

$$\mathcal{L} = \int_2^{-1} \Big[(-t^5 + t)(2t) + (t^5 + 4) + (-9t^7)(-3t^2)\Big]\, dt = \ldots = -\frac{96381}{35}.$$

È necessario parametrizzare $\mathcal{L}_2$: seguendo la stessa strada usata per il punto ① dell'Esercizio 4.5, otteniamo (prestando attenzione al verso di percorrenza: se $\mathcal{L}$ è percorsa in senso antiorario "guardata dall'alto", nello stesso senso è percorsa la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ che ne costituisce la proiezione ortogonale nel piano $z = 0$):

$$\mathcal{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j} + [3 + \cos t + 2\sin t]\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi];$$

pertanto $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ e $dz = (2\cos t - \sin t)\, dt$, e quindi

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \Big[\big((\cos t)(3 + \cos t + 2\sin t) + \sin t\big)(-\sin t) + \big(\cos^2 t \sin t + 4\big)(\cos t) + \\ + \big(-\sin t(3 + \cos t + 2\sin t)^2\big)(2\cos t - \sin t)\Big]\, dt = \ldots = \frac{37}{4}\pi.$$

② Osserviamo che $\mathbf{G}$ è irrotazionale ed essendo definito in tutto $\mathbb{R}^3$ è anche conservativo, con qualche conto si trova la famiglia di potenziali $\mathcal{U}(x, y, z) = xyz + z + C$, poniamo per comodità $C = 0$; per $\mathcal{L}_1$ abbiamo

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}(Q) - \mathcal{U}(P) = \mathcal{U}(1, -1, 1) - \mathcal{U}(4, 2, -8) = 72.$$

Per quanto riguarda $\mathcal{L}_2$, poiché è chiusa, $\mathcal{L} = 0$.

## Esercizio 5.7 — Campi conservativi, potenziali e lavori

*Dati i seguenti campi vettoriali conservativi:*

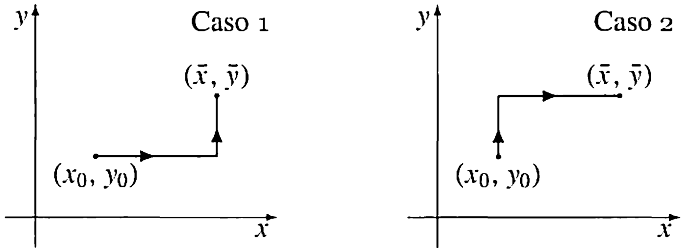
① $\mathbf{F}(x, y) = (y^2e^x + \cos x)\mathbf{i} + (2ye^x - ye^y)\mathbf{j}$;

② $\mathbf{G}(x, y, z) = (ze^{xz} + y\sin xy)\mathbf{i} + (2y + x\sin xy)\mathbf{j} + (xe^{xz} - 4)\mathbf{k}$;

*determinare per ciascuno di essi il potenziale che si annulla nell'origine.*

### Soluzione

Un modo alternativo a quello esposto nell'Esercizio 3, per determinare un potenziale di un campo vettoriale conservativo, sfrutta la nozione di lavoro: poiché sappiamo che il lavoro di un campo conservativo $\mathbf{F} = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$ per compiere un qualsiasi percorso che unisce il punto $A$ al punto $B$ è dato dalla differenza di potenziale tra $B$ e $A$, scegliamo come "punto base" $P_0$ un punto $(x_0, y_0)$, e calcoliamo il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per andare da $(x_0, y_0)$ al generico punto $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ seguendo un tragitto che renda agevole il calcolo (tipicamente: una spezzata composta da segmenti paralleli agli assi, in modo che, alternativamente, $dx = 0$ sul lato verticale e $dy = 0$ sul lato orizzontale), vi sono due possibilità:




Esaminiamo separatamente i due casi:

1) nel primo tratto, quello orizzontale, $y$ è costante e vale $y_0$, mentre $x$ varia da $x_0$ a $\bar{x}$; il corrispondente lavoro è

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} X(x, y_0)\, dx;$$

nel secondo tratto, quello verticale, $x$ è costante e vale $\bar{x}$, mentre $y$ varia da $y_0$ a $\bar{y}$; il corrispondente lavoro è

$$\int_{y_0}^{\bar{y}} Y(\bar{x}, y)\, dy;$$

complessivamente, il lavoro compiuto, e cioè la differenza di potenziale, è data da

$$\mathcal{U}(\bar{x}, \bar{y}) - \mathcal{U}(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} X(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{\bar{y}} Y(\bar{x}, y)\, dy;$$

2) nel primo tratto, quello verticale, $x$ è costante e vale $x_0$, mentre $y$ varia da $y_0$ a $\bar{y}$; il corrispondente lavoro è

$$\int_{y_0}^{\bar{y}} Y(x_0, y)\, \mathrm{d}y;$$

nel secondo tratto, quello orizzontale, $y$ è costante e vale $\bar{y}$, mentre $x$ varia da $x_0$ a $\bar{x}$; il corrispondente lavoro è

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} X(x, \bar{y})\, \mathrm{d}x;$$

complessivamente, il lavoro compiuto, e cioè la differenza di potenziale, è data da

$$\mathcal{U}(\bar{x}, \bar{y}) - \mathcal{U}(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} X(x, \bar{y})\, \mathrm{d}x + \int_{y_0}^{\bar{y}} Y(x_0, y)\, \mathrm{d}y.$$

Notare che in entrambi i casi l'integrale complessivo è dato dalla somma di due integrali, in uno dei quali compare (come costante rispetto alla variabile d'integrazione) la coordinata iniziale, nell'altro compare la coordinata finale.
Poiché in realtà $(x_0, y_0)$ era un punto noto, le espressioni trovate sono funzioni solo delle coordinate $\bar{x}$ e $\bar{y}$ del punto generico $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, possono quindi essere scritte ponendo $(x, y)$ generico al posto di $(\bar{x}, \bar{y})$, ed essere considerate come espressioni analitiche di $\mathcal{U}(x, y)$, definite a meno di una costante arbitraria[i]. Inoltre, poiché il risultato sarebbe (ovviamente) nullo se $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (x_0, y_0)$, di tutti i potenziali abbiamo determinato quello che si annulla in $(x_0, y_0)$.

① Poiché **F** è definito e conservativo in tutto il piano, possiamo scegliere proprio l'origine come "punto base" dei calcoli: se scegliamo di compiere il percorso del caso 1, troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\bar{x}, \bar{y}) &= \int_{x=0}^{x=\bar{x}} \left(0^2 e^x + \cos x\right) \mathrm{d}x + \int_{y=0}^{y=\bar{y}} \left(2y e^{\bar{x}} - y e^y\right) \mathrm{d}y \\ &= \left[\sin x\right]_{x=0}^{x=\bar{x}} + \left[y^2 e^{\bar{x}} + e^y(1-y)\right]_{y=0}^{y=\bar{y}} = \sin\bar{x} + \bar{y}^2 e^{\bar{x}} + e^{\bar{y}}(1-\bar{y}) - 1,\end{aligned}$$

[i] Un modo alternativo di scrivere queste formule è (usando $t$ come variabile d'integrazione) per il caso 1

$$\mathcal{U}(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(t, y_0)\, \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Y(x, t)\, \mathrm{d}t + C,$$

per il caso 2

$$\mathcal{U}(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(t, y)\, \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, t)\, \mathrm{d}t + C.$$

pertanto (sostituendo $(\bar{x}, \bar{y})$ con $(x, y)$) il potenziale di $\mathbf{F}$ che si annulla nell'origine è

$$\mathcal{U}(x, y) = \sin x + y^2 e^x + e^y(1 - y) - 1.$$

② Analoga procedura si può seguire per i potenziali definiti in $\mathbb{R}^3$ o in un suo sottoinsieme: preso un "punto base" $P_0(x_0, y_0, z_0)$, ci muoviamo da $P_0$ a $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con una spezzata che si mantenga parallela agli assi coordinati, vi sono sei diverse possibilità:

1) prima muoviamo $x$, poi $y$, infine $z$:

$$(x_0 \to \bar{x}, y_0, z_0), \quad (\bar{x}, y_0 \to \bar{y}, z_0), \quad (\bar{x}, \bar{y}, z_0 \to \bar{z});$$

2) prima muoviamo $y$, poi $x$, infine $z$:

$$(x_0, y_0 \to \bar{y}, z_0), \quad (x_0 \to \bar{x}, \bar{y}, z_0), \quad (\bar{x}, \bar{y}, z_0 \to \bar{z});$$

3) prima muoviamo $y$, poi $z$, infine $x$:

$$(x_0, y_0 \to \bar{y}, z_0), \quad (x_0, \bar{y}, z_0 \to \bar{z}), \quad (x_0 \to \bar{x}, \bar{y}, \bar{z});$$

4) prima muoviamo $z$, poi $y$, infine $x$:

$$(x_0, y_0, z_0 \to \bar{z}), \quad (x_0, y_0 \to \bar{y}, \bar{z}), \quad (x_0 \to \bar{x}, \bar{y}, \bar{z});$$

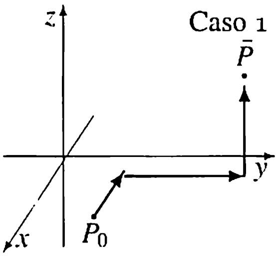
5) prima muoviamo $x$, poi $z$, infine $y$:

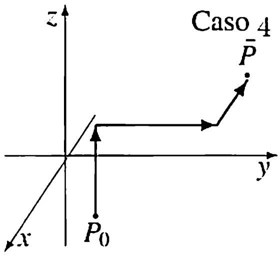
$$(x_0 \to \bar{x}, y_0, z_0), \quad (\bar{x}, y_0, z_0 \to \bar{z}), \quad (\bar{x}, y_0 \to \bar{y}, \bar{z});$$

6) prima muoviamo $z$, poi $x$, infine $y$:

$$(x_0, y_0, z_0 \to \bar{z}), \quad (x_0 \to \bar{x}, y_0, \bar{z}), \quad (\bar{x}, y_0 \to \bar{y}, \bar{z});$$

a titolo di esempio, le figure relative ai casi 1 e 4:



Scegliamo allora un percorso, diciamo il percorso 1, partiamo dall'origine e raggiungiamo il generico punto $\bar{P}$:

$$\mathcal{U}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \int_{x=0}^{x=\bar{x}} \left(0e^{x\cdot 0} + 0\sin(x\cdot 0)\right) dx +$$

$$+ \int_{y=0}^{y=\bar{y}} \left(2y + \bar{x}\sin\bar{x}y\right) dy + \int_{z=0}^{z=\bar{z}} \left(\bar{x}e^{\bar{x}z} - 4\right) dz$$

$$= [0]_{x=0}^{x=\bar{x}} + \left[y^2 - \cos\bar{x}y\right]_{y=0}^{y=\bar{y}} + \left[e^{\bar{x}z} - 4z\right]_{z=0}^{z=\bar{z}}$$

$$= \bar{y}^2 - \cos\bar{x}\bar{y} - (-1) + e^{\bar{x}\bar{z}} - 4\bar{z} - (1).$$

Pertanto (sostituendo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $(x, y, z)$) il potenziale di $\mathbf{G}$ che si annulla nell'origine è

$$\mathcal{U}(x, y, z) = y^2 - \cos xy + e^{xz} - 4z.$$

## Esercizio 5.8 — Additività del lavoro

*Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(y^2e^{xy^2} + \frac{1}{x+y}\right)\mathbf{i} + \left(2xye^{xy^2} + \frac{1}{x+y} + x\right)\mathbf{j}$$

*per percorrere la linea $\mathcal{L}$ data dal quarto di ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ contenuto nel primo quadrante, orientata dal punto $A(1, 0)$ al punto $B(0, 2)$.*

### Soluzione

Osserviamo che

$$X_y = 2ye^{xy^2}(1 + xy^2) - \frac{1}{(x+y)^2},$$

$$Y_x = 2ye^{xy^2}(1 + xy^2) - \frac{1}{(x+y)^2} + 1,$$

pertanto $\mathbf{F}$ non è irrotazionale, poiché tuttavia $X_y + 1 = Y_x$ è possibile vedere il campo vettoriale $\mathbf{F}$ come somma di due campi vettoriali $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \left(y^2e^{xy^2} + \frac{1}{x+y}\right)\mathbf{i} + \left(2xye^{xy^2} + \frac{1}{x+y}\right)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{F}_2(x, y) = x\mathbf{j};$$

con $\mathbf{F}_1$ irrotazionale (e anzi conservativo separatamente nei due semipiani $y > -x$ e $y < -x$). Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\mathcal{L}$ è allora la somma dei due lavori di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}} = \mathcal{L}_{\mathbf{F}_1} + \mathcal{L}_{\mathbf{F}_2}.$$

Calcoliamo allora il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}_1$ come differenza di potenziale: con qualche conto si trova che un potenziale di $\mathbf{F}_1$ definito nel semipiano $x+y>0$ è $\mathcal{U}(x,y)=e^{xy^2}+\log(x+y)$, pertanto

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}_1}=\mathcal{U}(0,2)-\mathcal{U}(1,0)=\log 2.$$

$\mathbf{F}_2$ non è conservativo, siamo perciò obbligati a calcolarne il lavoro attraverso un integrale; poiché $\ell:[\cos t]\mathbf{i}+[2\sin t]\mathbf{j}$ con $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, e $\mathrm{d}y=2\cos t\,\mathrm{d}t$, abbiamo

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}_2}=\int_\ell\Big[0\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y\Big]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2};$$

in definitiva,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}}=\mathcal{L}_{\mathbf{F}_1}+\mathcal{L}_{\mathbf{F}_2}=\log 2+\frac{\pi}{2}.$$

### Esercizio 5.9 — Campi conservativi e insiemi semplicemente connessi

*Stabilire quali tra i seguenti campi vettoriali sono conservativi nel loro insieme di definizione:*

① $\mathbf{F}(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j};$

② $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j};$

③ $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j}+\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k};$

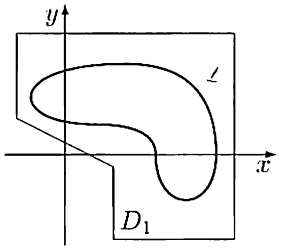
④ $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{yz(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\dfrac{xz(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}+xy\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}.$

#### Soluzione

La teoria, tramite un noto teorema, garantisce che se $\mathbf{F}$ è irrotazionale in un dominio $D$ *semplicemente connesso*, allora (nell'ipotesi che $\mathbf{F}\in C^1(D)$) $\mathbf{F}$ è conservativo in $D$. Va ricordato però che tale teorema enuncia una condizione *solo sufficiente*, nel senso che: se $\mathbf{F}$ è irrotazionale su un dominio $D$ che non è semplicemente connesso, allora non si sa, in base alla teoria, dire se $\mathbf{F}$ è conservativo in $D$, sebbene evidentemente $\mathbf{F}$ sia conservativo in ogni sottoinsieme $D_1\subset D$ che sia semplicemente connesso.

① Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è irrotazionale, il suo insieme di definizione $D$ (tutto il piano, privato dell'origine) non è semplicemente connesso, per cui la teoria non può garantire che $\mathbf{F}$ sia conservativo in $D$; mentre, ovviamente, $\mathbf{F}$ è conservativo in $D_1=\{x>1,y\in\mathbb{R}\}$ poiché $D_1\subset D$ e $D_1$ è semplicemente connesso.

