APPUNTI DEL CORSO
DI
ANALISI MATEMATICA II

Prof. B. Messano - Prof. T. Radice

A.A. 2020/2021

2 maggio 2020

Questi appunti hanno l'obiettivo di offrire un agile strumento di studio approfondito e al tempo stesso di rapida consultazione agli studenti che devono acquisire i fondamenti dell'Analisi Matematica.

Sono qui affrontati tutti gli argomenti previsti in un modulo di Analisi Matematica II (da 9 CFU).

L'esposizione teorica dei singoli argomenti è accompagnata da una serie di esercizi, completamente svolti, che ne esemplificano gli aspetti pratico-applicativi.

La trattazione nel suo insieme è il frutto di un lungo lavoro di riflessione teorica e di insegnamento.

Prof. B. Messano

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",

Univ. Napoli "Federico II",

Ple Tecchio 80, 80125 Napoli (Italy)

e-mail: messano@unina.it

Prof. T. Radice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",

Univ. Napoli "Federico II",

Ple Tecchio 80, 80125 Napoli (Italy)

e-mail: teresa.radice@unina.it

Indice

Capitolo 1

Successioni di funzioni.

1.1 Convergenza puntuale e convergenza uniforme di una successione di funzioni.

Sia I un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, φ_n una funzione reale definita in I. L'applicazione :

$$: n \in \mathbb{N} \to \varphi_n$$

si chiama *successione di funzioni definite in I* e si denota con uno dei simboli:

$$\{\varphi_n\}, \quad (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{1.1}$$

Si dice che $\{\varphi_n\}$ *è uniformemente limitata in I*, o *equilimitata*, se:

$$\exists\ l \in]0, +\infty[\ :\ |\varphi_n(x)| \leqslant l, \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 1.1.1. *La successione $\{\varphi_n\}$ è convergente* (risp. *divergente, non regolare*) *nel punto $x \in I$* se la successione numerica:

$$\{\varphi_n(x)\}$$

è convergente (risp. *divergente, non regolare*). *Inoltre, la successione $\{\varphi_n\}$ si dice* (*puntualmente*) *convergente nel sottoinsieme I' di I se, per ogni $x \in I'$, la successione numerica $\{\varphi_n(x)\}$ è convergente.*

L'insieme:

$$X = \{x \in I : \{\varphi_n(x)\} \text{ è convergente}\}$$

si chiama *insieme di convergenza della* $\{\varphi_n\}$.
Se X è non vuoto, allora la funzione:

$$\varphi : x \in X \to \lim_n \varphi_n(x) \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

si chiama *funzione limite della successione* $\{\varphi_n\}$.
Siccome, per ogni $x \in X$, risulta:

$$\lim_n \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

allora si ha che

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_{x,\varepsilon} :\ n > \nu_{x,\varepsilon} \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Se è soddisfatta la condizione (1.3) si dice che la successione $\{\varphi_n\}$ *converge puntualmente in* X *alla funzione* φ.

Definizione 1.1.2. *Siano* X *l'insieme (non vuoto) di convergenza della successione* $\{\varphi_n\}$ *e* φ *la funzione limite della successione* $\{\varphi_n\}$. *Si dice che* $\{\varphi_n\}$ *converge uniformemente a* φ *in* X *se:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X;$$

per denotare che $\{\varphi_n\}$ *converge uniformemente a* φ *si usa il simbolo:*

$$\varphi_n \xrightarrow{u} \varphi.$$

Utile nelle applicazioni è la seguente:

Proposizione 1.1.3. *La successione* $\{\varphi_n\}$ *converge uniformemente a* φ *in* X *se e solo se:*

$$\lim_n \left(\sup_X |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \right) = 0.$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\varphi_n \xrightarrow{u} \varphi \,\text{in}\, X \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \forall x \in X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\, \exists\nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in X}|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_n(\sup_X|\varphi_n(x) - \varphi(x)|) = 0.$$

L'asserto è così dimostrato. □

Esempio. La successione $\{\varphi_n\}$ definita da:

$$\varphi_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

converge puntualmente in $[0,1]$ alla funzione:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1[; \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Inoltre, essendo $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1[; \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

risulta $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{[0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \sup_{[0,1[} x^n = 1,$$

quindi, per la Proposizione 1.1.3 la successione $\{\varphi_n\}$ non converge uniformemente a φ in $[0,1]$.

Ora, consideriamo un $b \in [0,1[$ e la successione $\{\varphi_n\}$ con $\varphi_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0,b]$. Ovviamente la successione $\{\varphi_n\}$ converge alla funzione $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in [0,b]$, ed inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$\sup_{[0,b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \sup_{[0,b]} x^n = b^n$$

quindi:

$$\lim_n \sup_{[0,b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \lim_n b^n = 0,$$

dunque $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente in $[0,b]$.

Teorema 1.1.4. (**Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale**) *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni reali definite in X. Le proposizioni seguenti sono equivalenti:*

1. *$\{\varphi_n\}$ converge puntualmente in X.*
2. *$\forall x \in X$, la successione numerica $\{\varphi_n(x)\}$ è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. L'asserto è immediato visto che, per la completezza di $\mathbb{R}$, ogni successione di Cauchy è convergente.

□

Teorema 1.1.5. (**Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme**) *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni reali definite in X. Le proposizioni seguenti sono equivalenti:*

1. *$\{\varphi_n\}$ converge uniformemente in X.*
2. *$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon$: $n, m > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$. Detta φ la funzione limite della successione $\{\varphi_n\}$, per le ipotesi fatte si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon : h > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_h(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X, \tag{1.6}$$

conseguentemente, essendo:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leqslant |\varphi_n(x) - \varphi(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi(x)|,$$

dalla (1.6) segue la 2.

$2 \Rightarrow 1$. Dalla 2 e dal Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale segue che $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente in X. Detto φ il limite di $\{\varphi_n\}$, qualunque sia $x \in X$, risulta:

$$\lim_m (\varphi_n(x) - \varphi_m(x)) = \varphi_n(x) - \lim_m \varphi_m(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x),$$

allora:

$$\lim_{m} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |\varphi_n(x) - \varphi(x)|. \tag{1.7}$$

D'altro canto, qualunque sia $\varepsilon > 0$, per la 2 si ha che:

$$\exists \nu_\varepsilon : n, m > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon, \ \ \forall x \in X; \tag{1.8}$$

conseguentemente, facendo tendere m a $+\infty$ nella (1.8) e tenendo presente la (1.7) otteniamo che:

$$\exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in X,$$

per l'arbitrarietà di ε segue l'asserto. □

1.2 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di derivata e di integrale.

Enunciamo il seguente:

Teorema 1.2.1. (**Teorema sull'inversione dei limiti**) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punto d'accumulazione per X e $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni reali convergente uniformemente in X. Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi_n(x) \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

allora esistono finiti e sono uguali i limiti seguenti:

$$\lim_{n} \lim_{x \to x_0} \varphi_n(x), \quad \lim_{x \to x_0} \lim_{n} \varphi_n(x).$$

Dal teorema sull'inversione dei limiti segue immediatamente il seguente:

Corollario 1.2.2. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X \cap DrX$ e $\{\varphi_n\}$ una successione convergente uniformemente in X alla funzione φ. Se ogni φ_n è continua nel punto x_0, allora φ è continua in x_0.*

Proviamo, ora, che:

Teorema 1.2.3. (Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni reali definite in I ed ivi derivabili.*
Se $\{\varphi_n\}$ converge in un punto $x_1 \in I$ e $\{\varphi'_n\}$ converge uniformemente in I, allora $\{\varphi_n\}$ converge in I ad una funzione φ derivabile in I e, $\forall x \in I$, risulta:

$$\varphi'(x) = D\left(\lim_n \varphi_n(x)\right) = \lim_n \varphi'_n(x). \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Iniziamo a provare che $\{\varphi_n\}$ converge in I. Essendo $\{\varphi_n\}$ convergente in x_1, basta fare vedere che $\{\varphi_n\}$ converge in ogni punto $x \in I-\{x_1\}$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\varphi_n - \varphi_m$ si ottiene che, per ogni $x \in I - \{x_1\}$, esiste un ξ appartenente all'intervallo aperto di estremi x e x_1 tale che:

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_m(x) - (\varphi_n(x_1) - \varphi_m(x_1))}{x - x_1} = \varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi);$$

allora:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leqslant |\varphi_n(x_1) - \varphi_m(x_1)| + \left|\varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi)\right| |x - x_1|. \tag{1.11}$$

Conseguentemente, essendo $\{\varphi_n\}$ convergente in x_1 e $\{\varphi'_n\}$ convergente in ξ, fissato $\varepsilon > 0$, si ha che:

$$\exists \nu_1 : n, m > \nu_1 \Rightarrow |\varphi_n(x_1) - \varphi_m(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e:

$$\exists \nu_2 : n, m > \nu_2 \Rightarrow \left|\varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2|x - x_1|},$$

dunque, dalla (1.11) si ha che:

$$n, m > \max\{\nu_1, \nu_2\} \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che la successione numerica $\{\varphi_n(x)\}$ è di Cauchy e, per la completezza di $\mathbb{R}$, $\{\varphi_n(x)\}$ è convergente. Abbiamo, dunque, provato che $\{\varphi_n\}$ è convergente in I. Denotata con φ la funzione limite della successione $\{\varphi_n\}$, proviamo che φ è derivabile in I e vale la (1.10).

Considerato un generico $x_0 \in I$, proviamo che φ è derivabile in x_0 e:

$$\varphi'(x_0) = \lim_n \varphi'_n(x_0).$$

A tale scopo, $\forall n \in \mathbb{N}$, consideriamo il rapporto incrementale di φ_n relativo al punto x_0:

$$\rho_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I - \{x_0\},$$

e proviamo che la successione $\{\rho_n\}$ converge uniformemente in $I - \{x_0\}$.

Qualunque sia $x \in I - \{x_0\}$, per il teorema di Lagrange esiste un ξ appartenente all'intervallo aperto di estremi x e x_0 tale che:

$$\begin{aligned} \rho_n(x) - \rho_m(x) = & \frac{(\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)) - (\varphi_m(x) - \varphi_m(x_0))}{x - x_0} = \\ & = \frac{(\varphi_n(x) - \varphi_m(x)) - (\varphi_n(x_0) - \varphi_m(x_0))}{x - x_0} = \\ & = \varphi'_n(\xi) - \varphi'_m(\xi), \end{aligned} \tag{1.12}$$

quindi, dall'uniforme convergenza di $\{\varphi'_n\}$ in I, segue l'uniforme convergenza di $\{\rho_n\}$ in $I - \{x_0\}$. D'altro canto, essendo $\{\varphi_n\}$ derivabile in x_0, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\lim_{x \to x_0} \rho_n(x) = \varphi'_n(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Dunque, la successione $\{\rho_n\}$ soddisfa le ipotesi del Teorema sull'inversione dei limiti, quindi:

$$\begin{aligned} \lim_n \varphi'_n(x_0) = & \lim_n \lim_{x \to x_0} \rho_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_n \rho_n(x) = \\ & = \lim_{x \to x_0} \lim_n \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)}{x - x_0} = \\ & = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0); \end{aligned}$$

per l'arbitrarietà di x_0 segue l'asserto. □

Osservazione. Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema sul passaggio al limite sotto il segno di derivata, si può dimostrare che la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente in ogni intervallo limitato incluso in I.

Infine, proviamo il seguente:

Teorema 1.2.4. (Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Sia* $\{\varphi_n\}$ *una successione di funzioni definite in* $[a,b]$ *ed ivi continue. Se* $\varphi_n \xrightarrow{u} \varphi$ *in* $[a,b]$ *allora:*

$$\lim_n \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \lim_n \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che, la funzione φ è continua in $[a,b]$ in quanto limite uniforme di una successione di funzioni continue in $[a,b]$. Dunque, l'asserto sarà provato se mostreremo che:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Cominciamo con l'osservare che:

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)dx\right| \leqslant \tag{1.13}$$

$$\leqslant \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx.$$

Ora, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, per l'uniforme convergenza di $\{\varphi_n\}$ su $[a,b]$ si ha che:

$$\exists\nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b],$$

conseguentemente, dalla (1.13) si ha che:

$$\exists\nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon;$$

per l'arbitrarietà di ε si ha l'asserto. □

Capitolo 2

Serie di funzioni.

