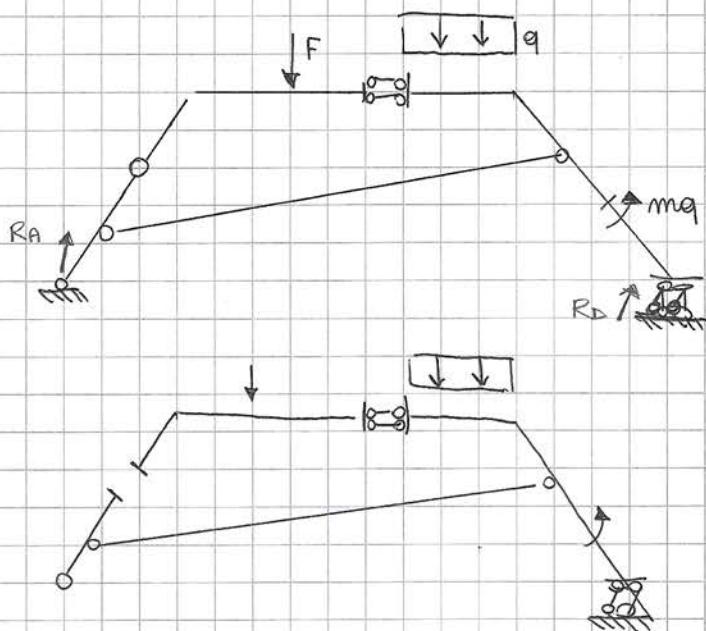
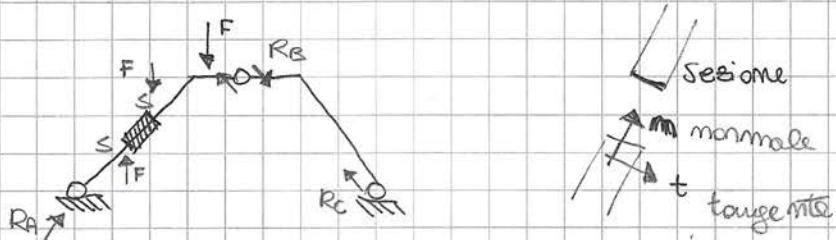


## CARATTERISTICHE DELLE SOLLECITAZIONI INTERNE



Scomponiamo la struttura tagliando una trave. Avremo diversi sforzi a seconda di quale lato guarderemo dai bordi tagliati.



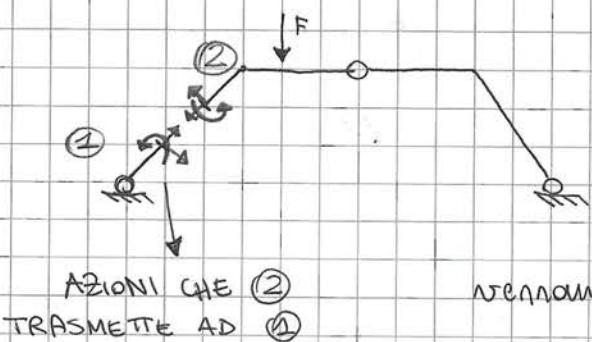
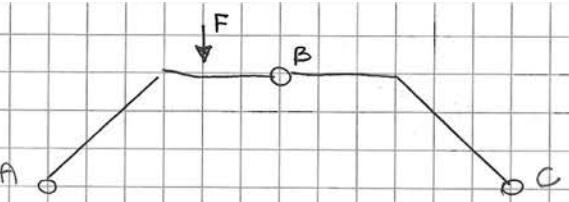
Avremo \$N\$ (sforzo normale) e \$T\$ (taglio). La risultante delle due forze sarà \$M\$ (Momento flettente)

Il momento flettente è dato da tutti i momenti generati da forze attive o reattive poste a destra o sinistra della sezione.

Quindi potremo calcolare il momento flettente tenendo conto delle forze \$R\_A\$ a sinistra o delle forze \$R\_B, F, R\_C\$ a destra.

Lo sforzo Normale in una sezione \$S\$ è dato da tutte le componenti lungo la normale alla sezione a destra o a sinistra.

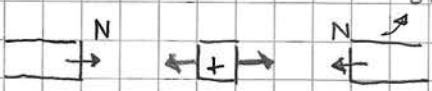
Il taglio nella sezione \$S\$ è dato dalle componenti lungo la retta tangente alla sezione delle reazioni attive e reattive a destra o sinistra.



Queste 2 punti saranno in

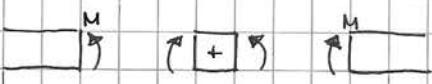
equilibrio se gli sforzi di una parte ( $N, M, T$ ) agiscono o vengono trasferiti all'altra.

PER STABILIRE IL SEGNO:



STA TIRANDO LA TRAVE

Sforzo normale (positivo quando di trazione)



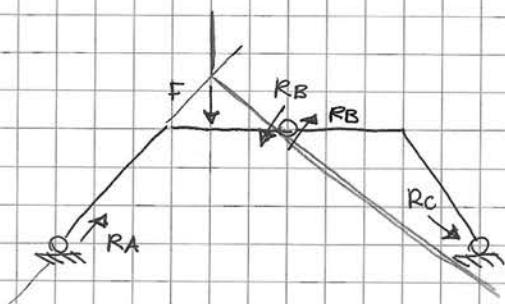
Momento flettente (positivo quando tensile le fibre inf)



~~Tagliio~~ Taglio (positivo se il taglio è rivolto verso dx)

Con queste grandezze potremo capire dove la struttura sarà maggiormente

sovraccaricata da forza e carichi



$$R_A + F + R_B = 0$$

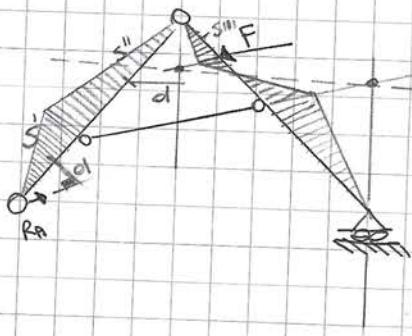
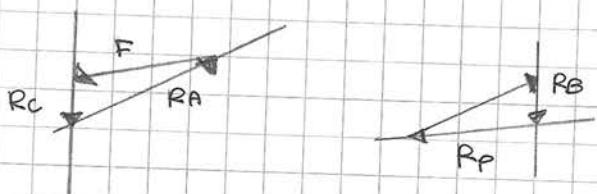
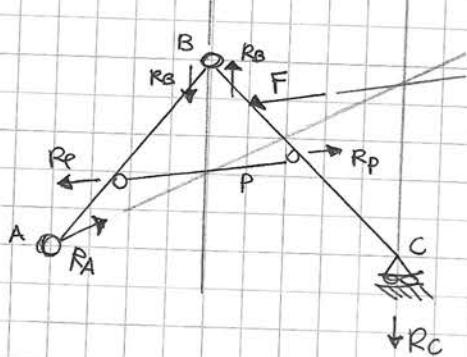
$$R_B + R_C = 0$$

$$R_A + \cancel{R_B} + R_C = 0$$

$$R_A + R_p + R_B = 0$$

$$R_B + R_p + R_C + F = 0$$

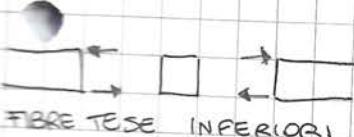
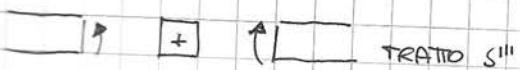
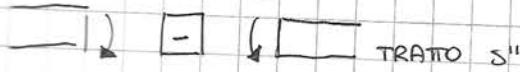
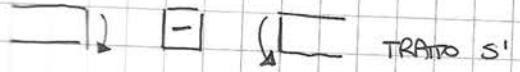
$$R_A + F + R_C = 0$$



Consideriamo le forze a sinistra ( $R_A$ )

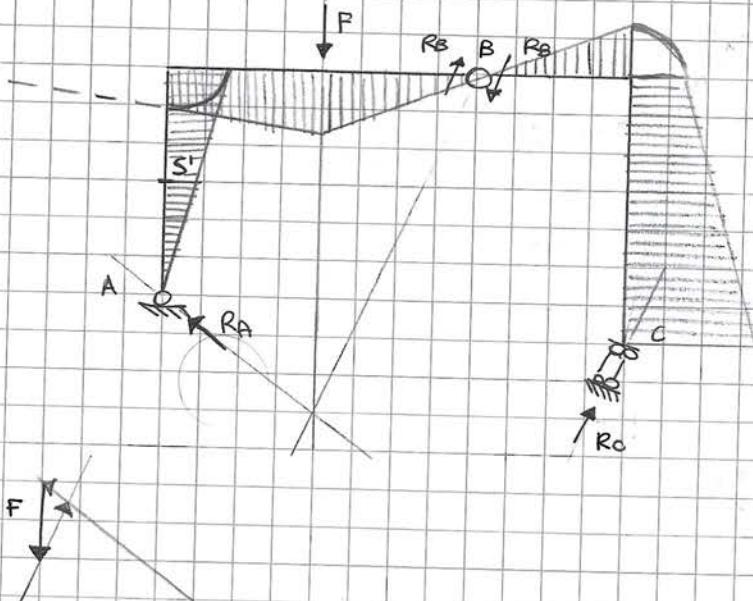
Momento plattante =  $R_A \cdot d$

quindi il diagramma del momento in A vale 0 e poi cresce di intensità.



LINEA TRATEGGIATA = retta auxiliaria  $(R_B + F)(R_p + R_C)$

Dove la retta auxiliaria interseca la trave avremo momento angolare nullo



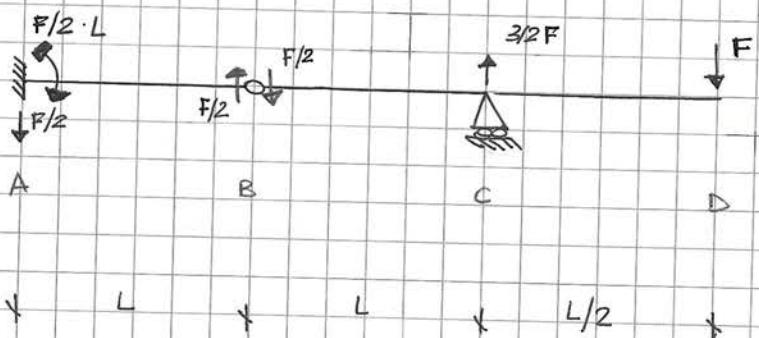
$$R_A + F + R_B = 0$$

$$R_B + R_C = 0$$

$$R_A + F + R_C = 0$$

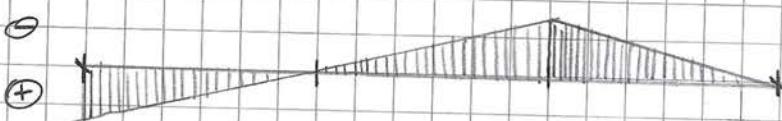
$$\square \uparrow + \uparrow \square$$

$$\square \uparrow + \uparrow \square$$



$$\sum M_A = 0 : -F \cdot L/2 + R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{F}{2}$$



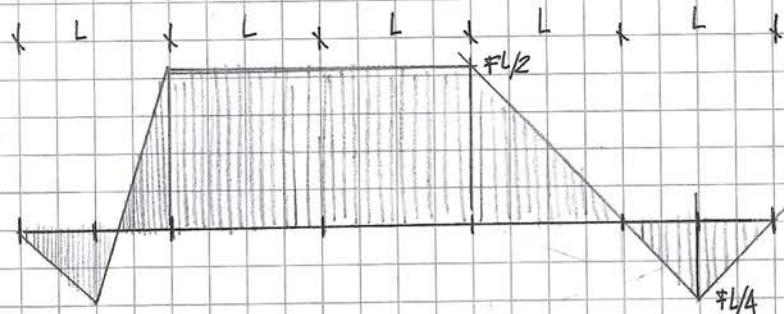
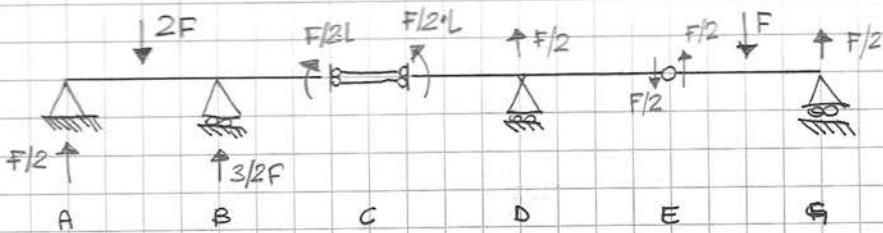
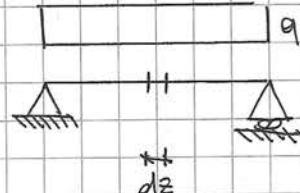
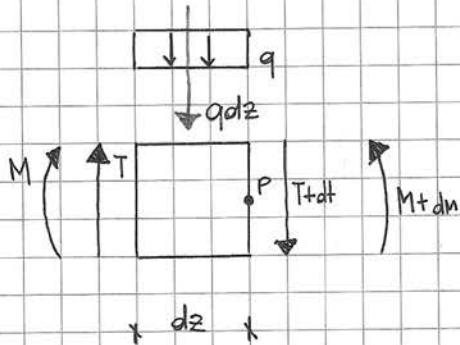


Diagramma del Momento



Supponiamo di avere taglio e momento a sinistra positivi e a destra  
avremo le stesse forze più un carico dx piccolo.

$$-T + qdz + T + dt = 0 \quad \text{Eq. alla traslazione verticale}$$

$$qdz = dt \rightarrow \frac{dt}{dz} = -q$$

Facciamo l'equilibrio del momento nel punto P.

$$-M - Tdz + (qdz) dz/2 + M + dM = 0$$

$$\frac{qdz^2}{2} - Tdz + dM = 0 \quad \text{Essendo } dz \text{ molto piccolo possiamo trascurarlo e}\\ \text{avremo:} \quad -Tdz + dM = 0$$

$$\frac{dM}{dz} = T$$

Scopriamo che la derivata del taglio ci dà il carico:

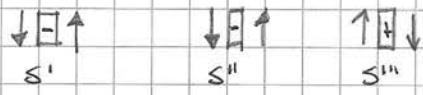
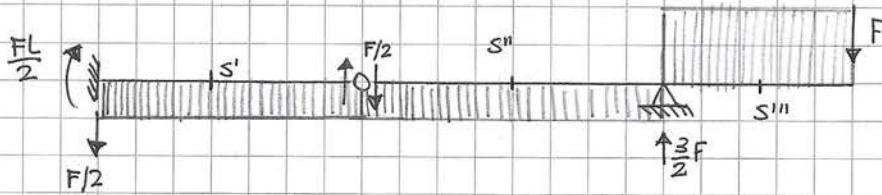
$$\frac{dT}{dz} = -q$$

e che la derivata del momento ci dà il taglio

$$\frac{dM}{dz} = T$$

da ciò possiamo anche dire che la derivata seconda del momento ci dà il carico

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q$$



Sapendo che  $\frac{dT}{dz} = -q$  e  $\frac{dM}{dz} = T$

dato che il carico su

$$\text{moltiplicando per } dz \text{ avremo } \frac{dT}{dz} dz = -q dz$$

questo corpo è o avremo

$$T(z) = \int -q dz$$

è integrale di 0  $\Rightarrow T(z) = \int_0^z 0 dz$  e quindi una funzione costante

$$T(z) = T_0$$

$$T_0 = \text{COSTANTE}$$

$$\int_0^z dM(z) = \int_0^z T(z) dz$$

$$M = \int_0^z T(z) dz$$

$$M(z) = \int_0^z T_0 dz$$

$$M(z) = T_0 z + M_0$$

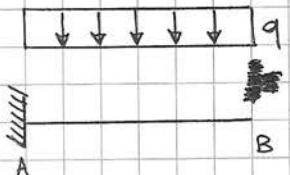
Nel punto dove c' applica la forza avremo momento

nulllo quindi  $M(e) = 0$  mentre il taglio

nell' incastro vale  $F$   $T(e) = +F$

$$M(e) = T_0 e + M_0 = 0 \Rightarrow T_0 e + M_0 = 0 \Rightarrow M_0 = -T_0 e$$

$$T(z) = F \quad M(z) = Fz - Fe = F(z - e)$$



$$\frac{dT}{dM} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T$$

$$T(z) = \int_0^z -q dz \Rightarrow T(z) = -qz + T_0$$

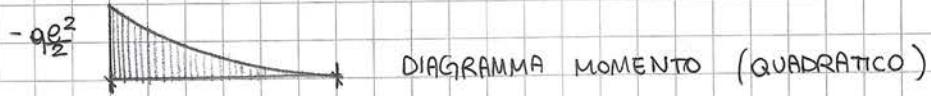
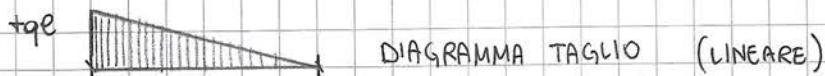
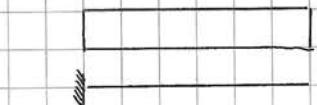
$$M(z) = \int_0^z T(z) dz \Rightarrow M(z) = \int_0^z (-qz + T_0) dz \Rightarrow M(z) = -q \frac{z^2}{2} + T_0 z + M_0$$

Sappiamo che in B c'è taglio e momento nullo

$$T(z=l) = 0 \Rightarrow -ql + T_0 = 0 \quad T_0 = ql$$

$$M(z=l) = 0 \Rightarrow -q \frac{l^2}{2} + T_0 l + M_0 = 0 \quad M_0 = -q \frac{l^2}{2}$$

$$T(z) = -qz + ql \quad M(z) = -q \frac{z^2}{2} + qlz - q \frac{l^2}{2}$$



$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T$$

$$T(z) = -qz + T_0$$

$$M(z) = -q \frac{z^2}{2} + T_0 z + M_0$$

Cosa conosciamo? il momento in A e B  
rimetta uguale a 0

$$M(z=0) = 0 \quad \downarrow \quad M(z=l) = 0$$

$$0 + 0 + M_0 = 0$$

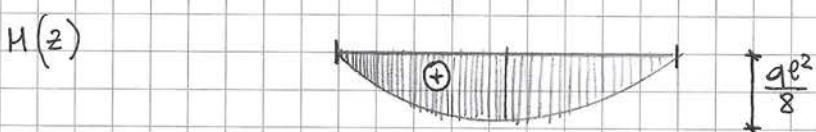
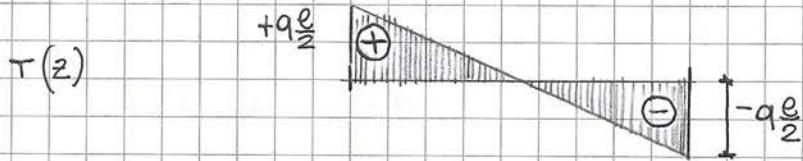
$$-q \frac{l^2}{2} + T_0 l + 0 = 0$$

$$T_0 = q \cdot \frac{l}{2}, \text{ così abbiamo trovato}$$

le due costanti  $M_0$  e  $T_0$

$$T(z) = -qz + q \frac{l}{2}$$

$$M(z) = -q \frac{z^2}{2} + q \frac{l}{2} z$$



la pendente del diagramma possiamo calcolare come  
Altezza/lunghezza.

$$\frac{q(l-z)}{2} / \frac{l}{2} = q$$

Si metta per costruzione grafica che la parabola passa sempre in mezzo ai due segmenti  $q(l-z)^2/4$

FIBRE INF.



$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = +m$$

$$T(z) = T_0$$

perché non abbiamo carichi distribuiti

$$M(z) = T_0 z + M_0$$

$$M(A) = 0 \quad M(B) = +m$$

$$M(z=0) = 0 \Rightarrow T_0 \cdot 0 + M_0 = 0 \Rightarrow M_0 = 0$$

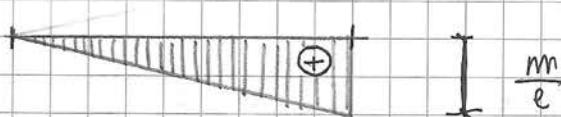
$$M(z=l) = m \Rightarrow T_0 \cdot l + 0 = m \Rightarrow T_0 = \frac{m}{l}$$

$$T(z) = \frac{m}{l} z \quad M(z) = \frac{m}{l} \cdot z^2$$

$$T(z)$$

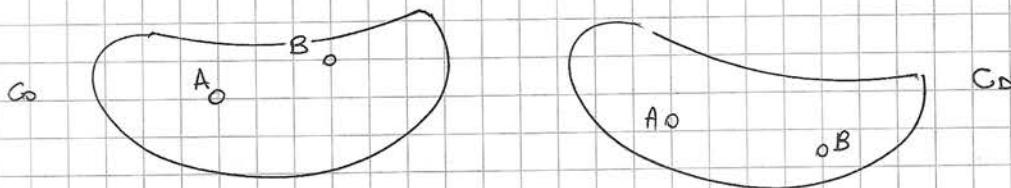


$$M(z)$$



## DEFORMAZIONI

Analizziamo le deformazioni di corpi qualsiasi. Ma cos'è la deformazione di un corpo? Può essere definita come variazione di configurazione.