Per stabilire se **F** sia conservativo in tutto $D$, sfruttiamo il fatto che il lavoro compiuto da **F** lungo una qualsiasi linea chiusa di $D$ dev'essere nullo. Innanzitutto osserviamo che se $\ell$ è una qualsiasi linea chiusa che non circonda l'origine, il lavoro compiuto da **F** è nullo, perché $\ell$ può essere racchiusa in un insieme $D_1$ ove **F** è conservativo:




Consideriamo allora una particolare curva $\ell_O$ che circonda l'origine: se il lavoro compiuto da **F** lungo $\ell_O$ non è nullo, **F** non è conservativo in $D$; se invece il lavoro è nullo, allora il lavoro compiuto da **F** lungo *ogni curva chiusa che circonda l'origine* è nullo (questo perché ogni altra curva può essere deformata con continuità fino a sovrapporsi a $\ell_O$), consideriamo allora la più semplice curva che circonda l'origine, $x^2 + y^2 = 1$, e calcoliamo il lavoro compiuto da **F** lungo di essa: se $\mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j}$ con $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo

$$\mathcal{L}_{\ell_O} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t) \right) \mathrm{d}t = 2\pi;$$

e pertanto **F** non è conservativo in tutto $D$.
Osserviamo, che, se avessimo cercato un potenziale locale di **F**, definito in un intorno di un particolare punto $(x_0, y_0)$, e avessimo poi prolungato con continuità tale definizione, avremmo trovato un'espressione di $\mathcal{U}$ valida in tutto il piano *esclusa una semiretta uscente dall'origine*, come ad esempio

$$\mathcal{U}(x, y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} + C & x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} + C & x = 0, y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi + C & x < 0 \end{cases},$$

che è definito in tutto il piano, fuorché lungo il semiasse negativo delle $y$.

② La situazione è analoga alla precedente: **F** è definito in $D = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$. Se cerchiamo un potenziale locale (ad esempio, a partire da un punto del primo quadrante), troviamo

$$\mathcal{U}(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),$$

che è differenziabile in tutto $D$, esibendone un potenziale definito in $D$ possiamo affermare che ivi **F** è conservativo (se volessimo calcolare il lavoro lungo $x^2 + y^2 = 1$ come nel punto precedente, troveremmo ovviamente che tale lavoro è nullo).

③ $\mathbf{F}$ è definito in $D = \{(x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$, $D$ è semplicemente connesso. In questo caso, la teoria garantisce che il campo è conservativo in tutto $D$. La ricerca di un potenziale dà

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

④ L'insieme $D$ di definizione di $\mathbf{F}$ è costituito da tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, privato dell'asse $z$; $D$ non è semplicemente connesso (infatti una linea chiusa che circondi l'asse $z$ non può essere ridotta a un punto), pertanto la teoria nulla può garantire, se però ricerchiamo un potenziale locale, troviamo

$$\mathcal{U}(x, y, z) = xyz\sqrt{x^2 + y^2},$$

che è differenziabile in tutto $D$, pertanto in tutto $D$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

## 5.1.2 Campi vettoriali e superfici

### Esercizio 5.10 — Flussi di campi vettoriali

*Dato il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + 1)\mathbf{i} + (z + y^2)\mathbf{j} + (z)\mathbf{k},$$

*calcolare il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso le superfici sotto elencate*:

① $\mathcal{S}_1$: *porzione di paraboloide* $z = 1 - x^2 - y^2$ *appartenente al primo ottante, nel verso delle* $z$ *decrescenti*;

② $\mathcal{S}_2$: *superficie definita da* $\mathbf{r}(u, v) = [u + v]\mathbf{i} + [u^2 - v^2]\mathbf{j} + [u - v]\mathbf{k}$, *con* $(u, v) \in T = \{0 \leq u \leq 2; -1 \leq v \leq 1\}$, *nel verso delle* $y$ *crescenti*;

③ $\mathcal{S}_3$: *porzione di superficie cilindrica* $x^2 + y^2 = 1$ *al di sopra del piano* $z = 0$ *e al di sotto del piano* $z = y$, *nel verso delle* $y$ *crescenti.*

### Soluzione

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}$ e una superficie orientabile[j] $\mathcal{S}$ il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\mathcal{S}$ è dato da

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

ove $\mathbf{n}$ è il *versore* normale a $\mathcal{S}$ nel verso prescelto.

[j]Si dice *orientabile* una superficie rispetto alla quale sia possibile scegliere, coerentemente con tutti i punti della superficie, un verso per la normale a $\mathcal{S}$ stessa, un esempio di superficie non orientabile è dato dal nastro di Möbius.

Osserviamo che nel calcolo dell'integrale avviene sempre una semplificazione tra il versore normale e l'espressione di $\mathrm{d}S$, infatti:

- se $\mathcal{S}$ è data in forma cartesiana $z = f(x, y)$, allora

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \dfrac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1}} \\ \\ \mathrm{d}S = \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \end{cases}$$

  pertanto $\mathbf{n}\, \mathrm{d}S = [-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{k}]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ e, se $D$ è il dominio del piano $z = 0$ ove[k] si proietta $\mathcal{S}$, abbiamo

$$\mathcal{F} = \iint_D \mathbf{F}(x, y, z(x, y)) \cdot [-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{k}]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y;$$

- se $\mathcal{S}$ è data in forma parametrica $\mathbf{r}(u, v)$, allora

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)|} \\ \\ \mathrm{d}S = |\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \end{cases}$$

  e pertanto $\mathbf{n}\, \mathrm{d}S = [\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)]\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$, e analogamente, abbiamo

$$\mathcal{F} = \iint_T \mathbf{F}\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \cdot [\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)]\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Ovviamente, queste formule danno uno dei due possibili versori normali di una superficie, nel caso in cui il flusso cercato abbia verso opposto al versore normale, sarà sufficiente cambiare di segno l'integrale.

① La superficie è data in forma cartesiana, seguendo le formule, troviamo

$$\mathbf{n}\, \mathrm{d}S = [2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

osserviamo che la componente in $\mathbf{k}$ è positiva, pertanto il flusso che cerchiamo ("nel verso delle $z$ decrescenti") è l'opposto, rispetto al risultato dell'integrale. Inoltre, poiché su $\mathcal{S}$ vale l'uguaglianza $z = 1 - x^2 - y^2$, si trova

$$\mathbf{F}(x, y, z(x, y)) = \mathbf{F}(x, y, 1-x^2-y^2) = (xy+1)\mathbf{i}+(1-x^2)\mathbf{j}+(1-x^2-y^2)\mathbf{k},$$

[k] Confronta l'Esercizio 4.22.

e quindi

$$\mathbf{F}(x, y, z(x, y)) \cdot [2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dx\, dy = \left(2x + 2y + 1 - x^2 - y^2\right) dx\, dy.$$

Considerato che $\mathcal{S}_1$ si proietta nel quarto di cerchio $D = \{x^2+y^2 \leq 1; x > 0, y > 0\}$

$$\mathcal{F} = -\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D \left(2x + 2y + 1 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\varrho=0}^{\varrho=1} \left(1 + 2\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta) - \varrho^2\right)\varrho\, d\varrho$$

$$= \ldots = -\frac{32 + 3\pi}{24}.$$

② Poiché $\mathbf{r}_u(u, v) = \mathbf{i} + [2u]\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = \mathbf{i} + [-2v]\mathbf{j} + [-1]\mathbf{k}$, abbiamo

$$\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v) = [2(v - u)]\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + [-2(v + u)]\mathbf{k};$$

inoltre

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}(x(u, v), y(u,v), z(u, v))\\ &\quad = [(u+v)(u^2 - v^2) + 1]\mathbf{i} + [(u - v) + (u^2 - v^2)^2]\mathbf{j} + [u - v]\mathbf{k},\end{aligned}$$

con qualche conto e semplificando,

$$\mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v)\, du\, dv = 2(u^2 - v^2)\, du\, dv;$$

poiché la componente in $\mathbf{j}$ di $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ è positiva, il flusso viene calcolato nel verso delle $y$ crescenti (quello richiesto) e pertanto, ricordando che $T = \{0 \leq u \leq 2; -1 \leq v \leq 1\}$:

$$\mathcal{F} = \iint_T 2(u^2 - v^2)\, du\, dv = 2\int_0^2 du \int_{v=-1}^{v=1} (u^2 - v^2)\, dv$$

$$= \ldots = 8.$$

③ Una parametrizzazione di $\mathcal{S}_3$ è

$$\mathbf{r}(\vartheta, z) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, \pi], z \in [0, \sin\vartheta],$$

con pochi conti si trova che

$$\mathbf{r}_\vartheta(\vartheta, z) \wedge \mathbf{r}_z(\vartheta, z) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j},$$

inoltre

$$\mathbf{F}(x(\vartheta, z), y(\vartheta, z), z) = [\cos\vartheta \sin\vartheta + 1]\mathbf{i} + [z + \sin^2\vartheta]\mathbf{j} + [z]\mathbf{k},$$

pertanto

$$\mathbf{F}(x(\vartheta, z), y(\vartheta, z), z) \cdot \mathbf{r}_\vartheta(\vartheta, z) \wedge \mathbf{r}_z(\vartheta, z)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}z = \cos\vartheta + \sin\vartheta(z+1)$$

la componente in $\mathbf{j}$ di $\mathbf{r}_\vartheta \wedge \mathbf{r}_z$, ossia $z + \sin^2\vartheta$, è positiva nel dominio $T$, pertanto la normale è diretta nel verso delle $y$ crescenti come richiesto dal testo del problema, detto allora $T = \{0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq z \leq \sin\vartheta\}$, il flusso cercato è

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \iint_T \big(\cos\vartheta + \sin\vartheta(z+1)\big)\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_{z=0}^{z=\sin\vartheta} \big(\cos\vartheta + \sin\vartheta(z+1)\big)\, \mathrm{d}z = \ldots = \frac{4+3\pi}{6}.\end{aligned}$$

## Esercizio 5.11 — Teorema della divergenza

*Calcolare il flusso uscente dal cubo*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

*dei seguenti campi vettoriali:*

① $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + (2xy - z + 1)\mathbf{j} + (xyz)\mathbf{k};$

② $\mathbf{G}(x, y, z) = (2xy - x^2 z)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j} + (xz^2 - e^{xy})\mathbf{k}.$

### Soluzione

Se la superficie $\mathcal{S}$ è una superficie chiusa, per calcolare il flusso di un campo vettoriale $\mathbf{F}$ uscente da $\mathcal{S}$ è possibile usare il teorema della divergenza[1].

① Poiché $\operatorname{div}\mathbf{F} = 6x + 2y + xy$, abbiamo

$$\mathcal{F} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}y \int_{z=0}^{z=1} 6x + 2y + xy\, \mathrm{d}z = \ldots = \frac{17}{4}.$$

[1]**Teorema della divergenza:** Se la superficie $\mathcal{S}$ è la frontiera di un solido $V$, allora il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ *uscente* da $\mathcal{S}$ è uguale all'integrale su $V$ della divergenza di $\mathbf{F}$:

$$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

② Poiché $\operatorname{div} \mathbf{G} = 2y - 2xz - 2y + 2xz = 0$, il flusso di $\mathbf{G}$ uscente dal cubo $C$ è nullo.

## Esercizio 5.12 — Applicazioni del teorema della divergenza – 1 Additività dei flussi

*Calcolare il flusso del campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2 + e^{z^2})\mathbf{i} + (xz - y^3)\mathbf{j} + (x^2 + y + z - 3)\mathbf{k}$$

*attraverso la superficie conica di equazione* $\mathcal{S} : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ *che si trova al di sopra del piano* $z = 0$, *nel verso delle* $z$ *crescenti.*

### Soluzione

Osserviamo che $\mathcal{S}$ è la superficie laterale di un cono $C$ avente come base il dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ nel piano $z = 0$, possiamo calcolare, attraverso il teorema della divergenza, il flusso uscente da $C$ e sottrarre dal risultato il flusso attraverso la base $D$ (nel verso delle $z$ negative), il risultato sarà il flusso uscente dalla superficie laterale, ossia il flusso cercato. Poiché $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$, il flusso uscente complessivamente dal cono $C$ è

$$\mathcal{F}_V = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \text{ volume di } V = \frac{\pi}{3};$$

calcoliamo ora il flusso uscente dalla base $D$: poiché $D$ fa parte del piano $z = 0$ abbiamo $dS = dx \, dy$, inoltre $D$ è piana e orizzontale e quindi la normale a $D$ (che punta verso il basso) è $-\mathbf{k}$, pertanto

$$\mathcal{F}_D = \iint_D \mathbf{F}(x, y, 0) \cdot (-\mathbf{k}) \, dx \, dy = \iint_D (3 - x^2 - y) \, dx \, dy$$

$$= \ldots = \frac{11}{4}\pi;$$

e pertanto

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}_V - \mathcal{F}_D = \frac{\pi}{3} - \frac{11}{4}\pi = -\frac{29}{12}\pi.$$

## Esercizio 5.13 — Applicazioni del teorema della divergenza – 2 Calcolo di volumi e di integrali tripli

① *Calcolare il volume dell'elissoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

② *Calcolare*

$$\iiint_V x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

*ove $V$ è la porzione di toro*[m] *di raggi* 4 *e* 1 *con* $x > 0$ *e* $y > 0$.

**Soluzione**

È possibile usare il teorema della divergenza anche per calcolare integrali tripli su solidi $V$ la cui frontiera $\partial V$ sia definita in forma parametrica: dovendo calcolare

$$\iiint_V f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

è sufficiente determinare un campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z)$ tale che $\operatorname{div} \mathbf{F} = f$ e

$$\iiint_V f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S,$$

(ove $\mathbf{n}$ è la normale uscente dal solido $V$).

① Sia $V$ l'elissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, la frontiera di $V$ è

$$\partial V : \mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = [a \sin\varphi \cos\vartheta]\mathbf{i} + [b \sin\varphi \sin\vartheta]\mathbf{j} + [c \cos\varphi]\mathbf{k}, \quad \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \end{cases},$$

e con qualche conto si trova che

$$\mathbf{r}_\varphi(\varphi,\vartheta) \wedge \mathbf{r}_\vartheta(\varphi,\vartheta) = [bc \sin^2\varphi \cos\vartheta]\mathbf{i} + [ac \sin^2\varphi \sin\vartheta]\mathbf{j} + [ab \sin\varphi \cos\varphi]\mathbf{k}.$$

Per calcolare il volume di un solido $V$, occorre integrare su tutto $V$ la funzione costante che vale 1, scegliamo allora un campo vettoriale la cui divergenza valga 1, ad esempio $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ e calcoliamo il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da $\partial V$, osserviamo che la componente in $\mathbf{k}$ della normale (cioè di $\mathbf{r}_\varphi \wedge \mathbf{r}_\vartheta$) è $ab \sin\varphi \cos\varphi$, ed è positiva al di sopra del piano $z = 0$, negativa al di sotto, pertanto si tratta della normale uscente dall'elissoide; detto $T = \{0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$, abbiamo:

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

$$= \iint_T [z(\varphi, \vartheta)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{r}_\varphi(\varphi, \vartheta) \wedge \mathbf{r}_\vartheta(\varphi, \vartheta) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta$$

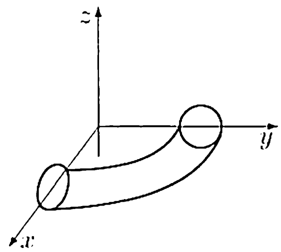
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (c \cos\varphi)(ab \sin\varphi \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \ldots = \frac{4}{3}\pi abc.$$

---

[m] Dall'Esercizio 4.20 (punto ⑤), l'equazione parametrica del toro di raggi $\alpha$ e $\beta$ (con $\alpha > \beta$) è

$\mathbf{r}(u, v) = [(\alpha + \beta \cos u) \cos v]\mathbf{i} + [(\alpha + \beta \cos u) \sin v]\mathbf{j} + [\beta \sin u]\mathbf{k}, \qquad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$

② Seguiamo la stessa strategia usata nel punto precedente: il solido $V$ è costituito dal quarto di toro che si trova in corrispondenza del primo quadrante del piano $z = 0$.