2.1 Convergenza puntuale e convergenza uniforme di una serie di funzioni.

Definizione 2.1.1. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni reali definite nel sottoinsieme* A *di* $\mathbb{R}$. *Consideriamo le seguenti funzioni definite in* A:

$$s_1 = f_1$$

$$s_2 = f_1 + f_2$$

....

$$s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

....

la successione di funzioni $\{s_n\}$ *si chiama serie di funzioni generata dalla successione* $\{f_n\}$ *e si denota con uno dei simboli:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k, \quad f_1 + ... + f_k + ... \tag{2.1}$$

Le funzioni f_n si chiamano i termini della serie (2.1) e le funzioni s_1,s_2,..., s_n,..., si dicono somme parziali della serie (2.1).

Si dice che la serie (2.1) converge (puntualmente) in un sottoinsieme A' di A, quando essa converge in ogni punto di A', i.e. quando $\{s_n\}$ converge in A'.

Definizione 2.1.2. *L'insieme:*

$$X = \{x \in A : \{s_n(x)\} \text{ è convergente}\} .$$

si dice insieme di convergenza della serie (2.1). Se X è non vuoto, la funzione:

$$f : x \in X \to \lim_n s_n(x) \tag{2.2}$$

si chiama somma della serie (2.1); per denotare che f è la somma della serie (2.1) si scrive:

$$f = f_1 + ... + f_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k. \tag{2.3}$$

In questo paragrafo, con X denoteremo l'insieme di convergenza della serie (2.1) e, inoltre, supporremo $X \neq \emptyset$.

Si noti che, se f è la somma della serie (2.1) allora:

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \nu_{x,\varepsilon} \ : \ n > \nu_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la serie

$$f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+p} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \tag{2.4}$$

si dice *serie resto di ordine n della* (2.1) e la sua somma parziale p-esima:

$$r_{n,p} = f_{n+1} + ... + f_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k$$

si dice *resto parziale di indici n e p della* (2.1). Osserviamo che, l'insieme X è anche l'insieme di convergenza della serie resto di ordine n della (2.1), qualunque sia $n \in \mathbb{N}$; in questo caso, la somma della serie resto, cioè la funzione reale:

$$r_n : x \in X \to \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x),$$

si dice *resto n-esimo della serie* (2.1).
Ovviamente risulta:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \quad \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui:

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x), \;\; \forall x \in X, \;\forall n \in \mathbb{N},$$

quindi:

$$\lim_n r_n(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Dal Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale, applicato alla successione $\{s_n\}$, segue immediatamente il seguente:

Teorema 2.1.3. (**Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale di una serie di funzioni**)
La serie (2.1) converge puntualmente nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ se e solo se:

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_{x,\varepsilon} : n > \nu_{x,\varepsilon} \Rightarrow |r_{n,p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

(dove $r_{n,p}(x) = f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)$).

Dalla (2.5), per $p = 1$, segue banalmente la seguente:

Proposizione 2.1.4. *Condizione necessaria affinché la serie (2.1) converga in X è che:*

$$\lim_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definizione 2.1.5. *Diremo che la serie (2.1) converge uniformemente in X se, denotata con $f : X \to \mathbb{R}$ la sua somma, la successione $\{s_n\}$ converge uniformemente in X alla funzione f e cioè se:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |r_n(x)| = |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in X. \tag{2.6}$$

Dal Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme, applicato alla successione $\{s_n\}$, segue immediatamente il seguente:

Teorema 2.1.6. (**Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni**)
La serie (2.1) converge uniformemente in X se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |r_{n,p}(x)| < \varepsilon, \;\; \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X.$$

Consideriamo, ora, la serie dei moduli della serie (2.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|. \tag{2.7}$$

Definizione 2.1.7. *La serie (2.1) si dice assolutamente convergente in X se la serie (2.7) converge in X.*

Definizione 2.1.8. *La serie (2.1) si dice equiassolutamente convergente in X se la serie (2.7) converge uniformemente in X.*

OSSERVAZIONE Usufruendo del Teorema 2.1.6, la serie (2.1) converge equiassolutamente in X se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \;\; \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X.$$

Definizione 2.1.9. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice che maggiora la serie (2.1) in X quando:*

$$\exists m \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant a_n, \;\; \forall x \in X. \tag{2.8}$$

Definizione 2.1.10. *La serie (2.1) si dice totalmente convergente in X se esiste una serie numerica convergente che maggiora la serie (2.1) in X.*

Proviamo, ora, la seguente:

Proposizione 2.1.11. *Considerate le condizioni:*

a) La serie (2.1) converge totalmente in X;

b) La serie (2.1) converge equiassolutamente in X;

c) La serie (2.1) converge uniformemente in X;

si ha che:

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \tag{2.9}$$

Dimostrazione. $a) \Rightarrow b)$. Per le ipotesi fatte esiste una serie numerica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a termini non negativi, soddisfacente la (2.8). Dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e dal Criterio di Cauchy per le serie numeriche segue che:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow a_{n+1} + ... + a_{n+p} < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N};$$

allora, fissato un $\varepsilon > 0$, per la (2.8) si ha che:

$$n > \max\{\nu_\varepsilon, m\} \Rightarrow |f_{n+1}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)| \leqslant a_{n+1} + ... + a_{n+p} < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue la $b)$.

$b) \Rightarrow c)$. L'asserto è immediato in quanto:

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)|\ \ \forall n, p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X.$$

□

2.2 Derivazione termine a termine di una serie di funzioni.

Usufruendo del Teorema sull'inversione dei limiti si prova facilmente il seguente:

Teorema 2.2.1. (**Teorema di passaggio al limite sotto il segno di sommatoria**) *Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, x_0 un punto d'accumulazione di A e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ una serie di funzioni convergente uniformemente in A. Se, $\forall k \in \mathbb{N}$, esiste finito il:*

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x),$$

allora:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Corollario 2.2.2. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente in A e le funzioni f_k sono continue in $x_0 \in A \cap DrA$, allora la somma della serie è continua in x_0.

Usufruendo del Teorema sul passaggio al limite sotto il segno di derivata si prova facilmente il seguente:

Teorema 2.2.3. (**Teorema sulla derivabilità termine a termine**) *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni derivabili nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge in un punto $x_1 \in I$ e la serie delle derivate $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ convergente uniformemente in I, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge in I ad una funzione derivabile e risulta:*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x), \quad \forall x \in I.$$

2.3 Integrazione termine a termine di una serie di funzioni.

Usufruendo del Teorema sul passaggio al limite sotto il segno di integrale si prova facilmente il seguente:

Teorema 2.3.1. (**Teorema sulla integrabilità termine a termine**) *Sia* $\{f_k\}$ *una successione di funzioni continue nell'intervallo* $[a, b]$ *di* $\mathbb{R}$. *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge uniformemente in* $[a, b]$, *allora:*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\ dx.$$

2.4 Serie di potenze nel campo reale.

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali e fissato un $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni definita in $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + ... \tag{2.10}$$

si chiama *serie di potenze di punto iniziale* x_0 *e coefficienti* $a_0, a_1, ...$. Chiaramente la serie (2.10) converge nel punto x_0.

Proviamo il seguente:

Lemma 2.4.1. (**Lemma fondamentale**) *Se la (2.10) converge in un punto* $\xi \neq x_0$ *allora essa converge assolutamente nell'intervallo:*

$$I =]x_0 - |\xi - x_0|, x_0 + |\xi - x_0|[;$$

inoltre, la (2.10) converge totalmente in ogni intervallo compatto incluso in I.

Dimostrazione. Qualunque sia $x \in I$, risulta:

$$a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} = a_{n-1}(\xi - x_0)^{n-1} \left(\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Per ipotesi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(\xi - x_0)^{n-1}$ convergente, quindi la successione $\{a_{n-1}(\xi - x_0)^{n-1}\}$ è infinitesima allora esiste un numero reale positivo l tale che:

$$\left|a_{n-1}(\xi - x_0)^{n-1}\right| \leqslant l, \ \ \forall n \in \mathbb{N};$$

dunque, dalla (2.11) si ha che:

$$\left|a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\right| \ \leqslant \ l \ \left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right|^{n-1},$$

allora la serie dei moduli della (2.10), calcolata nel punto x, è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $\left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right|$. Conseguentemente, dall'appartenenza di x a I segue che:

$$\left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right| < 1,$$

quindi la (2.10) converge assolutamente in I.

Passiamo, ora, alla convergenza totale della (2.10) in un qualunque intervallo compatto incluso in I.

Qualunque sia l'intervallo compatto $[a, b]$, incluso in I, esiste un $\overline{x} \in I$ tale che:

$$[a, b] \subseteq [x_0 - |\overline{x} - x_0|, x_0 + |\overline{x} - x_0|]; \tag{2.12}$$

quindi, $\forall x \in [a, b]$ risulta:

$$|x - x_0| \leqslant |\overline{x} - x_0|,$$

dunque:

$$|a_{n-1}|\,|x - x_0|^{n-1} \ \leqslant \ |a_{n-1}|\,|\overline{x} - x_0|^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora la serie:

$$|a_0| + |a_1|\,|x - x_0| + ... + |a_{n-1}|\,|x - x_0|^{n-1} + ... \tag{2.13}$$

è maggiorata, in tutto l'intervallo $[a, b]$, dalla seguente serie numerica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}|\,|\overline{x} - x_0|^{n-1},$$

conseguentemente, la serie (2.13) converge totalmente in $[a, b]$.
L'asserto è così provato.

□

Nota. Dalla dimostrazione del Lemma 2.4.1 si vede che non è necessario richiedere la convergenza della serie (2.10) in ξ; infatti, basta supporre che la successione $\{a_{n-1}(\xi - x_0)^{n-1}\}$ sia limitata.

Definizione 2.4.2. *Si chiama raggio di convergenza della serie di potenze (2.10), e si denota con ρ, l'estremo superiore del seguente insieme:*

$$\{r \in [0, +\infty[\, : \ \textit{la (2.10) converge in } [x_0 - r, x_0 + r]\}. \tag{2.14}$$

Si noti che, se $\rho = 0$ allora la serie (2.10) converge solo nel punto x_0; se $\rho = +\infty$ allora la serie (2.10) converge in tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.4.3. *Se $\rho \in]0, +\infty[$ allora la serie (2.10) converge assolutamente nell'intervallo $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ e non converge in $\mathbb{R} - [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.*

Dimostrazione. Sia $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$, considerato un $\rho' \in]|x - x_0|, \rho[$ per la (2.14) risulta che la serie (2.10) converge nell'intervallo $[x_0 - \rho', x_0 + \rho']$, quindi, per il Lemma fondamentale la (2.10) converge assolutamente in x visto che x è interno a $[x_0 - \rho', x_0 + \rho']$.

Ora, proviamo che la (2.10) non converge in $\mathbb{R} - [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Infatti, se la (2.10) convergesse in un punto $x_1 \in \mathbb{R} - [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, si avrebbe $|x_1 - x_0| > \rho$ e per il Lemma fondamentale la (2.10) convergerebbe totalmente in ogni intervallo del tipo $[x_0 - r, x_0 + r]$, qualunque sia $r \in]\rho, |x_1 - x_0|[$. Ma ciò è assurdo perché in contrasto con la definizione di raggio di convergenza. □

Definizione 2.4.4. *L'intervallo in cui converge la serie (2.10) si chiama intervallo di convergenza della serie (2.10).*

Dal Lemma fondamentale segue che:

Proposizione 2.4.5. *Una serie di potenze, avente raggio di convergenza positivo, converge totalmente in ogni intervallo compatto contenuto nell'intervallo di convergenza della serie.*

Vale il seguente teorema:

Teorema 2.4.6. (**Teorema di Abel**) *Se il raggio di convergenza ρ della serie (2.10) appartiene a $]0, +\infty[$ e la (2.10) converge nel punto $x_0 - \rho$* (risp. $x_0 + \rho$), *allora la (2.10) converge uniformemente in ogni intervallo compatto* $[x_0 - \rho, b] \subseteq [x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ (risp. $[a, x_0 + \rho] \subseteq]x_0 - \rho, x_0 + \rho]$).

