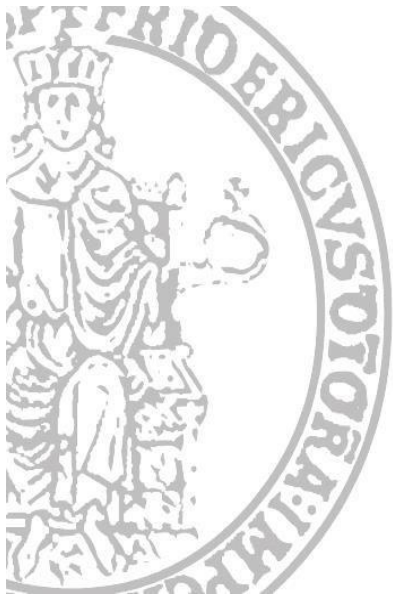


# FOTOGRAMMETRIA MONOSCOPICA



Dipartimento di  
Ingegneria Civile, Edile  
e Ambientale

Università degli Studi  
di Napoli Federico II

Tutor: Dott. Ing. Marco  
Limongiello



## METODI PER IL RILIEVO INDIRETTO

I *metodi indiretti* sono quelli nei quali l'operatore non interviene direttamente sul manufatto, ma ricorre all'uso di uno strumento azionato a distanza per le rilevazioni prefissate:

- *topografici*, sono quelli effettuati con l'ausilio di strumenti topografici. Nel rilevamento architettonico, più che come un vero e proprio metodo autonomo, deve essere considerato come complementare al metodo diretto. È tuttavia necessario quando si vuole collegare l'opera rilevata al suo ambito territoriale;
- *fotografici* effettuati con l'ausilio di fotocamere, ottiche o digitali, ed elaborazione delle immagini con software di gestione che consentono di ottenere delle immagini raddrizzate atte a tracciare direttamente grafici dell'oggetto rilevato;
- *fotogrammetrici*, sono quelli effettuati con speciali macchine da ripresa stereoscopiche, o bicamere e di strumenti restitutori che permettono di estrarre dai fotogrammi di presa informazioni atte a tracciare direttamente grafici dell'oggetto rilevato.

## IL RILIEVO FOTOGRAFICO

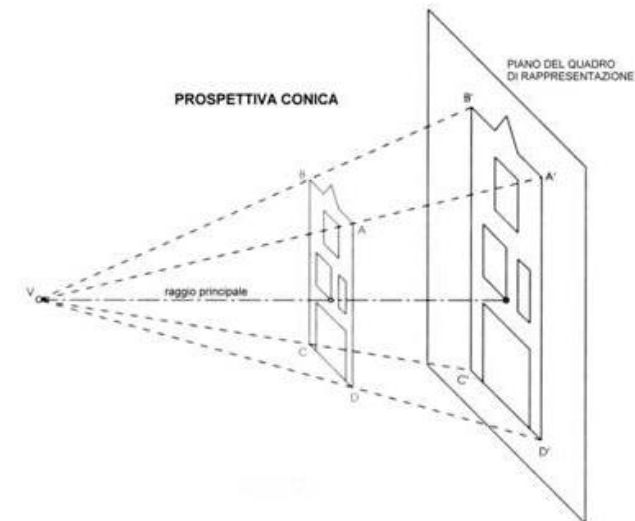
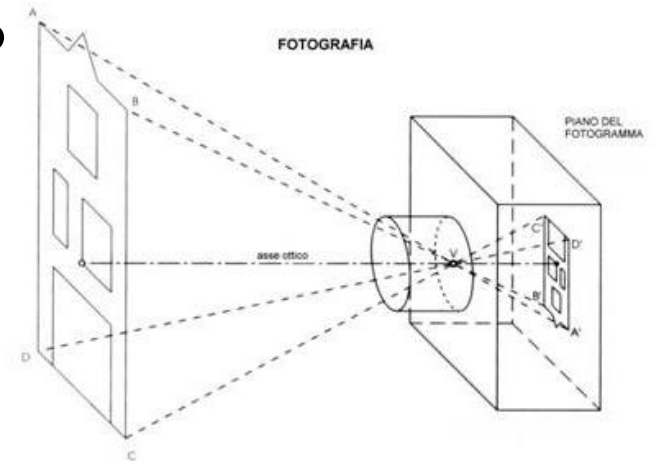
La fotografia riveste un ruolo fondamentale per il rilievo

- mezzo per disporre di un archivio o di un catalogo;
- documentazione complementare ai grafici di rilievo;
- strumento ausiliario nelle operazioni di rilievo;
- base per la fotogrammetria elementare

La fotografia ha gli stessi principi geometrici della prospettiva conica.

La fotografia è una vista prospettica della realtà.

Le innovazioni infografiche nel campo del rilievo stanno modificando le relazioni tra la presa dei dati e il relativo risultato grafico. Principale conseguenza di ciò è la diminuzione delle misure necessarie per effettuare un rilievo.





## METODI PER IL RILIEVO INDIRETTO

Questo in sintesi il rapporto che sussiste tra rilievo e fotografia:

- *geometria descrittiva*:  
consente il passaggio dalle proiezioni ortogonali alla prospettiva;
- *fotogrammetria elementare*:  
consente il passaggio dalla prospettiva (una fotografia) agli alzati.

Ne consegue la possibilità di *utilizzare la fotografia per il rilevamento grafico dei piani della facciate degli edifici*.



## FOTOGRAMMETRIA ARCHITETTONICA

Definiamo tutte le procedure che utilizzano immagini fotografiche per ricavarne dimensioni come *fotogrammetria*

La fotogrammetria si distingue in:

*fotogrammetria terrestre* per riprese dalla superficie del suolo;  
*fotogrammetria aerea* per riprese da piattaforma aerea.

Il rilievo fotogrammetrico viene utilizzato:

- per rilievi di elevata precisione;
- per recepire una grande quantità di informazioni;
- per rilievi di grandi dimensioni o in presenza di notevole complessità di forme architettoniche;
- nel rilievo urbano, per il rilievo di prospetti di edifici.

Il rilievo aerofotogrammetrico viene utilizzato per il rilievo delle coperture e di andamenti planimetrici.



# FOTOGRAMMETRIA MONOSCOPICA E STEREOSCOPICA

### *monoscopica:*

- la ripresa è da un solo punto di vista;
- si usa la monocamera (metrica o semimetrica);
- per restituire si usa una sola immagine fotografica;
- la restituzione è sul piano **bidimensionale**.

Viene utilizzata per: supporto al rilievo, proporzioni, degrado; restituzione prospettica e fotoraddrizzamento.