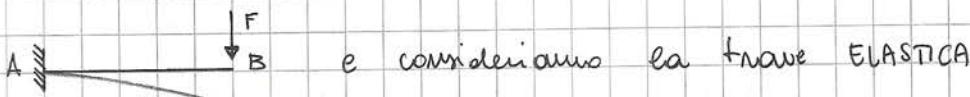
le mutue distanze tra i punti A e B variano e quindi sono affetti da dilatazione.

DEFORMAZIONE → Variazione di configurazione

**NON CONFONDERE**

SPOSTAMENTI → Variazione di Posizione

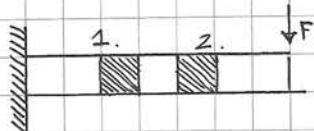
Prendiamo in esame una mensola:



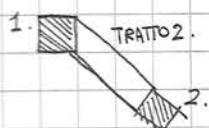
Avremo una variazione di forma simile (CONFIGURAZIONE)

Parlando degli SPOSTAMENTI, essi possono essere la somma di due atti di moto. TRASATORIO e ROTATORIO

Uniti a questi due possiamo anche avere spostamenti da deformazione pura.



Immaginiamo che le parti non compite siano di acciaio e quelle compite di gomma. Alla forza applicata avremo una deformazione simile di conseguenza se tratto 2 ha subito una rotazione



le cui componenti 2. subirà una deformazione anche esso che di conseguenza farà ruotare ancora il tratto

3. e anche traslare in giù

TRATTO 1.

TRATTO 2. ROTAZIONE

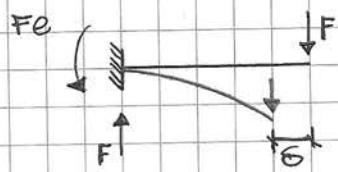
TRATTO 3. ROTAZIONE + TRASLAZIONE

CONCIO 1. SPOST = 0 ROT. = 0 DEFORMATO CONCIO 2. ROT + SPOST + DEFORMATA

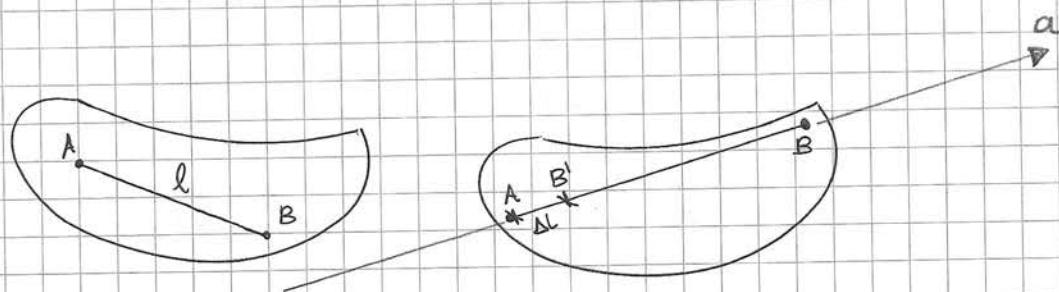
## IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI

Cosa intendiamo per piccolo? Considerando l'ordine di grandezza della nostra struttura avremo varie fasce di piccoli spostamenti.

Ad esempio in un punto uno spostamento di 1mm è piccolo.



se non considerassimo la ipotesi di piccoli spostamenti  
il momento non sarebbe più  $F_e \cdot l$  ma  $F \cdot (l - \delta)$



Supponiamo di avere questo segmento  $l$  che sono allungato nel corpo 2.  
le segmenti del corpo 2 è su una retta  $a$  e per individuare la  
deformazione ci serve il RAPPORTO DI AFFINITÀ ( $E_a$ )

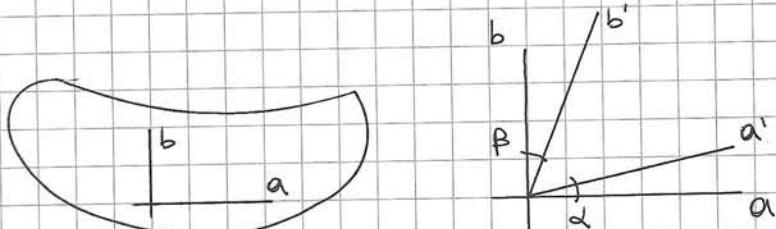
$$E_a = \Delta L / L$$

$$E_a = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{\Delta L}{L}$$

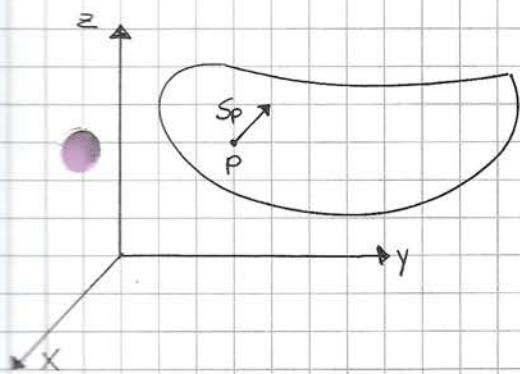
Ovviamente è un rapporto adimensionale avendo ad esempio  $m/m$

Ci avveranno anche DELL' IPOTESI DI PICCOLE DEFORMAZIONI

Quindi consideriamo piccole deformazioni quando ci troviamo con  $E$  uguale a  $1/100$  o  $1/1000$



$$\text{EFF. DI VARIAZIONE ANGOLARE} = \gamma_{\text{eff}} = \alpha + \beta$$



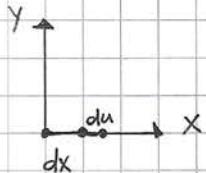
$$x = S_x = u$$

$$y = S_y = v$$

$$z = S_z = w$$

$$S_p (u, v, w)$$

### RELAZIONI TRA DEFORMAZIONI E SPOSTAMENTI



$$\epsilon_x = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\epsilon_y = \frac{dv}{dy}$$

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

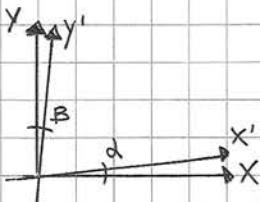
$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_u}{S_x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_v}{S_y}$$

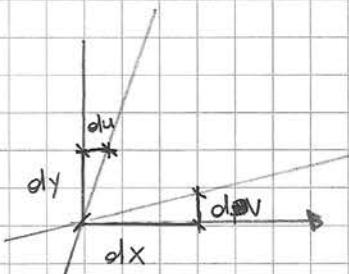
$$\epsilon_z = \frac{\epsilon_w}{S_z}$$

li consideriamo come eliminate  
parziali anziché di relazioni tra  
lunghezze

Questo perché la  $\epsilon_u$  potrebbe essere eliminata  
anche rispetto all'asse  $x$  o  $w$



$\gamma_{xy}$



avendo ipotizzato quei due segmenti  $dx$  e  $dy$  e le loro proiezioni sugli  
spostamenti  $du$  e  $dv$  potremo calcolare gamma come:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

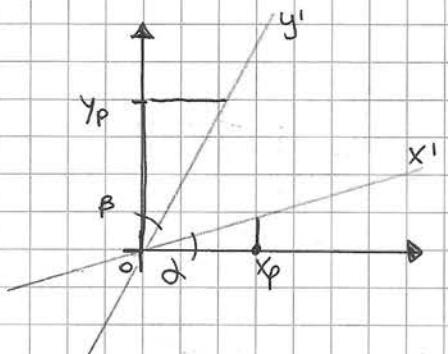
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Quindi, se volessimo calcolare lo spostamento da deformazione pura di un punto  $p$  nei casi di  $u, v, w$

$$u_p^*, v_p^*, w_p^*$$

$$P(x_p, y_p, z_p)$$



conoscendo  $\epsilon$  possiamo dire che

$$u_p^* = \epsilon_x \cdot x_p$$

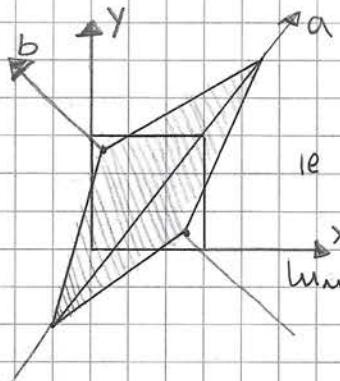
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Nel caso di una variazione angolare

avremo che  $u_p^* = \epsilon_x \cdot x_p + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot y_p + \frac{1}{2} \gamma_{xz} z_p$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

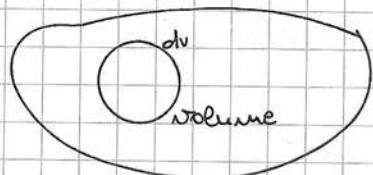
Matrice delle deformazioni



Il cubetto si deforma e nel contempo si stende

lungo la diagonale  $a$  avremo una  $\epsilon_a > 0$  quasi sicuramente  
e una  $\epsilon_b < 0$

Definendo gli assi  $xy$  avremo un  $\gamma_{xy}$  di distorsione



Abbiamo 6 componenti della deformazione

$$\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z$$

$$\gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

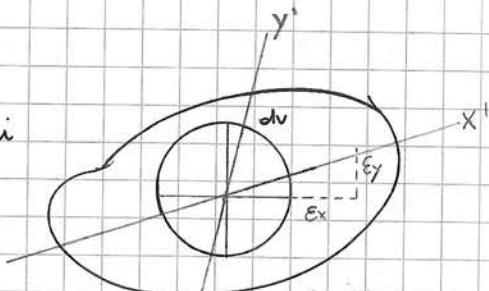
questo volume potra' subire

variazioni di configurazione portandosi ad esempio qui

Vediamo dalla figura che un punto puo'

spostarsi di un  $\epsilon_x$  a destra e di un  $\epsilon_y$  in alto e

oltre potremo avere una variazione angolare come con i due assi  $x', y'$



In questo piccolo intorno c'e' perciò la particolarite' di 3 assi che consentono la loro ortogonalite' che chiamiamo  $\xi, \eta, \zeta$

avremo quindi sempre un  $\gamma_{\xi\eta}, \gamma_{\eta\zeta}, \gamma_{\zeta\xi}$

$\xi, \eta, \zeta$  = DIREZIONI PRINCIPALI DELLA DEFORMAZIONE



Dato che  $P^*$  sta sulla retta di  $P$  possiamo definirla come direzione principale di deformazione

Lo spostamento  $s_p$  e' dato da  $s_p^* = \frac{P^* - P}{P^* - P}$

$$P(x, y, z)$$

$$x_p = \overline{P_0 P} - \delta x$$

$$y_p = \overline{P_0 P} - \delta y$$

$$z_p = \overline{P_0 P} - \delta z$$

$$u_p^* = P_0 P \cdot E_p \cdot \delta x$$

$$v_p^* = P_0 P \cdot E_p \cdot \delta y$$

$$w_p^* = P_0 P \cdot E_p \cdot \delta z$$

$$u^*_p = \text{Pop} \cdot \epsilon_p \cdot dp_x = \text{Pop} (\epsilon_x dp_x + 1/2 \gamma_{xy} dp_y + 1/2 \gamma_{xz} dp_z)$$

↑  
Equazione del generico  $u^*$

$$(\epsilon_x - \epsilon_p) dp_x + 1/2 \gamma_{xy} dp_y + 1/2 \gamma_{xz} dp_z = 0$$

Se calcoliamo anche  $v^*_p$  e  $w^*_p$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} dp_x + (\epsilon_y - \epsilon_p) dp_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} dp_z = 0$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xz} dp_x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} dp_y + (\epsilon_z - \epsilon_p) dp_z = 0$$

Le tre incognite sono i coseni direttori della netta  
 $(dp_x, dp_y, dp_z)$

che potremo usare per trovare le dimensioni principali di deformazioni

Un sistema omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite ammette solo la soluzione banale uguale a 0, ma non possiamo avere 3 cosen direttori nulli.

Qui molti poniamo uguale a 0 il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{vmatrix} (\epsilon_x - \epsilon_p) & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & (\epsilon_y - \epsilon_p) & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & (\epsilon_z - \epsilon_p) \end{vmatrix} = 0$$

$$-\epsilon_p^3 + A\epsilon_p^2 + B\epsilon_p + C = 0$$

questa equazione ci fornisce 3 valori di  $\epsilon$  che saranno proprio  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$

a questo punto prendiamo  $\epsilon_y$  e lo sostituiamo nel sistema ottenendo i coseni direttori di  $m$  e così per  $\xi$  e  $\eta$

$$\lambda_p^2 x + \lambda_p^2 y + \lambda_p^2 z = 1$$

Possiamo poi usare questa equazione

quando abbiamo solo due equazioni in tre incognite

$$-\varepsilon_p^3 + A\varepsilon_p^2 + B\varepsilon_p^1 + C = 0 \quad \text{questa si chiama EQUAZIONE SECOLARE}$$

i coefficienti da questa equazione sono degli invarianti quindi possiamo scrivere anche come

$$-\varepsilon_p^3 + I_1\varepsilon_p^2 + I_2\varepsilon_p^1 + I_3 = 0 \quad \text{dove } I_1, I_2, I_3 \text{ sono gli invarianti}$$

Vale a dire che sono coefficienti che non variano al variare del sistema di riferimento.

$I_3$  e' proprio la matrice della deformazione

$$I_3 = \begin{vmatrix} Ex & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{xy} & Ey & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{xz} & 1/2\gamma_{yz} & Ez \end{vmatrix}$$

$I_2$  e' dato dal determinante dei minori

$$I_2 = \begin{vmatrix} Ex & 1/2\gamma_{xy} & & Ey & 1/2\gamma_{yz} & & Ez & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{xy} & Ey & & 1/2\gamma_{zy} & Ez & & 1/2\gamma_{xz} & Ez \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & & & & & \end{vmatrix}$$

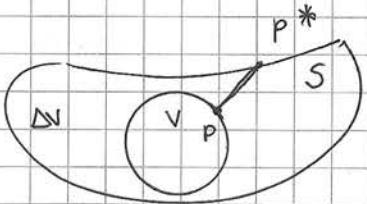
$I_1$  e' dato dalla somma dei termini sulla diagonale principale

$I_1 = Ex + Ey + Ez$ , questo invariante e' detto anche coeff di dilatazione cubica

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V} = \text{coefficiente di dilatazione cubica}$$

Se abbiamo un volume di  $1 \text{ m}^3$  e in seguito a deformazione siano  $1,003 \text{ m}^3$  questo vol / vol iniz. ci dicono il coeff.

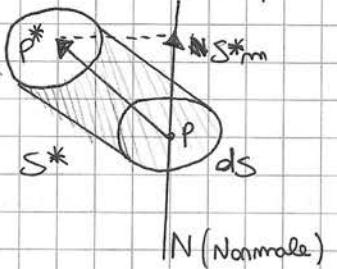
si dimostra che questo valore  $\Theta \equiv I_1 \equiv Ex + Ey + Ez$



$S^*$  = volume finale

$V$  = volume iniziale

Se immaginiamo una piccola area vicino al punto  $P$ , calcolando la normale e analizzando i punti intorno a  $P$ , una porzione di volume sarà visibile



insieme alla sua variazione elementare

Questo volume è dato da  $S^* m \cdot ds$

$N$  (Normale)

Se vogliamo calcolare l'intera variazione di volume

$\Delta V = \int_S S^* m \cdot ds$  che rappresenta il flusso del vettore  $S^*$  attraverso  $ds$   
che è la superficie

$$\int_S S^* m \cdot ds = \int_V \text{divergenza } S^* dv$$

$$\int_S S^* m \cdot ds = \int_V \left( \frac{S_{x^*}}{S_x} + \frac{S_{y^*}}{S_y} + \frac{S_{z^*}}{S_z} \right) dv$$

divergenza di  $S^*$

Questo termine sarà

$\int_V (E_x + E_y + E_z) dv$  grazie al fatto che per ipotesi ci troviamo in piccole dilatazioni.

$$(E_x + E_y + E_z) \int_V dv$$

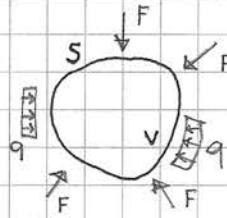
da cui scopriamo che

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V} = \frac{(E_x + E_y + E_z) V}{V}$$

è proprio uguale all'invariante lineare  $I_1$

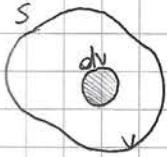
## Tensioni:

Parliamo di volumi qualsiasi  
di diametri esterni



ma soggetti a forze e

Queste forze generano tensioni all'interno e il corpo si troverà in stato tensionale che rappresenta lo stress di struttura.



consideriamo un volumetto  $dv$  o  $\Delta v$

Su questo volumetto ci sono una risultante di forze (PESO)

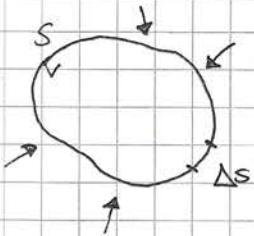
$$B = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta v}$$

$B$  = FORZA DI MASSA

$$[B] = [F \cdot L^{-3}]$$

dimensione ↑

Ad esempio il calcestruzzo pesa intorno ai  $2500 \text{ kg/m}^3$  che sono la nostra forza di massa  $B$ . Avendo  $20 \text{ m}^3$  di calcestruzzo sono  $B = 2500 \cdot 20$



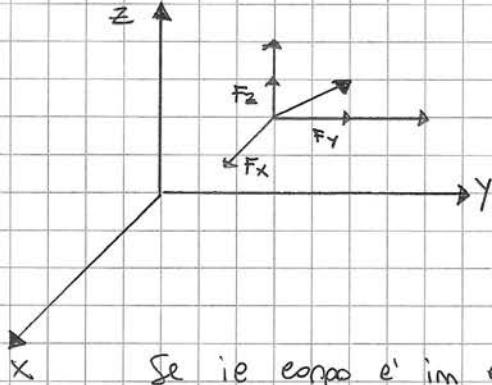
FORZE SUPERFICIALI

$$P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}$$

dove  $\Delta F$  è la risultante delle forze esterne

A differenza della forza peso che è una forza di massa, tutte le forze esterne potremo chiamarle di superficie in quanto le forze concentrate sono solo un'astrazione per sintesi.

Ad esempio il pneumatico di una macchina è comunque spalmato su di una superficie più quanto mai potremo considerarlo puntuale



Risultanti di forze di massa e superficiali:

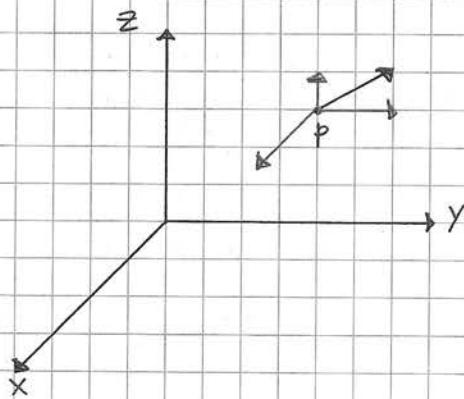
$$R_x = \int_V x \, dv + \int_S p_x \, ds$$

$$R_y = \int_V y \, dv + \int_S p_y \, ds$$

$$R_z = \int_V z \, dv + \int_S p_z \, ds$$

Se il corpo è in equilibrio, sia i momenti che le risultanti saranno 0

N.B. le risultanti delle forze di massa vengono chiamate  $B = |X, Y, Z|$   
mentre quelle di superficie  $P = |p_x, p_y, p_z|$



Momento:

$$M_{ox} = \int_V (z_y - y_z) dV + \int_S (p_z y - p_y z) ds$$

$z$  e  $y$  perché intorno all'asse  $x$  sono gli unici a dare momento. Potremo avere sia forze di massa che di superficie e quindi useremo le due risultanti: state degli integrali.

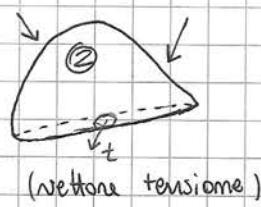
$F_z$  sarà antiorario e  $F_y$  orario

$$M_{oy} = \int_V (x \cdot z - z \cdot x) dV + \int_S (p_x \cdot z - p_z \cdot x) ds$$

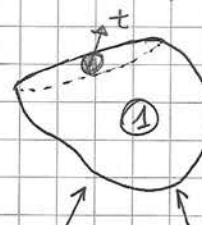
$$M_{oz} = \int_V (y \cdot x - x \cdot y) dV + \int_S (p_y \cdot x - p_x \cdot y) ds$$



immaginiamo di avere una superficie interna e di dividere il corpo in due parti



(vettore tensione)



le corpi non saranno più in equilibrio se non applicheremo le

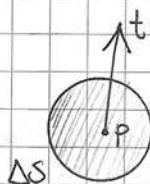
forze che agiscono su 1 a 2 o da 2 a 1

Queste forze interne agenti sulle facce sono le tensioni e garantiscono la trasmissione di forze da un corpo all'altro

$$t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

ma in questo caso  $\Delta S$  è interna al corpo

il vettore tensione avrà ovviamente componenti  $x, y, z$ .