Passiamo, ora, al seguente:

Teorema 2.4.7. (**Teorema di Cauchy-Hadamard**) *Consideriamo la serie di potenze:*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \tag{2.15}$$

Se esiste il limite seguente:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

allora il raggio di convergenza ρ della serie (2.15) è dato da:

$$\rho = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}},$$

con la convenzione che $\frac{1}{+\infty} = 0$ *e* $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

Dimostrazione. Basta applicare il criterio della radice alla serie (2.15); infatti:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n||x - x_0|^n} = |x - x_0| \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Longleftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□

Dal Teorema di Cauchy-Hadamard segue che:

Il raggio di convergenza di una serie di potenze non dipende dal punto iniziale ma solo dai coefficienti della serie.

Passiamo, ora, al seguente:

Teorema 2.4.8. (**Teorema di D'Alembert**) *Se gli elementi della successione $\{a_n\}$ sono definitivamente non nulli ed esiste il:*

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

allora la serie (2.15) ha raggio di convergenza:

$$\rho = \frac{1}{\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

con la convenzione che $\frac{1}{+\infty} = 0$ *e* $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

Dimostrazione. Basta applicare il criterio del rapporto alla serie (2.15); infatti, per $x \neq x_0$, si ha che:

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|\,|x-x_0|^{n+1}}{|a_n|\,|x-x_0|^n} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x-x_0| < 1 \Longleftrightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

□

Esempi.

1. Consideriamo la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$
Posto $a_n = \frac{n^n}{n!}$ risulta:
$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}\,n!}{n^n\,(n+1)!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
allora:
$$\rho = \frac{1}{e}.$$

2. Consideriamo la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Posto $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ risulta:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \lim_n \frac{n}{n+2} = 1$$

allora:

$$\rho = 1.$$

Si noti che, per $x = 1$ risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per $x = -1$ la serie converge per il Criterio di Leibniz.

Definizione 2.4.9. *Si dice serie derivata della serie di potenze (2.15) la serie che si ottiene derivando termine a termine la serie (2.15), cioè la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + n a_n (x - x_0)^{n-1} + ..., \quad (2.16)$$

che è ancora una serie di potenze.

Proviamo che:

Teorema 2.4.10. *La serie di potenze (2.15) e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto nel caso in cui esiste il limite:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

In questo caso, risultando:

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = \lim_n e^{\frac{1}{n} \cdot \log n} = e^0 = 1,$$

si ha che:

$$\lim_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \cdot \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

da cui segue l'asserto. □

Dal Teorema 2.4.10 segue che:
Le serie ottenute derivando più volte termine a termine la (2.15) hanno tutte lo stesso raggio di convergenza.

Vale il seguente:

Teorema 2.4.11. *Considerata la serie di potenze:*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ \dots\ + a_n(x - x_0)^n + \ \dots, \tag{2.17}$$

se il raggio di convergenza ρ di (2.17) è positivo, allora essa è indefinitamente derivabile termine a termine in ogni punto di $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Pertanto, la sua somma f è indefinitamente derivabile in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ e risulta:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geqslant k} n(n-1)...(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k} \tag{2.18}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.
Inoltre, essendo (per la (2.18)) $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, risulta:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

conseguentemente:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ \dots\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ \dots,\ \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

2.5 Funzioni sviluppabili in serie di Taylor.

Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ indefinitamente derivabile nel punto x_0 di X.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie numerica:

$$f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... = \\ = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}, \tag{2.19}$$

tale serie è detta *serie di Taylor di f di punto iniziale x_0* (al solito, per convenzione, $f^{(0)} = f,\ 0! = 1$).

Definizione 2.5.1. *La funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se esiste un intorno I di x_0 tale che:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},\ \forall x \in I. \tag{2.20}$$

Denotato con $p_n(x)$ il polinomio di Taylor della funzione f di ordine n e di punto iniziale x_0 e con $s_{n+1}(x)$ la somma parziale n+1-esima della serie (2.19), ovviamente risulta:

$$p_n(x) = s_{n+1}(x). \tag{2.21}$$

Proviamo la seguente:

Proposizione 2.5.2. *La funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se e solo se esiste un intorno I di x_0 tale che:*

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0,\ \forall x \in I, \tag{2.22}$$

dove $r_n(x)$ è il resto n-esimo della formula di Taylor di punto iniziale x_0 e di ordine n della funzione f.

Dimostrazione. Basta osservare che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 se e solo se esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1}(x), \ \forall x \in I; \tag{2.23}$$

ma, per la (2.21), ciò significa che:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x), \ \forall x \in I,$$

da cui, essendo $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$, segue la (2.22). □

Dimostriamo, ora, il seguente:

Teorema 2.5.3. *Se f è indefinitamente derivabile in un intorno I di x_0 e le sue derivate sono equilimitate in I, i.e.:*

$$\exists\ l \in \mathbb{R}^+ \ : \mid f^{(n)}(x) \mid \leq l, \ \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0.

Dimostrazione. A norma della Proposizione 2.5.2, basta provare che:

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0, \ \forall x \in I. \tag{2.25}$$

Siccome $r_n(x_0) = f(x_0) - p_n(x_0) = 0$, proviamo che la (2.25) vale $\forall x \in I - \{x_0\}$. Sia x un qualunque punto di $I - \{x_0\}$, dalla formula di Taylor di ordine n e di punto iniziale x_0 con il resto di Lagrange, si ha che:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

con $\xi \in I(x_0, x)$.

Allora, per la (2.24), qualunque sia $x \in I$, si ha:

$$\mid r_n(x) \mid \leq \frac{l}{(n+1)!} \mid x - x_0 \mid^{n+1} . \tag{2.26}$$

Ora, considerata la serie numerica il cui termine generale è dato dal secondo membro della (2.26):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{(n+1)!} \mid x - x_0 \mid^{n+1}, \tag{2.27}$$

ed osservato che:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{l}{(n+2)!}\mid x-x_0\mid^{n+2}}{\frac{l}{(n+1)!}\mid x-x_0\mid^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mid x-x_0\mid}{n+2}=0,$$

per il Criterio del rapporto si ha che la serie (2.27) converge; conseguentemente il suo termine generale è infinitesimo, cioè:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{l}{(n+1)!}\mid x-x_0\mid^{n+1}=0.$$

Allora, dalla (2.26) si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x)=0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $x\in I-\{x_0\}$, segue l'asserto.

Il teorema è così dimostrato. $\square$

Quando ci siamo occupati della formula di Mac-Laurin delle funzioni $\sin x, \cos x, e^x$ abbiamo trovato che:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ \dots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+1}(x),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ \dots\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n}(x),$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\ \dots\ +\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Essendo $\sin x$ e $\cos x$ indefinitamente derivabili in $\mathbb{R}$ e risultando:

$$\mid D^n\sin x\mid\leq 1,\quad \mid D^n\cos x\mid\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

dal Teorema 2.5.3 segue che tali funzioni sono sviluppabili in serie di Mac-Laurin in tutto $\mathbb{R}$ e risulta:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ \dots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ \dots =\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \tag{2.28}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ . \tag{2.29}$$

La funzione e^x è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$, ma le sue derivate non sono equilimitate in tutto $\mathbb{R}$. D'altro canto, per la stretta crescenza della funzione e^x, qualunque sia $b \in]0, +\infty[$, risulta:

$$0 \ < \ e^x \ < \ e^b, \quad \forall x \in [-b, b],$$

cioè, e^x ha derivate equilimitate in ogni intervallo $[-b, b]$, qualunque sia $b \in]0, +\infty[$.

Allora e^x è sviluppabile in serie di Mac-Laurin in ogni intervallo $[-b, b]$ e risulta:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ \dots\ + \frac{x^n}{n!} + \ \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{2.30}$$

la (2.30) si dice *serie esponenziale.*

Per l'arbitrarietà di $b \in]0, +\infty[$, si ha che e^x *è sviluppabile in serie di Mac-Laurin in tutto* $\mathbb{R}$.

Se nella (2.30) si sostituisce x con $-x$, si ha:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ \dots\ ; \tag{2.31}$$

dalle (2.30) e (2.31) sottraendo membro a membro e dividendo per 2 si ottiene lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione seno iperbolico:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ \dots\ + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ . \tag{2.32}$$

Sempre dalle (2.30) e (2.31) sommando membro a membro e dividendo per 2 si ottiene lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione coseno iperbolico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ \dots\ + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \dots\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ . \tag{2.33}$$

Passiamo, ora, al seguente:

Teorema 2.5.4. *Siano I un intorno di x_0 e $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Consideriamo la serie di Taylor di punto iniziale x_0 relativa alla funzione f:*

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+..., x \in I. \tag{2.34}$$

Se $f'(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in I, i.e.:

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + ... \ , \quad x \in I, \tag{2.35}$$

allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in I, i.e.:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+..., x \in I. \tag{2.36}$$

Dimostrazione. Siccome le serie (2.34) e la serie a secondo membro della (2.35) hanno lo stesso intervallo di convergenza, si ha che la (2.34) converge in tutto I ed, inoltre, converge uniformemente in ogni intervallo compatto incluso in I. Allora, detta $g(x)$ la somma della serie (2.34), si ha che $g(x)$ è indefinitamente derivabile in I e risulta:

$$g(x_0) = f(x_0) \text{ e } g'(x) = f'(x), \ \forall x \in I,$$

conseguentemente:

$$g(x) = f(x), \ \forall x \in I,$$

da cui segue la (2.36).

□

Osservazione. - Si noti che, per ottenere la (2.36) basta integrare termine a termine, tra x_0 e x, primo e secondo membro della (2.35).

Ora, occupiamoci della *sviluppabilità in serie di Mac-Laurin delle funzioni* $\log(1 + x)$, sett tgh$x$, arctg x.

Consideriamo la serie geometrica di primo termine 1 e ragione $-x$:

$$1 - x + x^2 + \ \dots \ + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ ,$$

sappiamo che essa converge quando il modulo della ragione è minore di 1, cioè quando $x \in]-1, 1[$, in tal caso risulta:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ \dots \ + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[. \tag{2.37}$$

Allora, essendo $\frac{1}{1+x} = D \log(1 + x)$, dal Teorema 2.5.4 si ha che la funzione $\log(1 + x)$ è sviluppabile in serie di Mac-Laurin nell'intervallo $]-1, 1[$. Integrando, tra 0 e x, primo e secondo membro della (2.37), come suggerito nell'Osservazione, si ottiene:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ \dots \ + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[; \tag{2.38}$$

la serie a secondo membro della (2.38) si dice *serie logaritmica*.

Se nella (2.38) si mette $-x$ al posto di x, si ottiene:

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ \dots \ - \frac{x^n}{n} - \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[,$$

da cui si ricava:

$$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \ \dots \ + \frac{x^n}{n} + \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[. \tag{2.39}$$

Sommando membro a membro la (2.38) e la (2.39) si ha:

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + \ \dots \ + 2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[,$$

da cui, essendo $\operatorname{sett\,tgh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$, si ottiene:

$$\operatorname{sett\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \ \dots \ + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ \dots \ , \quad x \in]-1, 1[, \tag{2.40}$$

che è lo *sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione settore tangente iperbolico.*

Consideriamo, ora, la serie geometrica di primo termine 1 e ragione $-x^2$:

$$1 - x^2 + x^4 + \ \dots\ + (-1)^n x^{2n} + \ \dots\ ,$$

sappiamo che essa converge quando la ragione in modulo è minore di 1, cioè quando $x \in]-1,1[$, e risulta:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ \dots\ + (-1)^n x^{2n} + \ \dots\ , \quad x \in]-1,1[. \tag{2.41}$$

Allora, essendo $\frac{1}{1+x^2} = D\mathrm{arctg}\, x$, dal Teorema 2.5.4 si ha che la funzione $\mathrm{arctg}\, x$ è sviluppabile in serie di Mac-Laurin nell'intervallo $]-1,1[$. Integrando, tra 0 e x, primo e secondo membro della (2.41), come suggerito nell'Osservazione, si ottiene *lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione* $\mathrm{arctg}\, x$*:*

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ \dots\ , \quad x \in]-1,1[.$$

Capitolo 3

Gli spazi $\mathbb{R}^k$.