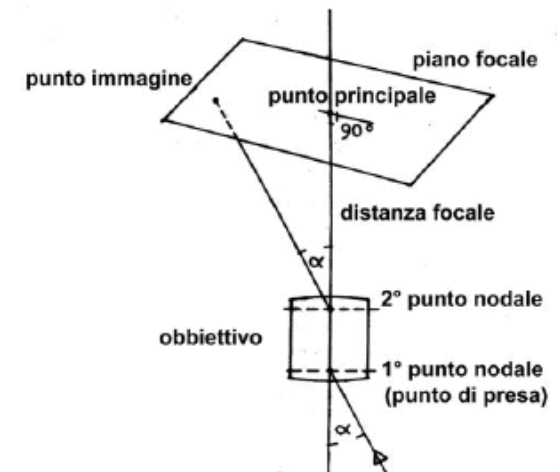
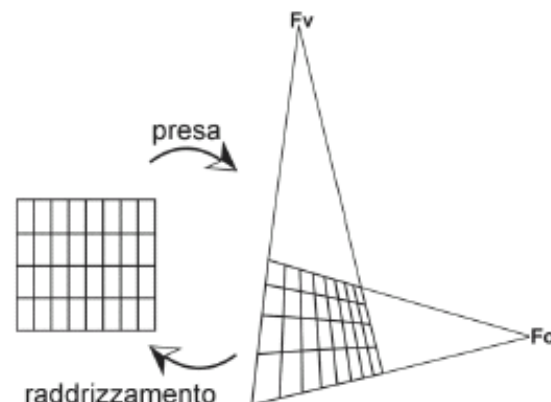
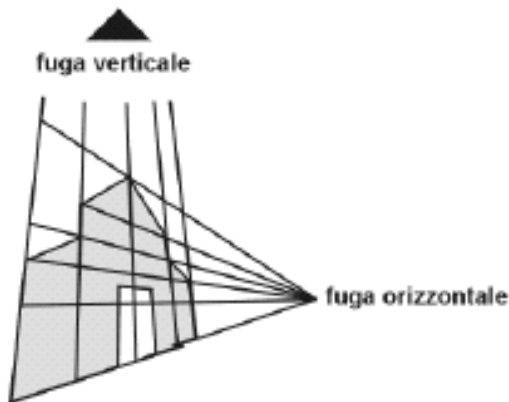
### *stereoscopica:*

- la ripresa è da due punti di vista;
- si usano le bicamere (metriche o semimetriche) o le camere da presa aerofotogrammetriche;
- per restituire ci si serve di una coppia di fotogrammi;
- la restituzione è **tridimensionale**.

# FOTOGRAMMETRIA MONOSCOPICA E STEREOSCOPICA

In entrambi i casi, ricavata l'orientazione interna del/i fotogramma/i (che si determina con procedimenti inversi alla prospettiva, essendo note alcune misure dell'elemento rilevate direttamente – in genere due misure angolari e una lineare), è possibile procedere alla restituzione.

Le fotografie utilizzate possono essere realizzate con camere metriche o semimetriche





## STEREOSCOPIA

Il processo fisiologico della visione si fonda sul fatto che i due occhi esplorano il campo visivo da due punti di vista diversi, dando luogo a due immagini leggermente differenti. Ciò dà luogo alla visione stereoscopica che consente di cogliere la profondità, bene avvertita da vicino, praticamente nulla quando la visione stereoscopica si trasforma in monoculare. All'infinito infatti i due raggi sono meno convergenti e la parallasse angolare è quasi nulla.

La percezione della profondità può verificarsi anche esaminando due fotografie scattate da un punto di vista leggermente diverso purché soddisfino le seguenti condizioni:

- gli assi di proiezione devono essere nello stesso piano;
- il rapporto tra la distanza dei due punti di vista e la distanza dall'oggetto deve essere 0,25 - 0,30;
- le immagini devono essere nella stessa scala.

In figura è indicata una modalità di realizzazione di presa stereoscopica che può avvenire basculando la camera non metrica senza necessità di spostarsi.





## STEREOSCOPIA

L'individuazione di un punto nello spazio è immediata se il punto appartiene a due fotogrammi.

Posizionando i due fotogrammi con lo stesso orientamento che avevano al momento della ripresa, ma ad una distanza ridotta (ad esempio  $1/10$ ), si ottiene un modello che può facilmente essere misurato.

Viene così ricreato un modello spaziale analogo al reale con due fotogrammi e una doppia piramide visiva.

La stereoscopia sfruttando il principio della parallasse consente di rilevare le misure di un oggetto attraverso due fotogrammi per poi operarne la restituzione.

L'analisi stereoscopica consente di arrivare alla percezione tridimensionale di un oggetto grazie alla visione binoculare; gli stereofotogrammi possono essere utilizzati sia per la restituzione che per ottenere un modello stereoscopico.

L'esplorazione visiva viene eseguita mediante uno strumento molto semplice che prende il nome di **stereoscopio**.

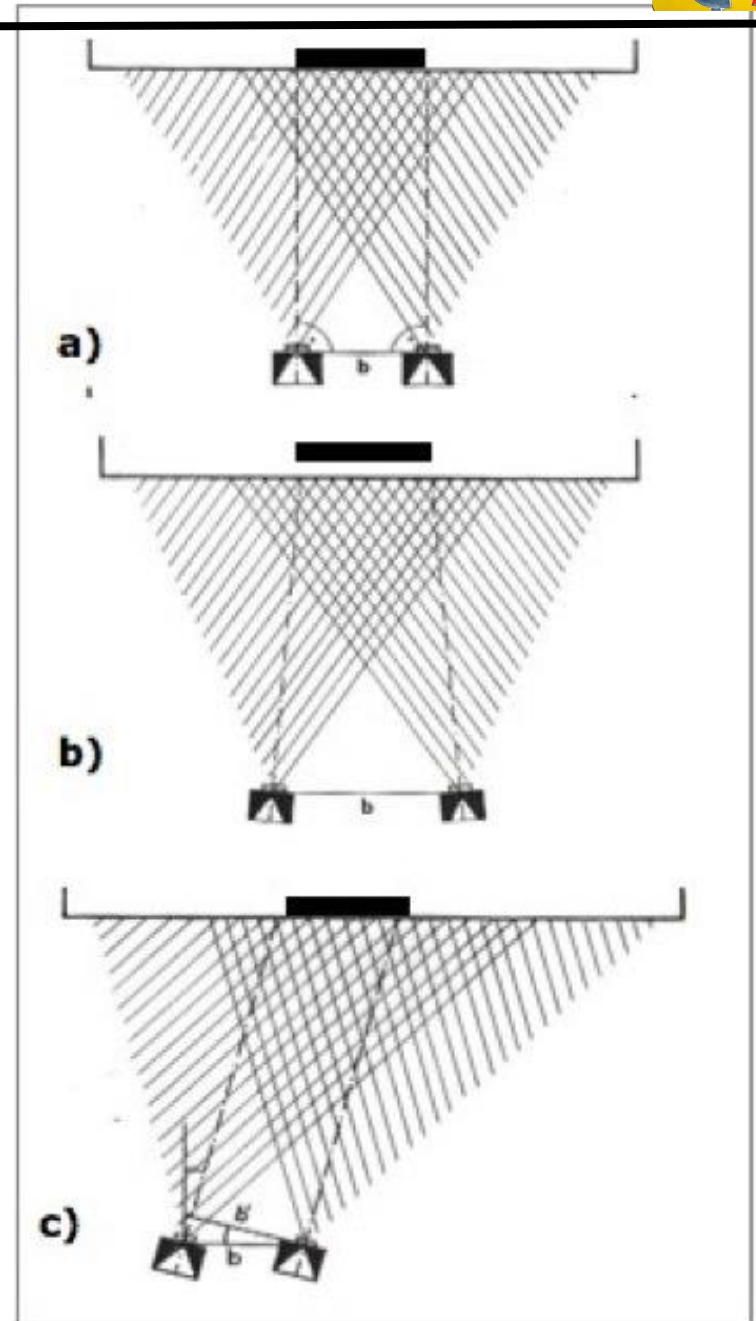
# STEREOSCOPIA

Gli strumenti per le riprese stereoscopiche sono le *bicamere*, strumenti formati da un treppiede sul quale è disposto un braccio di lunghezza circa 1,2 m alle cui estremità sono collocate due camere da presa per le quali è garantito:

- il parallelismo tra i due assi ottici;
- la perpendicolarità degli assi ottici rispetto alla base (restituzione analogica).

Poiché la posizione reciproca tra le due camere è fissa, nella restituzione, risulta facilitato il ripristino dell'orientamento relativo.

La messa in stazione è analoga a quella degli strumenti topografici.





## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Con il termine fotogrammetria s'intende l'insieme di tutti i procedimenti analitici, grafici e ottico-meccanici attraverso i quali, dato un sufficiente numero di fotografie di un oggetto prese da punti diversi, è possibile ricostruire l'oggetto o determinate sue proiezioni. Da un punto di vista della rappresentazione, la fotogrammetria è la tecnica che permette di passare da un tipo di figurazione legato alle singole immagini a elaborati metrici, o meglio, utilizzando la terminologia tecnica, da prospettive centrali a proiezioni ortogonali.

La principale distinzione che può essere operata all'interno della fotogrammetria si basa sulla distanza che separa l'oggetto dalla camera fotografica, ovvero la differenziazione tra fotogrammetria terrestre e quella aerea: la fotogrammetria terrestre viene identificata come "fotogrammetria dei vicini" o Close-Range e trova applicazioni oltre che per rilievi architettonici anche nella descrizione di oggetti, di alcuni fenomeni geomorfologici, o per esempio a livello industriale, nello studio delle deformazioni di provini sottoposti a sollecitazioni indotte a titolo sperimentale. Per fotogrammetria aerea si intendono acquisizioni fotografiche per produrre cartografie di qualsiasi tipo, da quelle generali e militari a piccola scala, a quelle di scala media fino alle carte tecniche a grande scala.



## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Per ricostruire la forma e la posizione degli oggetti a partire da semplici fotografie, si devono conoscere le relazioni geometriche in base a cui si formano le immagini. Le prese fotogrammetriche possono essere considerate delle prospettive centrali geometricamente rigorose dell'oggetto fotografato; in realtà in un sistema ottico complesso, quale un obiettivo fotografico, come vedremo successivamente, si tratta di un'approssimazione, in quanto non esiste un centro univoco.

Le relazioni fra coordinate  $x$  e  $y$  di un punto immagine  $P'$  e le  $XYZ$  del corrispondente punto oggetto  $P$  sono espresse dalle equazioni:

### EQUAZIONI DI COLLINAREITA'

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -c \cdot \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta x \\ y - y_0 &= -c \cdot \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta y \end{aligned} \quad (1)$$

$x, y$  coordinate del punto  $P$

$X, Y, Z$  coordinate del punto  $P'$

$c$  distanza focale

$x_0, y_0$  coordinate del punto principale

$\Delta x, \Delta y$  termini di correzione

$X_0, Y_0, Z_0$  coordinate del centro di proiezione  $O$

$r_{ij}$  elementi della matrice di rotazione generata dai tre angoli  $\omega \ \phi \ \gamma$

## LA PROSPETTIVA CENTRALE

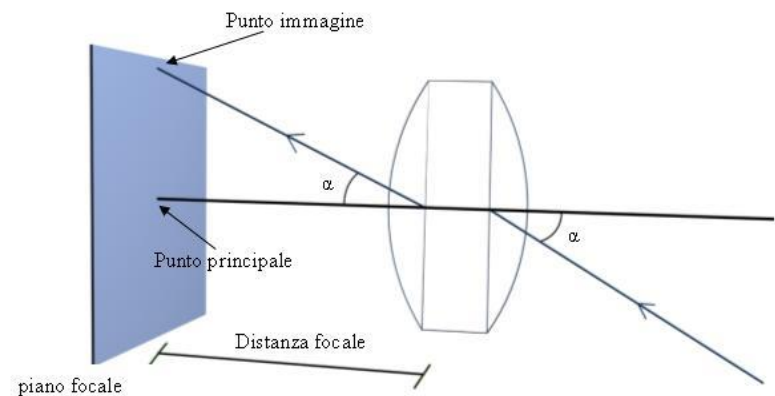
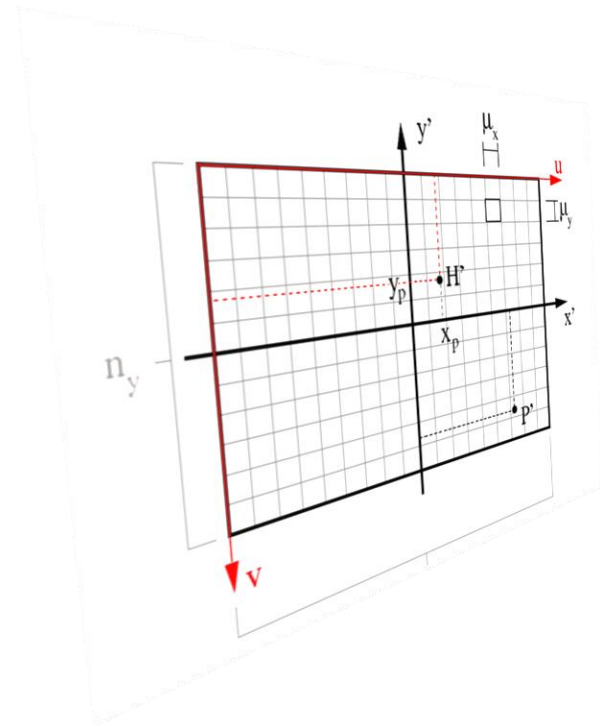
### Equazioni di Collinearità

$$x - x_0 = -c \cdot \frac{r_{11} (X - X_0) + r_{21} (Y - Y_0) + r_{31} (Z - Z_0)}{r_{13} (X - X_0) + r_{23} (Y - Y_0) + r_{33} (Z - Z_0)} + \Delta x$$

$$y - y_0 = -c \cdot \frac{r_{12} (X - X_0) + r_{22} (Y - Y_0) + r_{32} (Z - Z_0)}{r_{13} (X - X_0) + r_{23} (Y - Y_0) + r_{33} (Z - Z_0)} + \Delta y$$

dove:

$x, y$	... Coordinate immagini del punto $P'$
$X, Y, Z$	... Coordinate oggetto del punto $P$
$c$	... Distanza principale ( $\approx$ lunghezza focale)
$x_0, y_0$	... Coordinate immagini del punto principale $H'$
$\Delta x, \Delta y$	... Parametri aggiuntivi (distorsioni, ecc.)
$X_0, Y_0, Z_0$	... Coordinate del centro di proiezione $O'$
$R_{11}, R_{12}, \dots$	... Elementi della matrice di roto/traslazione





## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Se si esplicitano le equazioni di collinearità in funzione delle coordinate oggetto  $X$  e  $Y$  si ottengono le seguenti relazioni:

$$X = x_o + (Z - Z_0) \frac{r_{11}(X - x'_o) + r_{12}(Y - y'_o) - r_{13}c}{r_{31}(X - x'_o) + r_{32}(Y - y'_o) - r_{33}c} \quad (2)$$

$$Y = y_o + (Z - Z_0) \frac{r_{21}(X - x'_o) + r_{22}(Y - y'_o) - r_{23}c}{r_{31}(X - x'_o) + r_{32}(Y - y'_o) - r_{33}c}$$

Le equazioni (1) mostrano che ad ogni punto oggetto corrisponde un punto immagine. *Le equazioni (2) mostrano invece che a causa della presenza della  $Z$  al secondo membro, per ogni punto immagine vi sono infiniti possibili punti oggetto, risultando quindi impossibile ricostruire la geometria spaziale di un oggetto a partire da un solo fotogramma. È necessario disporre dunque, o di un secondo foto-gramma dello stesso oggetto, o di ulteriori informazioni sulle coordinate  $Z$  (per esempio l'appartenenza allo stesso piano, e quindi stessa profondità  $Z$  dalla camera, come avviene nel foto raddrizzamento).* La risoluzione di un sistema sotto determinato rappresentato dalle equazioni (1), richiede la conoscenza dei seguenti parametri: coordinate immagine del punto principale ( $x_o, y_o$ ) e la distanza principale ( $c$ ).





## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Questi tre parametri vengono definiti in letteratura come parametri di “orientamento interno” (O.I.) e definiscono la posizione del centro di proiezione relativamente al piano dell’immagine. La posizione della camera nello spazio ( $X_o$ ,  $Y_o$ ,  $Z_o$ ) e gli angoli di rotazione della camera ( $w_i$ ,  $y_i$ ,  $h_i$ ) vengono definiti come parametri di “orientamento esterno” (O.E.). Quest’ultimi definiscono la posizione e l’assetto della camera  $i$ -esima nel sistema di coordinate oggetto.

La definizione della prospettiva centrale rappresentata da un fotogramma richiede quindi in totale nove parametri (3 di O.I. e 6 di O.E.), che si possono determinare in modi diversi. I parametri di orientamento interno sono costanti, caratteristici della camera, e vengono forniti dal costruttore tramite misure di laboratorio, mentre per il calcolo dei parametri di orientamento esterno generalmente vengono determinati tramite l’ausilio di metodologie topografiche.

$$X = x_o + (Z - Z_o) \frac{r_{11}(X - x'_o) + r_{12}(Y - y'_o) - r_{13}c}{r_{31}(X - x'_o) + r_{32}(Y - y'_o) - r_{33}c} \quad (2)$$

$$Y = y_o + (Z - Z_o) \frac{r_{21}(X - x'_o) + r_{22}(Y - y'_o) - r_{23}c}{r_{31}(X - x'_o) + r_{32}(Y - y'_o) - r_{33}c}$$



# FOTOGRAMMETRIA MONOSCOPICA

Nel caso della **fotogrammetria monoscopica o non convenzionale**, lavorando su una singola presa, si può ottenere il raddrizzamento dell'immagine con *solo quattro punti di controllo (o di appoggio)*. A causa di una presunta semplicità operativa, nella maggiore parte dei casi ci si limita all'utilizzo di un programma di rettificazione lavorando con questo numero minimo di misure dirette.

L'impiego di solo quattro punti di appoggio (di solito corrispondenti alla misura dei due lati del rettangolo di calibrazione o della facciata), non consente di aver alcun tipo di controllo e di verifica sul risultato ottenuto. Inoltre, va considerato che spesso tali applicazioni digitali sono eseguite a valle di un semplicistico rilievo diretto – quasi mai strumentale –, quindi con una maggiore probabilità di errori grossolani. L'aggiunta di un quinto punto di controllo, permetterebbe di verificare, con migliori risultati, l'ordine di grandezza dell'errore commesso nel processo di rettificazione. Meglio sarebbe, poi, conoscere il numero di misure e quindi un numero di punti sull'immagine da rettificare, che consentirebbe un errore inferiore alla tolleranza associata alla scala di rappresentazione..





## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Diversi sono i metodi per ottenere una rettificazione fotografica, in particolare, quello analitico di seguito sviluppato – per così avere dati su cui successivamente applicare la teoria degli errori –, si fonda sulle trasformazioni bidimensionali proiettive, connesse alle equazioni di collinearità. Queste ultime esprimono matematicamente la condizione di appartenenza a una stessa retta: del generico punto oggetto  $P(X,Y,Z)$ , della sua immagine fotografica corrispondente  $p(x,y)$  e del centro prospettico della macchina fotografica. In geometria descrittiva ciò equivale a una delle due proprietà grafiche fondamentali dell'omologia piana: rette congiungenti punti corrispondenti convergono tutte in uno stesso punto (detto centro dell'omologia).

In particolare, nel caso in cui l'oggetto da rilevare sia piano, le equazioni che esprimono la relazione fra coordinate oggetto e coordinate immagine si sviluppano nel sistema (1) per la stima degli 8 parametri ( $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ ) della trasformazione, dove: i termini  $c_1$  e  $c_2$  esprimono la mancanza di parallelismo fra i due piani e sono nulli nel caso di trasformazione bidimensionale affine; le coordinate  $Z$ , invece, sono nulle o costanti, coincidendo con la quota del piano di proiezione (Buill, Núñez e Rodríguez, 2007).



## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Tale procedura si basa sul principio che la fotografia, dal punto di vista proiettivo è una proiezione centrale nella quale gli oggetti cambiano forma e dimensione in funzione della loro distanza dal centro di presa. Pertanto dal punto di vista analitico, stabilito il sistema di riferimento, le relazioni tra fotogramma e oggetto dipendono da 9 parametri che descrivono la posizione della lastra nello spazio (orientamento esterno) e le caratteristiche geometriche della camera (orientamento interno). Nel particolare caso in cui l'oggetto da rilevare sia un piano i parametri si riducono a otto. Indicati con:

$x_i$   $y_i$  coordinate immagine

$X_i$   $Y_i$  coordinate oggetto

$a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2$  gli 8 parametri di trasformazione

Le relazioni analitiche tra coordinate oggetto e coordinate immagine sono governate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} X &= x_o + (Z - Z_o) \frac{r_{11}(X-x'o)+r_{12}(Y-y'o)-r_{13}c}{r_{31}(X-x'o)+r_{32}(Y-y'o)+r_{33}c} \\ Y &= y_o + (Z - Z_o) \frac{r_{21}(X-x'o)+r_{22}(Y-y'o)-r_{23}c}{r_{31}(X-x'o)+r_{32}(Y-y'o)+r_{33}c} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{a_1x_1 + a_2y_1 + a_3}{c_1x_1 + c_2y_1 + 1} \\ Y_1 = \frac{b_1x_1 + b_2y_1 + b_3}{c_1x_1 + c_2y_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 - c_1x_1X_1 - c_2y_1X_1 = X_1 \\ b_1x_1 + b_2y_1 + b_3 - c_1x_1Y_1 - c_2y_1Y_1 = Y_1 \end{cases}$$



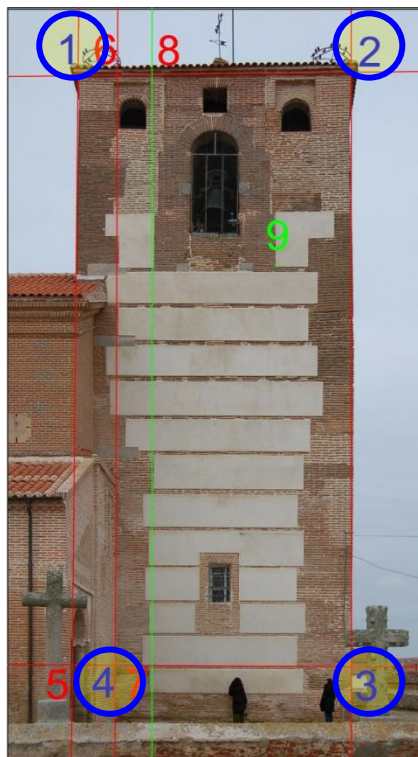
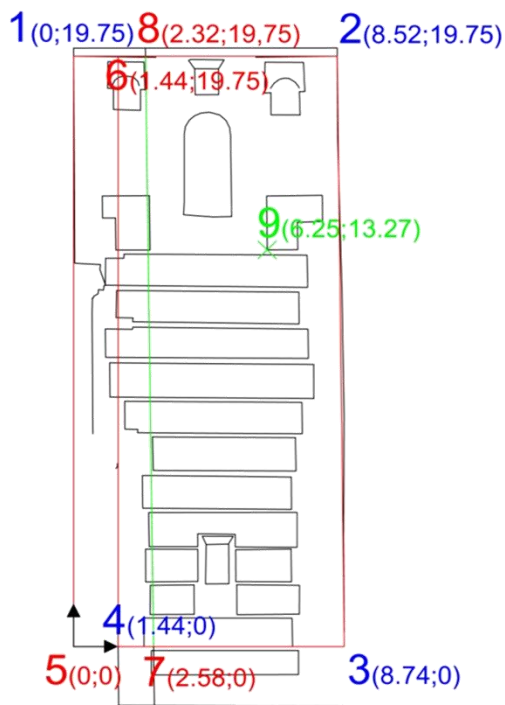
## LA PROSPETTIVA CENTRALE