La frontiera di $V$ è data da:

$\mathcal{S}_{xz}$: disco di raggio 1 centrato in $(4, 0, 0)$ e collocato nel piano $xz$,

$\mathcal{S}_{yz}$: disco di raggio 1 centrato in $(0, 4, 0)$ e collocato nel piano $yz$,

$\mathcal{S}_{\text{Tor}}$: superficie toroidale, di equazione

$$\mathbf{r}(u, v) = [(4 + \cos u) \cos v]\mathbf{i} + [(4 + \cos u) \sin v]\mathbf{j} + [\sin u]\mathbf{k},$$

con $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pertanto il flusso uscente da $V$ è dato dalla somma dei flussi uscenti dalle tre superfici (con ovvia simbologia):

$$\mathcal{F}_V = \mathcal{F}_{xz} + \mathcal{F}_{yz} + \mathcal{F}_{\text{Tor}}.$$

Può essere allora conveniente scegliere un campo vettoriale $\mathbf{F}$ tale che div $\mathbf{F} = x$ e che abbia componenti nulle in $\mathbf{i}$ e in $\mathbf{j}$, ad esempio $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{k}$; in questo modo

$$\mathcal{F}_{xz} = 0, \qquad \mathcal{F}_{yz} = 0;$$

rimane da calcolare $\mathcal{F}_{\text{Tor}}$, calcoliamo la normale:

$$\mathbf{r}_u(u, v) \wedge \mathbf{r}_v(u, v) = [-(4 + \cos u) \cos u \cos v]\mathbf{i}+$$

$$+[-(4 + \cos u) \cos u \sin v]\mathbf{j} + [-(4 + \cos u) \sin u]\mathbf{k};$$

osserviamo che, così calcolata, la normale ha componente in $\mathbf{k}$ negativa se $0 < u < \pi$ e positiva se $\pi < u < 2\pi$, cioè negativa al di sopra del piano $z = 0$ e positiva al di sotto: si tratta della normale che punta verso l'interno della superficie del toro, per ottenere quella richiesta, che punta verso l'esterno, la cambieremo di segno. In definitiva, detto $T = \{0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \frac{\pi}{2}\}$, il flusso cercato è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{Tor}} & \iint_{\mathcal{S}_{\mathrm{Tor}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \\
&= \iint_T [x(u,v) z(u,v)\mathbf{k}] \cdot [-\mathbf{r}_u(u,v) \wedge \mathbf{r}_v(u,v)] \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_{v=0}^{v=\frac{\pi}{2}} \big((4+\cos u)\sin u \cos v\big)\big((4+\cos u)\sin u\big) \, \mathrm{d}v \\
&= \ldots = \frac{65}{4}\pi;
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$\iiint_V x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \mathcal{F}_V = 0 + 0 + \mathcal{F}_{\mathrm{Tor}} = \frac{65}{4}\pi.$$

## Esercizio 5.14 — Teorema di Stokes - 1

*Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dal campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y + z - e^{x^2})\mathbf{i} + (xyz + 1)\mathbf{j} + (xz + 2)\mathbf{k}$$

*per compiere un giro dell'ellisse ottenuta tagliando il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $x + z = 8$, in senso antiorario se visto da un osservatore posto al di sopra del piano.*

### Soluzione

Il teorema di Stokes[n] uguaglia lavori e flussi, e può essere usato nei due sensi. In questo caso, dobbiamo calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale **F** lungo una linea che costituisce il bordo di un'ellisse $\mathcal{S}$, avente equazione

$$\mathcal{S} : z = 8 - x, \qquad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 1\};$$

usando il teorema di Stokes possiamo calcolare tale lavoro come flusso di rot **F** attraverso tale ellisse, abbiamo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-xy)\mathbf{i} + (1 - z)\mathbf{j} + (yz - x^2)\mathbf{k}$$

[n]**Teorema di Stokes:** Sia $\mathcal{S}$ una superficie aperta, avente $\mathcal{L}$ come frontiera, allora se $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ il lavoro di **F** lungo $\mathcal{L}$ è uguale al flusso di rot **F** attraverso $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{L}} \left[X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y + Z \, \mathrm{d}z\right] = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S,$$

ove **n** è scelta in modo che la $\mathcal{L}$ sia percorsa in senso antiorario, se vista da un osservatore orientato come **n**.

con pochi conti si ricava che $\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = (\mathbf{i}+\mathbf{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, e quindi (poiché sulla superficie $z = 8 - x$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_D \left((-xy)\mathbf{i} + (1-z)\mathbf{j} + (yz - x^2)\mathbf{k}\right)\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(yz - x^2 - xy\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(8y - x^2 - 2xy\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \ldots = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

### Esercizio 5.15 — Teorema di Stokes - 2

*Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy + ze^{xy^2})\mathbf{i} + (e^{-x^2} + y\sqrt[3]{zx})\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

*attraverso la calotta sferica* $\mathcal{S} = \{x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 8,\ y \geq 0\}$, *nel verso delle* $y$ *crescenti.*

### Soluzione

Nell'esercizio precedente, abbiamo usato il teorema di Stokes per calcolare un lavoro mediante un flusso, ora lo usiamo in entrambe le direzioni: dobbiamo calcolare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso una porzione di superficie sferica, con il teorema di Stokes, sappiamo che questo flusso equivale al lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la frontiera di $\mathcal{S}$ che è data dalla circonferenza $\mathcal{L}: x^2 + z^2 = 4$ contenuta nel piano $xz$, possiamo riapplicare il teorema di Stokes, e calcolare tale lavoro come il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso il disco $D$ del piano $xz$ di cui $\mathcal{L}$ è la frontiera. Poiché siamo nel piano $xz$, la normale al disco è data da $\mathbf{j}$, mentre

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} = &\left(xz - \frac{y\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{z^2}}\right)\mathbf{i} + (e^{xy^2} - yz)\mathbf{j} \\
&+ \left(-xe^{-x^2} + \frac{y\sqrt[3]{z}}{3\sqrt[3]{x^2}} - x - 2xyze^{xy^2}\right)\mathbf{k},
\end{aligned}$$

pertanto tale flusso (siamo nel piano $y = 0$) è

$$\iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{j}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \text{area}\,(D) = 4\pi.$$

## 5.2 Esercizi proposti

**16** Sono dati i seguenti campi vettoriali:

① $\mathbf{F}(x, y) = (1 - 6xy + y^2 e^{xy^2})\mathbf{i} + (2xye^{xy^2} - 3x^2 - 1)\mathbf{j}$;

② $\mathbf{F}(x, y) = (5x^2y - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j}$;

③ $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{2x^2y^3}{1 + x^2y^2} + y\log(1 + x^2y^2)\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{2x^3y^2}{1 + x^2y^2} + x\log(1 + x^2y^2)\right)\mathbf{j}$;

④ $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{4(x + y^2)}{x} + \log(x^4y^2)\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{2(x + y^2)}{y} + 2y\log(x^4y^2)\right)\mathbf{j}$;

⑤ $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x^2 + y + 4xy}{y(x - 2y)^2}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{4x^2y - x^3 - 2y^2}{y^2(x - 2y)^2}\right)\mathbf{j}$;

⑥ $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{3x^2 + 12xy + y^3}{y(x + 2y)^2}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{3x^3 + 12x^2y + 2xy^3 + 2y^4}{y^2(x + 2y)^2}\right)\mathbf{j}$;

determinare quali sono conservativi (specificare dove) e quali non lo sono.

[① conservativo in $\mathbb{R}^2$; ② non conservativo; ③ conservativo in $\mathbb{R}^2$; ]

[④ conservativo in ciascuno dei quattro quadranti; ⑤ non conservativo;]

$$\left[ \text{⑥ conservativo in } \begin{array}{ll} D_1 = \{x > 0,\, y > -2x\} & D_2 = \{x < 0,\, y > -2x\} \\ D_3 = \{x < 0,\, y < -2x\} & D_4 = \{x > 0,\, y < -2x\} \end{array} \right]$$

**17** Determinare il potenziale che si annulla in $(1, 1)$ di ciascuno dei campi vettoriali conservativi del precedente esercizio, precisandone l'insieme di definizione.

[① $\mathcal{U}(x, y) = e^{xy^2} - 3x^2y + x - y - e + 3$, $D = \mathbb{R}^2$; ]

[③ $\mathcal{U}(x, y) = xy\log(1 + x^2y^2) - \log 2$, $D = \mathbb{R}^2$; ]

[④ $\mathcal{U}(x, y) = (x + y^2)\log(x^4y^2)$, $D = \{x > 0, y > 0\}$; ]

$$\left[ \text{⑥ } \mathcal{U}(x, y) = \frac{3x^2 - y^3}{y(x + 2y)} - \frac{2}{3},\ D = \{x > 0,\, y > -2x\} \right]$$

**18** Calcolare il lavoro compiuto da ciascuno dei campi vettoriali dell'Esercizio 16 per muoversi lungo il segmento $\overline{AB}$, andando dal punto $A(-1, 3)$ al punto $B(1, 3)$.

$$\left[ \text{① } 2 + 2\,\mathrm{Sh}\, 9;\ \text{② } 10;\ \text{③ } 6\log 10;\ \text{④ impossibile;} \text{⑤ } \frac{292}{105} - 8\log\frac{7}{5};\ \text{⑥ } \frac{16}{35} \right]$$

**19** Sono dati i seguenti campi vettoriali:

① $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$;

② $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xe^y - 2x + 3y^2)\mathbf{i} + (2xze^y + 6xy - 2y + 1)\mathbf{j} + (2xe^y - 6z^2)\mathbf{k}$;

③ $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{-2xy\log|z+1|}{(x^2+1)^2}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\log|z+1|}{x^2+1}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{(x^2+1)(z+1)}\right)\mathbf{k}$;

④ $\mathbf{F}(x, y, z) = (y(2x + z))\mathbf{i} + (x^2 - xz + 6y^2z)\mathbf{j} + (y(x + 3y^2))\mathbf{k}$;

⑤ $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{(2z - 3x - 2y - 2)\mathbf{i} - (2 + x)\mathbf{j} + (2 + x)\mathbf{k}}{2\sqrt{z - x - y}}$;

determinare quali sono conservativi (specificare dove) e quali non lo sono.

[① conservativo in $\mathbb{R}^3$; ② conservativo in $\mathbb{R}^3$;]

[③ conservativo in $D_1 = \{z > -1\}$, $D_2 = \{z < -1\}$; ]

[④ non conservativo; ⑤ conservativo in $D = \{z > x + y\}$]

**20** Determinare il potenziale che si annulla in $(1, 0, 2)$ di ciascuno dei campi vettoriali conservativi del precedente esercizio, precisandone l'insieme di definizione.

[① $U(x, y, z) = xy + xz + yz - 2$, $D = \mathbb{R}^3$; ]

[② $U(x, y, z) = 3xy^2 + 2xze^y - x^2 - 2z^3 + y(1 - y) + 13$, $D = \mathbb{R}^3$; ]

[③ $U(x, y, z) = \dfrac{y}{x^2+1}\log|z + 1|$, $D = \{z > -1\}$; ]

[⑤ $U(x, y, z) = (x + 2)\sqrt{z - x - y} - 3$, $D = \{z > x + y\}$]

**21** Calcolare (se possibile) il lavoro compiuto da ciascuno dei campi vettoriali dell'Esercizio 19 per muoversi lungo l'elica cilindrica

$$\mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

andando dal punto $P(1, 0, 0)$ al punto $Q(-1, 0, 3\pi)$.

[① $-3\pi$; ② $-6\pi(9\pi^2 + 1)$; ③ 0; ④ $\dfrac{8 - 27\pi^2}{6}$; ⑤ impossibile]

**22** Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie laterale del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 4$, nel verso delle $z$ decrescenti

[$\dfrac{2752}{5}\pi$]

**23** Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie laterale del tronco di cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 1$, nel verso delle $z$ crescenti.

$$\left[\frac{133}{10}\pi\right]$$

**24** Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (4y + xe^z)\mathbf{k}$, calcolare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la porzione di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $0 \leq x \leq 1$, nel verso delle $x$ crescenti.

$$[4\pi]$$

# 6

# Equazioni differenziali

## 6.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

### 6.1.1 Equazioni del prim'ordine

**Esercizio 6.1 — Equazioni lineari**

*Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali*

① $y' = 4ty + t^3$; ② $y' = \dfrac{1}{t}y + \dfrac{12}{t^2}$; ③ $y' = \dfrac{-2t}{t^2+1}y + \dfrac{5}{\sqrt{t}}$;

④ $y' = \dfrac{1}{t}y + 12t^2$; ⑤ $y' = \dfrac{-2t}{t^2+1}y + \dfrac{7}{\sqrt[3]{t^2}}$; ⑥ $y' = (\tan t)y + 6\sin 2t$.

**Soluzione**

È detto *integrale generale* l'insieme delle soluzioni di una data equazione differenziale. Un'equazione differenziale della forma

$$y' = p(t)y + q(t)$$

è detta *equazione lineare*; per determinarne l'integrale generale occorre innanzitutto determinare una primitiva di $p(t)$, chiamiamola $P(t)$, l'integrale generale è allora dato dalla formula[a]

$$P(t) = \int p(t)\,dt; \qquad y(t) = e^{P(t)}\left\{C + \int q(t)e^{-P(t)}\,dt\right\}.$$

Osserviamo che, nella scelta della primitiva di $p$, non occorre conservare la presenza di una costante arbitraria $D$, poiché finirebbe con il confluire nella costante $C$ dell'integrale generale.