3.1 Lo spazio numerico reale a k dimensioni.

Sia $k \in \mathbb{N}$, richiamiamo la nozione di prodotto cartesiano dei k insiemi $A_1, \cdots, A_k$:

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, ..., a_k) : \ a_i \in A_i, \ i = 1, ..., k\}.$$

Se gli insiemi A_i sono tutti uguali a $\mathbb{R}$ si ottiene l'insieme:

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, ..., x_k) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, ..., k\}.$$

che è detto *spazio numerico reale a k dimensioni.*

Se $P = (x_1, ..., x_k)$ è un punto di $\mathbb{R}^k$, i numeri reali $x_1, ..., x_k$ si dicono *coordinate di P* e, qualunque sia $i \in \{1, ..., k\}$, x_i si dice *coordinata* $i-$*esima di* P; il punto $O = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k$ si chiama *origine di* $\mathbb{R}^k$.

In Analisi Matematica I abbiamo già incontrato e rappresentato geometricamente gli spazi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Riguardo allo spazio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, si considerino un punto O dello spazio ordinario e una terna di assi cartesiani passanti per O e tra loro ortogonali, indichiamoli con $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ oppure, semplicemente, con x, y, z.

L'insieme dei punti dell'asse x è dato da:

$$X = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in \mathbb{R}\};$$

X si ottiene come intersezione dei piani xz e xy, che hanno equazioni, risp., $y = 0$ e $z = 0$. Quindi, X ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

L'insieme dei punti dell'asse y è dato da:

$$Y = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \in \mathbb{R}\};$$

Y si ottiene come intersezione dei piani yz e xy, che hanno equazioni, risp., $x = 0$ e $z = 0$.

In modo analogo si definisce l'insieme Z dei punti dell'asse z; esso si ottiene come intersezione dei piani yz e xz.

Quando $k > 3$, l'asse coordinato $i - esimo$ x_i di $\mathbb{R}^k$ è definito da:

$$X_i = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ x_j = 0 \text{ se } j \neq i\}.$$

Siano $A = (a_1, \cdots, a_k), B = (b_1, \cdots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ tali che:

$$a_i \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, k$$

si definisce *rettangolo chiuso di* $\mathbb{R}^k$ *di estremi* A *e* B, l'insieme:

$$R = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, ..., k\}.$$

Per ogni $i \in \{1, \cdots, k\}$, posto:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \delta_i = \frac{b_i - a_i}{2},$$

si ha che:

$$R = \prod_{i=1}^{k} [c_i - \delta_i, c_i + \delta_i] = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ |x_i - c_i| \leq \delta_i, \ i = 1, ..., k\}.$$

Se $k > 1$, $\mathbb{R}^k$ si amplia con l'aggiunta di un elemento convenzionale che si denota con il simbolo ∞ e si dice *punto all'infinito di* $\mathbb{R}^k$; per convenzione, ∞ non appartiene ad alcun rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^k$.

3.2 Lo spazio euclideo reale a k dimensioni.

Siano $P = (x_1, \cdots, x_k), Q = (y_1, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. Si definisce *distanza euclidea dei punti P e Q*, e si denota con uno dei simboli $|P-Q|$, $\| P-Q \|$, $d(P,Q)$, il numero reale non negativo:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}.$$

La funzione:

$$| \ | : (P,Q) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to |P-Q| \in [0,+\infty[,$$

si chiama *metrica euclidea in* $\mathbb{R}^k$; tale funzione gode delle seguenti proprietà:

i) $|P-Q| = 0 \iff P = Q$;

ii) $|P-Q| = |Q-P|, \ \forall P,Q \in \mathbb{R}^k$;

iii) $|P-Q| \leq |P-W| + |W-Q|, \ \forall P,Q,W \in \mathbb{R}^k$.

La coppia $(\mathbb{R}^k, | \ |)$ si dice *spazio euclideo reale a k dimensioni.*

Siano $C = (c_1, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ e $r \in]0,+\infty[$, l'insieme:

$$\{P \in \mathbb{R}^k \ : \ |P-C| < r\}$$

si chiama *sfera aperta* (*o cerchio aperto*) *di* $\mathbb{R}^k$ *di centro C e raggio r*; l'insieme:

$$\{P \in \mathbb{R}^k \ : \ |P-C| \leq r\}$$

si chiama *sfera chiusa* (*o cerchio chiuso*) *di* $\mathbb{R}^k$ *di centro C e raggio r.*

Per convenzione, ∞ non appartiene ad alcuna sfera di $\mathbb{R}^k$.

3.3 Lo spazio vettoriale reale a k dimensioni.

In $\mathbb{R}^k$ sono definite due operazioni, la prima è la *somma* di due elementi di $\mathbb{R}^k$:

$$+ \ : ((x_1, ..., x_k), (y_1, ..., y_k)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to (x_1 + y_1, ..., x_k + y_k) \in \mathbb{R}^k,$$

e la seconda è il *prodotto tra un numero reale e un elemento di* $\mathbb{R}^k$:

$$\cdot \ : (\lambda, (x_1, ..., x_k)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to (\lambda x_1, ..., \lambda x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

$(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ soddisfa i seguenti *assiomi degli spazi vettoriali*:

i) $+$ è associativa e commutativa,

ii) $\exists! \ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}} : \mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x}, \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$,

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^k \ \exists! \ x' \in \mathbb{R}^k : x + x' = \mathbf{0}$; x' si denota con $-x$ (opposto di x),

iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

vi) $0 \cdot x = \mathbf{0}, 1 \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}, \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{k}}$.

$(\mathbb{R}^k, +, \cdot)$ si dice *spazio vettoriale reale a k dimensioni*. Gli elementi di tale spazio si dicono *vettori*, il vettore $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ si dice *vettore nullo*.

I vettori $e_1 = (1, 0, ..., 0), \ e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \ e_k = (0, ..., 0, 1)$ sono tali che ogni $x = (x_1, .., x_k) \in \mathbb{R}^k$ si può esprimere in un unico modo come combinazione lineare di $e_1, ..., e_k$, infatti:

$$x = (x_1, ..., x_k) = x_1 e_1 + ... + x_k e_k.$$

L'insieme $\{e_1, ..., e_k\}$ si dice *base di* $\mathbb{R}^k$; se $x = (x_1, ..., x_k)$, x_1 si dice *prima componente di x*,..., x_k si dice *k-esima componente di x*.

Definizione 3.3.1. *Siano $x = (x_1, ..., x_k)$ e $y = (y_1, ..., y_k)$ due vettori di $\mathbb{R}^k$, si definisce prodotto scalare tra x e y il numero reale:*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

Il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

j) $(x, y) = (y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^k$,

jj) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$,

jjj) $\lambda(x, y) = (\lambda x, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

jv) $(x, x) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^k$,

v) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

Definizione 3.3.2. *Sia $x = (x_1, .., x_k)$ un vettore di $\mathbb{R}^k$, si chiama modulo o norma euclidea di x il numero reale non negativo:*

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}.$$

Se $x \in \mathbb{R}^k$ e $|x| = 1$, allora x si dice *vettore unitario o versore.*

Proprietà della norma:

1. $|x| \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^k$,

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$,

3. $|\lambda x| = |\lambda||x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

4. $|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Osservazione. Siano $x = (x_1, ..., x_k)$ e $y = (y_1, ..., y_k)$ due vettori di $\mathbb{R}^k$. Se P è il punto di $\mathbb{R}^k$ avente come coordinate le componenti del vettore x e Q è il punto di $\mathbb{R}^k$ avente come coordinate le componenti del vettore y, allora si ha che:

$$|x - y| = |(x_1 - y_1, ..., x_k - y_k)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} = d(P, Q).$$

Il prodotto scalare gode della seguente proprietà detta *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|(x, y)| \leqslant |x|\ |y|,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \tag{3.1}$$

cioè, il valore assoluto del prodotto scalare di x per y è minore o uguale al prodotto del modulo di x per il modulo di y.

Siccome dalla (3.1) si ricava che:

$$\frac{(x,y)}{|x|\ |y|} \in [-1,1], \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}^k - \{\mathbf{0}\},$$

ha senso dare la seguente:

Definizione 3.3.3. *Siano x e y due vettori non nulli di $\mathbb{R}^k$; l'unico numero reale $\theta \in [0,\pi]$ tale che:*

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{|x|\ |y|},$$

si dice angolo (convesso) tra x e y

Conseguentemente, se $x,y \in \mathbb{R}^k - \{\mathbf{0}\}$, il prodotto scalare tra x e y si può definire come segue:

$$(x,y) = |x|\ |y|\cos\theta, \tag{3.2}$$

dove θ è l'angolo convesso formato dai vettori x e y.

Si noti che la (3.2) vale anche quando $x = \mathbf{0}$ oppure $y = \mathbf{0}$.

Esempio. Siano $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. Considerata la base $\{i,j\}$ di $\mathbb{R}^2$, risulta:

$$x = x_1\ i + x_2\ j, \quad y = y_1\ i + y_2\ j,$$

dunque:

$$(x,y) = (x_1\ i + x_2\ j, y_1\ i + y_2\ j) =$$

$$= (x_1\ i, y_1\ i) + (x_2\ j, y_1\ i) + (x_1\ i, y_2\ j) + (x_2\ j, y_2\ j) =$$

$$= x_1y_1(i,i) + x_2y_1(j,i) + x_1y_2(i,j) + x_2y_2(j,j) = x_1y_1 + x_2y_2,$$

quindi, dalla (3.2) segue che:

$$x_1y_1 + x_2y_2 = |x| \cdot |y|\cos\theta.$$

3.4 Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbb{R}^k$.

Sia $v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k - \{\mathbf{0}\}$, esistono infinite coppie (A, B) di punti di $\mathbb{R}^k$ tali che:

$$v = B - A$$

Infatti, se $A = (a_1, ..., a_k)$ basta prendere $B = (a_1 + v_1, ..., a_k + v_k)$.

Esempio. Siano $k = 2$ e $v = (1, 2)$, dalla figura si vede che:

$$v = P_1 - O,$$

$$v = P_2 - O_1,$$

....

$$v = P_5 - O_4.$$

Si noti che *i vettori:*

$$\overrightarrow{OP_1},\ \overrightarrow{O_1P_2},\ \overrightarrow{O_2P_3}, ...,\ \overrightarrow{O_4P_5},$$

hanno tutti lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso, essi si dicono *equipollenti.*
Il vettore $v = \left[\overrightarrow{OP_1}\right]$, classe dei vettori equipollenti, si dice *vettore libero ordinario.*
Quanto detto per $\mathbb{R}^2$, vale anche per $\mathbb{R}^k$, con $k > 2$.
Osserviamo che, se $v = (v_1, ..., v_k)$ e $A = O$, considerato il punto P di coordinate $v_1, ..., v_k$ si ha che $v = P - O$; $\overrightarrow{OP}$ si dice rappresentante di v e $v = \left[\overrightarrow{OP}\right]$.
Inoltre, essendo $v = P - O$, si ha che:

$$P = O + v = O + v_1 e_1 + ... + v_k e_k.$$

3.5 Rette di $\mathbb{R}^k$.

Siano $A = (a_1, ..., a_k)$ e $B = (b_1, ..., b_k)$ punti distinti di $\mathbb{R}^k$. La *retta r di $\mathbb{R}^k$ passante per A e B* ha equazione:

$$P(t) = A + t(B - A) = (a_1 + t(b_1 - a_1), ..., a_k + t(b_k - a_k)), \ t \in \mathbb{R}; \quad (3.3)$$

o equivalentemente, equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & t \in \mathbb{R}. \\ x_k = x_k(t) = a_k + t(b_k - a_k) \end{cases} \quad (3.4)$$

La (3.3) induce su r i seguenti due versi di percorrenza:

i) *verso delle t crescenti: $P(t_1)$ precede $P(t_2)$ se $t_1 < t_2$.*

ii) *verso delle t decrescenti: $P(t_1)$ segue $P(t_2)$ se $t_1 < t_2$.*

Se si considera su r uno dei due versi di percorrenza si dice che r è stata orientata, una retta orientata si dice asse e si indica con $\overrightarrow{r}$.