Avendo a disposizione un minimo di quattro punti (di controllo) di cui siano note le coordinate immagine ( $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ ), misurate sul fotogramma, e le coordinate oggetto ( $X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; X_4, Y_4$ ), rilevate topograficamente, si possono determinare, attraverso un modello matematico di 8 equazioni chiamato “omografia”, gli otto coefficienti risolvendo il seguente sistema lineare di equazioni:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1} \\ Y_1 = \frac{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 - c_1 x_1 X_1 - c_2 y_1 X_1 = X_1 \\ b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 - c_1 x_1 Y_1 - c_2 y_1 Y_1 = Y_1 \end{cases}$$

Qualora i punti di controllo siano più di quattro, i parametri sono stimati con il metodo dei minimi quadrati ed è possibile determinare una compensazione delle coordinate.

## PROCEDURA ANALITICA



Parametri della trasformazione incogniti:

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 \rightarrow 8$

Forma matriciale:  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \Rightarrow \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}$

Relazione coordinate  
Oggetto-Immagine, nell'ipotesi di  
superficie di rilievo piana:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1} \\ Y_1 = \frac{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 - c_1 x_1 X_1 - c_2 y_1 X_1 = X_1 \\ b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 - c_1 x_1 Y_1 - c_2 y_1 Y_1 = Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot y_1 + a_3 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 - c_1 \cdot x_1 \cdot X_1 - c_2 \cdot y_1 \cdot X_1 &= X_1 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1 + b_3 \cdot 1 - c_1 \cdot x_1 \cdot Y_1 - c_2 \cdot y_1 \cdot Y_1 &= Y_1 \\ a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 - c_1 \cdot x_2 \cdot X_2 - c_2 \cdot y_2 \cdot X_2 &= X_2 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + b_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + b_3 \cdot 1 - c_1 \cdot x_2 \cdot Y_2 - c_2 \cdot y_2 \cdot Y_2 &= Y_2 \\ a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 - c_1 \cdot x_3 \cdot X_3 - c_2 \cdot y_3 \cdot X_3 &= X_3 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + b_1 \cdot x_3 + b_2 \cdot y_3 + b_3 \cdot 1 - c_1 \cdot x_3 \cdot Y_3 - c_2 \cdot y_3 \cdot Y_3 &= Y_3 \\ a_1 \cdot x_4 + a_2 \cdot y_4 + a_3 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 - c_1 \cdot x_4 \cdot X_4 - c_2 \cdot y_4 \cdot X_4 &= X_4 \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + b_1 \cdot x_4 + b_2 \cdot y_4 + b_3 \cdot 1 - c_1 \cdot x_4 \cdot Y_4 - c_2 \cdot y_4 \cdot Y_4 &= Y_4 \end{aligned}$$

## RETTIFICA CON 4 PUNTI

Matrice coefficienti delle incognite:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$c_1$	$c_2$
$a_1$	$x_1=353$	$y_1=348$	1	0	0	0	$-x_1X_1=0$	$-y_1Y_1=0$
$a_2$	0	0	0	$x_1=353$	$y_1=348$	1	$-x_1Y_1=-6972$	$-y_1X_1=-6873$
$a_3$	$x_2=1671$	$y_2=331$	1	0	0	0	$-x_2X_2=-14237$	$-y_2Y_2=-2820$
$b_1$	0	0	0	$x_2=1671$	$y_2=331$	1	$-x_2Y_2=-33002$	$-y_2X_2=-6537$
$b_2$	$x_3=1673$	$y_3=3312$	1	0	0	0	$-x_3X_3=-14622$	$-y_3Y_3=-28947$
$b_3$	0	0	0	$x_3=1673$	$y_3=3312$	1	$-x_3Y_3=0$	$-y_3X_3=0$
$c_1$	$x_4=531$	$y_4=2207$	1	0	0	0	$-x_4X_4=-765$	$-y_4Y_4=-3178$
$c_2$	0	0	0	$x_4=531$	$y_4=2207$	1	$-x_4Y_4=0$	$-y_4X_4=0$

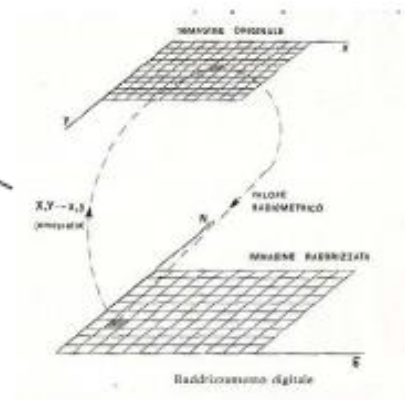
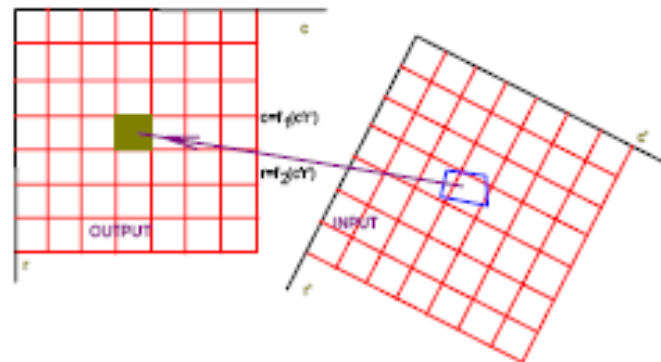
Vettore dei termini noti:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 19,75 \\ 8,52 \\ 19,75 \\ 8,74 \\ 0,00 \\ 1,44 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Vettore soluzioni:

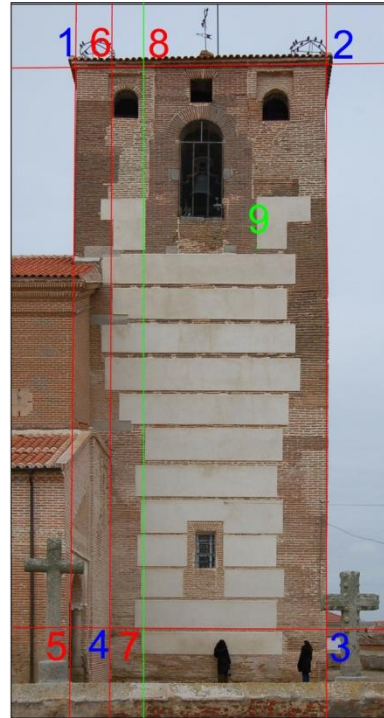
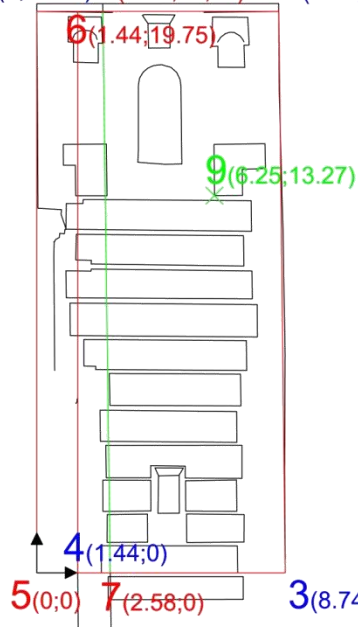
$$\underline{B} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{C} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,0140 \\ -0,0004 \\ -4,8263 \\ +0,0139 \\ -0,0144 \\ +24,4036 \\ +0,00007 \\ -0,0001 \end{bmatrix}$$