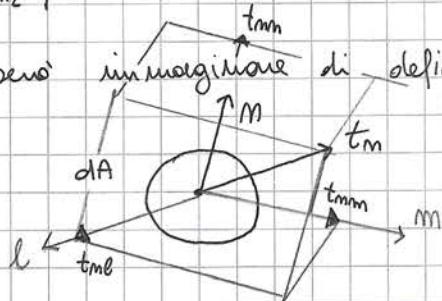


Se prendiamo superfici diverse come le 3 in figura (DS) avremo sfondi tensionali molto diversi. Qui non siamo obbligati solo specificare il punto di applicazione del vettore ma anche la superficie dove calcolare la tensione. Tensione  $\rightarrow$  punto  $(x, y, z)$  e superficie (normale  $n = [dx, dy, dz]$ )

avremo allora una normale  $n$  e un tm che avrà componenti:

$$tm = \begin{pmatrix} tm_x \\ tm_y \\ tm_z \end{pmatrix}$$

Possiamo però immaginare di definire le componenti della tensione in modo diverso.



forniscono una terna locale  $M, m, l$

$t_{mm}, t_{mm}, t_{ml} = \Gamma_m, \Gamma_m, \Gamma_{mm}$  (componenti tensoriali)

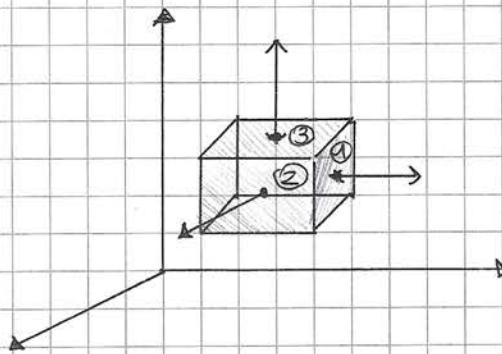
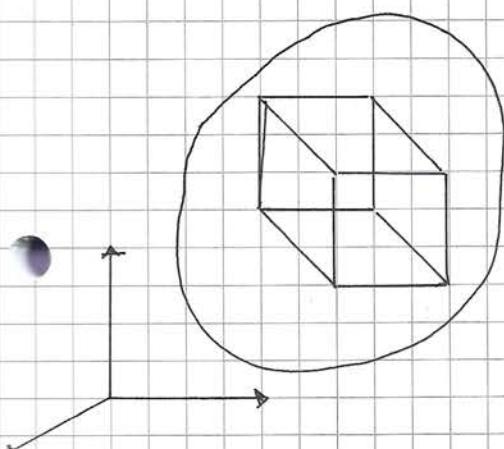
le vantaggio di avere queste 3 nuove componenti è di avere due componenti che sono uno ortogonale e l'altro tangenziale alla superficie, e poi identifichiamo la superficie con la normale uscente.

$\Gamma_m$  = componente normale / tensione normale

$\Gamma_m, \Gamma_{mm}$  = componenti tangenziali / tensioni tangenziali

Componenti speciali della tensione:

Immaginiamo che nel volume prendiamo un cubo piccolissimo e che abbia gli spigoli paralleli agli assi coordinati:



3 normali alle facce

Se siamo sulla faccia ① avremo  $\tau_{yx} = \tilde{\tau}_{yx}$

faccia ②  $\tau_{xx} = \sigma_x$

$$\tau_{yy} = \sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \tilde{\tau}_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \tilde{\tau}_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \tilde{\tau}_{xz}$$

faccia ③  $\tau_{zx} = \tilde{\tau}_{zx}$

queste 9 sono le componenti speciali

$$\tau_{zy} = \tilde{\tau}_{zy}$$

$$\tau_{zz} = \sigma_z$$

di tensione

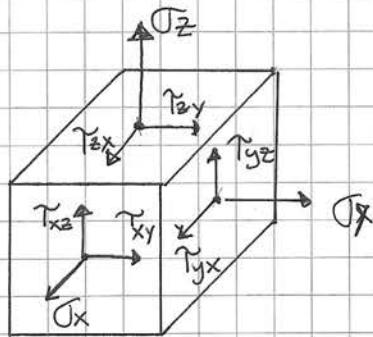
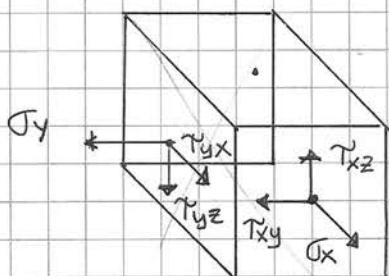
di fatto però si dimostra che alune  $\tilde{\tau}$  hanno una PROPRIETA'

#### DI SIMMETRIA TRA TENSIONI TANGENZIALI

$$\tau_{zx} = \tilde{\tau}_{xz}$$

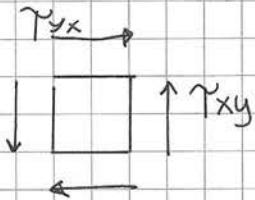
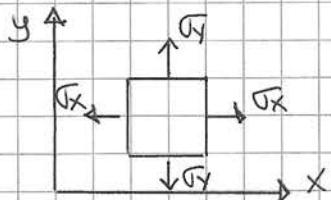
$$\tau_{xy} = \tilde{\tau}_{yx}$$
 quindi le componenti da 9 amano a 6

$$\tau_{yz} = \tilde{\tau}_{zy}$$



Stabiliamo una convenzione sui segni:

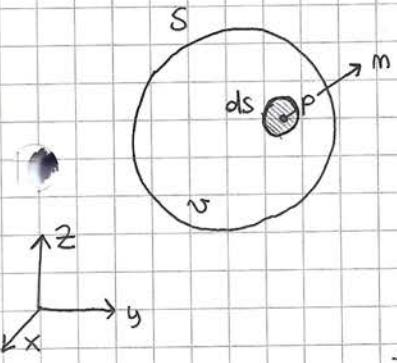
$\sigma$  di trazione (uscente) : positiva , compressione : negativa



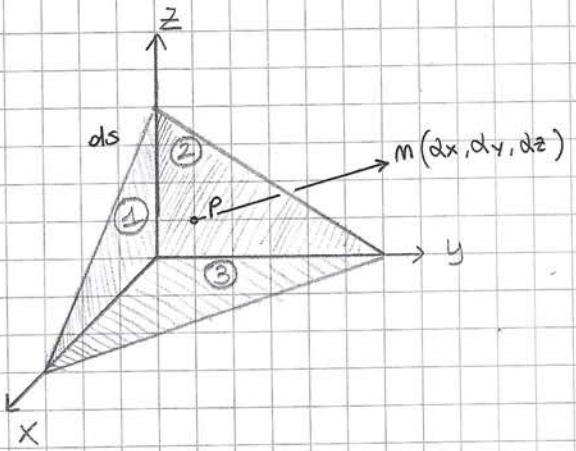
$$\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yx} > 0$$

quando convergono nel punto in alto a dx o in basso a sx

$$\sigma_x > 0, \sigma_y > 0$$



nell'intorno del punto  $P$  scegliamo un tetraedro con una superficie  $\Delta S$  tangente alla superficie nel punto  $P$  e con gli altri lati paralleli ai piani coordinati  $(xy, yz, xz)$



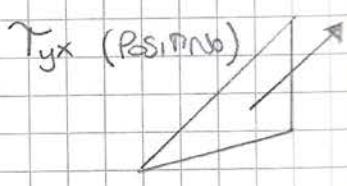
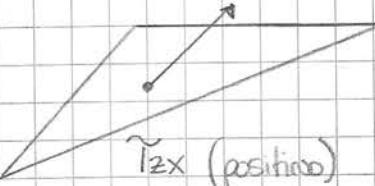
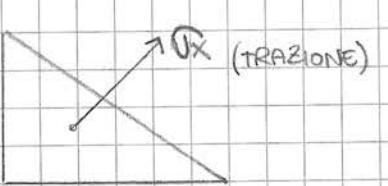
In questo tetraedro agiscono

forze superficiali  $(px, py, pz)$

All'interno dell'volume poi avrà  
un suo peso e forze di massa  
 $(x, y, z)$ . Nelle 3 superfici interne

la superficie ① avrà normale im  $y$ , ②  $\rightarrow$  normale im  $x$ , ③  $\rightarrow$   $z$ .  
Cominciamo dall'equilibrio lungo l'asse  $x$

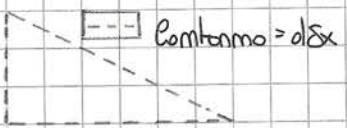
$$\sum F_x = 0 : (px \cdot ds) + (x \cdot d\pi) + (-\tau_{zx} \cdot ds_x) + (-\tau_{yx} \cdot ds_y) + (-\tau_{xz} \cdot ds_z) = 0$$



Se la superficie  $\Delta S$  ha una normale con corso direzioni

$$ds \cdot m(dx, dy, dz) \Rightarrow ds_x = ds \cdot dx$$

allora la superficie  $\Delta S_x$  sarà



$$ds_y = ds \cdot dy$$

$$ds_z = ds \cdot dz$$

data da  $ds \cdot dx$  corso direzioni

$$px \cdot ds + x \frac{d\pi}{ds} - \tau_{zx} ds_x - \tau_{yx} ds_y - \tau_{xz} ds_z = 0$$

il volume tende a 0 più velocemente della superficie  $= d\pi/ds = 0$

$$\tau_{zx} dx + \tau_{yx} dy + \tau_{xz} dz = px \quad \text{Eq equilibrio lungo } x$$

$$\tau_{xy} dx + \tau_{yz} dy + \tau_{zx} dz = py \quad \text{y}$$

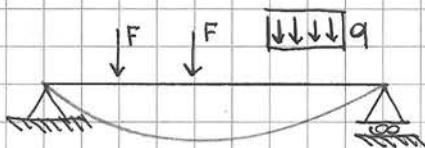
$$\tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy + \tau_{xy} dz = pz \quad \text{z}$$

Si chiamano equazioni di limiti e riappresentano le relazioni tra tensione e forze di superficie

Su di una mensola, fino ad ora se avevamo una trave in acciaio o in legno non cambiavamo qualcosa in particolare.  
da qui introduciamo le **STRUUTURE ELASTICHE**

$$\frac{dI}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T$$

Ora consideriamo una trave di tipo elastico, ovvero di materiale elastico



probabilmente avremo la trave a campanile come evidenziato a metà

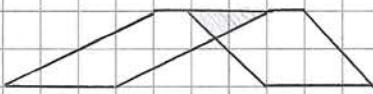
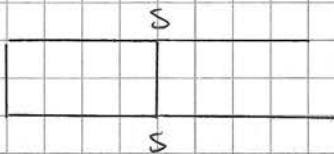
Ci troviamo nell'ipotesi di piccoli spostamenti e di trovarci in campo elastico

L'obiettivo è capire di quanto si sposta la trave



dobbiamo comunque seguire una congruenza cioè ad esempio nell'incastro non abbiamo né rotazioni e nemmeno traslazioni

**CONGRUENZA ESTERNA** (vincoli) e **INTERNA** (compattezza o distacco)



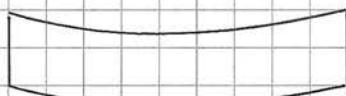
Caso di compattezza

Per la prima trave

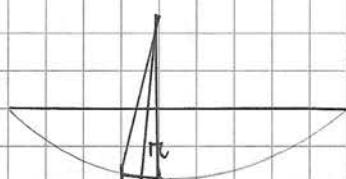


Caso di distacco del materiale

appoggiata - appoggiata immaginiamo di avere un qualcosa di simile



e così otteniamo definita la **CURVATURA**

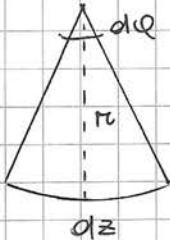
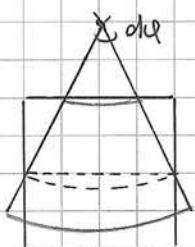


**RAGGIO DI CURVATURA**

avendo le ragioni di circonferenza in cui questa curva ragg. un arch

la curvatura rappresenta l'inverso del raggio di curvatura  $\frac{1}{r}$

quindi più è grande il raggio è minore sarà la curvatura

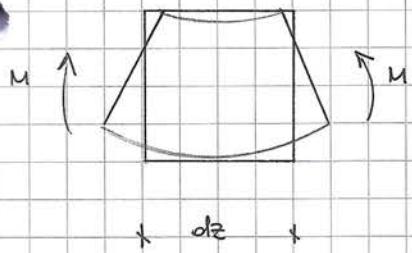


$$r \cdot dl = dz$$

$$r = \frac{dz}{dl}$$

$$\text{curvatura : } \frac{1}{r} = \frac{dl}{dz} \quad \text{di dimensioni } [L^{-1}]$$

deformazione del raggio di trave  
piccolissimo ( $dl$ )



Si dimostra che la curvatura di questo esempio  
di trave è data dal momento flettente

$$\frac{dl}{dz} = M \quad \text{EQ. COSTITUTIVA.}$$

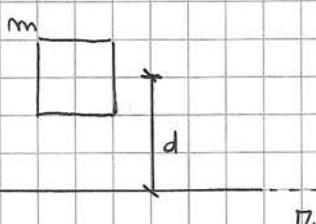
più il momento flettente è grande e più il concio si curva  
dipenderà tutto anche dal materiale, correlati dal modulo di Young ( $E$ )

l'acciaio ha un modulo di young maggiore dell'legno ecc.

$$\frac{dl}{dz} = \frac{M}{E}$$

la deformazione esiste anche in base allo  
spessore. Se una trave è più sottile avremo una  
curvatura maggiore

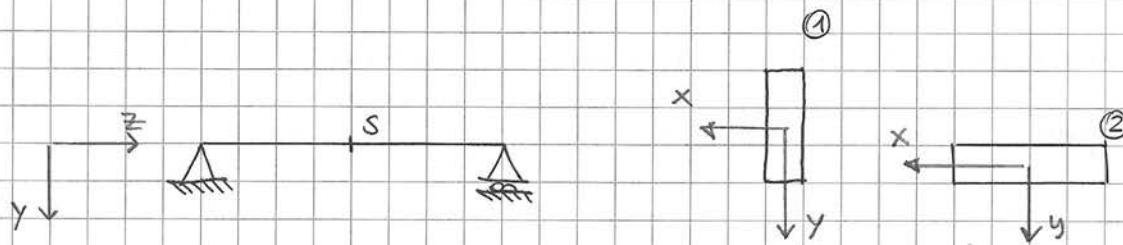
$$\frac{dl}{dz} = \frac{M}{E I_x}$$



$$I_x = m \cdot d^2$$

il momento di inerzia è sempre definito  
rispetto a una retta

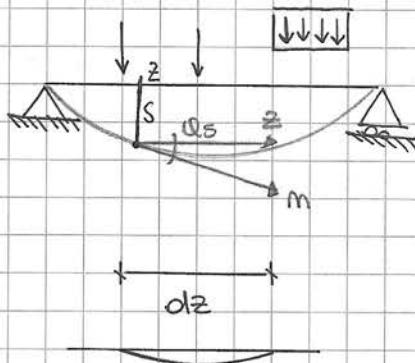
l'asse  $x$  su una trave è l'asse ortogonale al piano in cui c'è la trave



$I_x^{(1)} > I_x^{(2)}$  perché come vediamo, la distanza dall'asse x è più centri legati nel primo

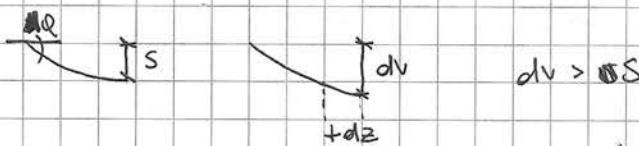
$$dI = \frac{M}{EI_x} dz$$

la  $I_x$  non ci dà informazioni solo sulla sezione delle travi ma anche come è disposta la trave



Se ci spostiamo di un  $dz$  più avanti anche lo spostamento della trave aumenta

dato che c'è una delonvata, se ci spostiamo di  $dz$  avremo un  $dv$  verticale che sarà più o meno della normale distanza  $S$  del centro:



possiamo dire che  $\frac{dv}{dz} = -\alpha$  e per  $dz$  positivo e  $dv$  positivo avremo un angolo orario (per questo  $-\alpha$ )

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \frac{dv}{dz} = -\varphi$$

le momenti e' legato alla rotazione della trave ( $\varphi$ ) e la rotazione e' legata allo spostamento della trave

Queste eguaglianze danno vita al METODO DELLE 4 INTEGRAZIONI

$q(z)$  - INTEGRAZIONE  $\rightarrow \nu(z)$

$\nu(z)$  - DERIVAZIONE  $\rightarrow q(z)$

$\nu(z)$  prende il nome di LINEA ELASTICA

A

F  
↓  
B

$$\frac{dt}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{M}{EI_x}, \quad \frac{dv}{dz} = -Q$$

+ L \*

$$T(z) = \int -q dz \quad T(z) = T_0$$

$$M(z) = \int T(z) dz \quad M = T_0 z + M_0$$

$$T(z=e) = F$$

$$\Rightarrow T_0 = M_0$$

$$M(z=0) = 0$$

$$T(z) = +M$$

$$M(z) = -F(e-z)$$

$$dQ = \frac{M}{EI_x} dz \Rightarrow Q(z) = \int_0^z \frac{M(z)}{EI_x} dz$$

immaginiamo che il materiale sia costante e che  $I_x$  sia anche esso costante

$$Q(z) = \frac{1}{EI_x} \int_0^z M(z) dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^z -F(e-z) dz \Rightarrow -\frac{F}{EI_x} \int_0^z (e-z) dz$$

$$Q(z) = -\frac{F}{EI_x} \left( e \cdot z - \frac{z^2}{2} \right) + Q_0 \quad Q_0 = \text{costante di integrazione}$$

Ci sono dei punti dove conosciamo  $Q$ ? nell'incastro è 0

$$Q(z=0) = 0 \Rightarrow -\frac{F}{EI_x} (e \cdot 0 - 0) + Q_0 = 0 \Rightarrow Q_0 = 0$$

$$\text{quindi } \Rightarrow Q(z) = -\frac{F}{EI_x} \left( ez - \frac{z^2}{2} \right)$$

$$N(z) = \int_0^z -Q dz \quad N(z) = \int \frac{F}{EI_x} \left( ez - \frac{z^2}{2} \right) dz$$

$$N(z) = \frac{F}{EI_x} \left( \frac{ez^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + N_0 \quad N_0 = \text{costante di integrazione}$$

$$N(z=0) = 0 \Rightarrow N(z=0) = \frac{F}{EI_x} \left( \frac{e \cdot 0}{2} - \frac{0}{6} \right) + N_0 \quad N_0 = 0$$

$$N(z) = \frac{F}{EI_x} \left( \frac{ez^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

$$T(z) = F \quad M(z) = -F(e-z) \quad Q(z) = -\frac{F}{EI_x} \left( ez - \frac{z^2}{2} \right) \quad N(z) = \frac{F}{EI_x} \left( \frac{ez^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$



$$\frac{d\Gamma}{dz} = -q$$

$$\frac{dM}{dz} = T$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{M}{EI_x}$$

$$\frac{dV}{dz} = -Q$$

$$\Gamma(z) = \int_0^z -q dz \quad \text{ma} \quad q=0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^z dz$$

$$\Gamma(z) = \Gamma_0$$

$$M(z) = \int_0^z \Gamma(z) dz \rightarrow \int_0^z \Gamma_0 dz \rightarrow \Gamma_0 z + M_0$$

le momenti im e e' positivo  $M = +m$

$$M(z=0) = 0$$

$$M(z=l) = m$$

$$\text{quindi } M_0 = 0$$

$$\Gamma_0 l = m$$

$$\Gamma_0 = m/l$$

$$\Gamma(z) = \frac{m}{l} z$$

$$M(z) = \frac{m}{l} z^2$$

$$Q(z) = \int_0^z \frac{M}{EI_x} dz = \int_0^z \left(\frac{m}{l} z\right) \cdot \frac{1}{EI_x} dz = \cancel{\frac{1}{EI_x}} \frac{1}{l} \frac{m}{l} \frac{z^2}{2} + Q_0$$

$$V(z) = \int_0^z -Q dz = \int_0^z -\left[\cancel{\frac{1}{EI_x}} \frac{m}{l} \frac{z^2}{2} + Q_0\right] dz$$

$$= -\frac{m}{EI_x l} \cdot \cancel{\frac{z^3}{6}} - Q_0 z + V_0$$

$$V(z=0) = 0 \Rightarrow V_0 = 0$$

$$V(z=l) = 0 \Rightarrow -\frac{m}{EI_x l} \cdot \frac{l^3}{6} - Q_0 l = 0$$

$$Q_0 = -\frac{m}{EI_x} \cdot \frac{l}{6}$$

$$\text{quindi } Q(z) = \frac{m}{EI_x l} \cdot \frac{z^2}{2} + \left(-\frac{ml}{6EI_x}\right)$$

$$\text{Diagram: A horizontal beam segment from } z=0 \text{ to } z=e. \text{ At } z=0, \text{ there is a downward force } q \text{ and a clockwise moment } M_0. \text{ At } z=e, \text{ there is a downward force } T_0 \text{ and a clockwise moment } N_0.$$