Posto $v = B - A = (b_1 - a_1, \cdots, b_k - a_k)$ la (3.3) si può scrivere come segue:

$$P(t) = A + tv, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

dunque r è individuata da un punto e da un vettore, le componenti di v si dicono *numeri direttori della retta r.*

Notiamo che, se consideriamo due vettori v e v_1 proporzionali tra loro, i.e. $\exists\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : v_1 = \lambda v$, e due punti A e A_1 di $\mathbb{R}^k$ le rette seguenti:

$$r : \qquad P(t) = A + tv$$

e

$$r_1 : \qquad P_1(t) = A_1 + tv_1$$

sono parallele; inoltre, esse coincidono se e solo se $\exists\mu \in \mathbb{R} : A_1 = A + \mu v$, cioè se $A_1 \in r$. Tutte le rette parallele ad r hanno la stessa direzione di v,

per questo le componenti di v si dicono numeri direttori di r. Se la retta r si orienta nel verso delle t crescenti tramite la (3.5), tale verso si dice *verso indotto da* v.
Considerato il vettore unitario:

$$u = \frac{v}{|v|},$$

l'equazione di r si può scrivere come segue:

$$P(t) = A + tu;$$

se si considera su r il verso indotto da u, allora u si dice *versore dell'asse* $\overrightarrow{r}$, le componenti di u si dicono *coseni direttori di* $\overrightarrow{r}$.

3.6 Prodotto vettoriale e prodotto misto in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3.6.1. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ di origine O e assi coordinati x, y, z; la terna di assi si dice levogira se gli assi sono orientati in modo tale che la rotazione intorno all'asse z di ampiezza $\frac{\pi}{2}$, che porta il semiasse positivo delle x a sovrapporsi al semiasse positivo delle y, sia vista in senso antiorario da un osservatore disposto lungo il semiasse positivo delle z.*

Ora, vogliamo introdurre nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ un'operazione che ad ogni coppia ordinata (u, v) di vettori di $\mathbb{R}^3$ associa ancora un vettore di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3.6.2. *Sia (u, v) una coppia ordinata di vettori non nulli e non paralleli di $\mathbb{R}^3$ e sia θ l'angolo convesso formato da u e v. Si chiama prodotto vettoriale di u e v e si denota con $u \wedge v$ il vettore w di $\mathbb{R}^3$ tale che il modulo di w sia:*

$$|w| = |u| \;\; |v| \;\; \sin\theta,$$

la direzione di w sia ortogonale al piano individuato da u e v e il verso di w sia quello per cui la terna (u, v, w) risulta levogira.

Se $u = \mathbf{0}$ oppure $v = \mathbf{0}$ oppure $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ allora $u \wedge v = \mathbf{0}$. Siano P_0, P_1 e P_2 punti non allineati di $\mathbb{R}^3$. Posto $u = P_1 - P_0$ e $v = P_2 - P_0$, si ha che il vettore $u \wedge v$ è perpendicolare al piano passante per i punti P_0,P_1,P_2 e tale vettore ha modulo uguale all'area del parallelogramma di lati P_0P_1 e P_0P_2.

Proprietà del prodotto vettoriale

1. $u \wedge v = -(v \wedge u)$,
2. $\lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v)$,
3. $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$,
4. $(u \wedge v) \wedge w \neq u \wedge (v \wedge w)$.

È importante notare che, detti i, j e k, risp. i versori degli assi x, y e z, si ha che:

$$i \wedge j = k,\ j \wedge k = i,\ k \wedge i = j,\ i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Siano $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ dalle (3.6) si ricava che:

$$u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k,$$

dunque le componenti di $u \wedge v$ sono i minori del secondo ordine, presi con i segni alterni, della matrice:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k.$$

Definizione 3.6.3. *Sia (w, u, v) una terna ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$. Si dice prodotto misto dei vettori w,u,v il numero reale:*

$$(w, u \wedge v)$$

prodotto scalare di w e $u \wedge v$.

Ovviamente $(w, u \wedge v) = (u \wedge v, w)$. Si vede facilmente che:

$$(w, u \wedge v) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Il prodotto misto $(w, u \wedge v)$ si annulla se e solo se vale una delle seguenti tre condizioni:

a) w è perpendicolare a $u \wedge v$ (w è parallelo al piano individuato da u e v),

b) se u è parallelo a v,

c) se uno dei tre vettori coincide col vettore nullo.

Se w, u e v sono applicati nello stesso punto, allora $(w, u \wedge v)$ è nullo se i tre vettori sono complanari.

3.7 Rappresentazione di piani e di rette di $\mathbb{R}^3$.

1. *Equazione vettoriale del piano passante per P_0 e ortogonale al vettore w:*

$$(P - P_0, w) = 0.$$

2. *Equazione vettoriale del piano passante per P_0 e parallelo ai vettori u e v:*

$$(P - P_0, u \wedge v) = 0.$$

3. *Equazione della retta passante per P_0 e ortogonale ai vettori u e v:*

$$(P - P_0) \wedge (u \wedge v) = \mathbf{0}.$$

3.8 Coordinate cilindriche.

Fissiamo in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e assumiamo nel piano xy il sistema di coordinate polari con il polo in 0 e asse polare coincidente con l'asse delle x.
Dato il punto $P = (x, y, z)$ e detta $Q = (x, y)$ la proiezione ortogonale di P su xy, se ρ e θ sono le coordinate polari di Q, allora $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$.
Il punto P è univocamente determinato dalle coordinate polari (ρ, θ) di Q e dalla terza coordinata z di P.
I numeri ρ, θ, z si chiamano *coordinate cilindriche del punto P.*
Se x, y, z sono le coordinate cartesiane di un generico punto P di $\mathbb{R}^3$ e ρ, θ, z sono le coordinate cilindriche di P, allora sussistono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

Si noti che:

1. *Fissato* $\rho > 0$, al variare di θ in $[0, 2\pi[$ e z in $\mathbb{R}$, si ottiene la superficie cilindrica S_ρ avente per direttrice la circonferenza del piano xy di centro O e raggio ρ ed avente le generatrici ortogonali al piano xy.

2. *Fissato* $\theta \in [0, 2\pi[$, al variare di ρ in $[0, +\infty[$ e z in $\mathbb{R}$, si ottiene il semipiano S_θ, di origine z, che interseca il piano xy lungo la semiretta di anomalia θ.

3. *Fissato* $z \in \mathbb{R}$, al variare di ρ in $[0, +\infty[$ e θ in $[0, 2\pi[$, si ottiene il piano S_z ortogonale all'asse z e passante per il punto $(0, 0, z)$.

Le superfici S_ρ, S_θ, S_z costituiscono tre famiglie di superfici che si chiamano *superfici coordinate relative al sistema di coordinate cilindriche.*

3.9 Coordinate sferiche.

Fissiamo in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e consideriamo un punto P distinto da O. Siano ρ la misura del segmento $\overline{OP}$, $\varphi \in [0, \pi]$ la misura in radianti dell'angolo che il semiasse di origine O e passante per P forma con il semiasse positivo delle z e, denotata con Q la proiezione ortogonale di P sul piano xy, θ la misura in radianti (determinata a meno di un multiplo intero di 2π) dell'angolo che il semiasse positivo delle x deve descrivere, ruotando in senso antiorario, per sovrapporsi al semiasse di origine O e passante per Q.
I numeri ρ, φ, θ si chiamano *coordinate sferiche* o *polari nello spazio del punto* P rispetto al sistema di coordinate polari avente come polo il punto O, come semiasse polare il semiasse positivo delle z e come semipiano polare

il semipiano di origine z contenente il semiasse positivo delle x. Il numero ρ si chiama *raggio vettore del punto* P, il numero φ si chiama *colatitudine del punto* P, $\frac{\pi}{2}-\varphi$ si dice *latitudine di* P, e il numero θ si chiama *longitudine del punto* P.

Dette x, y, z le coordinate cartesiane del punto P e ρ, φ, θ le coordinate sferiche del punto P, risulta:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \tag{3.7}$$

Se il punto P non appartiene all'asse z, dalle (3.7) si traggono le formule:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Si noti che φ varia nell'intervallo $[0, \pi]$ quindi $\cos\varphi$ è invertibile.

1. *Fissato* $\rho \in]0, +\infty[$, al variare di φ in $[0, \pi]$ e di θ in $[0, 2\pi[$, si ottiene la superficie sferica S_ρ di centro O e raggio ρ.

2. *Fissato* $\varphi \in [0, \pi]$, al variare di ρ in $[0, +\infty[$ e di θ in $[0, 2\pi[$, si ottiene la superficie conica circolare S_φ, ottenuta dalla rotazione intorno all'asse z della semiretta avente origine O e formante col semiasse positivo delle z l'angolo φ.

3. *Fissato* $\theta \in [0, 2\pi]$, al variare di ρ in $[0, +\infty[$ e di φ in $[0, \pi]$ si ottiene il semipiano S_θ di origine z che interseca il piano xy lungo la semiretta di anomalia θ.

Capitolo 4

Funzioni di più variabili.

4.1 Funzioni reali di k variabili reali.

In questo paragrafo con X denoteremo un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 4.1.1. *Una funzione reale di k variabili reali definita in X è una legge che ad ogni punto $P = (x_1, \cdots, x_k) \in X$ associa uno ed un solo $y \in \mathbb{R}$, essa si denota con il simbolo $f : X \to \mathbb{R}$. L'insieme X si chiama dominio della funzione f e l'insieme:*

$$f(X) = \{y = f(P) \in \mathbb{R} \ : \ P \in X\},$$

si dice codominio di f. Qualunque sia $P = (x_1, \cdots, x_k) \in X$, il numero reale $f(P) = f(x_1, \cdots, x_k)$ si chiama immagine di P tramite f.

Definizione 4.1.2. *La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice dotata di minimo* (risp. *massimo*) *se il suo codominio $f(X)$ è dotato di minimo* (risp. *massimo*), i.e.:

$$\exists\ \bar{P} \in X \ : \ f(\bar{P}) = \min f(X) = \min\{f(P) : P \in X\},$$

$$(\text{risp. } \exists\ \bar{\bar{P}} \in X \ : \ f(\bar{\bar{P}}) = \max f(X) = \max\{f(P) : P \in X\}).$$

Definizione 4.1.3. *La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice limitata inferiormente* (risp. *superiormente*) *se il suo codominio $f(X)$ è limitato inferiormente* (risp. *superiormente*), i.e.:

$$\exists a \in \mathbb{R} \ : \ a \leq f(P), \forall P \in X,$$

$$(\text{risp. } \exists b \in \mathbb{R} \ : \ f(P) \leq b, \forall P \in X).$$

Il numero a (risp. b) *si dice minorante* (risp. *maggiorante*) *di* f.

Definizione 4.1.4. *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *è limitata inferiormente* (*essendo* $\mathbb{R}$ *completo*) *esiste un* $l' \in \mathbb{R}$ *tale che:*

$$l' = \inf_{P \in X} f(P) = \inf f(X) = \max\{a \in \mathbb{R} : a \textit{ minorante di } f\},$$

tale numero si dice estremo inferiore della funzione f.

Definizione 4.1.5. *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *è limitata superiormente* (*essendo* $\mathbb{R}$ *completo*) *esiste un* $l'' \in \mathbb{R}$ *tale che:*

$$l'' = \sup_{P \in X} f(P) = \sup f(X) = \min\{b \in \mathbb{R} : b \textit{ maggiorante di } f\},$$

tale numero si dice estremo superiore della funzione f.

Di facile verifica sono le proposizioni seguenti:

Proposizione 4.1.6. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *limitata inferiormente. Il numero reale* l' *è l'estremo inferiore di* $f(X)$ *se e solo se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*
$j)$ $\ l' \leq f(P), \forall P \in X,$
$jj)$ $\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P'_\varepsilon \in X \ : \ f(P'_\varepsilon) < l' + \varepsilon.$

Proposizione 4.1.7. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *limitata superiormente. Il numero reale* l'' *è l'estremo superiore di* $f(X)$ *se e solo se sono soddisfatte le condizioni seguenti:*
$i)$ $\ f(P) \leq l'', \forall P \in X,$
$ii)$ $\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P''_\varepsilon \in X \ : \ l'' - \varepsilon < f(P''_\varepsilon).$

Definizione 4.1.8. *La funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *si dice limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente.*

Definizione 4.1.9. *La funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *si dice non limitata inferiormente* (risp. *superiormente*) *e si scrive:*

$$\inf f(X) = -\infty \quad (\text{risp. } \sup f(X) = +\infty),$$

quando:

$$\forall K > 0\, \exists\, P_K \in X \ : \ f(P_K) < -K \quad (\text{risp.} \, \forall K > 0\, \exists\, P_K \in X \ : \ f(P_K) > K).$$

E' bene notare che se $X \subseteq \mathbb{R}^k$, con $k \geq 2$, e $f : X \to \mathbb{R}$ non ha senso parlare di monotonia di f in quanto $\mathbb{R}^k$ non è totalmente ordinato.