[a]Poiché la stessa equazione può essere scritta anche portando a primo membro il termine con $y$, ossia nella forma $y' + a(t)y = b(t)$, in questo caso detta $A(t)$ una primitiva di $a(t)$ l'integrale generale si scrive

$$y(t) = e^{-A(t)}\left\{C + \int b(t)e^{A(t)}\,dt\right\}.$$

① Poiché una primitiva di $p(t) = 4t$ è $P(t) = 2t^2$, abbiamo

$$y(t) = e^{2t^2}\left\{C + \int t^3 e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t\right\},$$

sostituendo e integrando per parti, abbiamo

$$\int t^3 e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}e^{-2t^2}(1 + 2t^2),$$

pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = e^{2t^2}\left\{C + -\frac{1}{8}e^{-2t^2}(1 + 2t^2)\right\} = Ce^{2t^2} - \frac{1 + 2t^2}{8}.$$

② Risolviamo l'equazione separatamente per $t > 0$ e $t < 0$:

- se $t > 0$, una primitiva di $p(t) = \frac{1}{t}$ è $P(t) = \log t$, e quindi

$$y(t) = e^{\log t}\left\{C + \int \frac{12}{t^2}e^{-\log t}\,\mathrm{d}t\right\} = t\left\{C + \int \frac{12}{t^3}\,\mathrm{d}t\right\} = Ct - \frac{6}{t};$$

- se $t < 0$, una primitiva di $p(t) = \frac{1}{t}$ è $P(t) = \log(-t)$, e quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\log(-t)}\left\{C + \int \frac{12}{t^2}e^{-\log(-t)}\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= (-t)\left\{C + \int \frac{12}{t^2}\cdot\frac{1}{-t}\,\mathrm{d}t\right\} = (-t)\left\{C - \int \frac{12}{t^3}\,\mathrm{d}t\right\} = C(-t) - \frac{6}{t}; \end{aligned}$$

pertanto l'integrale generale è

$$y(t) = \begin{cases} Ct - \frac{6}{t} & t > 0 \\ C(-t) - \frac{6}{t} & t < 0 \end{cases},$$

ma l'arbitrarietà della costante $C$ ci permette di condensare le due scritture in un'unica formula[b]:

$$y(t) = Ct - \frac{6}{t},$$

valida sia per $t > 0$, sia per $t < 0$.

[b] Questa semplificazione di scrittura, grazie alla presenza della costante arbitraria, avviene in tutti i casi in cui l'espressione di $P(t)$ abbia la forma $\log|a(t)|$, d'ora in avanti potremo allora trascurare la distinzione tra argomento positivo e negativo del logaritmo.

③ Poiché

$$\int \frac{-2t}{1+t^2}\,dt = -\log(1+t^2),$$

abbiamo

$$y(t) = e^{-\log(1+t^2)}\left\{C + \int \frac{5}{\sqrt{t}}\,e^{\log(1+t^2)}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\left\{C + \int \frac{5}{\sqrt{t}}(1+t^2)\,dt\right\} = \frac{C + 2\sqrt{t}(5+t^2)}{1+t^2}.$$

④ Grazie a quanto abbiamo visto al punto ② , poiché anche in questo caso $p(t) = \frac{1}{t}$ e $P(t) = \log t$, abbiamo

$$y(t) = e^{\log t}\left\{C + \int 12t^2 e^{-\log t}\,dt\right\} = t\left\{C + \int 12t\,dt\right\} = Ct + 6t^3;$$

formula valida per $t > 0$ e $t < 0$.

⑤ Analogamente al punto ③ , $P(t) = -\log(1+t^2)$, pertanto

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}\left\{C + \int \frac{7}{\sqrt[3]{t^2}}(1+t^2)\,dt\right\} = \frac{C + 3\sqrt[3]{t}(7+t^2)}{1+t^2}.$$

⑥ Poiché $p(t) = \tan t$,

$$P(t) = \int \tan t\,dt = -\log|\cos t|$$

possiamo trascurare il modulo, e scrivere

$$y(t) = e^{-\log\cos t}\left\{C + \int 6\sin(2t)e^{\log\cos t}\,dt\right\} = \frac{1}{\cos t}\left\{C + \int 6\sin(2t)\cos t\,dt\right\},$$

poiché

$$\int 6\sin 2t\cos t\,dt = -4\cos^3 t,$$

abbiamo

$$y(t) = \frac{1}{\cos t}\left\{C - 4\cos^3 t\right\} = \frac{C}{\cos t} - 4\cos^2 t.$$

### Esercizio 6.2 — Problemi di Cauchy per equazioni lineari del prim'ordine

*Per le equazioni differenziali ① ② e ③ dell'esercizio precedente, risolvere, ove possibile, i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\mathscr{P}_1 : y(1) = 3; \qquad \mathscr{P}_2 : y(-1) = 3; \qquad \mathscr{P}_3 : y(1) = 0; \qquad \mathscr{P}_4 : y(0) = 3;$$

*specificando, in ciascun caso, l'insieme di definizione della soluzione trovata.*

**Soluzione**

Dato un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\begin{cases} y' = p(t)y + q(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

la teoria garantisce che, se le funzioni $p(t)$ e $q(t)$ sono continue in un intervallo aperto $I$ contenente $t_0$, allora esiste *una e una sola soluzione* dell'equazione differenziale data che soddisfi anche la condizione $y(t_0) = y_0$, tale soluzione sarà definita per $t \in I$.

① Le funzioni $p$ e $q$ sono continue in tutto $\mathbb{R}$, questo garantisce che possiamo assegnare a $t_0$ qualsiasi valore, e che la soluzione corrispondente sarà anch'essa definita in tutto $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda $\mathscr{P}_1$, sostituendo $t = 1$ e $y = 3$ nell'integrale generale otteniamo

$$3 = Ce^2 - \frac{1+2}{8} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{27}{8e^2},$$

pertanto la soluzione è

$$y(t) = \frac{27}{8e^2}e^{2t^2} - \frac{1+2t^2}{8} = \frac{27e^{2(t^2-1)} - 1 - 2t^2}{8};$$

in modo del tutto analogo si opera negli altri tre casi, trovando rispettivamente:

$$\mathscr{P}_2 : C = \frac{27}{8e^2}; \qquad \mathscr{P}_3 : C = \frac{3}{8e^2}; \qquad \mathscr{P}_4 : C = \frac{25}{8}.$$

In tutti e quattro i casi, la soluzione è definita, come avevamo precedentemente notato, in tutto $\mathbb{R}$.

② La funzioni $p$ e $q$ sono continue in $t \neq 0$, pertanto l'esistenza delle soluzioni è garantita solo per $t > 0$ o $t < 0$, a seconda di dove si trovi il punto $t_0$; partiamo da $\mathscr{P}_1$:

$$3 = C \cdot 1 - \frac{6}{1} \qquad \Rightarrow \qquad C = 9,$$

e la soluzione sarà

$$y(t) = 9t - \frac{6}{t}.$$

Occorre adesso stabilire dove sia definita questa soluzione, sappiamo che la funzione

$$f(t) = 9t - \frac{6}{t}$$

è definita per $t \neq 0$, ma *non è questo* che si intende quando si chiede l'insieme di definizione di $y(t)$; in effetti perché $y(t)$ sia soluzione di un problema di Cauchy occorre che sia definta continua e derivabile in un intorno del punto $t_0$. Poiché nel nostro caso $t_0 = 1$, la soluzione corrispondente è definita

*nel più grande intervallo aperto* che contiene $t_0 = 1$ e nel quale $p(t)$ e $q(t)$ sono continue, questo è $(0, +\infty)$, pertanto $y(t) = 9t - \frac{6}{t}$ è la soluzione del problema di Cauchy $y(1) = 3$ solo per $t \in \mathbb{R}^+$.
Passiamo a $\mathscr{P}_2$, analoghe considerazioni ci portano a dire che la funzione che troveremo sarà soluzione del problema di Cauchy per $t \in (-\infty, 0)$, determiniamo $C$:

$$3 = C \cdot (-1) - \frac{6}{-1} \qquad \Rightarrow \qquad C = 3,$$

e la soluzione (definita, lo ricordiamo, in $(-\infty, 0)$) è $y(t) = 3t - \frac{6}{t}$.
Per ciò che riguarda $\mathscr{P}_3$, sappiamo che anche in questo caso $y$ sarà definita in $(0, +\infty)$, e

$$0 = C \cdot 1 - \frac{6}{1} \qquad \Rightarrow \qquad C = 6,$$

pertanto $y(t) = 6(t - \frac{1}{t})$.
Nessuna soluzione può invece esistere per $t_0 = 0$ poiché in corrispondenza di tale valore $p(t)$ non è definita, il problema $\mathscr{P}_4$ in questo caso è mal posto; se tentassimo comunque di ricavare $C$, troveremmo l'equazione

$$3 = C \cdot 0 - \frac{6}{0},$$

evidentemente priva di significato.

③ Osserviamo che, poiché $q(t)$ è definita per $t > 0$, non potrà esistere alcuna soluzione che soddisfi $\mathscr{P}_2$, perché $t_0 = -1$ non è un valore ammissibile per $t$. Per quanto riguarda $\mathscr{P}_1$, in base alle solite considerazioni ($q$ non è definita per $t = 0$) possiamo dire che la soluzione è definita in $(0, +\infty)$, e

$$3 = \frac{C + 2\sqrt{1}(5 + 1)}{1 + 1^2} \qquad \Rightarrow \qquad C = -6,$$

pertanto la soluzione è

$$y(t) = \frac{-6 + 2\sqrt{t}(5 + t^2)}{1 + t^2}.$$

Allo stesso modo, per quanto riguarda $\mathscr{P}_3$, abbiamo

$$0 = \frac{C + 2\sqrt{1}(5 + 1)}{1 + 1^2} \qquad \Rightarrow \qquad C = -12,$$

e

$$y(t) = \frac{-12 + 2\sqrt{t}(5 + t^2)}{1 + t^2}.$$

Per quanto riguarda $\mathscr{P}_4$, poiché $q(t)$ non è definita in $t = 0$ la teoria non garantisce nulla circa l'esistenza di una soluzione, se decidessimo di impostare comunque l'equazione corrispondente per determinare $C$, troveremmo

$$3 = \frac{C + 2\sqrt{0}(5 + 0^2)}{1 + 0^2} \qquad \Rightarrow \qquad C = 3,$$

potrebbe allora sembrare che una soluzione a $\mathscr{P}_4$ esista:

$$y(t) = \frac{3 + 2\sqrt{t}(5 + t^2)}{1 + t^2};$$

tuttavia, come si vede con il calcolo, la derivata di questa funzione *non è definita* in $t = 0$, pertanto essa *non può essere*, in corrispondenza di $t = 0$, soluzione dell'equazione differenziale di partenza.

### Esercizio 6.3 — Esistenza e prolungabilità delle soluzioni

*Determinare gli insiemi di definizione delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:*

① $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{t}y + 12t^2 \\ y(1) = 7 \end{cases}$ ; ② $\begin{cases} y' = \dfrac{-2t}{t^2+1}y + \dfrac{7}{\sqrt[3]{t^2}} \\ y(1) = 14 \end{cases}$ ;

③ $\begin{cases} y' = (\tan t)y + 6\sin 2t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ; ④ $\begin{cases} y' = (\tan t)y + 6\sin 2t \\ y(0) = -4 \end{cases}$ ;

*è possibile estendere tali insiemi?*

#### Soluzione

Osserviamo che le equazioni differenziali sono già state risolte nell'Esercizio 1.

① In base alla teoria, sappiamo che la soluzione di questo problema di Cauchy è definita in $(0, +\infty)$, imponendo il passaggio per il punto $(1, 7)$ abbiamo

$$7 = C \cdot 1 + 6 \cdot 1^3 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1,$$

pertanto la soluzione corrispondente è $y = t + 6t^3$; osserviamo che la $y$ così trovata è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, è allora possibile *prolungarla*, e dire che essa costituisce la soluzione al nostro problema di Cauchy in tutto $\mathbb{R}$.

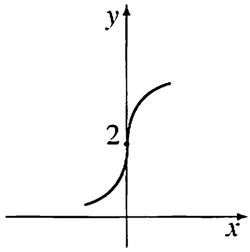
② Anche in questo caso, la soluzione è definita in $(0, +\infty)$, imponendo il passaggio per il punto $(1, 14)$ abbiamo

$$14 = \frac{C + 3\sqrt[3]{1}(7 + 1^2)}{1 + 1^2} \qquad \Rightarrow \qquad C = 4,$$

e la soluzione corrispondente è

$$y(t) = \frac{4 + 3\sqrt[3]{t}(7 + t^2)}{1 + t^2},$$

$y$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, infatti in $t = 0$ vi è un punto a tangente verticale:




pertanto, sebbene $y$ sia definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, essa rappresenta la soluzione del problema di Cauchy solo per $t > 0$.

③ Poiché $\tan t$ ha due asintoti verticali in $t = \pm\frac{\pi}{2}$, le soluzioni di questa equazione differenziale sono definite in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, imponiamo il passaggio per il punto $(0, 1)$:

$$1 = \frac{C}{\cos 0} - 4\cos^2 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 5,$$

pertanto la soluzione è

$$y(t) = \frac{5}{\cos t} - 4\cos^2 t,$$

definita (in accordo con la teoria) per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

④ Siamo nella stessa situazione del punto precedente, l'esistenza della soluzione è garantita per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, imponendo il passaggio della soluzione per il punto $(0, -4)$, abbiamo

$$-4 = \frac{C}{\cos 0} - 4\cos^2 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0,$$

la soluzione corrispondente è $y(t) = -4\cos^2 t$, che è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$, e perciò può essere prolungata a tutto $\mathbb{R}$.

## Esercizio 6.4 — Equazioni a variabili separabili

*Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali*

① $y' = 6t(1 + y^2)$; ② $y' = y^2 - 1$; ③ $y' = \dfrac{e^t}{e^y + y - 1}$; ④ $y' = t^2\sqrt{y}$.

**Soluzione**
È detta equazione *a variabili separabili* un'equazione differenziale della forma

$$y(t) = a(t)b(y);$$

osserviamo subito che, se $b(\bar{y}) = 0$, allora la funzione (costante) $y(t) \equiv \bar{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale, infatti la derivata prima di una funzione costante è zero, e pertanto l'equazione differenziale si riduce all'identità $0 \equiv 0$; una volta isolati i valori di $y$ che annullano $b$, possiamo ritenere $b(y) \neq 0$, dividere ambo i membri per $b(y)$ e integrarli rispetto a $t$:

$$\int \frac{1}{b(y)} y' \, dt = \int a(t) \, dt + C,$$

osserviamo che, nell'integrale a primo membro, per sostituzione $y' \, dt = dy$, otteniamo quindi l'equazione

$$\int \frac{1}{b(y)} \, dy = \int a(t) \, dt + C,$$

le cui soluzioni sono altrettante soluzioni dell'equazione differenziale di partenza. Riassumendo, per determinare l'integrale generale di un'equazione $y' = a(t)b(y)$:

1) si cercano eventuali valori $\bar{y}$ tali che $b(\bar{y}) = 0$: se ve ne sono, le funzioni $y(t) \equiv \bar{y}$ sono soluzioni dell'equazione;
2) si integra la relazione

$$\int \frac{1}{b(y)} \, dy = \int a(t) \, dt + C,$$

le funzioni $y(t)$ definite da questa uguaglianza sono soluzioni dell'equazione differenziale.

L'integrale generale di $y' = a(t)b(y)$ è allora formato dall'insieme delle soluzioni trovate al punto 1 e al punto 2.