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \frac{dN}{dz} = -\varphi$$

$$T(z) = \int_0^z -q \, dz = T_0$$

$$M(z) = \int_0^z T_0 \, dz = T_0 z + M_0$$

$$\text{At } z=e, T(z=e) = 0 \quad T_0 = 0$$

$$\text{At } z=e, M(z=e) = -m \quad M_0 = -m$$

quindi:

$$T(z) = 0 \quad M(z) = -m$$

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M}{EI_x} \, dz = \int_0^z -\frac{m}{EI_x} \, dz = -\frac{m}{EI_x} z + \varphi_0$$

$$\varphi(z=e) = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi(z) = -\frac{m}{EI_x} z$$

$$N(z) = \int_0^z -\varphi \, dz = \int_0^z -\frac{m}{EI_x} z \, dz = -\frac{mz^2}{2EI_x} + N_0$$

$$N(z=0) = 0 \rightarrow N_0 = 0$$

$$Q_B = -\frac{me}{EI_x}$$

$$V_B = \frac{me^2}{2EI_x}$$

$$v(z) = \omega(z)$$

$$q(z) = \omega'(z) \leftarrow \text{derivata prima}$$

il momento è dato dalla derivata della notazione moltiplicato per  $EI_x$

ma dato che  $Q(z) = \omega'(z)$ :

$$M(z) = -EI_x \omega''(z)$$

$$T(z) = -EI_x \omega'''(z)$$

$$q = EI_x \omega^{IV}(z) \quad \text{così abbiamos espresso tutto per } \omega(t)$$

$EI_x \omega^{IV}(z) = \text{EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA}$



$$\omega(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$$

$$\omega'(z) = 3Az^2 + 2Bz + C$$

$$\omega''(z) = 6Az + 2B$$

$$\omega'''(z) = 6A$$

$$\text{Se } Q(z) = -\omega'(z)$$

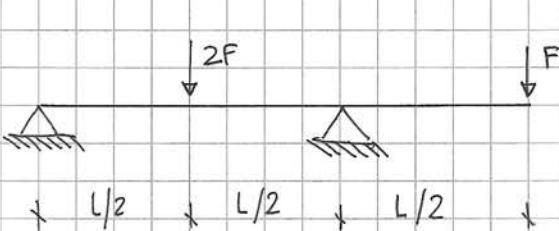
$$Q(z) = -3Az^2 - 2Bz - C$$

$$\text{e } M(z) = EI_x (-6Az - 2B)$$

$$T(z) = EI_x (-6A)$$

dalla figura poi sappiamo che

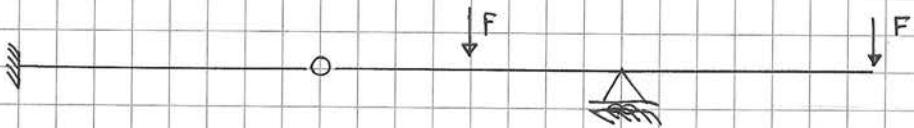
$$M_A = 0 \quad Q_A = 0 \quad M_B = 0 \quad T_B = +F$$



avremo multipli intorni di z  $[0; \frac{L}{2}] \quad [\frac{L}{2}; L] \quad [L; \frac{3}{2}L]$

• esami di integrazione

questo perché abbiamos discontinuità con i diagrammi



COROLLARI DI MOHR: ei consente di velocizzare gli spostamenti

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \frac{d\delta}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \frac{dN}{dz} = -q$$

Supponiamo che la curvatura sia come un unico  $q$ , riemannanolo

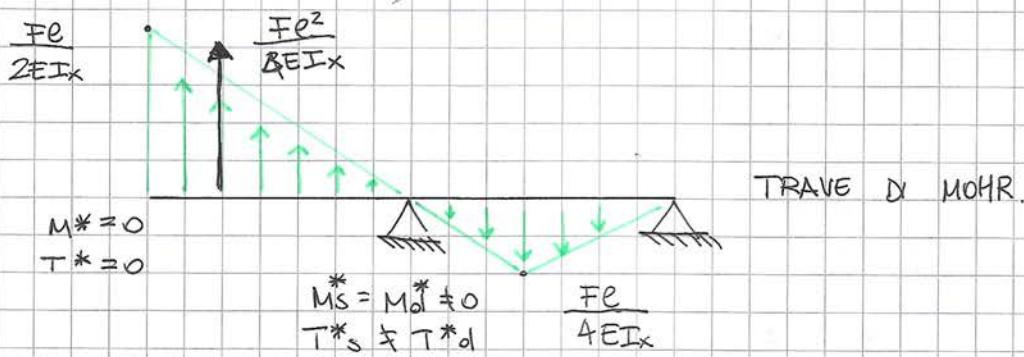
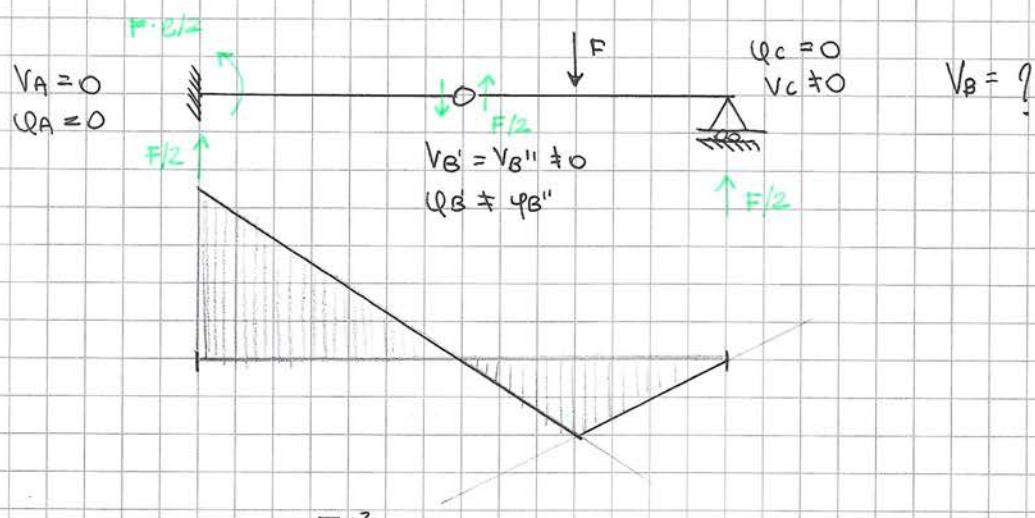
$$\frac{M}{EI_x} = q^* \quad \text{a questo potremo associare un taglio e un momento}$$

$$\frac{dT^*}{dz} = -q^* \quad \frac{dM^*}{dz} = T^*$$

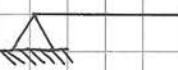
$$\text{quindi } q^* = \frac{M}{EI_x} \quad \text{e} \quad \frac{d\delta}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \text{allora} \quad \frac{dT^*}{dz} = -q \rightarrow \frac{dT^*}{dz} = -\frac{M}{EI_x}$$

$$\text{quindi } T^* = -q \quad M^* = N^*$$

$$\frac{d\delta}{dz} = \frac{M}{EI_x}$$



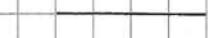
### TRAVE REALE



$$V=0 \quad \varphi \neq 0$$



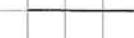
$$V=0 \quad \varphi \neq 0$$



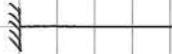
$$V \neq 0 \quad \varphi \neq 0$$



$$M^*=0 \quad T^*\neq 0$$



$$M^*=0 \quad T^*=0$$



$$M^*\neq 0 \quad T^*=0$$

### TRAVE REALE



$$V_s = V_d \neq 0$$

$$Q_s \neq Q_d \neq 0$$



$$V_s = V_d = 0$$

$$Q_s = Q_d \neq 0$$



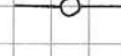
$$V_s \neq 0$$

$$Q_s = 0$$



$$M_s^* = M_d^* \neq 0$$

$$T_s^* \neq T_d^*$$



$$M_s^* = M_d^* = 0$$

$$T_s^* = T_d^* \neq 0$$



$$M^* \neq 0$$

$$T^* = 0$$

### TRAVE REALE



$$V_s \neq V_d \neq 0$$

$$Q_s = Q_d \neq 0$$



$$V_s = V_d \neq 0$$

$$Q_s = Q_d = 0$$



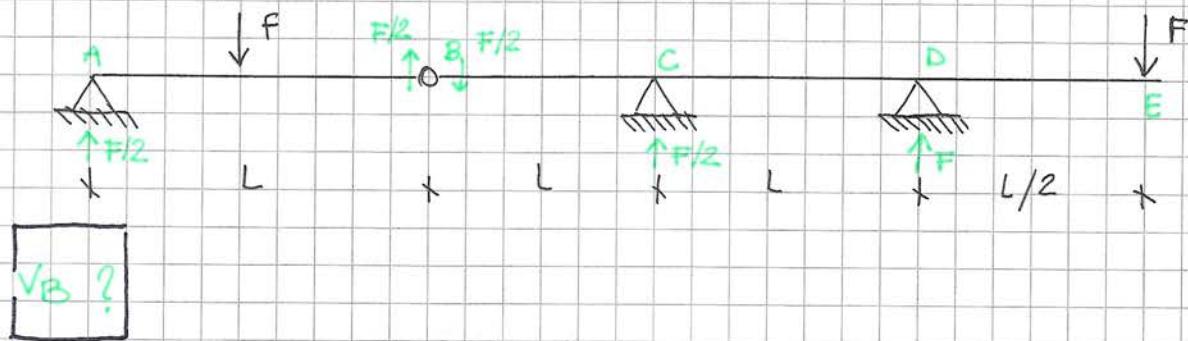
$$M_s^* \neq M_d^* \neq 0$$

$$T_s^* = T_d^* \neq 0$$



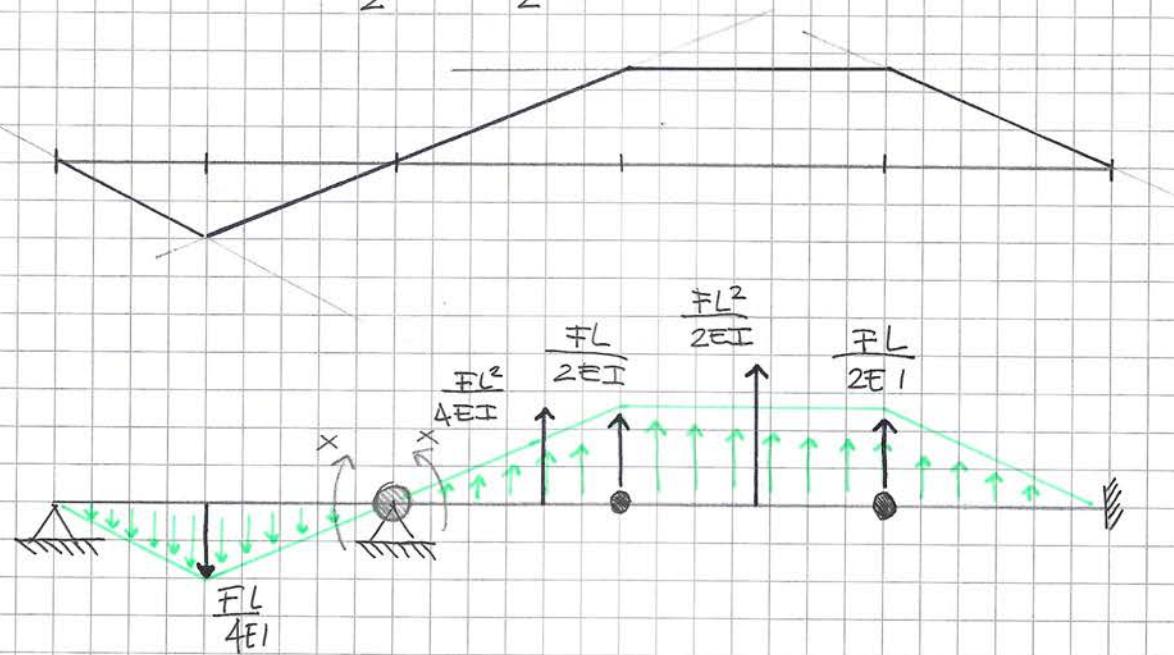
$$M_s^* = M_d^* \neq 0$$

$$T_s^* = T_d^* = 0$$

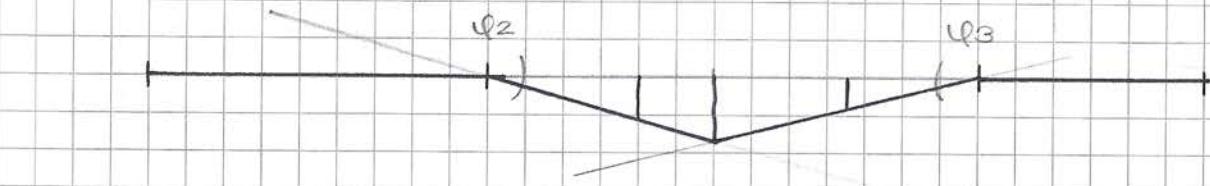


$$\sum M_C = 0 : \frac{F}{2} \cdot L + y_D \cdot L - F \cdot \frac{3L}{2} = 0$$

$$y_D = \frac{3}{2} F - \frac{F}{2} = F$$



De classificano i.e. vincolo B per fare i.e. p.v.



$$L = -\frac{FL^2}{4EI} \cdot \frac{2}{3} L q_2 - \frac{FL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot q_2 - X \cdot q_2 = 0$$

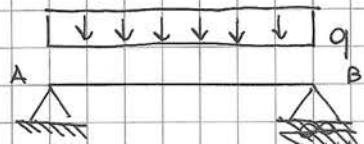
$$X = -\frac{\frac{2FL^3}{3EI}}{6} - \frac{FL^3}{4EI} = -\frac{FL^3}{EI} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI}$$

quindi la coppia sarà

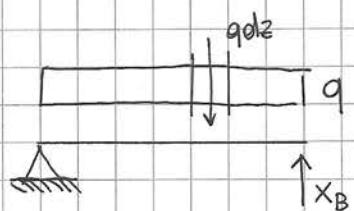


$$M_B^* = +\frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} = V_B$$

perché tende le fibre inferiori

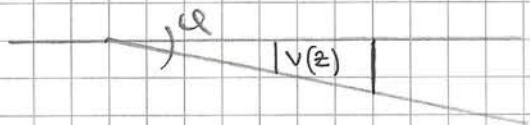


$R_B$  ?



$$Lq = q dz \cdot v(z)$$

$$Lq = \int_0^e q \cdot v(z) dz$$



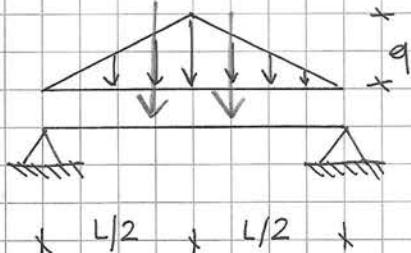
$$Lq = \int_0^e q z dz = \left[ q \frac{z^2}{2} \right]_0^e \\ = q \cdot e \cdot \frac{e^2}{2}$$

Dato che  $\int_0^e$  e' l'area potremo scrivere

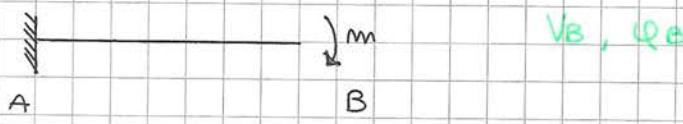
$$Lq = q \cdot (A_q)$$

$$A_q = \text{Area of the triangle}$$

$$Lq = q \left( e \cdot \frac{e^2}{2} \right) = q \frac{e^2}{2} e$$



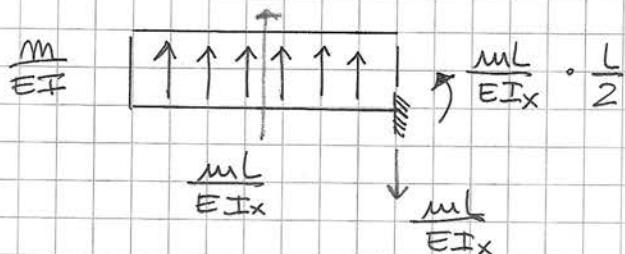
$$\downarrow q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{qe}{4} \quad \frac{qe}{4} + \frac{qe}{4} = \frac{qe}{2} \quad \text{Risultante complessiva}$$



$V_B, Q_B$



MOMENTO

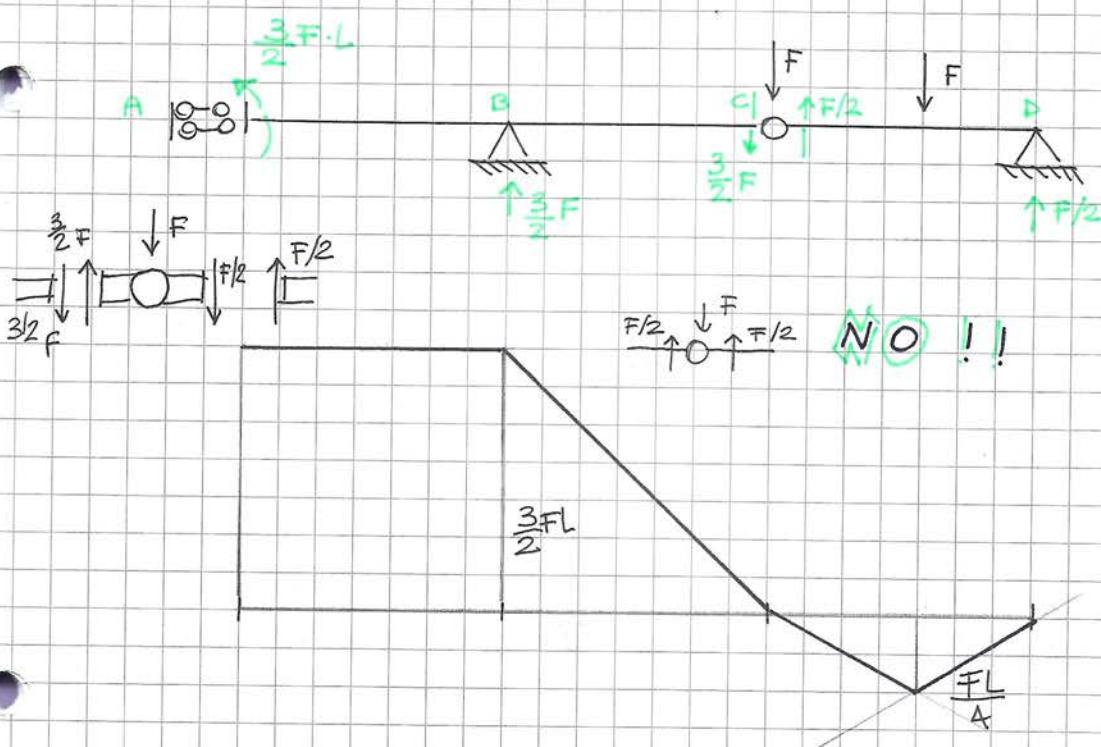


$$T^* = + \frac{mL}{EI_x} \cdot \frac{L}{2}$$

$$Q_p = - \frac{mL}{EI_x}$$

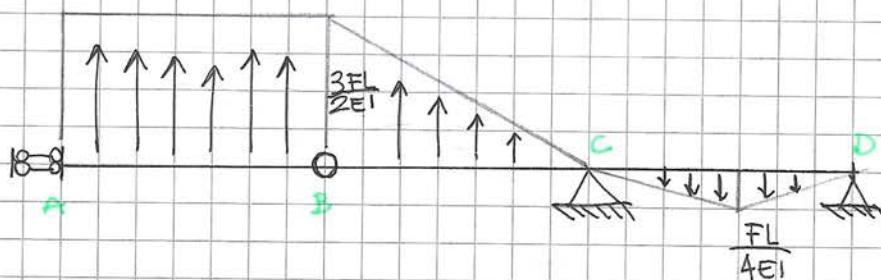
$$M^* = + \frac{mL^2}{2EI_x}$$

$$w_0 = \frac{mL^2}{2EI_x}$$



NO !!

TRAVE DI MOHR



$V_A, Q_B, V_C, Q_D$

Breve recap sui tensioni.

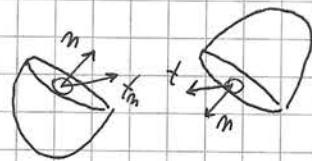
Abbiamo le forze di superficie frutto del volume che tende a 0 dei solidi con  $\frac{\Delta F}{\Delta V} \rightarrow 0$  questo perché in diversi punti avremo volumi diversi

(pensa al calcestruzzo che è formato da ghiaia, cemento e pietre più grosse). Lancihi di sup.  $\Delta F$  ad esempio una forza applicata al solido ed è multip. per la superficie (es: 50kN/m)

Poi ci poniamo il problema di cosa accade nel volume con forze di superficie e forza peso. Tagliamo il volume in due e le due parti devono essere in equilibrio.