Concludiamo questo paragrafo considerando il caso in cui $k = 2$, i.e. $X \subseteq \mathbb{R}^2$. La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ ha grafico:

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ : (x, y) \in X\};$$

se X soddisfa la condizione:

$$(x, y) \in X \Longleftrightarrow (-x, -y) \in X,$$

si dice che f è una funzione *pari* (risp. *dispari*) se risulta $f(-x, -y) = f(x, y)$ (risp. $f(-x, -y) = -f(x, y)$). Si noti che, se f è una funzione pari (risp. dispari) il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse z (risp. all'origine di $\mathbb{R}^3$).

4.2 Rappresentazione geometrica di alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

1. L'insieme:

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > x\}$$

   è il semipiano che si trova al di sopra della retta di equazione $y = x$.

2. L'insieme:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x + 1\}$$

è il semipiano che si trova al di sotto della retta di equazione $y = -x+1$.

3. L'insieme:

$$C((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)-(0,0)| \leqslant 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\}$$

è il cerchio chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

4. L'insieme:

$$C((1,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y) - (1,0)| \leqslant 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leqslant 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

è il cerchio chiuso di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

5. L'insieme:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

è la parte di piano che si trova al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$.

6. L'insieme:

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$$

è la parte di piano che si trova al di sotto della parabola di equazione $y = x^2$.

7. L'insieme:

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2\}$$

è la parte di piano che si trova al di sotto della parabola di equazione $y = -x^2$.

4.3 Insieme di definizione di alcune funzioni composte.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Osserviamo che:

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 \geqslant -1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

quindi l'insieme di definizione della funzione $f(x,y)$ è il cerchio chiuso di centro $(0,0)$ e raggio 1.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$g(x,y) = 1 - \log(y(x - y^2)).$$

Osserviamo che:

$$y(x - y^2) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ \\ x - y^2 > 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y < 0 \\ \\ x - y^2 < 0, \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} y > 0 \\ \\ x > y^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} y < 0 \\ \\ x < y^2. \end{cases}$$

Quindi, il primo sistema è soddisfatto da tutti i punti dell'insieme:

$$H = \{(x,y) : x \in]0, +\infty[, y \in]0, \sqrt{x}[\}.$$

Riguardo al secondo sistema, essendo $y < 0$, ci dobbiamo occupare solo del terzo e quarto quadrante. Osserviamo subito che, se $x \leq 0$ certamente è soddisfatta la disequazione $x < y^2$, quindi soddisfano il secondo sistema tutti i punti del terzo quadrante:

$$K_1 =]-\infty, 0] \times]-\infty, 0[;$$

inoltre, spostandoci nel quarto quadrante si ottiene che il secondo sistema è soddisfatto anche dai punti dell'insieme:

$$K_2 = \{(x, y) : x \in]0, +\infty[, y \in] - \infty, -\sqrt{x}[\}.$$

Concludendo, l'insieme di definizione della $g(x, y)$ è:

$$X = H \cup K_1 \cup K_2.$$

3. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \log(\operatorname{arcsen}(x^2 - y)).$$

Osserviamo che:

$$\operatorname{arcsen}(x^2 - y) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - y \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y > 0 \\ x^2 - y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < x^2 \\ y \geqslant x^2 - 1. \end{cases}$$

Concludendo l'insieme di definizione della 3) è:

$$H = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in [x^2 - 1, x^2[\},$$

i.e. la parte di piano compresa tra le parabole di equazioni $y = x^2 - 1$ e $y = x^2$, sono compresi i punti della prima parabola e sono esclusi i punti della seconda.

4. Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{\log(x^2 + y^2 - 3)}.$$

L'insieme di definizione della funzione $f(x, y)$ si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 3 > 0, \\ x^2 + y^2 - 3 \neq 1. \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta da tutti i punti del primo e terzo quadrante, la seconda è soddisfatta da tutti i punti esterni al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$; infine, la terza è soddisfatta da tutti i punti non appartenenti alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2.

4.4 Monomi e polinomi nelle variabili $x_1, \ldots, x_k$.

Si chiama *monomio nelle variabili* $x_1, ..., x_k$ *di coefficiente* $a \in \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x_1, ..., x_k) = a x_1^{h_1} x_2^{h_2} ... x_k^{h_k},$$

dove $h_1, ..., h_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $a \neq 0$ il grado di tale monomio è $h = \sum_{i=1}^{k} h_i$.
Si dice *polinomio nelle variabili* $x_1, ..., x_k$ la somma di due o più monomi.
Il rapporto di due polinomi nelle variabili $x_1, ..., x_k$ si chiama *funzione razionale nelle variabili* $x_1, ..., x_k$.
La funzione $f(x_1, ..., x_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ si chiama *funzione lineare nelle variabili* $x_1, ..., x_k$.
Si dice *forma quadratica nelle variabili* $x_1, ..., x_k$ un polinomio omogeneo di secondo grado in k variabili:

$$\varphi(x_1, ..., x_k) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j,$$

tale che $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, ..., k\}$.

Esempio. Considerata la funzione:

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2,$$

notiamo che, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ risulta:

$$f(x, y_0) = x^2,$$

ciò significa che la sezione del grafico della f con il piano di equazione $y = y_0$ è la parabola:

$$\begin{cases} z = x^2 \\ y = y_0, \end{cases}$$

quindi, per l'arbitrarietà di y_0 si ha che il grafico della f è la superficie cilindrica avente come direttrice la parabola del piano xz di equazione $z = x^2$ e avente come generatrici le rette ortogonali al piano xz e passanti per la suddetta curva.

4.5 Funzioni vettoriali di k variabili reali.

Definizione 4.5.1. *Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^k$ e $f_1, \cdots, f_m$, m funzioni reali definite in X. La funzione:*

$$f : P \in X \longrightarrow (f_1(P), \cdots, f_m(P)) \in \mathbb{R}^m,$$

si dice funzione vettoriale ad m componenti di k variabili reali; qualunque sia $i \in \{1, \cdots, m\}$, la funzione f_i si chiama componente $i-esima$ di f. L'insieme X si chiama dominio della funzione f e l'insieme:

$$f(X) = \{(f_1(P), \cdots, f_m(P)) \in \mathbb{R}^m \quad : \quad P \in X\},$$

si dice codominio di f. Qualunque sia $P = (x_1, \cdots, x_k) \in X$, il punto $Q = f(P) = (f_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_k))$ si chiama immagine di P tramite f.

Se $k = m$ la funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ prende il nome di campo vettoriale definito in X.

La funzione f si dice limitata se tali sono le funzioni $f_1, \cdots, f_m$.

Siccome $\mathbb{R}^m$ è munito della struttura di spazio vettoriale, la funzione f possiamo pensarla come una funzione che ad ogni punto P di X associa il vettore $v(P) = (f_1(P), \cdots, f_m(P)) \in \mathbb{R}^m$. Considerati i versori coordinati di $\mathbb{R}^m$, $e_1, \cdots, e_m$, il vettore $v(P)$ lo possiamo scrivere anche nel modo seguente:

$$v(P) = f_1(P)e_1 + \cdots + f_m(P)e_m;$$

conseguentemente, la corrispondenza che ad ogni $P \in X$ associa il punto $Q = f(P) \in \mathbb{R}^m$ si può esprimere in forma vettoriale come segue:

$$Q = O + f_1(P)e_1 + \cdots + f_m(P)e_m,$$

al solito O è l'origine di $\mathbb{R}^m$.

Definizione 4.5.2. *Si definisce modulo della funzione $f : X \to \mathbb{R}^m$, e si denota con $|f|$, la seguente funzione reale di k variabili reali:*

$$|f| : P \in X \to |v(P)| = \sqrt{(f_1(P))^2 + \cdots + (f_m(P))^2} \in [0, +\infty[.$$

Concludiamo questo paragrafo con la nozione di funzione composta tra funzioni vettoriali.

Consideriamo la funzione:

$$f : (x_1, \cdots, x_k) \in X \subseteq \mathbb{R}^k \to f(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^m$$

e la funzione:

$$g : (y_1, \cdots, y_m) \in Y \subseteq \mathbb{R}^m \to g(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^n.$$

Se l'insieme $H = \{(x_1, \cdots, x_k) \in X : f(x_1, \cdots, x_k) \in Y\}$ è non vuoto, ha senso considerare la *funzione composta tra f e g*, cioè la funzione:

$$g \circ f : (x_1, \cdots, x_k) \in H \to g(f(x_1, \cdots, x_k)) \in \mathbb{R}^n.$$

Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to (x_1^2, x_1 + x_2, log x_2) \in \mathbb{R}^3,$$

e

$$g : (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \to \left(\cos(y_1 y_2^3 + y_3^2), e^{y_2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione composta tra f e g è:

$$g \circ f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \left(\cos\left(x_1^2(x_1 + x_2)^3 + (log x_2)^2\right), e^{x_1 + x_2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Capitolo 5

Limiti e continuità delle funzioni di più variabili.

5.1 Elementi di topologia.

Definizione 5.1.1. *Si dice intorno circolare del punto P_0 di $\mathbb{R}^k$ ogni cerchio aperto di $\mathbb{R}^k$ di centro P_0; i.e., un intorno circolare di P_0 è un insieme del tipo:*

$$I(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^k : |P - P_0| < r\},$$

qualunque sia $r > 0$.

Si dice intorno rettangolare del punto $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0)$ di $\mathbb{R}^k$ ogni rettangolo aperto di $\mathbb{R}^k$ di centro P_0; i.e., un intorno rettangolare di P_0 è un insieme del tipo:

$$R(P_0) = \prod_{i=1}^{k}]x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i[,$$

qualunque siano i numeri reali positivi $\delta_1, \cdots, \delta_k$.

In generale, diremo intorno di P_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ contenente un intorno circolare oppure rettangolare di P_0; il generico intorno di P_0 lo denoteremo con il simbolo $I(P_0)$.

Si noti che, se $\delta_i = \delta,\ i = 1, \cdots, k$, allora:

$$\{P \in \mathbb{R}^k : |P - P_0| < \delta\} \subset \prod_{i=1}^{n}]x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta[\subset \{P \in \mathbb{R}^k : |P - P_0| < \sqrt{2}\delta\}.$$

Definizione 5.1.2. *Per intorno del punto ∞ si intende ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ contenente i punti esterni ad un intorno circolare dell'origine di $\mathbb{R}^k$ oppure, più in generale, il complementare di un cerchio chiuso di $\mathbb{R}^k$.*

Vale la seguente:

Proposizione 5.1.3. *Qualunque siano $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^k$, con $P_1 \neq P_2$, esistono un intorno I_1 di P_1 e un intorno I_2 di P_2 tali che:*

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Definizione 5.1.4. *Il punto $P_0 \in \mathbb{R}^k$ si dice punto d'accumulazione per il sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ quando, qualunque sia l'intorno I di P_0, risulta:*

$$(X - \{P_0\}) \cap I \neq \emptyset.$$

L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^k$ che sono d'accumulazione per X si dice derivato di X e si denota con il simbolo DrX, dunque:

$$DrX = \{P_0 \in \mathbb{R}^k :\ P_0 \text{ è d'accumulazione per } X\}.$$

I punti del derivato di X si dicono punti d'accumulazione al finito di X.

Definizione 5.1.5. *Il punto ∞ si dice punto d'accumulazione per il sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ quando, qualunque sia l'intorno I di ∞, risulta:*

$$X \cap I \neq \emptyset.$$

Vale il seguente:

Teorema 5.1.6. (**Teorema di Bolzano - Weierstrass**)
Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

I) *X è infinito.*

II) *X ha almeno un punto d'accumulazione.*

D'ora in poi con X denoteremo un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 5.1.7. *Un punto $P_0 \in X - DrX$ si dice punto isolato di X.*

Si noti che P_0 è un punto isolato di X se e solo se esiste un $I(P_0)$ tale che $X \cap I(P_0) = \{P_0\}$.