① Detti $a(t) = 6t$ e $b(y) = 1 + y^2$, osserviamo che $b(y) \neq 0$ per ogni $y$, pertanto non ci sono soluzioni costanti, dividiamo per $b(y)$ ottenendo

$$\int \frac{1}{1+y^2} \, dy = \int 6t \, dt + C \qquad \Rightarrow \qquad \arctan y = 3t^2 + C;$$

quest'ultima relazione è risolubile rispetto a $y$, otteniamo

$$y(t) = \tan(3t^2 + C),$$

che è l'integrale generale dell'equazione di partenza.

② Ponendo $a(t) = 1$ e $b(y) = y^2 - 1$, anche questa è un'equazione a variabili separabili; osserviamo che $y = \pm 1$ sono radici di $b(y) = 0$, pertanto anch'esse vanno annoverate tra le soluzioni; separando le variabili otteniamo

$$\int \frac{1}{y^2 - 1}\, \mathrm{d}y = \int 1\, \mathrm{d}t + C;$$

scomponendo in fattori[c], otteniamo

$$\int \frac{1}{y^2 - 1}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right|,$$

da cui

$$\log \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = 2(t + C),$$

ponendo $D = e^{2C}$ (e quindi assumendo implicitamente che $D > 0$), arriviamo all'uguaglianza

$$\left| \frac{y+1}{y-1} \right| = De^{2t}.$$

Questa uguaglianza si traduce in due diverse forme, a seconda del segno della frazione, osservando che la frazione è positiva se $y < -1$ o $y > 1$, ed è negativa se $-1 < y < 1$, abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{y+1}{y-1} = De^{2t} & y < -1, y > 1 \\[2ex] -\dfrac{y+1}{y-1} = De^{2t} & -1 < y < 1 \end{cases}$$

le due equazioni possono essere ridotte a un'unica forma a patto di ammettere che $D$ assuma anche valori negativi, in tal caso si riducono a

$$\frac{y+1}{y-1} = De^{2t} \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \frac{1 + De^{2t}}{1 - De^{2t}}.$$

Riassumendo, l'integrale generale è dato da

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{1 + De^{2t}}{1 - De^{2t}}, \\[2ex] y(t) \equiv 1, \\ y(t) \equiv -1. \end{cases}$$

[c] Vedi l'Esercizio 9.15 del volume *Analisi Matematica 1 e Algebra lineare*.

③ Poniamo $a(t) = e^t$ e $b(y) = e^y + y - 1$, osserviamo che $b(y) = 0$ se e solo se $y = 0$, pertanto la funzione identicamente nulla $y(t) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione. Separando le variabili otteniamo

$$\int (e^y + y - 1)\,\mathrm{d}y = \int e^t\,\mathrm{d}t + C,$$

da cui

$$e^y + \frac{1}{2}y^2 - y = e^t + C,$$

e poiché non siamo tecnicamente in grado di scrivere questa relazione nella forma $y = y(x)$, le soluzioni della nostra equazione differenziale saranno date in forma implicita da tale relazione; riassumendo, l'integrale generale è[d]

$$\begin{cases} e^y + \frac{1}{2}y^2 - y = e^t + C, \\ y(t) \equiv 0. \end{cases}$$

④ Posto $a(t) = t^2$, $b(y) = \sqrt{y}$, osserviamo che $y(t) \equiv 0$ è soluzione costante, dopodiché separiamo le variabili:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int t^2\,\mathrm{d}t + C \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}t^3 + C,$$

notiamo che quest'ultima relazione implica che $\frac{1}{3}t^3 + C$ sia non negativo, esplicitando rispetto a $y$ otteniamo

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 + C\right)^2 = \frac{(t^3 + D)^2}{18}, \qquad (t^3 + D) \geq 0;$$

l'integrale generale è pertanto

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{(t^3 + D)^2}{18}, & (t^3 + D) \geq 0, \\ y(t) \equiv 0. \end{cases}$$

## Esercizio 6.5 — Problemi di Cauchy per equazioni a variabili separabili

*Risolvere, ove possibile, i seguenti problemi di Cauchy:*

① $\begin{cases} y' = 6t(1 + y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ; ② $\begin{cases} y' = 6t(1 + y^2) \\ y(-2) = 0 \end{cases}$ ; ③ $\begin{cases} y' = t^2\sqrt{y} \\ y(1) = 4 \end{cases}$ ;

④ $\begin{cases} y' = t^2\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ ; ⑤ $\begin{cases} y' = 4t\sqrt{y} \\ y(1) = 9 \end{cases}$ ; ⑥ $\begin{cases} y' = 4t\sqrt{y} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

*specificando, in ciascun caso, l'insieme di definizione della soluzione trovata.*

[d] Resta inteso che ogni soluzione è tale solo in ogni intervallo in cui la relazione implicita definisce una $y = y(x)$ continua con la sua derivata prima, indipendentemente dell'impossibilità tecnica di "esplicitare" tale $y(x)$.

**Soluzione**

Dato un problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili:

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

la teoria garantisce che se $a(t)$ è continua in un intorno di $t = t_0$ e le funzioni $b(y), b'(y)$ sono continue in un intorno di $y_0$ allora esiste un'unica soluzione al problema di Cauchy, definita in un intorno di $t_0$ (contenuto nell'intorno di $t_0$ relativo alla funzione $a(t)$).

Come nel caso delle equazioni lineari, il valore di $C$ viene determinato sostituendo ai generici $t$ e $y$ i valori $t_0$ e $y_0$. Osserviamo che, fatti salvi i casi in cui il problema di Cauchy indica una delle (eventuali) soluzioni costanti, è consigliabile effettuare la sostituzione nell'espressione che si ottiene mediante l'integrazione a variabili separate, piuttosto che nell'espressione esplicita in $y(t)$.

① Sappiamo (esercizio precedente) che le soluzioni dell'equazione differenziale hanno la forma $\arctan y = 3t^2 + C$, imponendo $y(0) = 0$ troviamo $\arctan 0 = 3 \cdot 0^2 + C$, perciò $C = 0$, la soluzione cercata è allora $y(t) = \tan 3t^2$, definita per $3t^2 < \frac{\pi}{2}$, ossia per $|t| < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

② Imponendo $y(-2) = 0$ in $\arctan y = 3t^2 + C$, troviamo

$$\arctan 0 = 3 \cdot 2^2 + C, \qquad \Rightarrow \qquad C = -12,$$

la soluzione cercata è allora $y(t) = \tan(3t^2 - 12)$. Per quanto riguarda l'insieme di definizione, poiché $3t^2 - 12$ è "arcotangente di $y$", esso deve assumere valori compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, pertanto l'insieme di definizione della soluzione è dato dall'intorno di $t = -2$ per cui $|3t^2 - 12| < \frac{\pi}{2}$, ossia per

$$-\sqrt{4 + \frac{\pi}{6}} < t < -\sqrt{4 - \frac{\pi}{6}}.$$

Notiamo che la relazione $|3t^2 - 12| < \frac{\pi}{2}$ è verificata anche per

$$\sqrt{4 - \frac{\pi}{6}} < t < \sqrt{4 + \frac{\pi}{6}},$$

ma questo intervallo non contiene $t = -2$, pertanto non ha valore ai fini della soluzione.

③ Dall'esercizio precedente, punto ④, sappiamo che le soluzioni hanno la forma

$$y(t) \equiv 0, \qquad 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}t^3 + C,$$

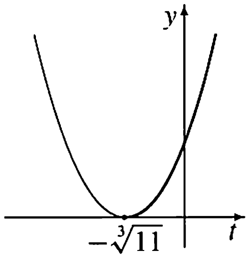
poiché richiediamo il passaggio per il punto $(t = 1, y = 4)$ la soluzione costante non può andare bene, quindi serviamoci dell'altra espressione:

$$2\sqrt{4} = \frac{1}{3}1^3 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{11}{3},$$

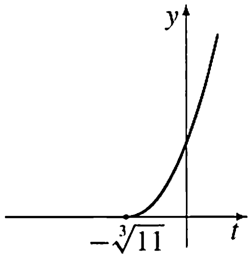
pertanto la soluzione cercata (con la condizione proveniente dalla radice) è

$$y(t) = \frac{(t^3+11)^2}{18}, \qquad (t^3+11) \geq 0 \Rightarrow t \geq -\sqrt[3]{11}.$$

Osserviamo che la funzione $y(t)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, tuttavia vedendo il suo grafico




ci si accorge che solo il ramo di destra è compatibile con l'equazione differenziale di partenza; infatti, poiché $y' = t^2\sqrt{y}$, abbiamo $y' \geq 0$, ossia $y$ dev'essere una funzione non decrescente.
Osserviamo inoltre che per il punto $(-\sqrt[3]{11}, 0)$ passa anche un'altra soluzione: la soluzione identicamente nulla; questo significa che potremmo *prolungare*[e] la $y$ trovata con la funzione $y(t) = 0$:



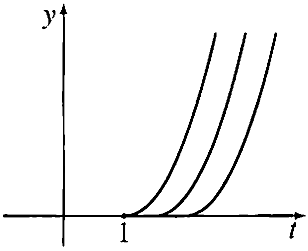

④ Poiché $b(y) = \sqrt{y}$ non è derivabile in $y = 0$, la teoria non garantisce alcunché riguardo a un problema di Cauchy $y(t_0) = 0$. In effetti, per $(1, 0)$ passano infinite soluzioni di $y' = t^2\sqrt{y}$: vi passa la funzione identicamente nulla, vi passa la funzione

$$y(t) = \frac{(t^3-1)^2}{18}, \qquad (t^3-1) \geq 0 \Rightarrow t \geq 1,$$

ottenuta imponendo la condizione di Cauchy nell'integrale generale, e vi passano anche tutte le soluzioni ottenute prolungando un tratto della funzione

[e] Vedi l'Esercizio 3.

identicamente nulla con l'arco di destra di una funzione della famiglia $y(t) = \frac{1}{18}(t^3+D)^2$:




⑤ Non abbiamo precedentemente risolto quest'equazione; ponendo $a(t) = 4t$ e $b(y) = \sqrt{y}$ osserviamo che $y(t) \equiv 0$ è soluzione, e separando le variabili otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int 4t\,\mathrm{d}t + C, \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{y} = 2t^2 + C,$$

esplicitandola rispetto a $y$ otteniamo (analogamente a quanto fatto per il punto ④ dell'esercizio precedente) $y(t) = (t^2 + D)^2$ con la condizione $t^2 + D \geq 0$; ponendo $y(1) = 9$ in $2\sqrt{y} = 2t^2 + C$, abbiamo

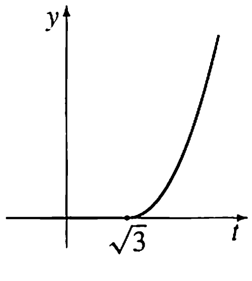
$$2\sqrt{9} = 2 \cdot 1^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 4;$$

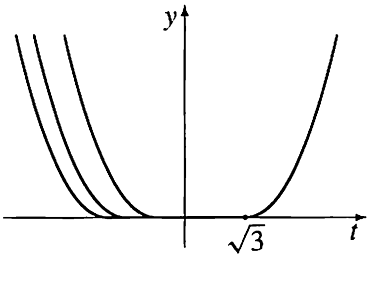
pertanto $y(t) = (t^2+2)^2$, definita su tutto $\mathbb{R}$ e su tutto $\mathbb{R}$ soluzione dell'equazione di partenza, infatti $t^2 + 2 > 0$ per ogni $t$, inoltre $t^2 + 2$ è crescente in $t > 0$ e decrescente in $t < 0$, in accordo con $y' = t\sqrt{y}$, in cui $y'$ deve avere lo stesso segno di $t$.

⑥ L'equazione è la stessa del punto precedente, imponendo $y(2) = 1$ troviamo

$$2\sqrt{1} = 2 \cdot 2^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -6;$$

da questa si ricava $y(t) = (t^2 - 3)^2$, la condizione $t^2 - 3 \geq 0$ impone $t \geq \sqrt{3}$. La soluzione è allora costituita dall'arco di funzione con $t \geq \sqrt{3}$, che non solo è prolungabile con la soluzione nulla (grafico a sinistra), ma anche ulteriormente prolungabile in $x < 0$ con un arco "sinistro" di una funzione della famiglia $y_K(t) = (t^2 - K)^2$ (grafico a destra):



## 6.1.2 Equazioni e sistemi lineari

### Esercizio 6.6 — La struttura della soluzione Il principio di sovrapposizione

*Sapendo che le seguenti equazioni ammettono come soluzioni le funzioni indicate a lato:*

$$ty'' + 2y' + ty = 2\cos t \qquad \textit{soluzioni:} \quad \begin{aligned} y_a(t) &= 3\tfrac{\sin t}{t} + \sin t \\ y_b(t) &= 2\tfrac{\cos t}{t} + \sin t, \end{aligned}$$

$$ty'' + 2y' + ty = 4\sin t \qquad \textit{soluzioni:} \quad \begin{aligned} y_c(t) &= \tfrac{\sin t}{t} + 2\cos t \\ y_d(t) &= 2\cos t, \end{aligned}$$

*scrivere l'integrale generale dell'equazione*

$$ty'' + 2y' + ty = 2\cos t + 4\sin t.$$

### Soluzione

Un'*equazione lineare* del second'ordine ha la forma

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t),$$

se $f(t) \equiv 0$ l'equazione è detta *omogenea*, altrimenti è detta *completa*. Per le equazioni lineari vale il *principio di sovrapposizione*: se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono soluzioni rispettivamente di

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t) \qquad \text{e} \qquad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_2(t),$$

allora $y_1(t) \pm y_2(t)$ è soluzione di

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f_1(t) \pm f_2(t).$$

In particolare:

- una combinazione lineare di due soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ di un'equazione omogenea
$$a(t)z'' + b(t)z' + c(t)z = 0$$
è ancora soluzione della stessa equazione, ed è l'integrale generale se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ sono linearmente indipendenti;
- la differenza di due soluzioni di una equazione completa dà una soluzione dell'equazione omogenea associata;
- la somma di una soluzione dell'equazione completa con una soluzione (l'integrale generale) dell'equazione omogenea associata dà ancora una soluzione dell'equazione completa (ovvero: la somma di una soluzione dell'equazione completa con l'integrale generale dell'equazione omogenea associata dà l'integrale generale dell'equazione completa).