Per ogni pixel della foto →  
corrispondente coordinata oggetto



## STIMA AI MINIMI QUADRATI

1(0;19.75) 8(2.32;19.75) 2(8.52;19.75)



$$\begin{aligned} a_1 &= A_{0,1} + \delta a_1 \\ b_1 &= B_{0,1} + \delta b_1 \\ c_1 &= C_{0,1} + \delta c_1 \end{aligned}$$

Vettore correzioni  
incognite:  
( $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta b_1, \delta b_2, \delta b_3, \delta c_1, \delta c_2$ )

Valori di primo tentativo

Punti di controllo  $> 4$

→  $n^{\circ}$  equazioni  $> n^{\circ}$  incogn.  
 $n > m$

→ sistema iperdeterminato

$$\underline{A} \underline{B} = \underline{C} + \underline{v}$$

$$\sum_n (v_i)^2 = \min$$

$$x_1 \delta a_1 + y_1 \delta a_2 + \delta a_3 - x_1 X_1 \delta c_1 - y_1 X_1 \delta c_2 + s_{x,1} = v_1$$

$$x_1 \delta b_1 + y_1 \delta b_2 + \delta b_3 - x_1 Y_1 \delta c_1 - y_1 Y_1 \delta c_2 + s_{y,1} = v_2$$

.....



## STIMA AI MINIMI QUADRATI

Convenzionalmente, si assume il valore di  $0,2 \text{ mm} \times S$  (scala grafica) come grado di risoluzione assoluta; fattore questo determinante in ogni rappresentazione, sia vettoriale sia raster, in quanto tutti gli elementi che hanno dimensione inferiore al grado di risoluzione non potranno essere disegnati. In genere, però, per tener conto anche degli “errori di graficismo” si accetta una tolleranza dimensionale di  $\pm 0,3 \text{ mm}$ .

Ciò comporta che la dimensione minima rappresentabile sia di  $0,5 \text{ mm} \times S$  (interessa, evidentemente, il limite superiore), assunto come grado di risoluzione relativa.

Quest’ultimo valore sarà ipotizzato come tolleranza del fotopiano (variabile, quindi, in funzione della scala di restituzione); in base a ciò, e come conseguenza della teoria dei minimi quadrati, si escluderanno tutti i punti di appoggio i cui scarti supereranno in valore assoluto tale tolleranza.





## ERRORE MEDIO DELLA MEDIA DI UN FOTOPIANO

Lo scarto quadratico medio  $\mu$  rappresenta il grado di precisione (delle osservazioni); in letteratura è dimostrato che il 99,7% degli errori, ossia gli scarti dalla media, cadono nell'intervallo  $[-3\mu, +3\mu]$ .

Quindi:

$$T = \pm 3\mu$$

Imponiamo la tolleranza pari al grado di risoluzione relativo (dimensione minima rappresentabile):

$$\mu = \pm \frac{T}{3} = \pm \frac{0,5 \text{ mm} \times S}{3}$$

Errore medio della media  $\mu_m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}$

**Primo obiettivo:** valutare l'incertezza dei dati ottenuti e quindi la qualità degli elaborati grafici.

**Secondo obiettivo:** conoscere preventivamente il numero di misure da eseguire e quindi il numero di punti sull'immagine da rettificare, che consentirebbe un errore inferiore a un fissato  $\mu_m$ .





## ERRORE MEDIO DELLA MEDIA DI UN FOTOPIANO

Determinare una corrispondenza fra il numero delle osservazioni e il numero dei punti di appoggi.

I ipotesi (non verificata):

$$\mu_m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p-3}}$$

Il ipotesi (verificata): assumiamo il numero delle osservazioni come la combinazione semplice di classe 4 (punti di appoggio strettamente necessari per il raddrizzamento) dei  $p \geq 4$  punti di appoggio:

$$\mu_m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{C_{p,k}}} \quad \text{con:} \quad C_{p,k} = \frac{p!}{(p-k)!k!} \quad \text{(combinazione di classe } k \text{ dei } p \text{ elementi)}$$

Esempio: noti i valori delle coordinate di 5 punti (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**) ottenuti come misure dirette, andremo a considerare, per la teoria degli errori, la combinazione:

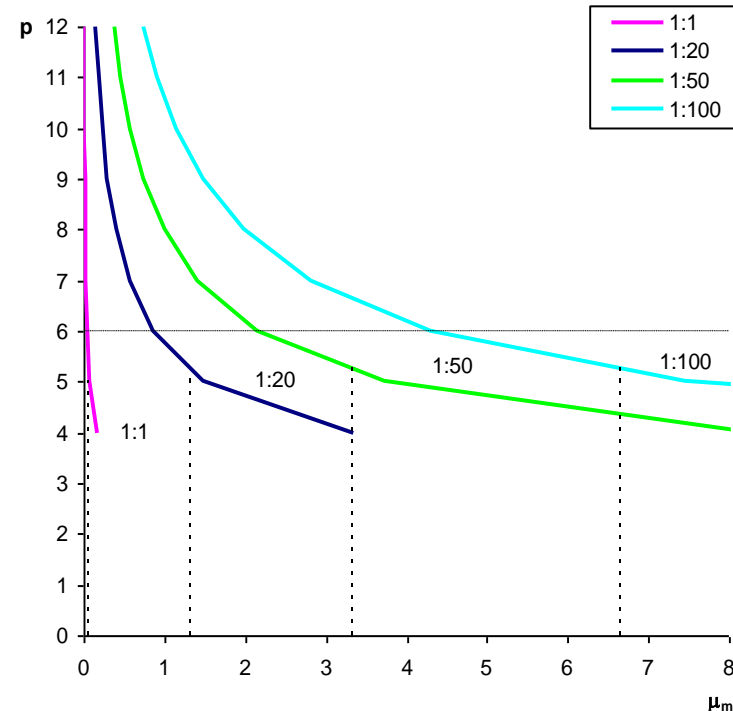
$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = 5$$

come il numero delle osservazioni effettuate, e corrispondenti ai raddrizzamenti eseguiti con l'impiego delle seguenti combinazioni di 4 punti di appoggio: (**A**, **B**, **C**, **D**); (**A**, **B**, **C**, **E**); (**A**, **B**, **E**, **D**); (**A**, **E**, **C**, **D**); (**E**, **B**, **C**, **D**).

## ERRORE MEDIO DELLA MEDIA DI UN FOTOPIANO

Tab. 1. Valori di  $\mu_m$  al variare del numero delle osservazioni.

p	C <sub>pk</sub>	$\mu_m$			
		1:1	1:20	1:50	1:100
4	1	0,167	3,333	8,333	16,667
5	5	0,075	1,491	3,727	7,454
6	15	0,043	0,861	2,152	4,303
7	35	0,028	0,563	1,409	2,817
8	70	0,020	0,398	0,996	1,992
9	126	0,015	0,297	0,742	1,485
10	210	0,012	0,230	0,575	1,150
11	330	0,009	0,183	0,459	0,917
12	495	0,007	0,150	0,375	0,749



Il grafico mostra il numero di punti di controllo necessari per determinati valori di  $\mu_m$  (supposto funzione del grado di risoluzione assoluto), al variare delle scale di rappresentazione.

Fissato un numero di punti di controllo: l'errore "tollerato" è maggiore al ridursi della scala. Fissata la scala: all'aumentare del numero dei punti di appoggio (p), diminuisce l'errore medio ( $\mu_m$ ).