Definizione 5.1.8. *Un punto $P_0 \in X$ si dice punto interno ad X se esiste $I(P_0)$ tale che $I(P_0) \subseteq X$. L'insieme dei punti interni ad X si chiama interno di X e si denota con $\overset{\circ}{X}$.*

Definizione 5.1.9. *Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^k$ si dice punto esterno ad X se P_0 è interno a $Y = \mathbb{R}^k - X$, i.e., $P_0 \in \overset{\circ}{Y}$.*

Definizione 5.1.10. *Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^k$ si dice punto di frontiera per X se P_0 non è né interno né esterno ad X, i.e., $\forall I(P_0)$ risulta:*

$$X \cap I(P_0) \neq \emptyset \quad e \quad (\mathbb{R}^k - X) \cap I(P_0) \neq \emptyset.$$

L'insieme costituito dai punti di $\mathbb{R}^k$ che sono di frontiera per X si dice frontiera di X e si denota con uno dei simboli ∂X, FrX.

Definizione 5.1.11. *L'insieme $X \cup DrX$ si chiama chiusura di X e si denota con il simbolo $\overline{X}$.*

Definizione 5.1.12. *Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^k$ si dice chiuso se contiene il proprio derivato, cioè se $C = \overline{C}$.*

Definizione 5.1.13. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^k$ si dice aperto se il suo complementare, $\mathbb{R}^k - A$, è chiuso.*

Proposizione 5.1.14. *Il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^k$ è aperto se e solo se ogni punto di A è interno ad A, cioè se $A = \overset{\circ}{A}$.*

Definizione 5.1.15. *Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^k$ si dice dominio di $\mathbb{R}^k$ se D è la chiusura di un aperto di $\mathbb{R}^k$.*

Definizione 5.1.16. *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ si dice limitato se è contenuto in un intorno circolare dell'origine di $\mathbb{R}^k$.*

Definizione 5.1.17. *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ si dice compatto se è chiuso e limitato.*

Definizione 5.1.18. *Un aperto A di $\mathbb{R}^k$ si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^k$ la cui unione sia A.*

Definizione 5.1.19. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ si dice dominio connesso di $\mathbb{R}^k$ se è la chiusura di un aperto connesso di $\mathbb{R}^k$.*

Definizione 5.1.20. *Siano $P_1, \cdots, P_n$, n punti distinti di $\mathbb{R}^k$. Diremo poligonale di $\mathbb{R}^k$ di vertici $P_1, \cdots, P_n$ l'insieme:*

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{P_i, P_{i+1}},$$

con $\overline{P_i, P_{i+1}}$ si denota il segmento di $\mathbb{R}^k$ di estremi P_i e P_{i+1}.
I punti P_1 e P_n si dicono estremi della poligonale.

Si dimostra che:

Teorema 5.1.21. *Un aperto A di $\mathbb{R}^k$ è connesso se e solo se per ogni coppia di punti P e Q di A esiste una poligonale di estremi P e Q tutta contenuta in A.*

Definizione 5.1.22. *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^k$ si dice convesso se, qualunque siano i punti P e Q di X, il segmento di estremi P e Q è contenuto in X.*

Si osservi che, se X è convesso allora X è connesso, il contrario non vale.

Definizione 5.1.23. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, il numero:*

$$\sup_{P,Q \in X} |P - Q|,$$

si dice diametro di X.

Definizione 5.1.24. *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}^k$, il numero:*

$$d(X,Y) = \inf_{P \in X, Q \in Y} |P - Q|,$$

si dice distanza di X da Y.

5.2 Limiti e continuità delle funzioni reali di k variabili reali.

Definizione 5.2.1. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto d'accumulazione per X, $f : X \to \mathbb{R}$ e $l \in \hat{\mathbb{R}}$. Il punto l si dice limite per P che tende a P_0 della funzione f , e si scrive:*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l, \tag{5.1}$$

se:

$$\forall J(l) \; \exists I(P_0) \; : \; P \in X \cap (I - \{P_0\}) \Longrightarrow f(P) \in J. \tag{5.2}$$

Se $l \in \mathbb{R}$ si dice che f converge a l in P_0; in particolare, se $l = 0$ la funzione f si dice infinitesima in P_0.
Se $l = +\infty$ (risp. *$l = -\infty$*) *si dice che f diverge positivamente* (risp. *negativamente*) *in P_0.*
In ognuno dei suddetti casi la f si dice regolare in P_0.

Analizziamo qualche caso particolare della (5.2).

1) Se $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l \in \mathbb{R}$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; : \; P \in X \text{ e } 0 < |P - P_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(P) - l| < \varepsilon.$$

2) Se $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l = +\infty$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall K > 0 \; \exists \delta_K > 0 \; : \; P \in X \text{ e } 0 < |P - P_0| < \delta_K \Longrightarrow f(P) > K.$$

3) Se $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l = -\infty$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall K > 0 \ \exists \delta_K > 0 \ : \ P \in X \text{ e } 0 < |P - P_0| < \delta_K \implies f(P) < -K.$$

4) Se $P_0 = \infty$ e $l \in \mathbb{R}$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon > 0 \ : \ P \in X \text{ e } |P - 0| > M_\varepsilon \implies | f(P) - l | < \varepsilon.$$

5) Se $P_0 = \infty$ e $l = +\infty$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall K > 0 \ \exists M_K > 0 \ : \ P \in X \text{ e } |P - 0| > M_K \implies f(P) > K.$$

6) Se $P_0 = \infty$ e $l = -\infty$ allora la (5.2) possiamo scriverla come segue:

$$\forall K > 0 \ \exists M_K > 0 \ : \ P \in X \text{ e } |P - 0| > M_K \implies f(P) < -K.$$

Enunciamo, ora, il teorema sull'unicità del limite per le funzioni reali di più variabili reali, la cui dimostrazione è uguale a quella dell'analogo teorema relativo alle funzioni reali di una variabile reale.

Teorema 5.2.2. (**Teorema sull'unicità del limite**) *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto d'accumulazione per X e $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è dotata di limite nel punto P_0 allora tale limite è unico.*

Nota 1. - *Per le funzione di più variabili, come per quelle di una variabile, valgono i teoremi sul limite della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni, il teorema sul limite di una funzione composta e il teorema della permanenza del segno.*

5.3 Funzioni continue.

Definizione 5.3.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $P_0 \in X \cap DrX$. Si dice che f è continua in P_0 se risulta*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0),$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : P \in X \; e\, |P - P_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Per convenzione, f è continua nei punti isolati del suo insieme di definizione.

Nota 2. - *Come conseguenza dei teoremi citati nella Nota 1 si ottengono i relativi teoremi per le funzioni continue.*

Nota 3. - *Se una funzione reale di una variabile reale è continua, allora essa è continua anche se è considerata come funzione di più variabili.*

Chiariamo con un esempio quanto è stato appena detto.

Esempio 1. Considerata la funzione $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, e osservato che g è continua in $\mathbb{R}$, proviamo che la funzione:

$$f(x, y) = x^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è continua in $\mathbb{R}^2$. Per fare ciò basta far vedere che, considerato un generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, risulta:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Dalla continuità di g in x_0 segue che:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0 :\; x \in]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[\implies |x^2 - x_0^2| < \varepsilon; \tag{5.3}$$

d'altro canto, qualunque sia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, risulta :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x^2 - x_0^2|,$$

da cui, per la (5.3), segue che:

$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_\varepsilon > 0 : (x, y) \in]x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon[\times\mathbb{R} \implies |f(x, y)-f(x_0, y_0)| = |x^2-x_0^2| < \varepsilon.$

L'asserto è così dimostrato.

Vediamo, ora, altri esempi di funzioni continue:

Esempio 2. Mostriamo che la funzione:

$$h(x, y) = x^2 \log y,\ (x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[,$$

è continua in $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

Infatti, $h(x, y)$ è prodotto della funzione $f(x, y) = x^2$, continua in $\mathbb{R}^2$, e della funzione $g(x, y) = \log y$, continua in $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

Esempio 3. Mostriamo che la funzione:

$$k(x, y) = e^{x^3+\sqrt{y}}, (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[,$$

è continua in $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Infatti, $k(x, y)$ è la funzione composta tra la funzione $f(x, y) = x^3 + \sqrt{y}$, continua in $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, e la funzione $g(z) = e^z$, continua in $\mathbb{R}$.

Teorema 5.3.2. (**Teorema di Weierstrass**) *Se X è un compatto di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua in X, allora $f(X)$ è un compatto di $\mathbb{R}$ dunque f è dotata di minimo e di massimo in X.*

Teorema 5.3.3. (**Teorema degli zeri**)
Siano X un connesso di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ continua in X. Se esistono P, P' appartenenti a X tali che $f(P)f(P') < 0$ allora esiste $Q \in X$ tale che $f(Q) = 0$.

Teorema 5.3.4. (**Teorema di Bolzano**) *Siano X un connesso di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ continua in X. Allora f assume tutti i valori compresi tra $\inf f(X)$ e $\sup f(X)$, dunque $f(X)$ è un intervallo di $\mathbb{R}$.*

Teorema 5.3.5. (**Teorema di Cantor**)
Se X è un compatto di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua in X, allora f è uniformemente continua in X, i.e.:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : P_1, P_2 \in X \text{ e } |P_1 - P_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon.$$

5.4 Limite secondo una direzione.

Definizione 5.4.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $P_0 \in \mathbb{R}^k$, r una retta passante per P_0, $P_0 \in Dr(X \cap r)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se esiste il limite seguente:*

$$\lim_{P \to P_0} f_{/X \cap r}(P) = l,$$

allora si dice che l è il limite di f in P_0 nella direzione di r e tale limite si denota col simbolo:

$$\lim_{P \in r, P \to P_0} f(P).$$

Si osservi che, se r ha equazione:

$$P(t) = P_0 + vt, \ t \in \mathbb{R},$$

allora:

$$\lim_{P \in r, P \to P_0} f(P) = \lim_{t \to 0} f(P_0 + vt).$$

Esempio. Siano $f(x, y) = x^2 + 3y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e $v = (1, 2)$. Allora $P(t) = (0, 1) + t(1, 2) = (t, 1 + 2t)$, quindi:

$$\lim_{(x,y) \in r, (x,y) \to (0,1)} (x^2 + 3y) = \lim_{t \to 0} (t^2 + 3(1 + 2t)) = \lim_{t \to 0} (t^2 + 3 + 6t) = 3.$$

Si dimostra che:

Teorema 5.4.2. *Se* $f : X \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $P_0 \in DrX$ *e:*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l,$$

allora, qualunque sia la retta r *tale che* $P_0 \in Dr(X \cap r)$ *risulta:*

$$\lim_{P \in r, P \to P_0} f(P) = l.$$

In seguito, con un esempio, si mostrerà che una funzione può essere dotata di limite in un punto P secondo una qualunque direzione ma non dotata limite in P.

5.5 Limiti e continuità delle funzioni vettoriali di k variabili reali.

Definizione 5.5.1. *Siano* X *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^k$, P_0 *un punto d'accumulazione per* X, $f : X \to \mathbb{R}^m$ *e* $l \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. *Il punto* l *si dice limite per* P *che tende a* P_0 *della funzione* f, *e si scrive:*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l, \tag{5.4}$$

se:

$$\forall J(l)\ \exists I(P_0)\ :\ P \in X \cap (I - \{P_0\}) \Longrightarrow f(P) \in J. \tag{5.5}$$

Analizziamo qualche caso particolare della (5.5).

1) Se $P_0 \in \mathbb{R}^k$ e $l \in \mathbb{R}^m$ allora la (5.5) possiamo scriverla come segue:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ :\ P \in X \text{ e } 0 < |P - P_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(P) - l| < \varepsilon.$$

2) Se $P_0 = \infty$ e $l = \infty$ allora la (5.5) possiamo scriverla come segue:

$$\forall K > 0\ \exists M_K > 0\ :\ P \in X \text{ e } |P - O| > M_K \Longrightarrow |f(P) - O| > K.$$

Osservazione. Se $l = (l_1, \cdots, l_m) \in \mathbb{R}^m$, qualunque sia $i \in \{1, \cdots, m\}$, risulta:

$$|f_i(P) - l_i| \leq |f(P) - l| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(P) - l_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(P) - l_i|,$$

quindi:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{P \to P_0} f_i(P) = l_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}. \tag{5.6}$$

Definizione 5.5.2. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ e $P_0 \in X \cap DrX$. La funzione $f : X \to \mathbb{R}^m$ si dice continua nel punto P_0 se:*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0). \tag{5.7}$$

Dalla (5.6) segue che, *la funzione vettoriale:*

$$f : P \in X \to (f_1(P), \cdots, f_m(P)) \in \mathbb{R}^m$$

è continua nel punto P_0 se e solo se lo sono le sue componenti $f_1, \cdots, f_m$.