Le tre equazioni differenziali del testo hanno la stessa equazione omogenea associata:

$$tz'' + 2z' + tz = 0,$$

mentre il "termine noto" $f(t)$ della terza equazione è la somma dei termini noti delle prime due. L'integrale generale della terza equazione sarà allora dato dalla somma di due soluzioni linearmente indipendenti $z_1(t)$ e $z_2(t)$ dell'equazione omogenea associata, più una soluzione $y_1^*(t)$ di $ty'' + 2y' + ty = 2\cos t$, più una soluzione $y_2^*(t)$ di $ty'' + 2y' + ty = 4\sin t$:

$$y(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + y_1^*(t) + y_2^*(t).$$

Possiamo ovviamente scegliere come $y_1^*$ una qualsiasi tra $y_a$ e $y_b$, allo stesso modo possiamo scegliere come $y_2^*$ una qualsiasi tra $y_c$ e $y_d$; per quanto riguarda le due soluzioni $z_1$ e $z_2$ dell'omogenea associata, sempre per il principio di sovrapposizione possiamo determinare $z_1$ calcolando la differenza tra $y_a$ e $y_b$ e determinare $z_2$ calcolando la differenza tra $y_c$ e $y_d$:

$$z_1(t) = y_a(t) - y_b(t) = \left(3\frac{\sin t}{t} + \sin t\right) - \left(2\frac{\cos t}{t} + \sin t\right) = 3\frac{\sin t}{t} - 2\frac{\cos t}{t},$$

$$z_2(t) = y_c(t) - y_d(t) = \left(\frac{\sin t}{t} + 2\cos t\right) - \left(2\cos t\right) = \frac{\sin t}{t};$$

l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà dato allora da tutte le combinazioni lineari di queste due funzioni, che possono essere espresse più semplicemente nella forma

$$z(t) = c_1\frac{\cos t}{t} + c_2\frac{\sin t}{t},$$

allo stesso modo, possiamo scegliere come soluzione della prima e della seconda equazione completa una funzione che sia "depurata" dalla parte dovuta all'equazione omogenea (anziché una a scelta tra quelle assegnate), ad esempio possiamo scegliere come soluzione della prima la funzione $y_1^*(t) = \sin t$, ottenuta da $y_a$ eliminando $3\frac{\sin t}{t}$ (che è soluzione dell'omogenea), come soluzione della seconda scegliamo $y_2^*(t) = 2\cos t$, ottenendo infine l'integrale generale

$$y(t) = c_1\frac{\cos t}{t} + c_2\frac{\sin t}{t} + \sin t + 2\cos t.$$

### Esercizio 6.7 — Equazioni a coefficienti costanti omogenee

*Determinare l'integrale generale di ciascuna delle equazioni seguenti:*

① $y'' + y' - 2y = 0$; ② $y'' - 6y' + 9y = 0$; ③ $y'' - y' = 0$;
④ $y'' + 4y = 0$; ⑤ $y'' + 4y' + 13y = 0$.

**Soluzione**

Data un'equazione a coefficienti costanti omogenea,

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

per scriverne l'integrale generale occorre determinare le radici del *polinomio caratteristico*, ossia del polinomio

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0;$$

a seconda del valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, si danno tre casi:

1) $\Delta > 0$, il polinomio ha due soluzioni reali e distinte $\lambda_1$ e $\lambda_2$, l'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = He^{\lambda_1 t} + Ke^{\lambda_2 t};$$

2) $\Delta = 0$, il polinomio ha una sola soluzione $\bar{\lambda}$, l'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = He^{\bar{\lambda} t} + Kte^{\bar{\lambda} t};$$

3) $\Delta < 0$, il polinomio ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda = \alpha \pm i\beta$, l'integrale generale dell'equazione è allora

$$y(t) = He^{\alpha t}\cos\beta t + Ke^{\alpha t}\sin\beta t = e^{\alpha t}\Big(H\cos\beta t + K\sin\beta t\Big).$$

① Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - 2$, che ha come radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, l'integrale generale è pertanto

$$y(t) = He^t + Ke^{-2t}.$$

② Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 6\lambda + 9$, che ha come unica radice $\lambda = 3$, l'integrale generale è pertanto

$$y(t) = He^{3t} + Kte^{3t} = e^{3t}(H + Kt).$$

③ Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \lambda$, che ha come radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, l'integrale generale è pertanto

$$y(t) = He^t + Ke^{0t} = He^t + K.$$

④ Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4$, che ha due radici immaginarie pure $\lambda = \pm 2i$, l'integrale generale è pertanto

$$y(t) = H\cos 2t + K\sin 2t.$$

⑤ Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4\lambda + 13$, che ha due radici complesse coniugate $\lambda = -2 \pm 3i$, l'integrale generale è pertanto

$$y(t) = He^{-2t}\cos 3t + Ke^{-2t}\sin 3t = e^{-2t}\Big(H\cos 3t + K\sin 3t\Big).$$

## Esercizio 6.8 — Equazioni a coefficienti costanti complete Metodo di somiglianza

*Determinare l'integrale generale di ciascuna delle equazioni seguenti:*

① $y'' + y' - 2y = 12 - 4t^2$; ② $y'' + y' - 2y = 12e^{-3t}$;

③ $y'' + y' - 2y = 12e^{-3t} - 4t^2 + 12$; ④ $y'' + y' - 2y = 10e^{-2t}$;

⑤ $y'' - 6y' + 9y = 10\sin(2t)$; ⑥ $y'' - 6y' + 9y = 8e^{3t}$;

⑦ $y'' - y' = 4t + 3 + 2\cos t$; ⑧ $y'' + 4y = \cos 2t$;

⑨ $y'' + 4y' + 13y = \sin 3t$.

### Soluzione

Data un'equazione completa $ay'' + by' + cy = f(t)$, l'integrale generale si scrive (grazie al principio di sovrapposizione) sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata una soluzione $y^*(t)$ dell'equazione completa. Il problema consiste nel determinare tale soluzione. In questo esercizio esamineremo il "metodo di somiglianza", utilizzabile nel caso in cui il termine noto $f(t)$ abbia una delle seguenti forme

1) $f(t)$ è un polinomio di grado $n$ ($f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$);
2) $f(t)$ è una funzione esponenziale ($f(t) = ae^{bt}$);
3a) $f(t)$ è una sinusoide ($f(t) = a\sin bt$);
3b) $f(t)$ è una cosinusoide ($f(t) = a\cos bt$);
4) $f(t)$ è somma di alcune delle precedenti.

Il metodo di somiglianza ha questo nome perché si cerca una soluzione $y^*(t)$ "simile" al termine noto, precisamente:

1) $y^*(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $f$:

$$y^*(t) = A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0,$$

*a meno che* $\lambda = 0$ non sia radice del polinomio caratteristico, in tal caso:
1.1) se $\lambda = 0$ è radice semplice del polinomio caratteristico, allora

$$y^*(t) = t(A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0),$$

1.2) se $\lambda = 0$ è radice doppia del polinomio caratteristico, allora

$$y^*(t) = t^2(A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0);$$

2) $y^*(t)$ è una funzione esponenziale con lo stesso esponente:

$$y^*(t) = Ae^{bt},$$

*a meno che* $\lambda = b$ non sia radice del polinomio caratteristico, in tal caso:
2.1) se $\lambda = b$ è radice semplice del polinomio caratteristico, allora

$$y^*(t) = Ate^{bt},$$

2.2) se $\lambda = b$ è radice doppia del polinomio caratteristico, allora

$$y^*(t) = At^2e^{bt};$$

3) $y^*(t)$ è una somma sinusoide–cosinusoide:

$$y^*(t) = A_1 \cos bt + A_2 \sin bt,$$

*a meno che* $\lambda = \pm ib$ non siano radici del polinomio caratteristico, in tal caso

$$3.1) \qquad y^*(t) = t(A_1 \cos bt + A_2 \sin bt);$$

4) $y^*(t)$ è somma delle corrispondenti $y^*$.

Osserviamo che $y^*$ non è ancora completamente determinata, occorre inserire questa funzione nell'equazione differenziale, ricavando un'identità che stabilisca i valori da assegnare agli $A_i$.

① Partendo dall'omogenea associata $y'' + y' - 2y = 0$, osserviamo che si tratta dell'equazione del punto ① del precedente esercizio e pertanto l'integrale generale dell'omogenea è $He^t + Ke^{-2t}$; il termine noto è un polinomio di secondo grado, pertanto $y^*(t) = A_2t^2 + A_1t + A_0$ per determinare i valori da attribuire a $A_0$, $A_1$ e $A_2$ imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza, poiché:

$$(y^*)' = 2A_2t + A_1, \qquad (y^*)'' = 2A_2,$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$(y^*)''+(y^*)'-2(y^*) = [2A_2]+[2A_2t+A_1]-2[A_2t^2+A_1t+A_0] \equiv 12-4t^2,$$

riordinando le potenze:

$$(-2A_2)t^2 + (2A_2 - 2A_1)t + (2A_2 + A_1 - 2A_0) \equiv 12 - 4t^2;$$

perché questa identità tra polinomi sia verificata devono essere ordinatamente uguali i coefficienti, pertanto

$$-2A_2 = -4, \qquad 2A_2 - 2A_1 = 0, \qquad 2A_2 + A_1 - 2A_0 = 12$$

da cui si ricava $A_2 = 2$, $A_1 = 2$, $A_0 = -3$; pertanto $y^*(t) = 2t^2 + 2t - 3$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^t + Ke^{-2t} + 2t^2 + 2t - 3.$$

② L'equazione omogenea è la stessa del punto precedente, occupiamoci del termine noto: dev'essere $y^*(t) = Ae^{-3t}$; per determinare $A$ imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza, poiché:

$$(y^*)' = -3Ae^{-3t}, \qquad (y^*)'' = 9Ae^{-3t},$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2(y^*) = [9Ae^{-3t}] + [-3Ae^{-3t}] - 2[Ae^{-3t}] \equiv 12e^{-3t},$$

raccogliendo $e^{-3t}$ abbiamo $4Ae^{-3t} = 12e^{-3t}$, da cui $A = 3$; pertanto $y^*(t) = 3e^{-3t}$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^t + Ke^{-2t} + 3e^{-3t}.$$

③ L'equazione è ancora la stessa del punto ①, osserviamo che il termine noto è la somma dei termini noti dei due punti precedenti, pertanto la corrispondente $y^*$ è la somma delle $y^*$ dei punti precedenti: $y^*(t) = 3e^{-3t} + 2t^2 + 2t - 3$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^t + Ke^{-2t} + 3e^{-3t} + 2t^2 + 2t - 3.$$

④ L'equazione è ancora la stessa del punto ①, questa volta al termine noto figura un esponente che *compare* già nell'integrale dell'omogenea (perché $\lambda = -2$ è radice semplice del polinomio caratteristico), $y^*$ ha allora la forma $y^*(t) = Ate^{-2t}$; come al solito per determinare $A$ imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza, poiché:

$$(y^*)' = Ae^t(1 - 2t), \qquad (y^*)'' = 4Ae^t(t - 1),$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2(y^*) = [4Ae^t(t - 1)] + [Ae^t(1 - 2t)] - 2[Ate^t] \equiv 10e^{-2t};$$

notiamo che i termini con $te^{-2t}$ si elidono, raccogliendo rimane $-5Ae^{-2t} = 10e^{-2t}$, da cui $A = -2$; pertanto $y^*(t) = -2te^{-2t}$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^t + Ke^{-2t} - 2te^{-2t}.$$

⑤ Sappiamo (punto ② dell'esercizio precedente) che l'integrale generale dell'equazione omogenea è $He^{3t} + Kte^{3t}$, siamo nel caso 3 e pertanto la soluzione particolare dev'essere $y^*(t) = A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t$, imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza per determinare $A_1$ e $A_2$, poiché:

$$(y^*)' = -2A_1 \sin 2t + 2A_2 \cos 2t, \qquad (y^*)'' = -4A_1 \cos 2t - 4A_2 \sin 2t = -4y^*$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}(y^*)'' - 6(y^*)' + 9(y^*) &= [-4A_1 \cos 2t - 4A_2 \sin 2t]\\ &\quad -6[-2A_1 \sin 2t + 2A_2 \cos 2t] + 9[A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t] \equiv 10 \sin 2t,\end{aligned}$$

raggruppando i termini simili, ci riportiamo all'equazione

$$(5A_1 - 12A_2)\cos 2t + (12A_1 + 5A_2)\sin 2t \equiv 10\sin 2t,$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 5A_1 - 12A_2 = 0 \\ 12A_1 + 5A_2 = 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{120}{169}, \; A_2 = \frac{50}{169};$$

pertanto $y^*(t) = \frac{120}{169}\cos(2t) + \frac{50}{169}\sin(2t)$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^{3t} + Kte^{3t} + \frac{120}{169}\cos(2t) + \frac{50}{169}\sin(2t).$$

⑥ L'equazione omogenea è la stessa del punto precedente, questa volta al termine noto figura un esponente che *compare* già (due volte) nell'integrale dell'omogenea (perché $\lambda = 3$ è radice doppia del polinomio caratteristico), $y^*$ ha allora la forma $y^*(t) = At^2e^{3t}$; come al solito per determinare $A$ imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza, poiché:

$$(y^*)' = Ae^{3t}(2t + 3t^2), \qquad (y^*)'' = Ae^{3t}(2 + 12t + 9t^2),$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}(y^*)'' - 6(y^*)' + 9(y^*) = {} & [Ae^{3t}(2 + 12t + 9t^2)] - 6[Ae^{3t}(2t + 3t^2)] \\ & + 9[At^2e^{3t}] \equiv 8e^{3t};\end{aligned}$$

notiamo che sia i termini con $te^{3t}$ sia i termini con $t^2e^{3t}$ si elidono, l'unico termine rimasto a primo membro è $2Ae^{3t}$, pertanto $A = 4$ e $y^*(t) = 4t^2e^{3t}$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^{3t} + Kte^{3t} + 4t^2e^{3t}.$$

⑦ Sappiamo (punto ③ dell'esercizio precedente) che l'integrale generale dell'equazione omogenea è $He^t + K$, il termine noto è la somma di un polinomio di primo grado con una sinusoide, poiché $\lambda = 0$ è radice del polinomio caratteristico la soluzione particolare dev'essere la somma di un polinomio di primo grado, moltiplicato per $t$: $t(A_1t + A_2) = A_1t^2 + A_2t$ con una coppia seno–coseno, quindi $y^*(t) = A_1t^2 + A_2t + A_3\cos t + A_4\sin t$. Al solito imponiamo che $y^*$ sia soluzione dell'equazione di partenza per determinare $A_1, \ldots, A_4$, poiché:

$$(y^*)' = 2A_1t + A_2 - A_3\sin t + A_4\cos t, \qquad (y^*)'' = 2A_1 - A_3\cos t - A_4\sin t,$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}(y^*)'' - (y^*)' = {} & [2A_1 - A_3\cos t - A_4\sin t] \\ & -[2A_1t + A_2 - A_3\sin t + A_4\cos t] \equiv 4t + 3 + 2\cos t,\end{aligned}$$

uguagliando i coefficienti dei termini simili si ricava che $A_1 = -2$, $A_2 = -7$ e $A_3 = A_4 = -1$; quindi $y^*(t) = -2t^2 - 7t - \cos t - \sin t$ e l'integrale generale è

$$y(t) = He^t + K - 2t^2 - 7t - \cos t - \sin t.$$

⑧ Sappiamo (punto ④ dell'esercizio precedente) che l'integrale generale dell'equazione omogenea è $H \cos 2t + K \sin 2t$; poiché $\lambda = \pm 2i$ sono le radici del polinomio caratteristico $y^*(t) = A_1 t \cos 2t + A_2 t \sin 2t$, poiché:

$$(y^*)'' = 4(A_2 - A_1 t) \cos 2t - 4(A_1 + A_2 t) \sin 2t,$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}(y^*)'' + 4(y^*) = {} & [4(A_2 - A_1 t) \cos 2t - 4(A_1 + A_2 t) \sin 2t] \\ & +4[A_1 t \cos 2t + A_2 t \sin 2t] \equiv \cos 2t;\end{aligned}$$

i termini in $t \cos 2t$ e $t \sin 2t$ si elidono, rimane

$$4A_2 \cos 2t - 4A_1 \sin 2t \equiv \cos 2t,$$

da cui $A_1 = 0$ e $A_2 = \frac{1}{4}$; pertanto $y^*(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t$ e l'integrale generale è

$$y(t) = H \cos 2t + K \sin 2t + \frac{1}{4} t \sin 2t.$$

⑨ Sappiamo (punto ⑤ dell'esercizio precedente) che l'integrale generale dell'equazione omogenea è $e^{-2t}\big(H \cos 3t + K \sin 3t\big)$, poiché $\lambda = \pm 3i$ non sono radici del polinomio caratteristico $y^*(t) = A_1 \cos 3t + A_2 \sin 3t$; poiché:

$$(y^*)' = -3A_1 \sin 3t + 3A_2 \cos 3t, \quad (y^*)'' = -9A_1 \cos 3t - 9A_2 \sin 3t = -9y^*,$$

scrivendo l'equazione con $y^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}(y^*)'' + 4(y^*)' + 13(y^*) = {} & [-9A_1 \cos 3t - 9A_2 \sin 3t] \\ & +4[-3A_1 \sin 3t + 3A_2 \cos 3t] + 13[A_1 \cos 3t + A_2 \sin 3t] \equiv \sin 3t;\end{aligned}$$

raggruppando i termini simili, ci riportiamo all'identità

$$(4A_1 + 12A_2) \cos 2t + (-12A_1 + 4A_2) \sin 2t \equiv 10 \sin 2t$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 4A_1 + 12A_2 = 0 \\ -12A_1 + 4A_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{3}{40}, \; A_2 = \frac{1}{40};$$

pertanto $y^*(t) = -\frac{3}{40} \cos(3t) + \frac{1}{40} \sin(3t)$ e l'integrale generale è

$$y(t) = e^{-2t}\Big(H \cos 3t + K \sin 3t\Big) - \frac{3}{40} \cos(3t) + \frac{1}{40} \sin(3t).$$