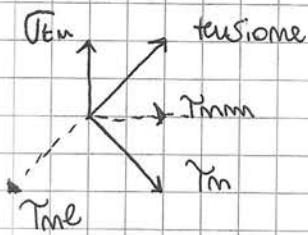
Allora stai di spazio interni che derivano dalla piccola parte tolta. Potremo considerarle quasi forze superficiali e si chiamano tensioni.

Vediamo anche a seconda applicato a un punto



la tensione quindi  
sulla superficie

Le rettine tensione in generale si risolvono in una componenti ortogonale e una tangenziale. L'ortogonale sarà  $T_m$  e la tangenziale  $T_{m\perp}$  che a sua volta avrà due componenti  $T_{mm}$   $T_{me}$

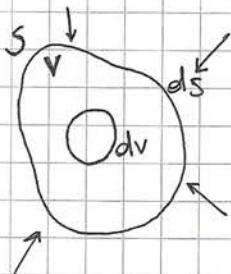


## RELAZIONI DI CAUCHY

Queste sono praticamente le equazioni di limiti scritte per tener conto di stare all'interno del volume

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x dx + \tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz = t_{mx} \\ \tau_{yx} dx + \sigma_y dy + \tau_{yz} dz = t_{my} \\ \tau_{zx} dx + \tau_{zy} dy + \sigma_z dz = t_{mz} \end{array} \right.$$

Abbiamo legato le tensioni alle superfici, ora tocca alle masse e quindi un volume anziché superficie



$dV$  = quali fonte agiscono?

X
Y
Z

Forze di volume

Sulla superficie interna agiscono le tensioni

$t_{mx}$
$t_{my}$
$t_{mz}$

Eq. traslaz. Verticale:

$$\int_V X dv + \int_S t_{mx} \cdot ds = 0$$

integrandi per calcolare le valori su tutti i cubetti costituenti il corpo

$$\int_V X dv + \int_S (\sigma_x dx + \tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz) ds = 0$$

↳ possiamo visualizzarla come un flusso del vettore tensione attraverso la superficie

ma il flusso quando si integra e' pari all'integrale della divergenza del vettore esteso al volume racchiuso dalla superficie

$$\int_V X dv + \int_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dv = 0$$

$$\int_V \left( X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dv = 0$$

↳ La divergenza e' una derivazione rispetto agli assi

e questo vale per qualsiasi generico cubetto.

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + x = 0$$

EQUAZIONI

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + y = 0$$

INDEFINITE

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + z = 0$$

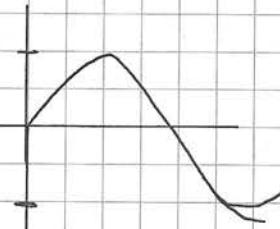
DELL'EQUILIBRIO

indefinite perché valgono per qualsiasi volume intorno

Esempio:

Funzione  $\sin(x)$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$$



Questo ci fa capire che le funzioni sono uguali a 0 non perché estendiamo l'integrazione a tutti i casi. Se avessimo un intorno specifico cambierebbe

NON ci troviamo in ipotesi di piccoli spostamenti ma solo di equilibrio

$$\begin{vmatrix} \tau_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_z \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

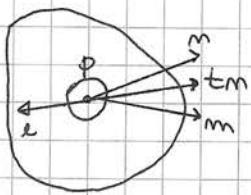
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

TENSORE DELLA SOLLECITAZIONE

Proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali

In deformazione, due rette parallele rimangono parallele ~~per~~. Due rette ortogonali invece posta a deformazione possono variare tramite i  $\gamma$  ma in un punto si individuano 3 rette che rimangono ortogonali (RETTE PRINCIPALI, DIREZIONE PRINCIPALI)

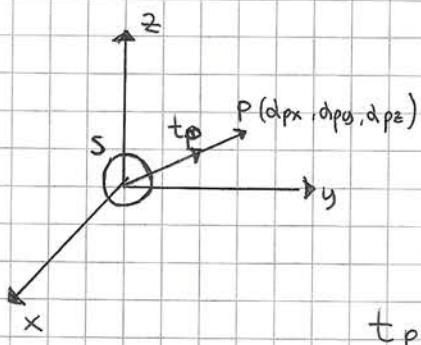
Tornando alla tensione, se prendiamo un punto p su superficie di normale  $n$ . Con le vettore tensione abbiamo una sua componente lungo  $n$  e lungo  $e$ .



In questo punto possiamo indicare due una tensio  
nale abbiano solo sigma  $\sigma_p$  e non  $\gamma$

In caso una retta contenente la normale avremo l'intera componente dello sforzo  $t_p$ . Se prendiamo la superficie ortogonale alla retta, le componenti tangenziali (di tensione) saranno 0.

### DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE



$P$  è la normale della superficie  $S$

Noto che c'è una direzione principale, il vettore tensione appartiene alla normale e quindi non ha componenti tangenziali

$$t_p = \sigma_p \quad \text{quindi} \quad \gamma = 0$$

Dalle relazioni di Cauchy mettiamo in relazione la sigma coe vettore tensione sulle componenti:

$$\sigma_x dx + \gamma_{xy} dy + \gamma_{xz} dz = t_{px} = t_p \cdot dx = \sigma_p dx$$

$$\gamma_{yx} dx + \sigma_y dy + \gamma_{yz} dz = t_{py} = t_p \cdot dy = \sigma_p dy$$

$$\gamma_{zx} dx + \gamma_{zy} dy + \sigma_z dz = t_{pz} = t_p \cdot dz = \sigma_p dz$$

otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma_p) dx + \gamma_{xy} dy + \gamma_{xz} dz = 0 \\ \gamma_{yx} dx + (\sigma_y - \sigma_p) dy + \gamma_{yz} dz = 0 \\ \gamma_{zx} dx + \gamma_{zy} dy + (\sigma_z - \sigma_p) dz = 0 \end{array} \right.$$

SISTEMA DI EQUAZIONE (3)

IN INCognITE (3)

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \sigma_y - \sigma_p & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

Nenna' un'equazione di 3° grado in  $\sigma_p$  che ha 3 radici reali

$$-\sigma_p^3 + I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p + I_3 = 0$$

Equazione per aver annullato ie obiet.

Questi sono gli invarianti lineari della tensione

$I_1$  Invariante lineare

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$I_2$  Invariante quadrato

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$I_3$  Invariante cubico

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \sigma_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p \rightarrow & \begin{cases} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \sigma_z \end{cases} \\ & \Rightarrow \xi, \eta, z \end{aligned}$$

Come si arriva dalle radici agli assi?

Prendiamo una di queste radici e le mettiamo al posto di  $\sigma_p$  nelle ~~equazioni~~ (sistema di)

$$\sigma_\xi \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. = d\xi_x, d\xi_y, d\xi_z$$

$$\sigma_\eta \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. = d\eta_x, d\eta_y, d\eta_z$$

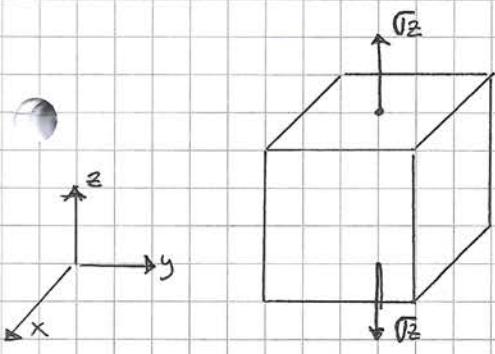
$$\sigma_z \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. = dz_x, dz_y, dz_z$$

1 equazione nel sistema però è dipendente dato che poniamo il  $\det = 0$

ma essendo che  $d\sigma_x^2 + d\sigma_y^2 + d\sigma_z^2 = 1$

possiamo aggiungerla al posto dell'altra equazione dipendente

$\xi, \eta, z$  3 nette di direzioni principali

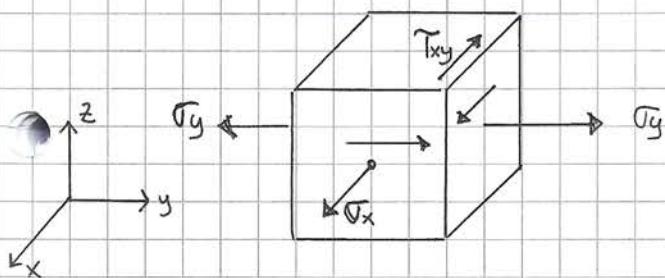


Se abbiamo uno stato tensionale  
composto solo da  $\sigma_z$  avremo

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}$$

che e' un caso di stato  
tensionale piano axiale

la  $\sigma$  qui e' direzione principale perché entrambe le  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{xz} = 0$  e  
quindi  $z = \mathcal{Z}$



$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

qui conosciamo una direzione principale

perchè le  $\gamma$  di  $z$  sono uguali a 0  $\rightarrow z = \mathcal{Z}$

ma la  $\sigma$  principale e' anche uguale a 0  $\sigma_z = 0$

lo stato tensionale qui e' contenuto in un piano (xy)

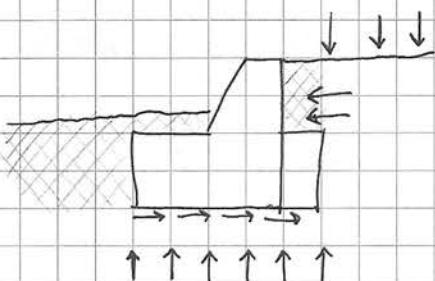
quindi ci troviamo in uno stato tensionale piano

cioe' ortogonalmente al piano non agiscono tensioni

Questa condizione c'e' quando una  $\sigma$  e' 0 o quando il determinante  
dei coefficienti e' 0

## STATO PIANO DI TENSIONE

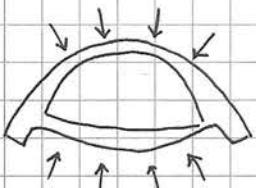
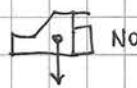
det |  $\sigma_z = 0$ ; tensione principale = 0



Caso di stato piano di tensione

Muro di sostegno con le spinte del terreno  
che bilanciano quelle pressioni del terreno  
superiori.

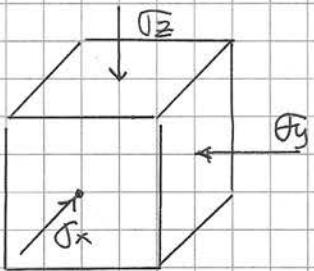
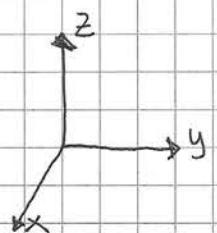
Non abbiano tensioni ortogonali



GALLERIA



Compressione



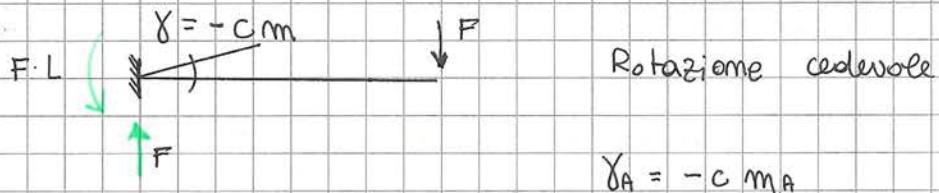
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y$$

$$\sigma_y = \sigma_z$$

$$\sigma_z = \sigma_x$$

Se si verificano queste condizioni ci troviamo in uno stato tensionale isotropo.



$c$  = Rotazione causata da momento unitario

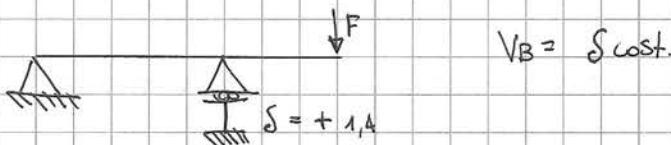
$$c = \frac{\gamma}{m}$$

$$\varphi_A = -c FL$$

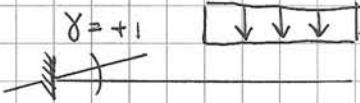
$$M_A = \text{ANTIORARIA} > 0$$

$$\varphi_A = \text{ORARIA} < 0$$

PER STRUTTURE ISOSTATICHE, LA PRESENZA DI NINCOLI CEDEVOLI NON ALTERA LE REAZIONI VINCOLARI (E MOMENTO, SFORZO, TAGLIO)

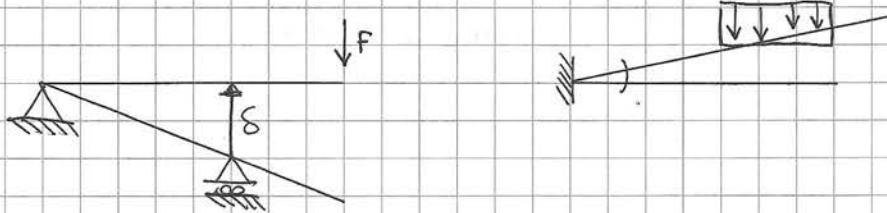


CEDIMENTO ANAELASTICO



Nella simbologia, se non aggiungiamo  $-cm$  all'angolo  
lo supponiamo omaelastico.

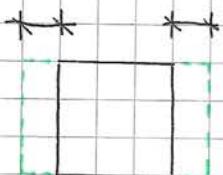
DEFORMATE?



## DISTORSIONE

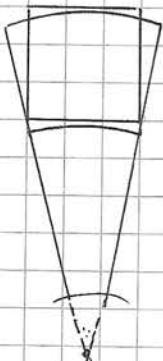
- le distorsioni sono enti diversi da forze, che generano spostamenti sulla struttura

Uno dei casi più noti è la dilatazione termica. Scaldandosi il pendolo si allunga

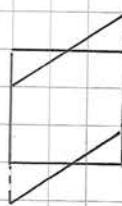


Concio di trave riscaldato

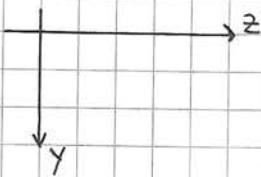
DISTORSIONE ASSIALE ( $D\lambda$ )



DISTORSIONE  
ANGOLARE  
( $D\varphi$ )



DISTORSIONE DA SCORRIMENTO  
o TAGLIANTE  
( $D\theta$ )



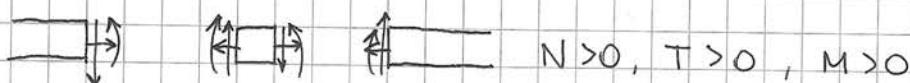
$D\lambda \rightarrow \Delta u$  (sgomento sull'asse  $x$ )

$D\varphi \rightarrow \Delta u$

$D\theta \rightarrow \Delta v$  (sgomento verticale  $\overline{xy}$ )

gli enti duali per le distorsioni sono  $S$  (sfazio normale)  $\rightarrow D\lambda$

$T$  (taglio)  $\rightarrow D\theta$ ,  $M$  (momento flettente)  $\rightarrow D\varphi$



le regole della distorsione cambia a seconda del segno dello stesso ente duale

$> 0 +$ ,  $< 0 -$

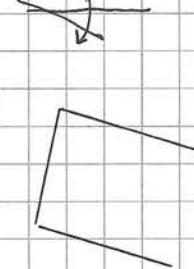
SULLA TRAVE

(NON CONCIO)

SENSO ANTICORARIO



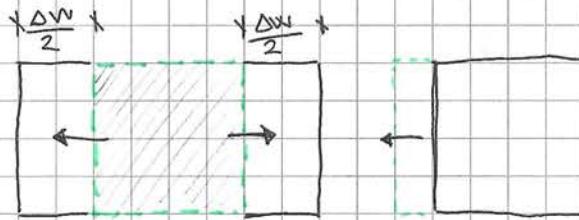
SENSO ORARIO



$$D\varphi \geq 0 ?$$

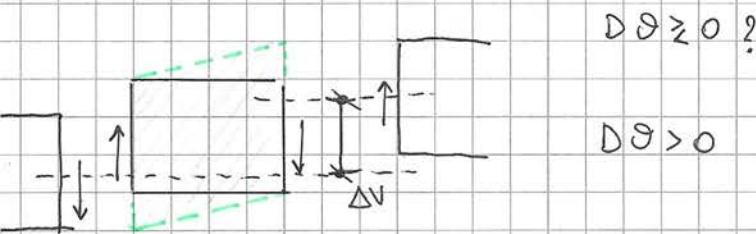
$$D\varphi > 0$$

Accorciamento conico per freddo.



$$D\lambda \geq 0 ?$$

$$D\lambda > 0$$



$$D\theta > 0$$

Quindi distorsione con cuspidi in alto  $\Delta\varphi > 0$

distorsione con accorciamento  $D\lambda > 0$

distorsione con sx ↓ dx ↑  $\Delta\vartheta > 0$

$$\Delta\varphi = \varphi_d - \varphi_s$$

$$D\varphi > 0 \rightarrow \Delta\varphi < 0$$

$$\Delta w = w_d - w_s$$

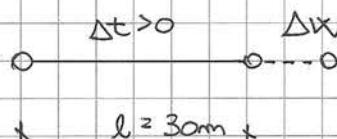
$$D\lambda > 0 \rightarrow \Delta w < 0$$

$$\Delta v = v_d - v_s$$

$$D\theta > 0 \rightarrow \Delta v < 0$$

ESEMPI:

DISTORSIONE ASSIALE



$$\Delta t = 30^\circ C$$

→ temperatura

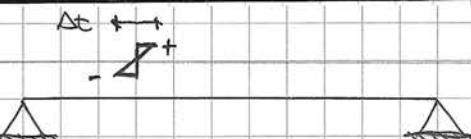
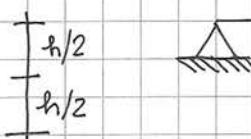
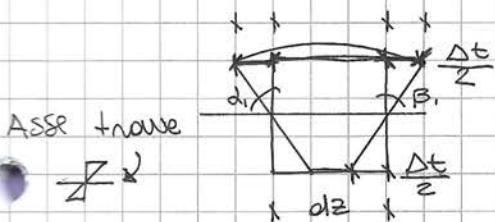
$$\Delta x_r = \alpha \cdot \Delta t \cdot l \rightarrow \text{lunghezza}$$

↓

coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha_{acciaio} = 0,000012$$

$$\Delta w_r = 0,000012 \cdot 30m \cdot 30^\circ C$$



per esempio una sella frigorifero. Fuori  $+25^{\circ}\text{C}$  e dentro  $-25^{\circ}\text{C}$

$\Delta t$  sarà  $50^{\circ}\text{C}$

l'allungamento superiore  $\rightarrow +$  sarà  $d \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot dz$

Quanto valgono  $\alpha_1 + \beta_1$ ?

$$(\alpha_1 + \beta_1) = \alpha_2$$

$$\frac{d\ell}{dz} = \alpha \frac{\Delta t \cdot dz}{h} \quad \text{di conseguenza}$$

$$\frac{d\ell}{dz} = \frac{\Delta \Delta t}{h}$$

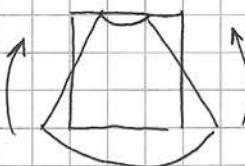
Riconosciamo  $\frac{d\ell}{dz} = \frac{M}{EI_x}$ , quando c'è la

distorsione angolare avremo una formula ampliata

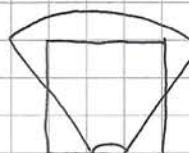
$$\frac{d\ell}{dz} = \frac{M}{EI_x} - \mu$$

### $\mu$ DISTORSIONE ANGOLARE DI TIPO DISTRIBUITO

il segno - indica che la curvatura indotta da  $M > 0$  è di segno opposto alla curvatura indotta da distorsione angolare  $> 0$



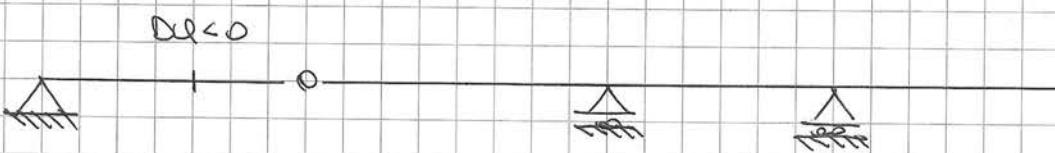
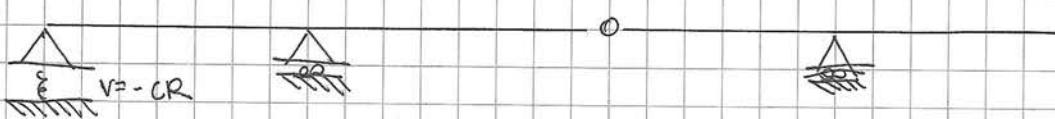
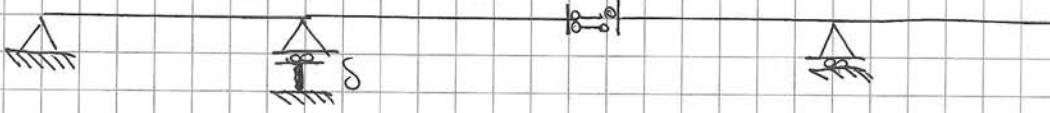
Momento f.  $> 0$



$d\ell > 0$

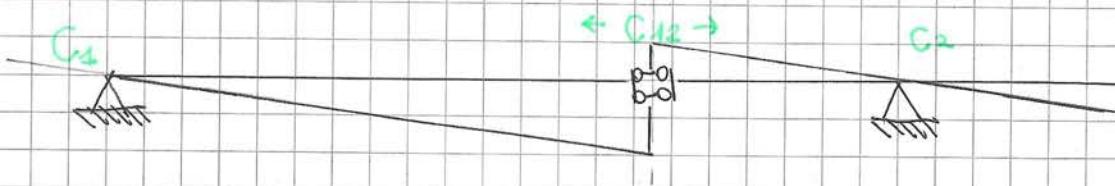
quindi opposta al momento

TRAVE (I)

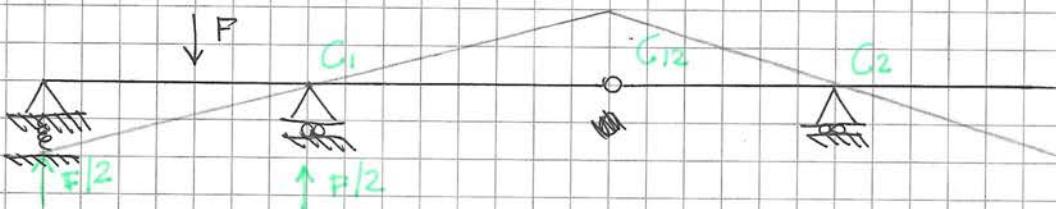


La trave I ha un vincolo che ha spostamento anelastico verso il basso di una quantità  $S$  e può essere paragonabile a una struttura elastica.