## PROCEDURA GEOMETRICA

Tale procedura si basa sempre sul principio che una fotografia può essere approssimabile ad una prospettiva centrale, quindi tutti i segmenti verticali ed orizzontali di un oggetto in essa rappresentato appartengono a rette che convergono nei punti di fuga verticale ed orizzontale.

Preliminarmente i punti dei fotogrammi vengono definiti attraverso l'orientamento interno delle immagini in un sistema di riferimento piano detto “sistema immagine”. Individuando quindi nelle immagini tutte le rette che nella realtà sono verticali ed orizzontali, si possono ottenere le posizioni dei punti di fuga ed inserendo, successivamente, le dimensioni note di un segmento orizzontale e di uno verticale dell'oggetto, che permettono di definire il rapporto di scala in  $x$  ed  $y$ , si possono infine definire i punti dell'oggetto ripreso in un sistema di riferimento piano detto “sistema oggetto”



**PERSPECTIVERECTIFIER**  
**<http://www.rectifiersoft.com/>**

## RADDRIZZAMENTO GEOMETRICO

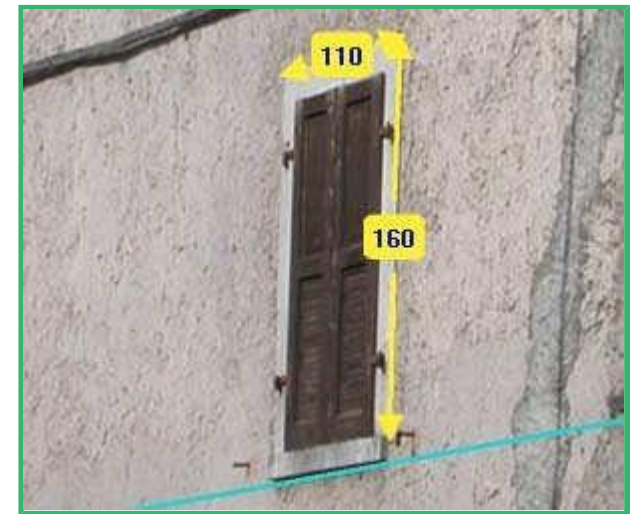


3

### Definire due assi verticali

- sul piano da raddrizzare
- sugli elementi geometrici della facciata che nella realtà sono verticali (qualora tali elementi non siano disponibili posizionare ad esempio due fili verticali con l'ausilio di un filo a piombo)

## RADDRIZZAMENTO GEOMETRICO



**Definire l'area di raddrizzamento (opzionale)**

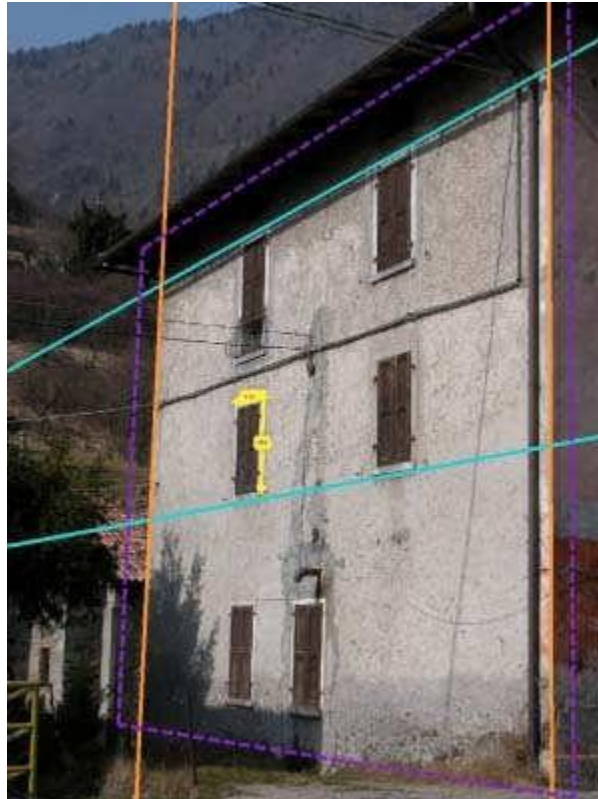
**4**

**Definire due misure**

- sul piano da raddrizzare
- le più lunghe
- indipendenti (ad esempio una orizzontale e una verticale)

## RADDRIZZAMENTO GEOMETRICO

5



6

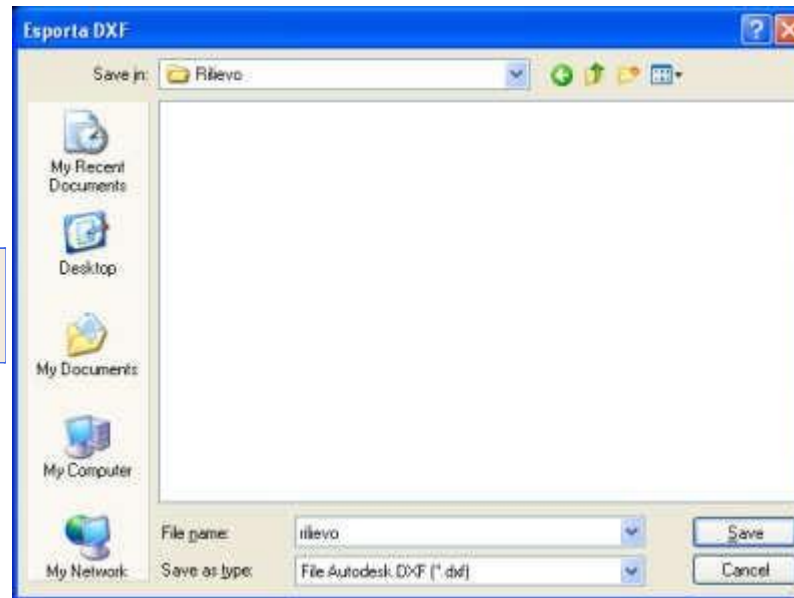
Raddrizzare l'immagine



## RADDRIZZAMENTO GEOMETRICO

7

**Esportare l'immagine raddrizzata e messa in scala**



8

**Importare l'immagine raddrizzata e messa in scala nel CAD**

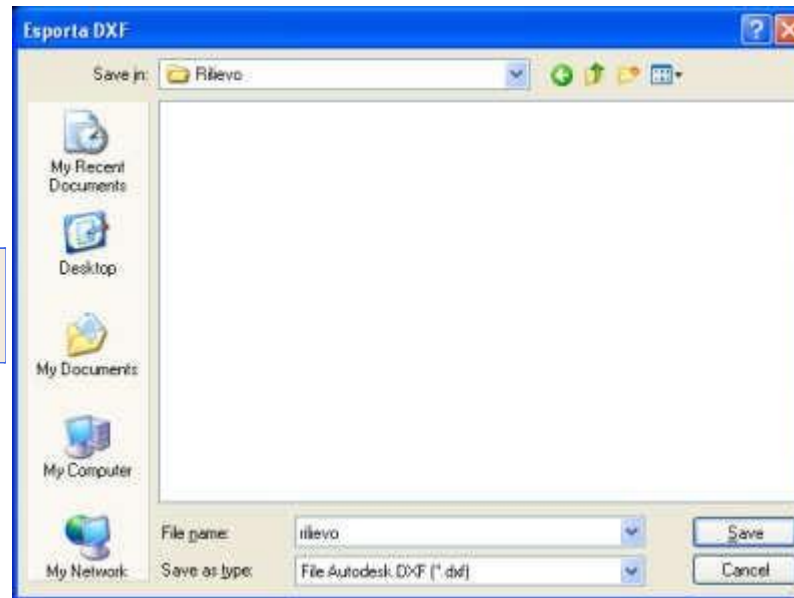
- completare il rilievo ricalcando l'immagine
- in presenza di aggetti o di rientranze disegnare all'attaccatura col piano raddrizzato