## Esercizio 6.9 — Equazioni di grado superiore al secondo

*Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:*

$$① \; y^{(IV)} - 16y = 0; \qquad ② \; y''' + y'' - y' - y = 8e^t + t - 2.$$

### Soluzione

Per costruire l'integrale generale di un'equazione di ordine maggiore di due, si segue la stessa procedura usata per le equazioni del second'ordine, anche un polinomio a coefficienti reali di grado maggiore di due, può avere solo soluzioni reali o complesse coniugate. Inoltre, anche il metodo di somiglianza è applicabile alla stessa maniera.

① Il polinomio caratteristico è $\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4)$, poiché

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2, -2, 2i, -2i,$$

l'integrale generale cercato è

$$y(t) = H_1 e^{2t} + H_2 e^{-2t} + H_3 \cos 2t + H_4 \sin 2t.$$

② Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$, poiché

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 1, -1, -1,$$

l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(t) = H_1 e^t + H_2 e^{-t} + H_3 t e^{-t};$$

usando il metodo di somiglianza, poiché $e^t$ è soluzione dell'equazione omogenea cerchiamo $y^*(t) = A_1 t e^t + A_2 t + A_3$, abbiamo

$$(y^*)' = e^t(A_1 + A_1 t) + A_2, \quad (y^*)'' = e^t(2A_1 + A_1 t), \quad (y^*)''' = e^t(3A_1 + A_1 t),$$

sostituendo nell'equazione, troviamo

$$e^t(3A_1 + A_1 t) + e^t(2A_1 + A_1 t) - [e^t(A_1 + A_1 t) + A_2] - [A_1 t e^t + A_2 t + A_3]$$
$$\equiv 8e^t + t - 2;$$

riordinando i termini simili, troviamo

$$4A_1 e^t - A_2 t - (A_2 + A_3) \equiv 8e^t + t - 2;$$

da cui $A_1 = 2$, $A_2 = -1$, $A_3 = 3$; pertanto $y^*(t) = 2te^t - t - 1$ e l'integrale generale cercato è

$$y(t) = H_1 e^t + H_2 e^{-t} + H_3 t e^{-t} + 2te^t - t + 3.$$

## Esercizio 6.10 — Problemi di Cauchy per equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti

*Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\text{①}\ \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad ; \qquad \text{②}\ \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

### Soluzione

Per risolvere un problema di Cauchy per un'equazione del second'ordine, una volta trovato l'integrale generale (dipendente dalle due costanti arbitrarie $H$ e $K$), è sufficiente imporre le due condizioni per avere un sistema di due equazioni nelle due incognite $H$ e $K$, sistema che (necessariamente) ha una e una sola soluzione.

① L'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(t) = e^{-t}(H\cos t + K\sin t)$, e (derivando) abbiamo $y'(t) = e^{-t}((K-H)\cos t + (-H-K)\sin t)$, sostituendo abbiamo allora

$$\begin{cases} y(0) = H = 1 \\ y'(0) = K - H = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H = 1, K = 4,$$

pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = e^{-t}(\cos t + 4\sin t).$$

② L'integrale generale dell'equazione differenziale (costruito con il metodo di somiglianza a partire dall'integrale precedente) è $y(t) = e^{-t}(H\cos t + K\sin t) - 2e^{-t}$, e (derivando) abbiamo $y'(t) = e^{-t}((K-H)\cos t + (-H-K)\sin t) - 2e^{-t}$, sostituendo abbiamo allora

$$\begin{cases} y(0) = H + 2 = 1 \\ y'(0) = K - H - 2 = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H = -1, K = 4;$$

pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = e^{-t}(-\cos t + 4\sin t) + 2e^{-t}.$$

## Esercizio 6.11 — Problemi diversi riguardanti le equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti

*Data l'equazione differenziale* $y'' - y' - 2y = 10\sin t$,

① *determinarne le soluzioni limitate in* $[0, +\infty)$;
② *determinarne tutte le soluzioni limitate in* $(-\infty, +\infty)$;
③ *determinarne la soluzione limitata in* $[0, +\infty)$ *tale che* $y'''(0) = 1$.

### Soluzione

L'integrale generale dell'equazione del testo è

$$y(t) = He^{-t} + Ke^{2t} + \cos t - 3\sin t.$$

① Perché $y(t)$ sia limitata in $[0, +\infty)$, occorre che l'esponenziale con esponente positivo non influisca, questo si ottiene ponendo $K = 0$, l'equazione possiede allora infinite soluzioni limitate in $[0, +\infty)$, tutte della forma

$$y(t) = He^{-t} + \cos t - 3\sin t.$$

② Perché una soluzione sia limitata su tutto $\mathbb{R}$, è necessario che entrambi gli esponenziali scompaiano (ossia: $H = 0$ e $K = 0$), l'equazione possiede un'unica soluzione limitata su $\mathbb{R}$:

$$y(t) = \cos t - 3\sin t.$$

③ Tra le soluzioni trovate al punto ① , dobbiamo determinare quella che soddisfa alla condizione $y'''(0) = 1$, poiché $y'''(t) = -He^{-t} + \sin t + 3\cos t$, ricaviamo $H = 2$, la soluzione cercata è

$$y(t) = 2e^{-t} + \cos t - 3\sin t.$$

## Esercizio 6.12 — Corrispondenza tra equazioni lineari del second'ordine e sistemi lineari del prim'ordine

*Mostrare che l'equazione $ay'' + by' + cy = f(t)$ può essere trasformata in un sistema di due equazioni differenziali del prim'ordine della forma $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$.*

### Soluzione

Il sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1(t) \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2(t) \end{cases}$$

può essere scritto anche in forma vettoriale: posto

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

poiché il vettore derivato è il vettore delle derivate:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix},$$

abbiamo

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1(t) \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

ovverosia $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$.

Veniamo alla nostra equazione: poniamo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ (cioè: $y_1' = y_2$), allora possiamo scrivere le due equazioni,

$$y_1' = y_2, \qquad a y_2' + b y_2 + c y_1 = f(t),$$

queste, poste in forma normale, diventano:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{c}{a} y_1 - \dfrac{b}{a} y_2 + \dfrac{1}{a} f(t) \end{cases},$$

e cioè, posto

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a} f(t) \end{bmatrix},$$

il sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$.

### Esercizio 6.13 — Risoluzione dei sistemi omogenei del prim'ordine Autovalori e autovettori

*Determinare l'integrale generale dei seguenti sistemi lineari omogenei del prim'ordine:*

$$① \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 5y_2 \end{cases}; \qquad ③ \begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 \end{cases}$$

### Soluzione

Dato un sistema lineare di due equazioni

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

è possibile scriverne l'integrale generale calcolando autovalori e autovettori della matrice $A$. Si danno tre casi:

1) la matrice $A$ ha due autovalori reali e distinti, ciascuno con il proprio autovettore:

$$\lambda_1 \longleftrightarrow \mathbf{v}_1, \qquad \lambda_2 \longleftrightarrow \mathbf{v}_2;$$

2) la matrice $A$ ha un autovalore reale, di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1[f]:

$$\lambda \longleftrightarrow \mathbf{v};$$

[f] Se l'autovalore $\lambda$ fosse regolare, la matrice $A$ avrebbe necessariamente la forma (banale)

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

non consideriamo allora questa possibilità.

3) la matrice $A$ ha due autovalori complessi coniugati, ciascuno con il proprio autovettore (anche gli autovettori sono complessi coniugati):

$$\lambda_1 \longleftrightarrow \mathbf{v}_1, \qquad \lambda_2 \longleftrightarrow \mathbf{v}_2, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}.$$

L'integrale generale di un sistema omogeneo è dato dalla combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti: $\mathbf{y} = H\mathbf{y}_1 + K\mathbf{y}_2$, la natura di queste due soluzioni cambia a seconda della natura degli autovalori di $A$:

1) due soluzioni sono $\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$, l'integrale generale è allora
$$\mathbf{y} = H\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + K\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t};$$

2) se $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo a $\lambda$, è possibile determinare un vettore $\mathbf{w}$ tale che $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, due soluzioni sono $\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ e $\mathbf{y}_2 = (\mathbf{w} + t\mathbf{v})e^{\lambda t}$, l'integrale generale è allora
$$\mathbf{y} = e^{\lambda t}[H\mathbf{v} + K(\mathbf{w} + t\mathbf{v})];$$

3) preso uno degli autovalori (diciamo $\lambda_1$) con il relativo autovettore, due soluzioni sono[g] $\mathbf{y}_1 = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1\right)$ e $\mathbf{y}_2 = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1\right)$, abbiamo quindi:
$$\mathbf{y} = H\operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1\right) + K\operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1\right).$$

Osserviamo inoltre che l'integrale generale del sistema può essere scritto anche in forma matriciale, come prodotto di una matrice formata dai due vettori soluzione, per il vettore delle costanti arbitrarie.

① In questo caso
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$
con qualche conto[h], si trova che
$$\lambda_1 = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \end{bmatrix},$$
entrambi gli autovalori sono reali, per comodità poniamo $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, e quindi l'integrale generale del sistema si può scrivere (in forma vettoriale e matriciale) come segue:
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Ke^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{2t} \\ e^{3t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix}.$$

[g] Ricordiamo che
$$\operatorname{Re}(e^{a+ib}) = e^a \cos b, \qquad \operatorname{Im}(e^{a+ib}) = e^a \sin b.$$

[h] Confronta il volume precedente, Esercizio 4.27 e seguenti.

② In questo caso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

è

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix},$$

poniamo allora per comodità $\alpha = 1$, dobbiamo determinare un vettore $\mathbf{w}$: il sistema $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$ è

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2w_1 + w_2 = 1 \\ -4w_1 + 2w_2 = 2 \end{cases}$$

le due equazioni sono linearmente dipendenti (anzi: proporzionali), possiamo assumere come soluzione $w_1 = 0$, $w_2 = 1$; pertanto

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e l'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= He^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + Ke^{3t} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 2e^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

③ In questo caso

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix},$$

con qualche conto[i], si trova che

$$\lambda_1 = -2 + 3i, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dfrac{4-3i}{5}\alpha \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 - 3i, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \dfrac{4+3i}{5}\beta \end{bmatrix},$$

prendiamo la coppia $\lambda_1$, $\mathbf{v}_1$ e scegliamo per comodità $\alpha = 5$, allora

$$\begin{aligned} e^{(-2+3i)t} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 - 3i \end{bmatrix} &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 5(\cos 3t + i \sin 3t) \\ (4-3i)(\cos 3t + i \sin 3t) \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} (5\cos 3t) + i(5 \sin 3t) \\ (4\cos 3t + 3 \sin 3t) + i(4 \sin 3t - 3 \cos 3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[i]Confronta il volume precedente, Esercizio 4.33.

per cui

$$\operatorname{Re}\left(e^{(-2+3i)t}\begin{bmatrix}5\\4-3i\end{bmatrix}\right)=e^{-2t}\begin{bmatrix}5\cos 3t\\4\cos 3t+3\sin 3t\end{bmatrix},$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{(-2+3i)t}\begin{bmatrix}5\\4-3i\end{bmatrix}\right)=e^{-2t}\begin{bmatrix}5\sin 3t\\4\sin 3t-3\cos 3t\end{bmatrix},$$

e l'integrale generale è

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=He^{-2t}\begin{bmatrix}5\cos 3t\\4\cos 3t+3\sin 3t\end{bmatrix}+Ke^{-2t}\begin{bmatrix}5\sin 3t\\4\sin 3t-3\cos 3t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5e^{-2t}\cos 3t & 5e^{-2t}\sin 3t\\ e^{-2t}(4\cos 3t+3\sin 3t) & e^{-2t}(4\sin 3t-3\cos 3t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H\\K\end{bmatrix}.$$

### Esercizio 6.14 — Risoluzione dei sistemi lineari del prim'ordine Eliminazioni successive

*Determinare con il metodo delle eliminazioni successive l'integrale generale dei seguenti sistemi lineari del prim'ordine:*

$$① \begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases} ; \qquad ② \begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2e^{-2t} \end{cases}$$

**Soluzione**

Per determinare l'integrale generale di un sistema del prim'ordine, omogeneo o completo che sia, è possibile seguire anche un'altra strada, rispetto a quella del precedente esercizio: la illustriamo con i seguenti due esempi.