Se per un attimo cancelliamo quel vincolo avremo 3 centri



La trave II è scarica e quindi che ci sia o no il vincolo anelastico non si sposta.



Altre reazioni scariche.

$$\text{pari a } N = C \frac{F}{2}$$

mentre  $-C \frac{F}{2}$  perché supponiamo che  $\uparrow$  sia negativo

le punto A si sposta verso il basso ed è

la trave III ha una distorsione angolare che è un moto che genera per forza spostamenti.

• Possiamo poi semplificare le distorsioni con altri concetti  
momento angolare = cerchiata

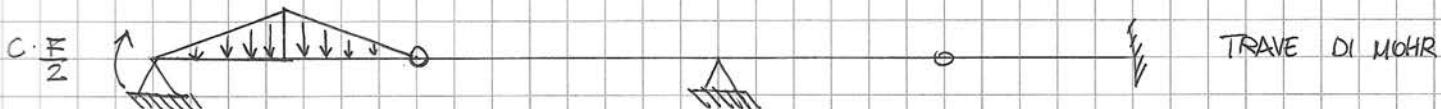
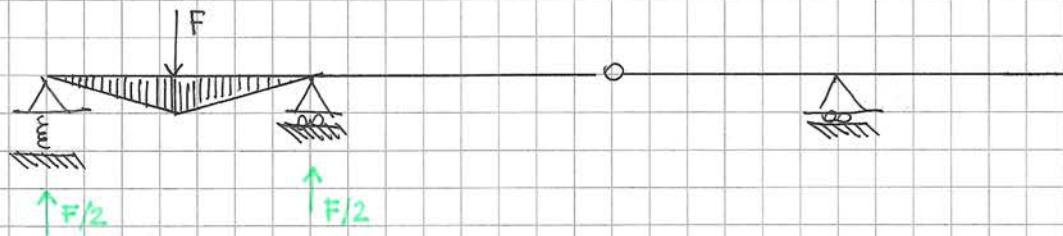
distorsione tangenziale = doppio pendolo ad asse orizzontale

distorsione assiale = doppio pendolo ad asse verticale

Nel caso III abbiamo un  $\Delta\varphi > 0$  e un  $\Delta\varphi < 0$  quindi con concio  
di apice che va verso il basso.



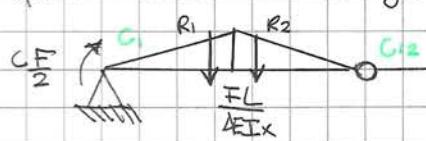
la trave I e III hanno distorsioni rigide in quanto non generano  
momento flettente. la trave II invece ha distorsioni elastiche per il  
moto contrario.



TRAVE DI MOHR

Se dovessimo calcolare  $U_B$ ? avremo da conoscere  $M_B^*$

quale sarebbe il miglior metodo per calcolare  $M_E^*$ ?



$C_2$

$C_{23}$



pomendolo  
stesse  
lunghezze  
traffici

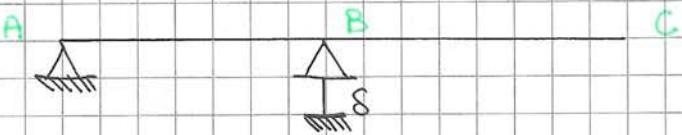
$$C_1 \cdot z_2 = 2 \cdot C_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \quad \varphi_2$$

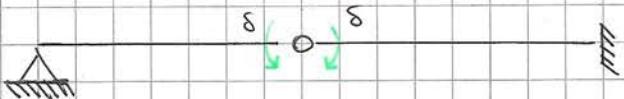
$$\varphi_{23}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1$$

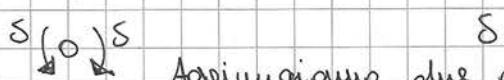
$$1 = R_1 \cdot 0 \cdot 1/3 + R_2 \cdot 0 \cdot 2/3 + C_1 \cdot 1/2 \cdot \varphi_1 - X \cdot 0 = 0$$



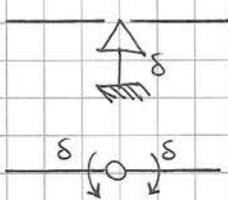
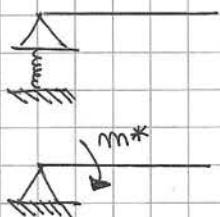
TRAVE DI MOHR



questa sarebbe la trave di Mohr senza tenere la distorsione



Aggiungiamo due coppie per avere la condizione  
che  $M^*s = M^*d = S$



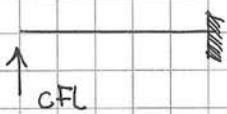
TRAVE REALE

TRAVE DI MOHR



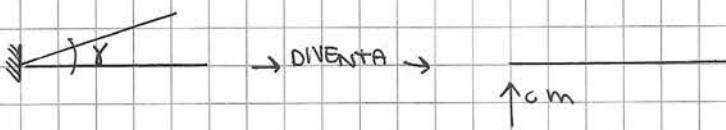
$$\varphi_A = -c \cdot R_m = -c \cdot F_l$$

$$T^* = -T$$

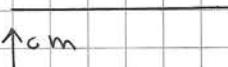


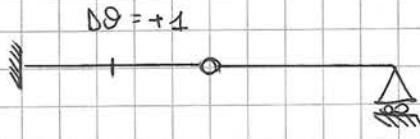
$$T_A^* = +cFL$$

$$T = -T^*$$



DIVENTA

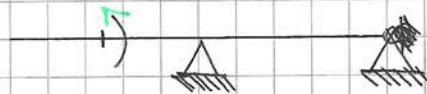




Se abbiamo  $\Delta\theta$  positivo come sarà

$\Delta V_s = ? = -1$  perché è opposto alle distorsioni.

$$\Delta M^* = -4$$



Consideriamo un concio a cui applichiamo momento

$$m=0 \quad \square \rightarrow \text{Forza di equilibrio} \\ \text{Momento}$$

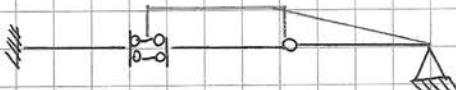
$$m=0 \quad \square \rightarrow \text{FIBRE INFERIORI TESE}$$

COPPIA ORARIA  $\Rightarrow \Delta M > 0$

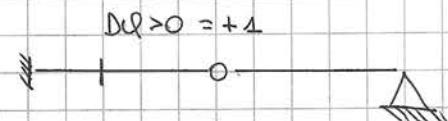
COPPIA ANTIORARIA  $\Rightarrow \Delta M < 0$

In questo caso avremo  $\Delta\theta = -1$  quindi  $\Delta M < 0$  quindi coppia anti oraria

Se consideriamo  $\Delta\theta$  come un doppio pendolo orizzontale

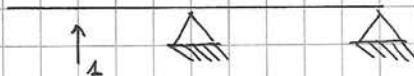


Abbiamo questo diagramma degli spostamenti



$$\Delta\theta < 0 = -1$$

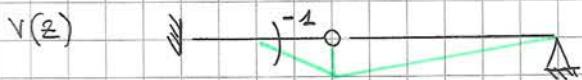
$$\Delta T^* = +1 \quad \text{perché } T^* = -4$$



$\Delta\theta$  DISTORSIONE ANGOLARE

$T=0 \quad \square \uparrow$  FORZA POSITIVA (VERSO IL BASSO)  $\Rightarrow \Delta T < 0$

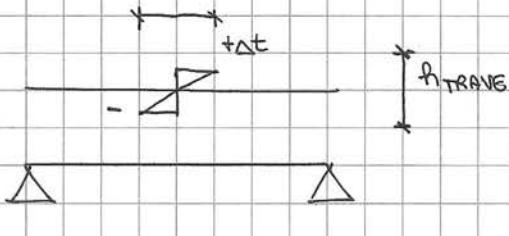
$T=0 \quad \square \downarrow$  FORZA NEGATIVA (VERSO L'ALTO)  $\Rightarrow \Delta T > 0$



TRAVE REALE  $\Delta\theta$



TRAVE MOHR



C'è una curvatura

$$\frac{d\epsilon}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \text{o} \quad q^*$$

ma  $\frac{d\epsilon}{dz} = -\mu$  che anch'esso si suppone essere  $q^*$ , ciò si sposta su T. Hooke



$$\mu = \frac{2\Delta t}{L}$$

$$\frac{d\epsilon}{dz} = \frac{M}{EI_x} - \mu$$

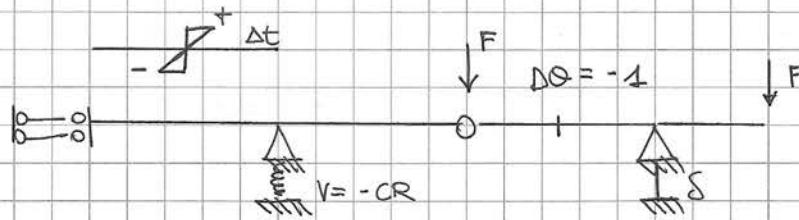
Cioè significa che momento positivo e curvatura positiva sono opposti.

Quando abbiamo un momento flettente positivo avremo un cono verso il basso. Con  $\mu$  positivo il cono è verso l'alto

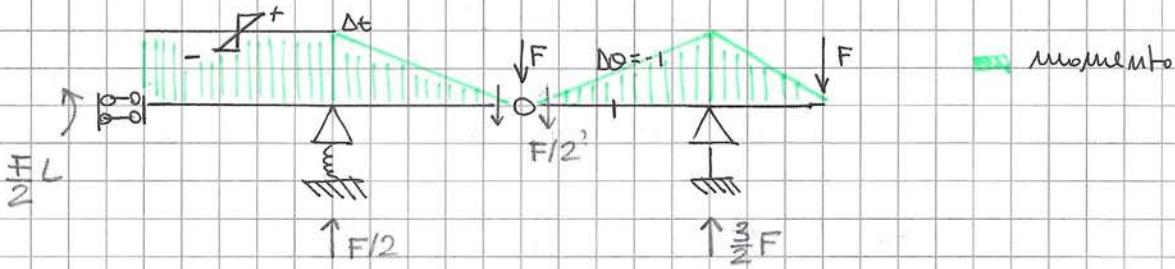
$$M > 0 \Rightarrow$$



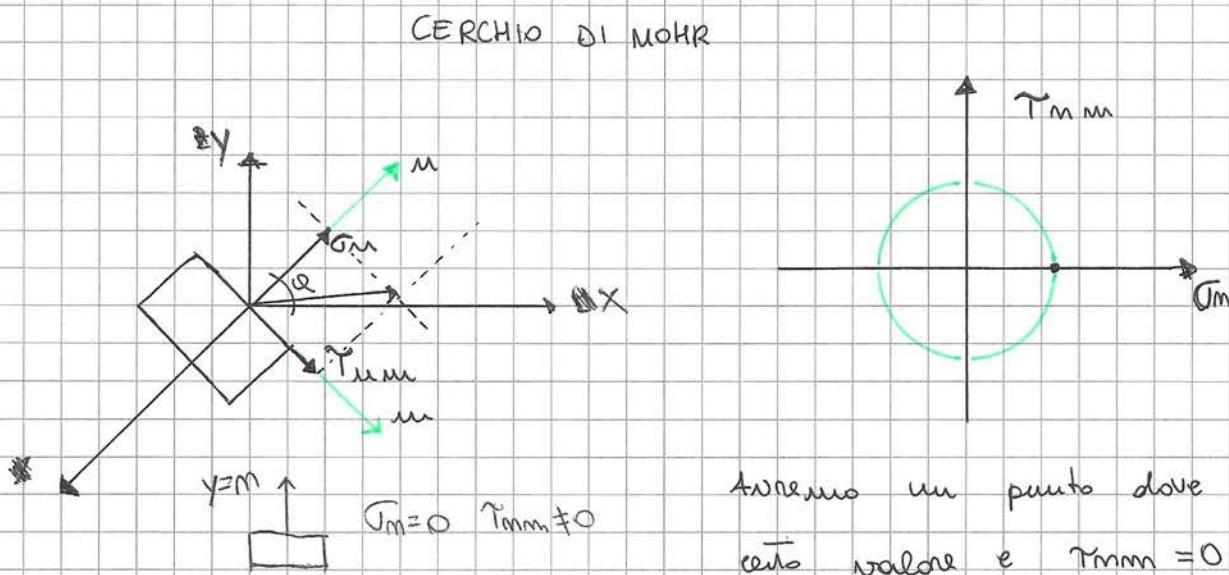
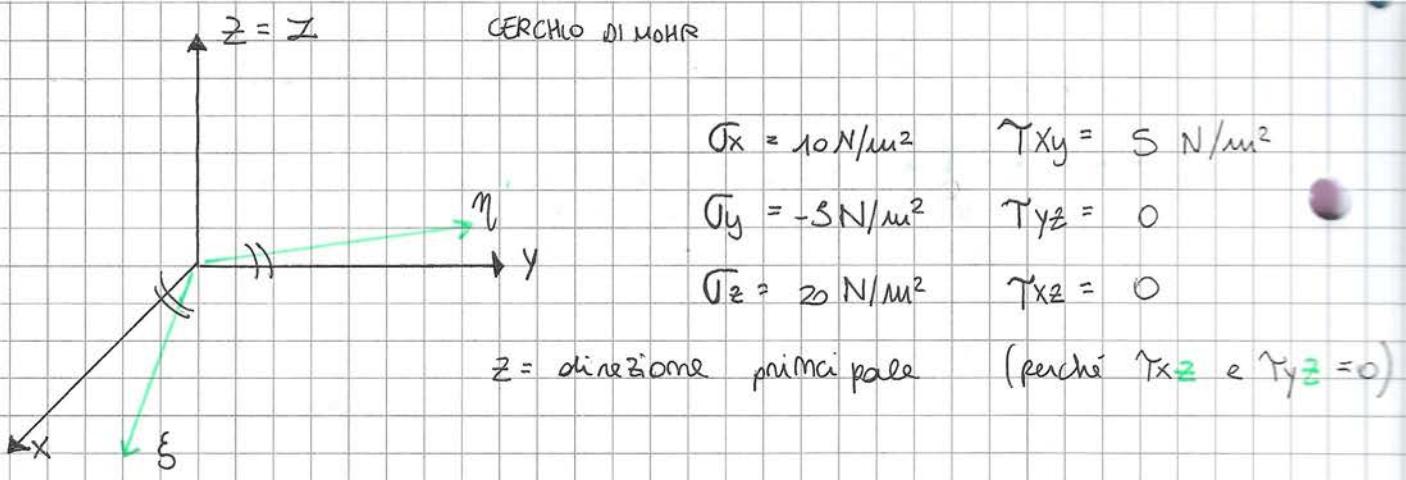
$$\mu < 0 \Rightarrow$$



$$+ L + L + L + L/2 +$$



$$\begin{matrix} \downarrow F \\ \uparrow F/2 \\ \uparrow F/2 \\ \downarrow F/2 \end{matrix}$$



troviamo un punto dove  $\tau_m$  e' un certo valore e  $\tau_{mm} = 0$

Supponiamo che ruotando questo punto si mette  $\tau_{mm}$  allineato al vettore  $\tau_u$ . Per l'angolo di rotazione ci aspettiamo che  $\sigma_u$  sia uguale a 0 perché se la faccia e' tangente al vettore tensione la  $\sigma = 0$  e  $\tau$  ha un certo valore. Continuiamo a girare trovando un altro  $\sigma$  e  $\tau$  e avremo un cerchio.

Il cerchio di Mohr si riferisce a uno stato tensionale e contiene a seconda del punto tensionale.

Quindi tutti i punti del cerchio di Mohr sono rappresentazioni di tutti gli stati tensionali agenti in un punto della superficie

Se siamo attenti, girando il cubetto possiamo individuare le rette principali dove agisce solo  $\sigma$

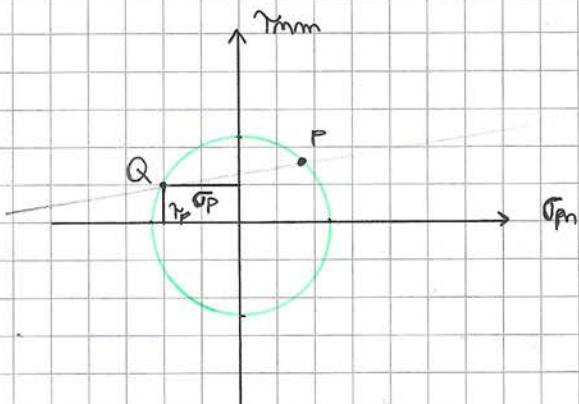
Il cerchio di Mohr ci consente di calcolare graficamente le tensioni principali e le direzioni principali di tensione

Ma se il cerchio di Mohr puo' essere usato solo quando conosciamo una delle 3 rette principali. In caso contrario vanno usate le equazioni con i coefficienti direzionali

Come si individuano le direzioni principali? Individuiamo il polo ( $P$ ) sul cerchio di Mohr

Qualsiasi retta passante per il polo

il punto di intersezione col cerchio individua una  $\sigma$  e una  $\tau$  che rappresentano lo stato tensionale che agisce su una giacitura parallela alla retta stessa.



Se prendessimo una giacitura parallela a una giacitura del cubetto parallela alla retta che unisce il punto  $P$  a un estremo del cerchio



è un punto che ha solo  $\sigma_m$  e quindi questa giacitura è una direzione principale ( SOLO SE CONOSCIAMO LA 3<sup>a</sup> DIREZIONE PRINCIPALE )  
(ovvero nel piano)

$$\sigma_x = 10 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{xy} = 5 \text{ N/m}^2$$

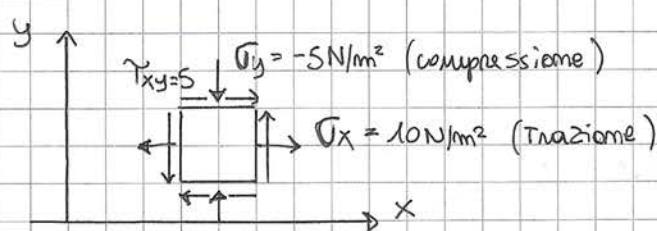
(positivo quindi alto a dx  $\rightarrow$  e basso a sx  $\downarrow$

$$\sigma_y = -5 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = 20 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{xz} = 0$$



Cosa ci serve per costruire il cerchio?