## RADDRIZZAMENTO GEOMETRICO

7

**Esportare l'immagine raddrizzata e messa in scala**

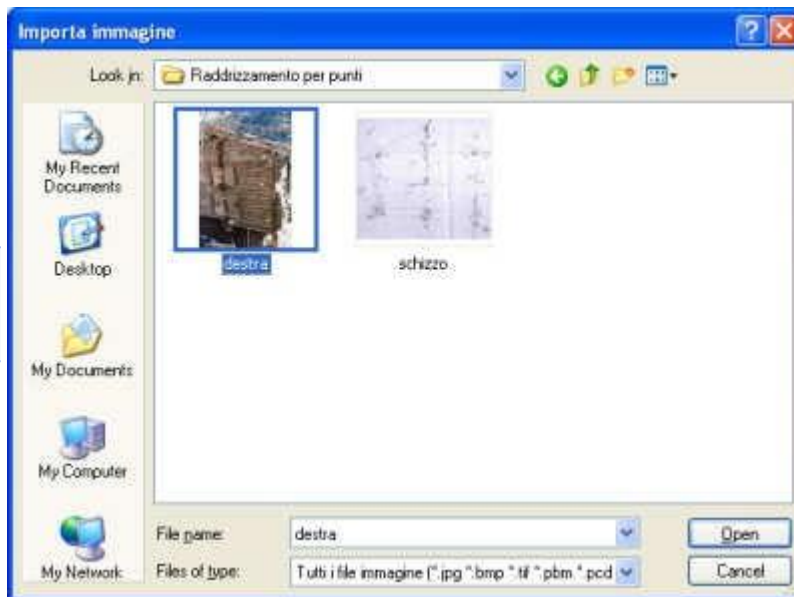
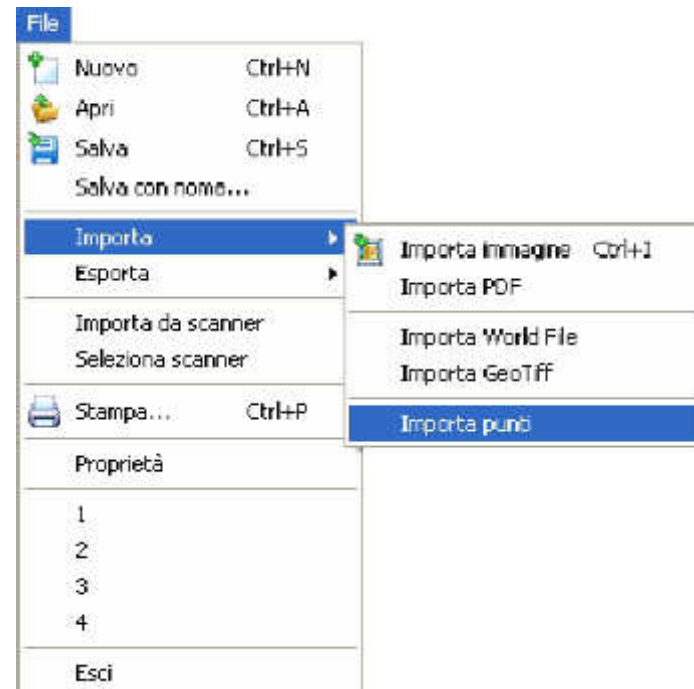


8

**Importare l'immagine raddrizzata e messa in scala nel CAD**

- completare il rilievo ricalcando l'immagine
- in presenza di aggetti o di rientranze disegnare all'attaccatura col piano raddrizzato

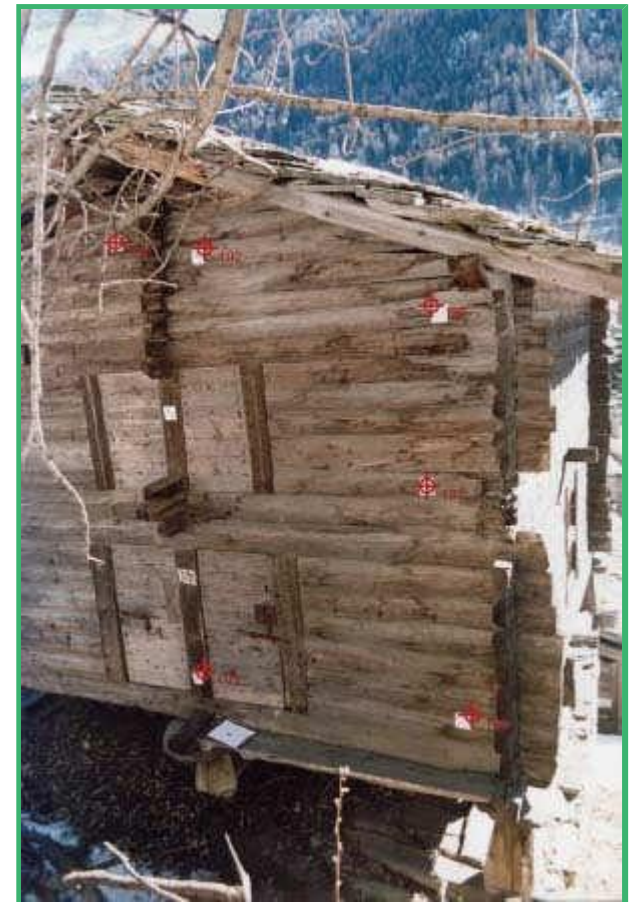
# RADDRIZZAMENTO ANALITICO

**1****Importare l'immagine da raddrizzare****2****Importare i punti rilevati con lo strumento topografico**

## RADDRIZZAMENTO ANALITICO

3

**Per almeno quattro punti definire la corrispondenza fra punto sull'immagine e punto rilevato con lo strumento topografico**



## RADDRIZZAMENTO ANALITICO

4

**Definire l'area di raddrizzamento (opzionale)**



## RADDRIZZAMENTO ANALITICO

5

**Raddrizzare l'immagine**



6

**Esportare l'immagine raddrizzata e messa in scala**

Si noti che esportando l'immagine viene proposto di esportare i punti utilizzati per il raddrizzamento. Selezionando o deselectando i punti desiderati è possibile aggiungere o togliere punti a quelli proposti, indipendentemente dal fatto che questi giacciono sul piano raddrizzato oppure siano in aggetto o in rientranza rispetto ad esso.







## MOSAICATURA

L'immagine ottenuta dopo il fotoraddrizzamento è detta **fotopiano** e si può definire come *immagine composta da fotografie che hanno subito un trattamento dal punto di vista geometrico per poter diventare delle proiezioni ortogonali ad una determinata scala ed essere perciò direttamente misurabili (dalla guida di RDF).*

Una volta ottenuti, i fotogrammi raddrizzati si possono unire in modo da ottenere un mosaico che costituisce la carta fotografica. L'obiettivo delle tecniche di **mosaicatura** digitale è di mantenere la precisione geometrica delle singole immagini generando un'unica immagine somma delle altre ed eliminando le differenze esistenti tra le immagini di partenza, dovute alla differente illuminazione in fase di presa o ad errori della scansione.

Dal punto di vista geometrico, generalmente si chiede che le due immagini di partenza abbiano lo stesso sistema di riferimento assoluto mentre è ovvio che più le immagini sono simili come tonalità, migliore sarà il risultato del procedimento.



In definitiva, nota la prospettiva ed i *procedimenti geometrici inversi* dalle foto è possibile ricavare le proiezioni ortogonali con le relative informazioni metriche.