① Sostituiamo alla prima equazione la sua derivata:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = y_1' - 5y_2' \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases},$$

al posto di $y_2'$ scriviamo la sua espressione data dalla seconda equazione (poiché a questo punto la seconda equazione è stata "usata", riscriviamo al posto di essa la prima):

$$\begin{cases} y_1'' = y_1' - 5y_2' \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = y_1' - 5(4y_1 + 5y_2) \\ y_1' = y_1 - 5y_2 \end{cases},$$

dalla seconda equazione di quest'ultimo sistema ricaviamo l'espressione di $y_2$: $y_2 = -\frac{1}{5}(y_1' - y_1)$ e sostituiamola nella prima equazione al posto di $y_2$:

$$\begin{cases} y_1'' = y_1' - 5(4y_1 + 5y_2) \\ y_2 = -\dfrac{1}{5}(y_1' - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 6y_1' - 25y_1 \\ y_2 = -\dfrac{1}{5}(y_1' - y_1) \end{cases},$$

la prima delle due equazioni è ora un'equazione in $y_1$: $y_1'' - 6y_1' + 25y_1 = 0$, il cui integrale generale è

$$y_1(t) = e^{3t}(H\cos 4t + K\sin 4t),$$

e, dall'altra equazione otteniamo l'espressione di $y_2$:

$$y_2(t) = -\frac{1}{5}(y_1' - y_1) = -\frac{1}{5}e^{3t}\left[(-2H - 4K)\cos 4t + (4H - 2K)\sin 4t\right].$$

L'integrale generale è allora, scritto in forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{3t}\begin{bmatrix} \cos 4t \\ \dfrac{4\sin 4t - 2\cos 4t}{5} \end{bmatrix} + Ke^{3t}\begin{bmatrix} \sin 4t \\ \dfrac{-4\cos 4t - 2\sin 4t}{5} \end{bmatrix}$$

e in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 4t & e^{3t}\sin 4t \\ \dfrac{e^{3t}(4\sin 4t - 2\cos 4t)}{5} & \dfrac{e^{3t}(-4\cos 4t - 2\sin 4t)}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix};$$

osserviamo che, per l'arbitrarietà delle costanti, è analogo moltiplicare per 5 entrambi i vettori che cosituiscono l'integrale generale:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{3t}\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 4\sin 4t - 2\cos 4t \end{bmatrix} + Ke^{3t}\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ -4\cos 4t - 2\sin 4t \end{bmatrix}$$

e anche

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{3t}\cos 4t & 5e^{3t}\sin 4t \\ e^{3t}(4\sin 4t - 2\cos 4t) & e^{3t}(-4\cos 4t - 2\sin 4t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix};$$

② Seguendo la stessa falsariga usata al punto precedente, deriviamo la prima equazione:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 3y_2' \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2e^{-2t} \end{cases}$$

al posto di $y_2'$ scriviamo la sua espressione data dalla seconda equazione, sostituendo a essa la prima:

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 3(2y_1 + y_2 + 2e^{-2t}) \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 6y_1 + 3y_2 + 6e^{-2t} \\ y_1' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases},$$

dalla seconda equazione, ricaviamo l'espressione di $y_2$: $y_2 = \frac{1}{3}(y_1' - 2y_1)$ e sostituiamola nella prima al posto di $y_2$:

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 6y_1 + 3\left(\dfrac{1}{3}(y_1' - 2y_1)\right) + 6e^{-2t} \\ y_2 = \dfrac{1}{3}(y_1' - 2y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 3y_1' + 4y_1 + 6e^{-2t} \\ y_2 = \dfrac{1}{3}(y_1' - 2y_1) \end{cases},$$

come nel caso precedente, abbiamo ricavato un'equazione in una sola incognita: $y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 6e^{-2t}$, il cui integrale generale è

$$y_1(t) = He^{-t} + Ke^{4t} + e^{-2t},$$

per determinare $y_2$, usiamo l'espressione ricavata dalla prima equazione:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{y_1' - 2y_1}{3} = \frac{(-He^{-t} + 4Ke^{4t} - 2e^{-2t}) - 2(He^{-t} + Ke^{4t} + e^{-2t})}{3} \\ &= -He^{-t} + \frac{2}{3}Ke^{4t} - \frac{4}{3}e^{-2t}, \end{aligned}$$

quindi l'integrale generale del sistema, in forma vettoriale, è:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Ke^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}e^{-2t}.$$

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & \dfrac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}e^{-2t}.$$

### Esercizio 6.15 — Problemi di Cauchy per sistemi di due equazioni del prim'ordine

*Risolvere il problema di Cauchy*

$$y_1(0) = 15, \qquad y_2(0) = 0,$$

*per entrambi i sistemi dell'esercizio precedente.*

#### Soluzione

Per risolvere un problema di Cauchy relativo a un sistema del prim'ordine, è sufficiente imporre le condizioni e ricavare da esse i valori delle costanti arbitrarie $H$ e $K$.

① Poiché l'integrale generale è

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{3t}\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 4\sin 4t - 2\cos 4t \end{bmatrix} + Ke^{3t}\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ -4\cos 4t - 2\sin 4t \end{bmatrix},$$

imponendo $t = 0$, troviamo

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} 5 \\ v-2 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5H+5K \\ -2H-4K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ v0 \end{bmatrix},$$

ossia il sistema

$$\begin{cases} H + K = 3 \\ H + 2K = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H = 6,\ K = -3;$$

pertanto la soluzione cercata è

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 30\cos 4t - 15\sin 4t \\ 30\sin 4t \end{bmatrix}.$$

② L'integrale generale è

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Ke^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}e^{-2t},$$

imponendo $t = 0$, troviamo

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H+K+1 \\ -H+2/3K-4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ossia il sistema

$$\begin{cases} H + K = 14 \\ 3H - 2K = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{24}{5},\ K = \frac{46}{5};$$

pertanto la soluzione cercata è

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{24}{5}e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{46}{5}e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \end{bmatrix}e^{-2t}.$$

### Esercizio 6.16 — Equazioni differenziali e serie di Fourier

*Sia $f(t)$ la funzione $2\pi$-periodica, dispari, tale che $f(t) = t(\pi - t)$ se $t \in [0, \pi]$, scrivere l'integrale generale dell'equazione:*

$$y'' + 2y = f(t).$$

### Soluzione

Sappiamo[j] che

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt, \qquad b_n = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n),$$

usiamo allora il principio di sovrapposizione: all'integrale generale dell'equazione omogenea sommeremo un integrale particolare $y^*(t)$ della forma

$$y^*(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin nt,$$

con gli $A_n$ da determinare (grazie al metodo di somiglianza).
L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(t) = H\cos(\sqrt{2}t) + K\sin(\sqrt{2}t),$$

per determinare $y^*(t)$, sostituiamolo nell'equazione differenziale, abbiamo

$$(y^*(t))'' = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 A_n \sin nt,$$

e quindi otteniamo l'identità

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 A_n \sin nt + 2\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin nt \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nt;$$

ossia, portando tutto a primo membro e raccogliendo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(2A_n - n^2 A_n - b_n)\sin nt \equiv 0;$$

affinché quest'identità sia verificata, occorre che tutti i coefficienti di $\sin nt$ si annullino, e quindi, per ogni $n$,

$$A_n = \frac{b_n}{2 - n^2} = \frac{4}{(2 - n^2)\pi n^3}(1 - (-1)^n);$$

[j]Confronta il punto ③ dell'Esercizio 1.18.

pertanto, l'integrale generale cercato è

$$y(t) = H\cos(\sqrt{2}t) + K\sin(\sqrt{2}t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2-n^2)\pi n^3}(1-(-1)^n)\sin nt.$$

Osserviamo che la funzione trovata è effettivamente una soluzione dell'equazione differenziale, infatti è possibile applicare il teorema di derivazione per serie due volte alla serie che definisce la $y(t)$.

## 6.2 Esercizi proposti

**18** Date le seguenti equazioni differenziali:

① $y' = \dfrac{2y}{t} + t^2$; ② $y' = y + e^t$;

③ $y' = 2e^t y + 4e^t$; ④ $y' = \dfrac{4ty}{t^2+1} + 6t$;

⑤ $y' = \dfrac{y\cos t}{3+\sin t} + \sin 2t$; ⑥ $y' = y\tan t + 3\cos^2 t$;

⑦ $y' = \dfrac{4ty}{t^2+1} + 2$; ⑧ $y' = \dfrac{y}{t\log t} + \log t$;

specificare per ciascuna dove (in base alla teoria) è possibile garantire esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$.

$$\left[① \begin{cases} t_0 > 0 & y(t) \text{ definita in } (0,+\infty) \\ t_0 < 0 & y(t) \text{ definita in } (-\infty,0) \end{cases}\right]$$

$$[② ③ ④ ⑤ ⑦ \ t \in \mathbb{R},\ y(t) \text{ definita in } \mathbb{R}]$$

$$\left[⑥ \ y(t) \text{ definita nell'intervallo } \left(-\frac{\pi}{2} + \bar{k}\pi, \frac{\pi}{2} + \bar{k}\pi\right), \text{ in cui è contenuto } t_0\right]$$

$$\left[⑧ \begin{cases} t_0 > 1 & y(t) \text{ definita in } (1,+\infty) \\ 0 < t_0 < 1 & y(t) \text{ definita in } (0,1) \end{cases}\right]$$

**19** Scrivere l'integrale generale delle equazioni differenziali dell'esercizio precedente.

$$[① \ y(t) = Ct^2 + t^3;\ ② \ y(t) = e^t(C+t)]$$

$$\left[③ \ y(t) = Ce^{2e^t} - 2;\ ④ \ y(t) = C(t^2+1)^2 - 3(1+t^2)\right]$$

$$[⑤ \ y(t) = (3+\sin t)(C + 2\sin t - 6\log(3+\sin t))]$$

$$\left[ ⑥\ y(t) = \frac{C + 3\sin t - \sin^3 t}{\cos t} \right]$$

$$\left[ ⑦\ y(t) = (t^2+1)^2(C + \arctan t) + t^3 + t;\ ⑧\ y(t) = (C+t)\log t \right]$$

**20** Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali, specificando l'insieme ove devono essere assunte le soluzioni:

① $y' = \dfrac{t^2}{y^2}$; ② $y' = \dfrac{3t^2}{y^3}$; ③ $y' = y^2 e^t$; ④ $y' = y^3 e^t$;

⑤ $y' = e^{t-y}$; ⑥ $y' = 1 + e^{-y}$; ⑦ $y' = 1 - e^{-y}$; ⑧ $y' = 2ty\log y$.

$$\left[ ①\ y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}\ (t^3 + C \neq 0);\ ②\ y(t) = \sqrt[4]{4t^3 + C}\ (4t^3 + C > 0) \right]$$

$$\left[ ③\ y(t) \equiv 0,\ y(t) = -\frac{1}{e^t + C}\ (e^t + C \neq 0) \right]$$

$$\left[ ④\ y(t) \equiv 0,\ y(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{e^t + C}}\ (e^t + C < 0) \right]$$

$$\left[ ⑤\ y(t) = \log(e^t + C)\ (e^t + C > 0);\ ⑥\ y(t) = \log(Ce^t - 1)\ (Ce^t - 1 > 0) \right]$$

$$\left[ ⑦\ y(t) \equiv 0,\ y(t) = \log(Ce^t + 1)\ (Ce^t + 1 > 0) \right]$$

$$\left[ ⑧\ y(t) \equiv 1,\ y(t) = e^{Ce^{t^2}}\ (C \neq 0) \right]$$

**21** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

① $y'' + 2y' - 3y = 0$; ② $y'' + 7y' + 10y = 0$; ③ $y'' + 2y' = 0$;

④ $y'' - 2y' + y = 0$; ⑤ $y'' + 8y' + 16y = 0$; ⑥ $y'' - 6y' + 10y = 0$;

⑦ $y'' + 2y' + 5y = 0$; ⑧ $y'' + 4y = 0$; ⑨ $y'' + 2y' + 4y = 0$

$$\left[ ①\ y(t) = He^t + Ke^{-3t};\ ②\ y(t) = He^{-5t} + Ke^{-2t} \right]$$

$$\left[ ③\ y(t) = H + Ke^{-2t};\ ④\ y(t) = e^t(H + Kt);\ ⑤\ y(t) = e^{-4t}(H + Kt) \right]$$

$$\left[ ⑥\ y(t) = e^{3t}(H\cos t + K\sin t);\ ⑦\ y(t) = e^{-t}(H\cos 2t + K\sin 2t) \right]$$

$$\left[ ⑧\ y(t) = H\cos 2t + K\sin 2t;\ ⑨\ y(t) = e^{-t}(H\cos\sqrt{3}t + K\sin\sqrt{3}t) \right]$$

**22** Determinare una soluzione $y^*(t)$ delle equazioni dell'esercizio precedente, qualora non siano omogenee, ma a secondo membro compaia la funzione $f(t)$, con

$$\text{i) } f(t) = t^2 - 2; \qquad \text{ii) } f(t) = e^t + \sin 2t.$$

$$\left[① \text{ i) } y^*(t) = -\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{4}{27}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{4}te^t - \frac{4}{65}\cos 2t - \frac{7}{65}\sin 2t\right]$$

$$\left[② \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{10}t^2 - \frac{7}{50}t - \frac{61}{500}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{18}e^t - \frac{7}{116}\cos 2t + \frac{3}{116}\sin 2t\right]$$

$$\left[③ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{4}t, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{8}(\cos 2t + \sin 2t)\right]$$

$$\left[④ \text{ i) } y^*(t) = t^2 + 4t + 4, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{4}{25}\cos 2t - \frac{3}{25}\sin 2t\right]$$

$$\left[⑤ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{16}t - \frac{13}{128}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{25}e^t - \frac{1}{25}\cos 2t + \frac{3}{100}\sin 2t\right]$$

$$\left[⑥ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{10}t^2 + \frac{3}{25}t - \frac{37}{250}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{15}\cos 2t + \frac{1}{30}\sin 2t\right]$$

$$\left[⑦ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{5}t^2 - \frac{4}{25}t - \frac{52}{125}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{8}e^t - \frac{4}{17}\cos 2t + \frac{1}{17}\sin 2t\right]$$

$$\left[⑧ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{8}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{4}t\cos 2t\right]$$

$$\left[⑨ \text{ i) } y^*(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}, \text{ ii) } y^*(t) = \frac{1}{7}e^t - \frac{1}{4}\cos 2t\right]$$

**23** Determinare l'integrale generale dei seguenti sistemi lineari:

$$① \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} y_1' = y_1 + 5y_2 \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 \end{cases};$$

$$③ \begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}; \qquad ④ \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 + t \end{cases};$$

$$⑤ \begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2 + \sin t \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 + \cos t \end{cases}; \qquad ⑥ \begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 + 5e^{-t} \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\left[① \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}\right]$$

$$\left[② \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{-t}\begin{bmatrix} 5\cos t \\ -2\cos t - \sin t \end{bmatrix} + Ke^{-t}\begin{bmatrix} 5\sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}\right]$$

$$\left[ ③ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Ke^{-2t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[ ④ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + Ke^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(t^2+t) \\ t^2-t-1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[ ⑤ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} -t \\ 2t+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t - 3\sin t \end{bmatrix} \right]$$

$$\left[ ⑥ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = He^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + Ke^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 2t-1 \\ -3t \end{bmatrix} \right]$$

ESERCIZI

Il volume raccoglie esercizi sugli argomenti che più sovente costituiscono il programma di un secondo corso di Analisi Matematica: funzioni di più variabili, integrazione multipla, curve e superfici, campi vettoriali, equazioni differenziali e serie di funzioni.

Come nel volume Analisi Matematica 1 e Algebra lineare, dello stesso autore, per ciascun argomento sono richiamati i più importanti aspetti teorici e inoltre ogni esercizio è completamente svolto. Alla fine di ogni capitolo è allegata una lista di esercizi, completi di risposta, ma senza soluzione per esteso, che possono costituire una verifica dell'apprendimento.

Questo libro è stato concepito come aiuto allo studio ed è destinato agli studenti che affrontano il secondo esame di Analisi Matematica.

**Marco Boella** è docente a contratto presso il Politecnico di Milano, insegna Analisi Matematica e Calcolo delle Probabilità e Statistica.

978-88-7192-453-3



PEARSON Education

€ 18,00

9 788871 924533