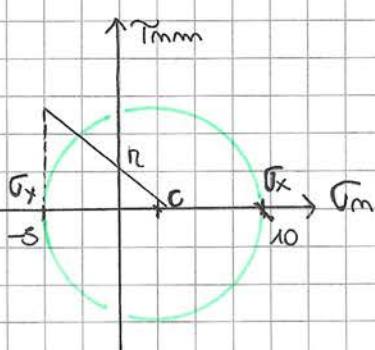
CENTRO E RAGGIO

CENTRO = punto medio  $\bar{\sigma}_x$  e  $\bar{\sigma}_y$

$r$  = ci poniamo in  $\bar{\sigma}_x$  o  $\bar{\sigma}_y$  e

saliamo di  $\tau = 5 \text{ N/m}^2$  e congiungiamo

la verticale al centro C



$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$r^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

Polo  $[P]$  = se  $\bar{\sigma}_m$  è parallelo all'asse  $X$  il polo  $P$  è uguale a

$$P = [\bar{\sigma}_x, \gamma_{xy}]$$

Ora sfruttiamo le cerchi di Mohr

convenzione segni delle tensioni:

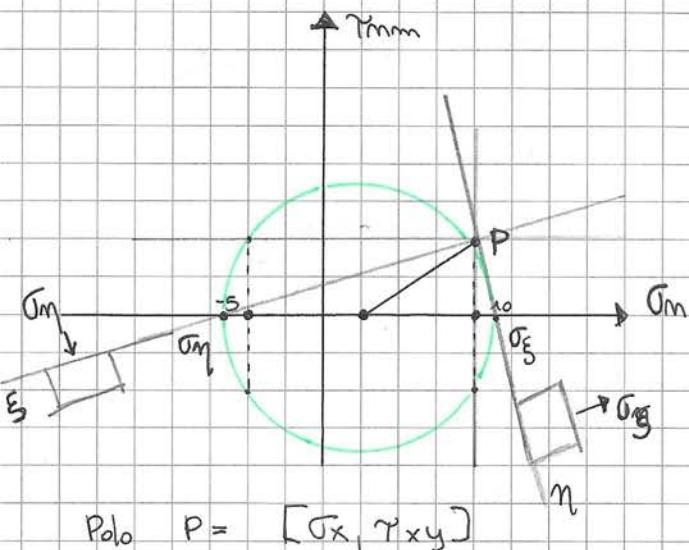
$\sigma$  trazione > 0       $\sigma$  compressione < 0



Giacitura orizzontale:

Se facciamo passare una retta orizzontale a  $P$  abbiamo rappresentato uno stato tensionale

$$\bar{\sigma}_m = -5 \text{ e } \gamma_{mm} = 5$$

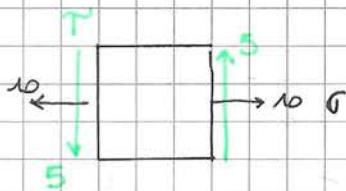


$$\text{Polo } P = [\bar{\sigma}_x, \gamma_{xy}]$$

questi valori che già conosciamo ci dicono che  $P$  è davvero il polo del cerchio

Giacitura verticale

$$\bar{\sigma}_m = 10 \quad \gamma_{mm} = -5$$

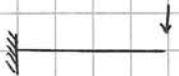


$$\bar{\sigma}_g = \left( \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y}{2} \right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\bar{\sigma}_y = \left( \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y}{2} \right) - \sqrt{\left( \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y}{2} \right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

lungo le direzioni principali avremo i massimi e minimi valori della tensione

$$\bar{\sigma}_g = \text{MAX} \quad \bar{\sigma}_m = \text{MIN}$$

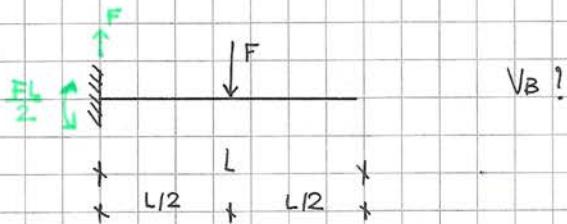


$$V_B = \frac{FL^3}{3EI_x}$$

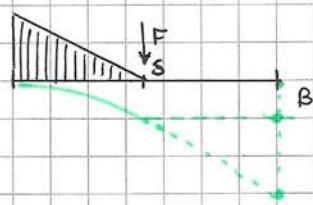
$$Q_B = \frac{FL^2}{2EI_x}$$

Ci sono tanti casi notevoli come questo che ci serviscono per travi del genere

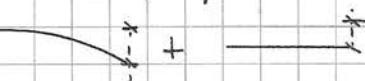
### COMPOSIZIONE CINEMATICA DEGLI SPOSTAMENTI



$V_B$ ?



Lo spostamento del punto B e' dato  
da 2 aliquote



$\downarrow F$  sappiamo che in questo caso  $V_B = \frac{FL^3}{3EI_x}$

nel caso della trave sopra dato che  $l = L/2$  avremo  $\frac{F(L/2)^3}{3EI_x}$

E' la prima aliquota.

Le tratta che va da S a B e' rigido e' sara'

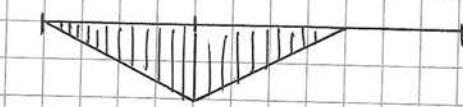
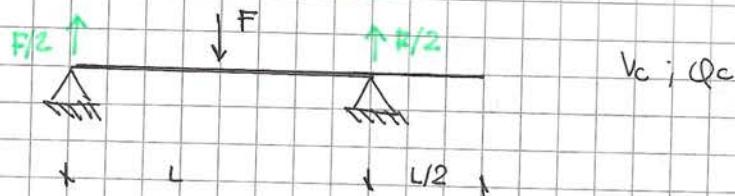
$$\begin{array}{c} 0.5 \\ \times \\ a \end{array} \quad b = Q_S = \frac{L}{2}$$

Per la trave nota avremo  $Q = \frac{FL^2}{2EI_x}$

che nel nostro specifico caso sare' :  $Q_S = \frac{F(L/2)^2}{2EI_x}$

$$e \quad B = \frac{F(L/2)^2}{2EI_x} \cdot \frac{L}{2}$$

$$V_B = \frac{FL^3}{24EI_x} + \frac{FL^3}{16EI_x} = \frac{5}{48} \frac{FL^3}{EI_x}$$



$$V_c = Q_B \cdot \frac{L}{2}$$

$$V_c = \frac{F L^2}{16 E I_x} \cdot \frac{L}{2} = \frac{F L^3}{32 E I_x}$$

~ ~ ~ ~ ~

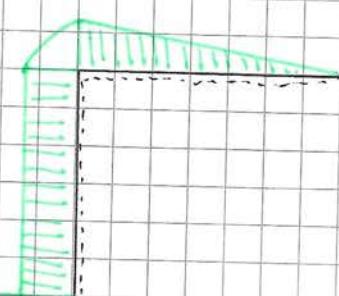


$$V_c = ?$$

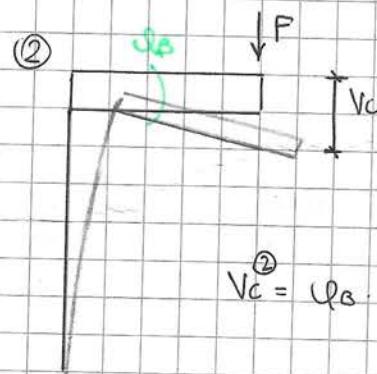
Metodo della composizione cinematica

1) DIAGRAMMA DEL MOMENTO

2) CONSIDERARE LA STRUTTURA CON 1 SOLO TRATTO ELASTICO E I RIMANENTI TRATTI RIGIDI



$$V_c^{(1)} = \frac{F L^3}{3 E I_x}$$



$$V_c^{(2)} = Q_B \cdot L$$

$$V_B = \frac{m L^2}{2 E I}$$

Supponiamo che la trave rigida ② sia curvata all'estremo sinistro un momento  $m = F \cdot L$

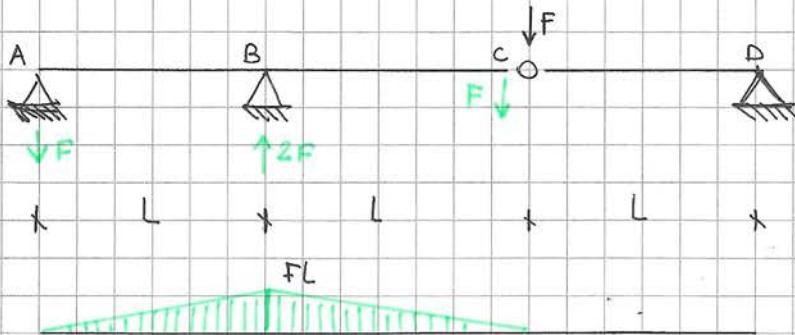
$$Q_B = \frac{m L^2}{E I}$$

$$\varphi_B = \frac{FL^3 \cdot R}{EIx}$$

$$V_C^{(2)} = \frac{FL^2 h}{EIx} \cdot L$$

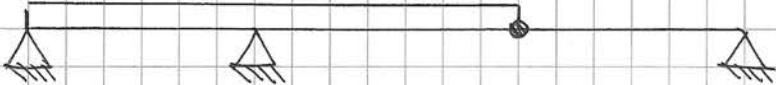
quindi  $V_C \text{ TOTALE} = \frac{FL^3}{3EIx} + \frac{FL^2 h}{EIx}$

~ ~ ~



Composiz. cinematica

I)



$$\psi_D = 0 \quad \text{perché questa}$$

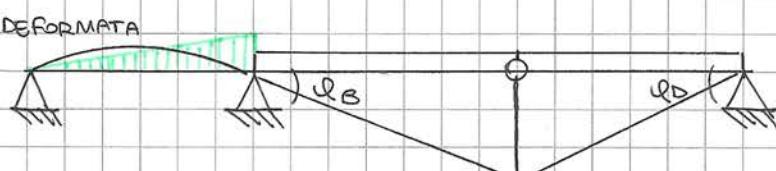
struttura dovrebbe deformarsi ma non può perché è rigida e la trave elastica è scarica

II)



$$\psi_D = V_C / L = \frac{FL^3}{3EIx} \cdot \frac{1}{L} = \frac{FL^2}{3EIx}$$

III)



$$\psi_D = \frac{V_C}{L}$$

$$V_C = \psi_B \cdot L$$

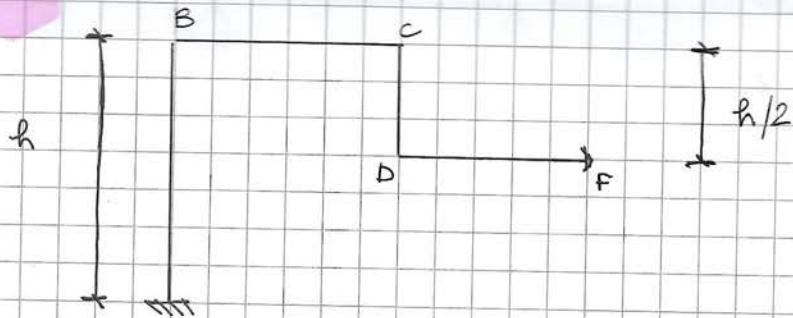
$$\psi_B = \frac{FL}{3EIx}$$

$$V_C = \frac{FL^2}{3EIx} \cdot L = \frac{FL^3}{3EIx}$$

$$\psi_D = 0 + \frac{FL^2}{3EIx} + \frac{FL^2}{3EIx}$$

Nella trave II la parte elastica si assimila a una trave 

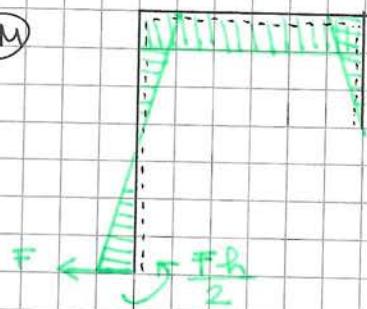
Nella trave III invece sarà 



VD?

WD?

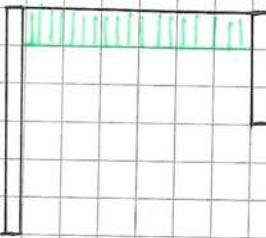
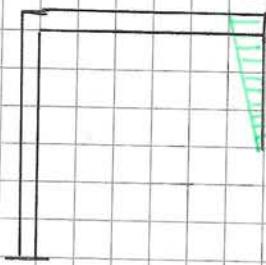
(M)



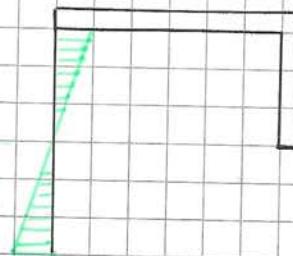
NON HA TENSIONE SFORZO

→ F

I



(T)



# PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

E' un qualcosa che funziona non si sa bene come

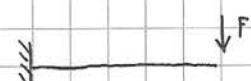
le PLV ci basa su un concetto che e'  $F \times S = L$  forza x spostamento ci da lavoro

Prima con le travi rigide togliiamo un rinculo e sostituiranno la reazione.

Calcolando poi pensando alle altre reazioni = 0

In questo metodo però avremo le **Fonze esterne** uguali alle **interne** come lavoro

$$L_e = L_i$$



Fonze esterne  
 $F_x, F_y, m$

Fonze interne  
 $M, N, T$

Reazioni rinculanti

Se dolessimo prendere tutti i lavori dati dai momenti per le forze interne sommandoli tra loro avremo degli integrali

Nella forma più generale il PLV è:

$$L_e = F_i \cdot S_i + R_j \cdot S_j + R_k \cdot (-c R_k)$$



Relazione omelastica ( $j$ )  
per le sue spostamenti  $S$

Reazioni  $R$  dove  $k$  indica i cedimenti elasticci e  $-c R_k$  gli spostamenti

~~momenti~~



$$\frac{M \cdot dz}{E I_x}$$

$$(M) \left( \frac{M \cdot dz}{E I_x} \right)$$

Supponiamo di avere un rinculo con momento, avremo una deformazione a cuspidi e il lavoro sarà dato da momento  $\cdot$  deformata

$$N \leftarrow \square \rightarrow N$$



$$\frac{N \cdot dz}{E A}$$

$$(N) \left( \frac{N \cdot dz}{E A} \right)$$

A = Area sez trasversale della trave



$$\chi \frac{T \cdot dz}{G A}$$

$$(T) \left( \chi \frac{T \cdot dz}{G A} \right)$$

FATTORE DI TAGLIO

$$L_i = \int_s M \left( \frac{M dz}{EI} \right) + \int_s N \left( \frac{N dz}{EA} \right) + \int_s T \left( X \frac{T dz}{GA} \right)$$

$\int_s$  integrale esteso alla struttura  $S$ .

ma il momento, taglio e sforzo lavorano anche per le deformazioni quindi aggiungiamo

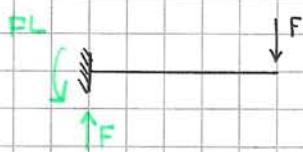
$$L_i = \int_s M \left( \frac{M dz}{EI} \right) + \int_s N \left( \frac{N dz}{EA} \right) + \int_s T \left( X \frac{T dz}{GA} \right) + - \int_s M' u ds - \int_s N' x ds - \int_s T' \theta ds$$

davanti alle distorsioni c'è il segno meno perché ricordando ci sono opposti a momento, taglio, sforzo.

Per essere validi i.e. pli obbliamo avere un Sistema di Forze in EQUILIBRIO, Spostamenti PICCOLI e CONGRUENTI

le forze in questo caso non sono soggette dagli spostamenti: (NESSUN LEGAME) cioè non dipendenti ad esempio da una catena cinemática (possiamo considerare lo spostamento sia sopra che sotto)





S.S.

Gli spostamenti ci andiamo a leggere su un altro sistema

Sistema

Spostamenti:



Lavoro forza esterna:  $L_e = F \cdot S_B$

Lavoro forze interne:  $L_i = \int_0^L M' \cdot \frac{M \cdot dz}{E I_x}$

Eguagliamus  $L_e = L_i$

$$F \cdot S_B = \int_0^L M' \cdot \frac{M dz}{E I_x}$$

$$M' = -F(l-z) \quad \begin{array}{l} \text{per } z=0 \quad M'= -FL \\ \text{per } z=l \quad M'= 0 \end{array}$$

Ipotizziamo che la  $F$  sia pari ad 1

viene fuori che  $M' = -(l-z)$

$M = -m$  funzione costante

$$\text{quindi } L_e = 1 \cdot S_B = \int_{-l}^l [-(l-z)] \cdot (-m) dz = \int_0^l m(l-z) dz$$

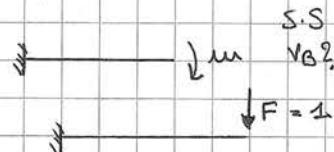
$$1 \cdot S_B = \frac{m}{EI} \int_0^l (l-z) dz = \frac{m}{EIx} \left[ lz - \frac{z^2}{2} \right]_0^l = \frac{ml}{EIx} \frac{l^2}{2}$$

$$1 \cdot S_B = \frac{ml^2}{2EIx}$$

Regole per applicare PLV.

- 1) Partire dalla struttura iniziale e lo assumiamo come sistema spostamenti
- 2) Si sceglie un sistema forza caricato con ente duale (unitario) dello spostamento ricercato

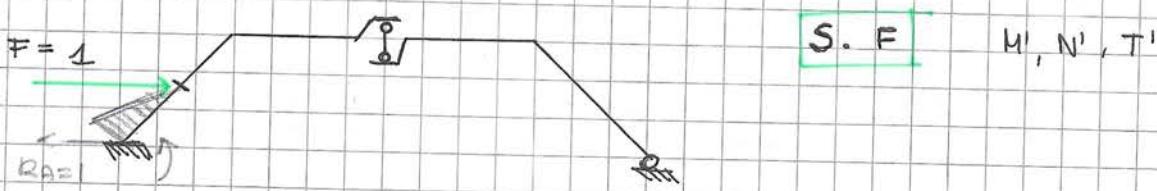
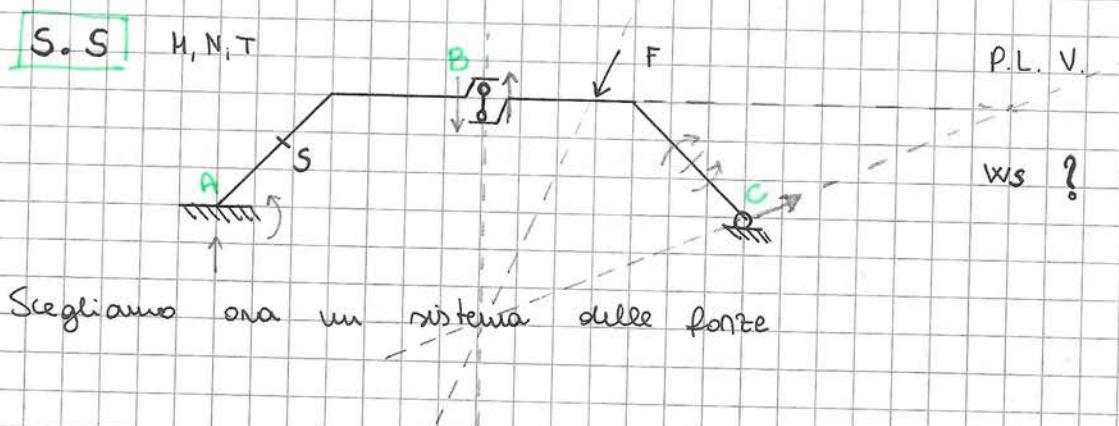
Esempio: Se cerchiamo  $V_B$  applicheremo una forza verticale



- 3) Poniamo  $L_e = L_i$  che in questo caso ci dà  $V_B$ .

## CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI

- 4 INTEGRAZIONI | Si applicano quando necessitiamo dell'integrazione della funzione spostamento
- COROLLARI DI MOHR | Metodo per i calcoli di 1 o 2 spostamenti
- METODO COMPOSIZIONE CINEMATICA | Ci permette di calcolare spostamenti su telai
- PLV | Utilizzabile per tutte le strutture e si basa sui lavori virtuali



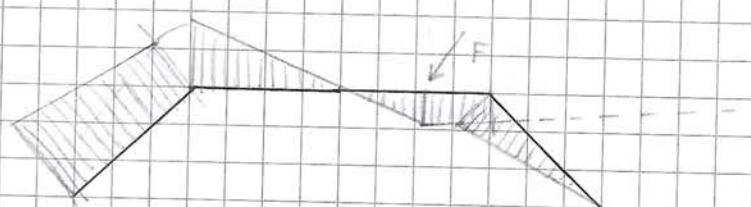
$$L_e = L_i$$

$$L_e = 1 \cdot w_s$$

$$L_i = \int_s M \cdot \frac{M}{EI_x} ds + \int_s N \cdot \frac{N}{EA} ds + \int_s T \cdot \frac{T}{GA} ds$$

Per le nostre travi in genere il lavoro del taglio è trascurabile rispetto al momento e sforzo.

In alcuni casi possiamo anche trascurare il momento o lo sforzo a seconda dei casi



In questo caso trascuriamo es. sforzo normale

$$z \int_A^S M' \frac{Mds}{EI}$$

$\int_A^S$  perché sul S.F non abbiamo momento  
oltre A-S



dopo S. stato che è tutto scarico

Se le sforze sono tutte fuori positivo vuol dire che le sforze e' positivo e  
qui noi concordate alla forza

$$1 \cdot ws = \int_A^S M' \frac{Mds}{EI}$$

quindi questo valore positivo ci dice che è concorde

alla forza

$$\int_A^S$$
 positivo perché

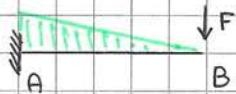


MOMENTO NEGATIVO



MOMENTO POSITIVO

S.S.



$$V_B = \frac{F L^3}{3 E I_x}$$

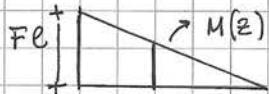
S.F



$$L_e = 1 \cdot V_B = u_i = \int_S M \cdot \frac{M'}{E I_x} dz$$

$$M = -F \cdot (e - z)$$

$$M' = -1 \cdot (e - z)$$



$$M(z) : (L - z) = -Fe : L$$

$$z + L - z$$

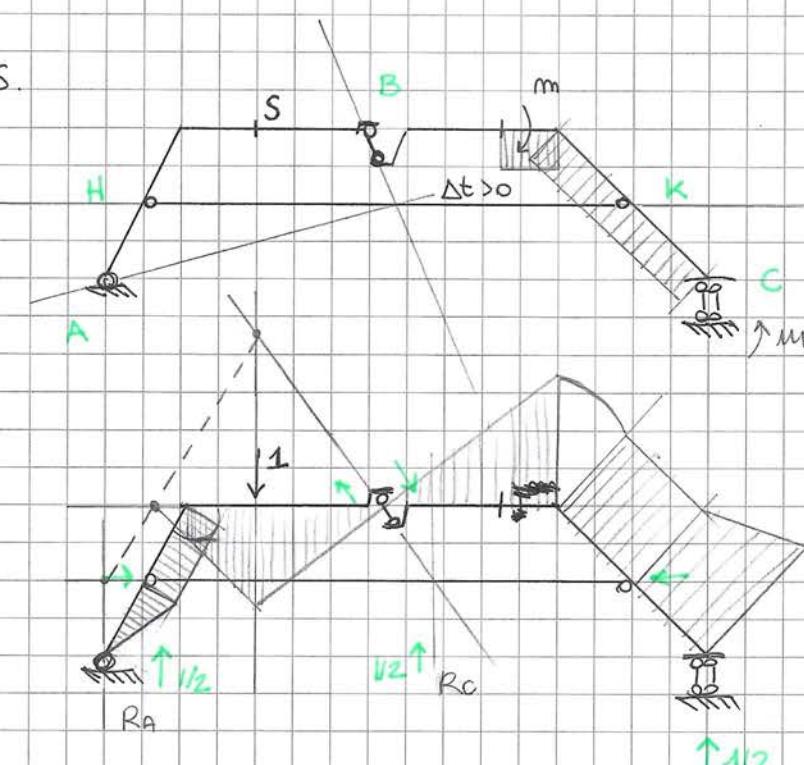
$$M(z) = -F(e - z)$$

$$1 \cdot V_B = \int_0^L F(e - z)(e - z) dz = \left[ \dots \right]_0^L = \frac{FL^3}{3EI}$$

~ ~ ~ ~ ~

S.S.

Vs?



$$R_A + R_B + R_p = 0$$

$$R_B + R_p + R_c + m = 0$$

$$R_A + m + R_c = 0$$

$$R_A + R_p + F + R_B = 0$$

$$R_B + R_p + R_c = 0$$

$$R_A + F + R_c$$

$$1 \cdot V_s = \int_S M' \frac{M}{E I_x} ds + \int_S N' \frac{N}{E A} ds - \int_h^k N' \lambda ds$$

Una forza  $R_c$  del corpo S.S. dovrebbe per l'equilibrio annullare un momento, ma ciò non è possibile perché avremmo una coppia di trascinamento diverso from avendo le pendole // al momento

$$\sigma_x = 10$$

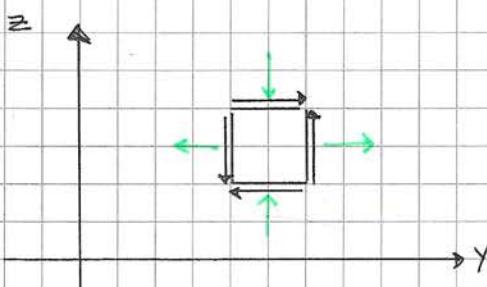
$$\tau_{yz} = 5$$

$$\tau_{xy} = 20$$

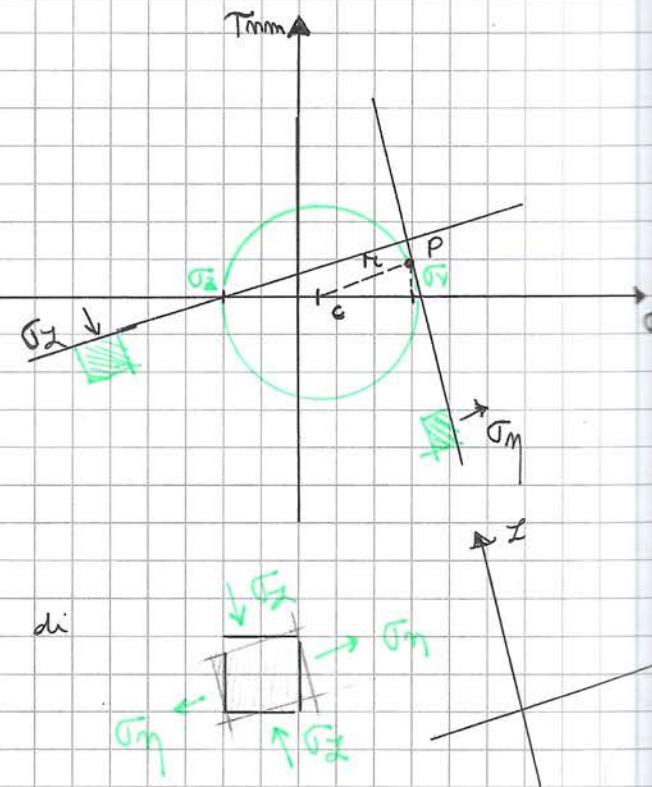
$$\sigma_z = -10$$

X DIREZIONE PRINCIPALE

$$x = \xi$$

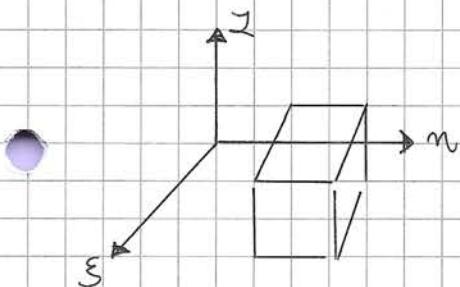


$$\text{Polo } p = (\tau_y; \tau_{yz})$$



le cerchio di Mohr ha la particolarita' di avere nei due estremi  $\sigma_m = \sigma_z, \sigma_p$  delle tensioni principali.

la terza tensione principale e'  $\sigma_x = \sigma_\xi = 10$  che potremo riportare nel cerchio.

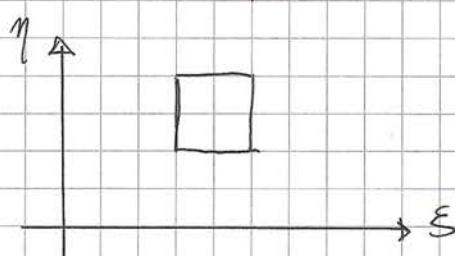


Annesso soltanto  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Se vedessimo il cubetto dall'alto

vedremmo gli assi  $\eta, \xi$

invece guardando dal lato  $\eta$  vedremo gli assi  $\xi, z$

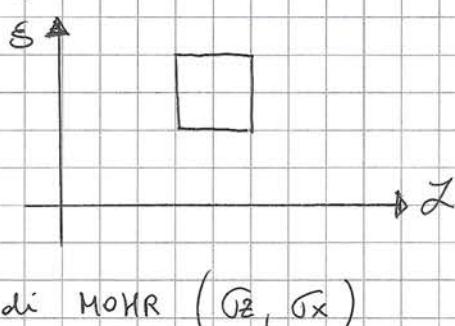


Se consideriamo un cubetto negli

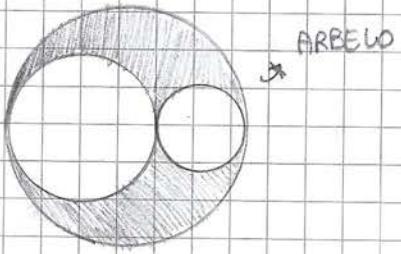
assi  $\eta, \xi$  avremo tutti gli stat-

tensionali sul cerchio di Mohr ( $\sigma_x, \sigma_y$ )

per gli assi  $\xi, z$  avremo il cerchio di Mohr ( $\sigma_z, \sigma_x$ )



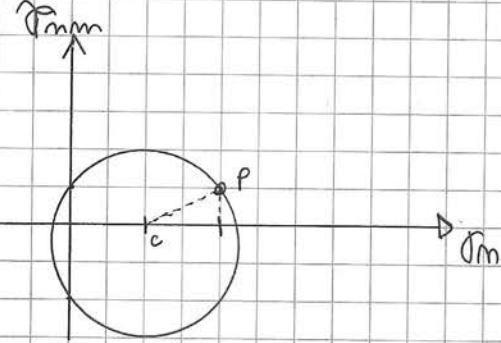
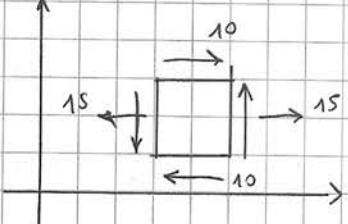
Se invece guardando il disegno tridimensionale non guardiamo le cubette negli assi rot., gli stessi tensionali saranno compresi nel ARBELLO DI MOHR



$$\begin{array}{l|l} \sigma_x = 15 & \gamma_{xy} = 10 \\ \sigma_y = 0 & \\ \sigma_z = 0 & \end{array}$$

$\tau_z$  coincide con  $\sigma_z$

le fatto che  $\sigma_z = 0$  ci dice che le tensioni sono contenute in un piano



## RELAZIONI ELASTICHE

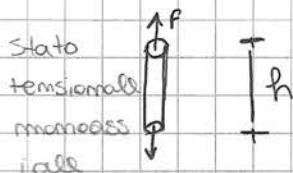
Sono relazioni che legano cause e effetti

Abbiamo studiato le DEFORMAZIONI e le TENSIONI

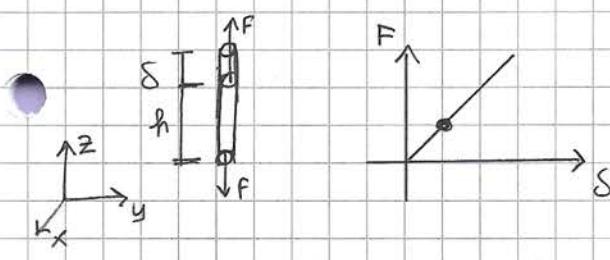
$$\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}$$

Immaginiamo di avere un cilindretto di materiale e applichiamoci una forza.



Immaginando fissa la base si suppone che si deforma e che si porti da  $h$  a  $h+s$



Per valori limitati della forza se noi applichiamo una forza abbiamo un certo spostamento e se raddoppiamo la forza anche lo spostamento raddoppia

le tensioni saranno semplicemente una  $\sigma_z$  in un intorno del corpo in questo particolare caso. Se conosciamo l'area, la tensione  $\sigma_z$  si può dire che sarà data da  $\frac{F}{A} \rightarrow$  Sezione trasversale

Se il tondino si allunga di  $s$  possiamo identificare  $\epsilon_z$  che sarà data da  $\frac{s}{h}$

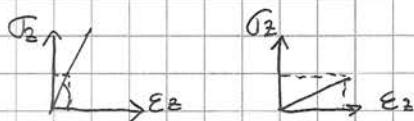
$$\epsilon = \frac{s}{h}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z} \quad \text{oppure} \quad \alpha = E \text{ modulo di Young}$$

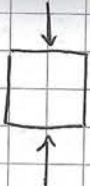


(E) rappresenta il rapporto tra tensione e deformazione

Più propriamente il modulo di Young è di rigidezza elastica quanto più è grande l'angolo tanto più è rigido E



A parte di  $E$  a sinistra un  $E$  minore



Prendiamo in esame questo cubetto. Come la compressione verticale fisicamente avremo anche un allungamento orizzontale dovuto all'appiattimento. Anniolti a una sola  $\sigma_2$  possiamo conniugare più  $\epsilon$ .  $\sigma_2 = \epsilon_2, \epsilon_x, \epsilon_y$

allo stesso modo alle  $\gamma$  potrebbero conniugare degli  $\epsilon$  e solo  $\Gamma$  ciò può non possedere rapporto e per questo scriveremo delle relazioni:

$$\sigma_x = c_{11} \epsilon_x + c_{12} \epsilon_y + c_{13} \epsilon_z + c_{14} \gamma_{xy} + c_{15} \gamma_{yz} + c_{16} \gamma_{zx}$$

chi sono  $c_{11}$  ecc? sono costanti elastiche dei materiali che identificano la relazione tra questi parametri

Prendiamo  $\sigma_x = c_{11} \epsilon_x$ . Abbiamo visto che  $\frac{\tau_{yd}}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \Rightarrow E$   
quindi già conosciamo  $c_{11} = E$

$$\sigma_y = c_{21} \epsilon_x + c_{22} \epsilon_y + c_{23} \epsilon_z + c_{24} \gamma_{xy} + c_{25} \gamma_{yz} + c_{26} \gamma_{zx} \quad \text{ecc...} \quad \sigma_2 = \dots$$

$$\tau_{xy} = c_{41} \epsilon_x + c_{42} \epsilon_y + c_{43} \epsilon_z + c_{44} \gamma_{xy} + c_{45} \gamma_{yz} + c_{46} \gamma_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \dots$$

$$\tau_{zx} = \dots$$

In generale per un materiale le costanti elastiche che legano lo stato tensionale a quello di deformazione sono 36, (matrice  $6 \times 6$ )

Avremo che generalmente le  $\Gamma$  si corrispondono sempre alle  $\epsilon$  tranne se il modulo di young. Ad esempio  $\Gamma_x, C_{11} \epsilon_x \mid \Gamma_y, C_{22} \epsilon_y \mid \Gamma_z, C_{33} \epsilon_z$ .

Ma calcolare 36 costanti elastiche è un lavoro molto oneroso e possiamo quindi immaginare di fare ipotesi su diversi materiali.

1) **Materiale elastico e lineare**

2) **Materiale conservativo** (Se spendiamo energia per deformare il prossimo abbiamo consumato lavoro. Questa energia è finita all'interno del corpo come energia elastica)

3) **Materiale omogeneo** (All'interno ad esempio l'acciaio è sempre uguale come reticolato mentre il calcestruzzo ad esempio è formato da aggregati cemento, sabbia)

4) **Materiale isotropo** (ha gli stessi componenti in ogni punto del corpo) L'acciaio, il vetro e il calcestruzzo sono isotropi, il legno se tagliato in direzione trasversale o longitudinale c'è una direzione più debole (longitudinale, legname più debole)

2) Se facciamo olivare  $\frac{\partial \Gamma_x}{\partial \epsilon_x} = C_{11}$  avremo solo un termine positivo

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial \epsilon_y} = C_{12} \quad \frac{\partial \Gamma_y}{\partial \epsilon_x} = C_{12} \quad . \quad \frac{\partial \Gamma_y}{\partial \epsilon_y} = C_{22}$$

notiamo che le derivate miste sono uguali e diventa simmetrico lungo le diagonali principali.  $C_{12} = C_{21}$   $C_{31} = C_{13}$  ecc...

qui non abbiamo 36 componenti ma la metà ( $18 + 3$ ) più le costanti del materiale per la diagonale principale che sono 3.

4) con questa proprietà le costanti del materiale si riducono solo a 2 costanti del materiale.

Costanti elastiche

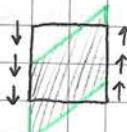
Materiale  $\left. \begin{array}{l} \text{conservativo} \\ \text{isotropo} \end{array} \right\}$

$E \rightarrow$  modulo di young,  $G = \text{modulo elastico trasversale}$



Avevamo che  $\sigma$  costanti ai lati avremo una sollecitazione di tipo simmetrico.

quindi se il prossimo si allunga un lato anche l'opposto si allunga di pari lunghezza



Se applichiamo forze tangenzialmente alle facce del prossimo assomigliano a delle  $\gamma$  e quindi saranno eliminate. Quindi restano simmetriche ma opposte

Nel primo prossimo avremo degli  $\epsilon$  che sono stati causati da  $\sigma$

Nel secondo abbiamo degli spostamenti lungo cui e ci saranno deformazioni  $\gamma$  causate da  $\gamma$

Possiamo identificare la matrice di componenti grazie alle Relazioni dirette di Navier che legano le  $\epsilon$  alle  $\sigma$  e  $\gamma \rightarrow \gamma$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{\nu} \right) \text{ modulo di POISSON}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\nu} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_y + \sigma_x}{\nu} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\gamma_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\gamma_{xz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{G}$$

RELAZIONI DIRETTE DI NAVIER

Definiamo il modulo di Poisson  $\frac{1}{m}$ . E' dato da E<sub>TRASVERSALE</sub>  
E LONGITUDINALE

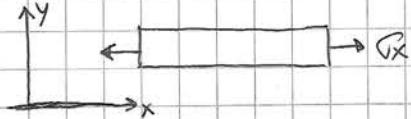
Consideriamo le prime due relazioni di Navier

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

immaginiamo di avere solo  $\sigma_x \neq 0$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right)$$

il prossimo sarebbe



Assumiamo che la  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ , invece la  $\epsilon_y$  (TRASVERSALE) =  $-\frac{\sigma_x}{Em}$

quindi  $\frac{1}{m} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$  Modulo di contrazione trasversale (POISSON)

più è grande questo modulo e più avremo deformazioni trasversali

I limiti teorici del modulo sono  $-1 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$

per oggetti reali nel mondo questi limiti diventano  $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$   
avendo nessun materiale ha modulo di poisson negativo.

~ ~ ~

Adesso proviamo a definire  $G$ . (modulo di elasticità tangenziale)

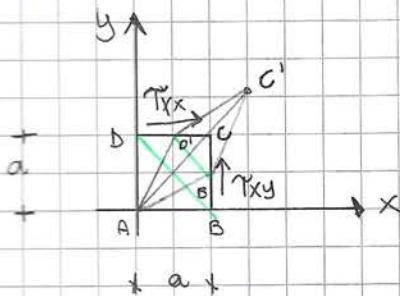
Questo modulo è quello che lega  $\epsilon$  alle  $\tau$

$$G = \frac{E}{2(1+1/m)}$$

$E$  (modulo di young) ha come dimensioni  $\frac{F}{S}$  <sub>ORECA SUPERFICIE</sub>

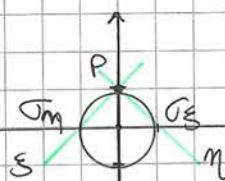
$\frac{1}{m}$  è il rapporto di due  $E$ , quindi è adimensionale

Allora  $\epsilon/m$  avrà sempre  $\frac{F}{S}$  come grandezza



Se il cubetto è elastico subirà deformazioni.

Dalla spinta delle due  $\tau$  possiamo pensare si deformi in questo modo.



$$\tau_{xy} \neq 0$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

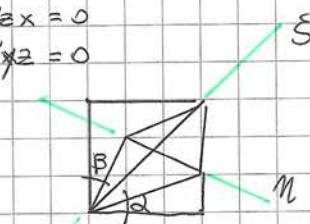
$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{zx} = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{zy} = 0$$



cubetto perfettamente simmetrico nel centro degli assi

$$\sigma_y, \sigma_z = \tau_{xy}$$

$$\rho = (\sigma_x, \tau_{xy})$$

la deformazione  $c - c'$  e' data da cosa? dalla E + INIZIALE

quindi  $cc' = (\alpha\sqrt{2})\varepsilon_S$

↳ diagonale di un quadrato (lato  $\sqrt{2}$ )

Ricordando che le  $\varepsilon$  sono collegate a  $\gamma$  da NAVIER

$$\varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E} - \left( \frac{\sigma_m + \sigma_z}{E_m} \right)$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} - \left( \frac{\sigma_S + \sigma_z}{E_m} \right)$$

Nel nostro caso  $\sigma_z = 0$

$$cc' = (\alpha\sqrt{2}) \left( \frac{1}{E} \left[ \sigma_S - \frac{\sigma_m}{m} \right] \right)$$

$$\sigma_S = \gamma_{xy}$$

svoltando in  $cc'$  ottieniamo.

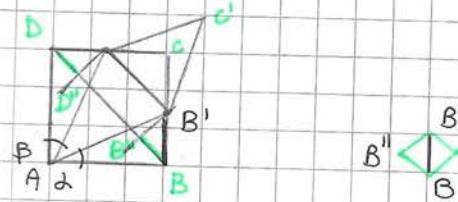
$$\sigma_m = -\gamma_{xy}$$

$$cc' = \alpha\sqrt{2} \frac{1}{E} \gamma_{xy} \left( 1 + \frac{1}{m} \right), \text{ questa equazione descrive l'allungamento}$$

della diagonale. Di conseguenza, l'accorciamento della diagonale

$$BB'' = DD'' = \frac{cc'}{2}$$

$$BB'' = BB'' \cdot \sqrt{2}$$



considerando come  $BB''$  di un quadrato di lato  $BB''$

$$BB' = \alpha \frac{\gamma_{xy}}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$DD' = BB'$$

$$\alpha = \frac{BB'}{AB} = \left( \alpha \frac{\gamma_{xy}}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right) \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma_{xy}}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\beta = \alpha$$

$$\gamma_{xy} = 2 \frac{\gamma_{xy}}{E} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \gamma_{xy}$$

di conseguenza

$$G = \frac{E}{2(1 + 1/m)}$$

Sapendo che  $G$  e' pari a questa quantita'

dove essere sempre positiva così come  $E$ . Questo perché il lavoro delle forze interne deve essere positivo.