Osservazione. C'è la convenzione che ogni funzione è continua nei punti isolati del suo insieme di definizione.

Se la funzione $f : X \to \mathbb{R}^m$ non è continua nel punto P_0 ma esiste:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \in \mathbb{R}^m, \tag{5.8}$$

allora ha senso considerare la seguente funzione:

$$g(P) = \begin{cases} f(P) & \text{se } \ P \in X - \{P_0\} \\ \\ l & \text{se } \ P = P_0. \end{cases}$$

La funzione g si dice *prolungamento continuo di f nel punto P_0* in quanto:

$$\lim_{P \to P_0} g(P) = \lim_{P \to P_0} f(P) = l = g(P_0).$$

Esempi.

1. Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $x(t), y(t), z(t)$ tre funzioni reali continue in I. Allora la funzione:

   $$\varphi : t \in I \to \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

   è una funzione vettoriale a tre componenti, di una variabile reale, continua in I. La funzione $\varphi(t)$ si dice *curva dello spazio* e il suo codominio $\Gamma = \varphi(I)$ si dice *sostegno della curva* $\varphi(t)$.

2. Siano B un dominio limitato internamente connesso di $\mathbb{R}^2$ e $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tre funzioni reali continue in B. La funzione:

   $$P : (u,v) \in B \to P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

   è una funzione vettoriale a tre componenti, di due variabili reali, continua in B. La funzione $P(u,v)$ si dice *superficie* e il suo codominio $S = P(B)$ si dice *sostegno della superficie* $P(u,v)$.

Teorema 5.5.3. (**Teorema di Weierstrass**) *Se X è un compatto di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ è continua in X, allora $f(X)$ è un compatto di $\mathbb{R}^m$, i.e. $f(X)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 5.5.4. (**Teorema di Bolzano**) *Se X è un connesso di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ è continua in X, allora $f(X)$ è un connesso di $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 5.5.5. (**Teorema di Cantor**)

Se X è un compatto di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ è continua in X, allora f è uniformemente continua in X, i.e.:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : P_1, P_2 \in X \text{ e } |P_1 - P_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon.$$

5.6 Successioni di punti di $\mathbb{R}^m$.

Una funzione:

$$f : n \in \mathbb{N} \to f(n) = x_n \in \mathbb{R}^m$$

si dice *successione di punti di* $\mathbb{R}^m$ *e si denota con* $\{x_n\}$.

a) Diremo che la successione $\{x_n\}$ è convergente ed ha per limite $l = (l_1, ...l_m) \in \mathbb{R}^m$, e scriveremo:

$$\lim_n x_n = l,$$

quando:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : n > \nu_\varepsilon \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon.$$

Posto $x_n = (x_{1,n}, ..., x_{m,n})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla (5.6) si ha che:

$$\lim_n x_n = l \iff \lim_n x_{i,n} = l_i, \ \ i = 1, ..., m.$$

b) Diremo che la successione $\{x_n\}$ è divergente e scriveremo:

$$\lim_n x_n = \infty,$$

quando:

$$\forall K > 0 \, \exists \nu_K : n > \nu_K \Rightarrow |x_n - O| > K.$$

Definizione 5.6.1. *Se* $\{x_n\}$ *è una successione di punti di* $\mathbb{R}^m$ *e* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione* $\{x_{n_k}\}$ *si dice successione estratta da* $\{x_n\}$.

Teorema 5.6.2. *Da ogni successione limitata se ne può estrarre una convergente.*

Teorema 5.6.3. (**Criterio di Cauchy**) *La successione* $\{x_n\}$ *è convergente se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : h, k > \nu_\varepsilon \Rightarrow |x_h - x_k| < \varepsilon.$$

Teorema 5.6.4. (**Teorema fondamentale per l'esistenza del limite**) *Siano* $X \subseteq \mathbb{R}^m$*,* $g : X \to \mathbb{R}^h$ *e* x_0 *un punto d'accumulazione per* X *e* $l \in \mathbb{R}^h \cup \{\infty\}$*. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

a) *La funzione* g *è regolare in* x_0 *ed ha limite* l*;*

b) *Qualunque sia la successione* $\{x_n\}$ *di punti di* $X - \{x_0\}$ *avente limite* x_0*, si ha che:*

$$\lim_n g(x_n) = l.$$

Capitolo 6

Calcolo differenziale per le funzioni di più variabili.

6.1 Derivate delle funzioni reali di k variabili reali.

Definizione 6.1.1. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, $P = (x_1, \cdots, x_k)$ un punto di A e $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a x_i nel punto P quando esiste finito il limite seguente:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1},\ x_i + h\ , x_{i+1}, \cdots, x_k) - f(x_1, \cdots, x_k)}{h}, \tag{6.1}$$

tale limite si chiama derivata parziale di f rispetto a x_i nel punto P e si denota con uno dei simboli:

$$f_{x_i}(P), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(P), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(P).$$

Se la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a x_i in ogni punto di A si dice che la f è derivabile parzialmente rispetto a x_i in A.

Osservazione 1. Di solito, per calcolare la derivata parziale della funzione $f(x_1, \cdots, x_k)$ rispetto ad x_i, non si utilizza la (6.1) ma si suppone che le variabili $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_k$ siano fissate e, usufruendo delle usuali regole di derivazione, si deriva la $f(x_1, \cdots, x_k)$ rispetto alla variabile x_i.

Esempio 1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = 3xy + 3^{xy} + 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se si vuole derivare la $f(x,y)$ rispetto a x si suppone che la y sia fissata e, pensando la $f(x,y)$ come funzione della sola x, si deriva ottenendo così:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3xy + 3^{xy} + 2y) = 3y + 3^{xy} \cdot y \cdot log3;$$

in modo analogo si procede quando si vuole calcolare la derivata parziale di $f(x,y)$ rispetto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3xy + 3^{xy} + 2y) = 3x + 3^{xy} \cdot x \cdot log3 + 2.$$

Esempio 2. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = e^{xyz}$; essa è definita in tutto $\mathbb{R}^3$ ed è ivi derivabile. Le sue derivate parziali prime sono:

$$f_x = e^{xyz} yz, \quad f_y = e^{xyz} xz, \quad f_z = e^{xyz} xy.$$

Osservazione 2. Considerati i versori coordinati, $e_1, \cdots, e_k$, di $\mathbb{R}^k$ e il punto $P = (x_1, \cdots, x_k)$, si ha che:

$$P + he_i = (x_1, \cdots, x_k) + he_i = (x_1, \cdots, x_{i-1},\ x_i + h\ , x_{i+1}, \cdots, x_k),$$

quindi, il limite (6.1) si può esprimere in forma vettoriale come segue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P + he_i) - f(P)}{h}. \tag{6.2}$$

Esempio 3. La funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è derivabile parzialmente sia rispetto a x che rispetto a y in ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ e risulta:

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Facciamo vedere che f non è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto $(0,0)$; infatti, essendo $f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$, si ha che:

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \\ \\ -1, & \text{se } h < 0, \end{cases}$$

quindi:

$$\nexists \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

In modo analogo si prova che f non è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto $(0,0)$.

Definizione 6.1.2. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, P un punto di A e $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che la funzione f è derivabile nel punto P se è derivabile parzialmente rispetto a $x_1, \cdots, x_k$ nel punto P. Si dice che la funzione f è derivabile in A se f è derivabile in ogni punto di A.*

Definizione 6.1.3. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, P un punto di A e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto P. Si chiama gradiente di f nel punto P, e si denota con uno dei due simboli $Df(P)$ o $\nabla f(P)$, il vettore avente per componenti le derivate parziali di f calcolate nel punto P, cioè:*

$$Df(P) = \nabla f(P) = (f_{x_1}(P), \cdots, f_{x_k}(P)).$$

Se la funzione f è derivabile in A si definisce campo vettoriale gradiente della funzione f, e si denota con Df, il seguente campo vettoriale:

$$Df : P \in A \to Df(P) = (f_{x_1}(P), \cdots, f_{x_k}(P)) \in \mathbb{R}^k.$$

Di facile verifica sono le seguenti due proposizioni:

Proposizione 6.1.4. *Se A è un aperto di $\mathbb{R}^k$ e le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono derivabili rispetto a x_i nel punto P di A, allora:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(P) = f_{x_i}(P) + g_{x_i}(P), \quad \frac{\partial(c \cdot f)}{\partial x_i}(P) = c \cdot f_{x_i}(P),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(P) = f_{x_i}(P) \cdot g(P) + f(P) \cdot g_{x_i}(P),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{f_{x_i}(P) \cdot g(P) - f(P) \cdot g_{x_i}(P)}{g^2(P)},$$

con $c \in \mathbb{R}$ e $g(P) \neq 0$.

Proposizione 6.1.5. *Se A è un aperto di $\mathbb{R}^k$ e le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono derivabili nel punto P di A, allora:*

$$D(f+g)(P) = Df(P) + Dg(P), \quad D(c \cdot f)(P) = c \cdot Df(P),$$

$$D(f \cdot g)(P) = Df(P) \cdot g(P) + f(P) \cdot Dg(P),$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{Df(P) \cdot g(P) - f(P) \cdot Dg(P)}{g^2(P)},$$

con $c \in \mathbb{R}$ e $g(P) \neq 0$.

Fino ad ora ci siamo occupati solo delle derivate parziali di una funzione in un punto interno al suo insieme di definizione, infatti abbiamo considerato solo funzioni definite in un aperto di $\mathbb{R}^k$.

Adesso, *occupiamoci delle derivate parziali di una funzione in un punto di frontiera del suo insieme di definizione.*

Definizione 6.1.6. *Siano D un dominio di $\mathbb{R}^k$ e $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente le condizioni:*

1) *f è derivabile parzialmente rispetto a x_i in ogni punto di $\overset{\circ}{D}$;*

2) *f_{x_i} è continua in $\overset{\circ}{D}$, i.e.:*

$$\lim_{P \to P_0} f_{x_i}(P) = f_{x_i}(P_0), \quad \forall P_0 \in \overset{\circ}{D}.$$

Diremo che la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a x_i nel punto $Q \in \partial D$ se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{P \in \overset{\circ}{D},\ P \to Q} f_{x_i}(P),$$

anche in questo caso la derivata si denota con il simbolo $f_{x_i}(Q)$.

Ora, passiamo alle derivate di ordine superiore.

Definizione 6.1.7. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile parzialmente rispetto ad x_i in A. Se la funzione $f_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente rispetto ad x_j nel punto $P \in A$ allora, se $i \neq j$, la funzione f si dice parzialmente derivabile nel punto P rispetto a $x_i x_j$; invece, se $i = j$, la funzione f si dice parzialmente derivabile nel punto P due volte rispetto a x_i.*
Se $i \neq j$ la derivata parziale di f_{x_i} rispetto ad x_j nel punto P si dice derivata parziale seconda (o *di ordine 2*) *di f in P rispetto a $x_i x_j$ e si denota con uno dei simboli:*

$$f_{x_i x_j}(P), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(P). \tag{6.3}$$

Se $i = j$ la derivata parziale di f_{x_i} rispetto ad x_i nel punto P si dice derivata parziale seconda (o *di ordine 2*) *di f in P rispetto a x_i^2 e si denota con uno dei simboli:*

$$f_{x_i^2}(P), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(P).$$

Se la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile nell'aperto A di $\mathbb{R}^k$ e le sue derivate parziali $f_{x_1}, \cdots, f_{x_k}$ sono derivabili in A, allora tutte le derivate parziali seconde della f si ottengono dalla (6.3) al variare di i e j nell'insieme $\{1, \cdots, k\}$. In questo caso si può considerare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} f_{x_1^2} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_k} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2^2} & \cdots & f_{x_2 x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_k x_1} & f_{x_k x_2} & \cdots & f_{x_k^2} \end{pmatrix},$$

essa si denota con il simbolo $D^2 f$ e si chiama *matrice hessiana di f,* il suo determinante si chiama *determinante hessiano* (o solo *hessiano*) *della funzione f.*

Gli elementi della diagonale principale della matrice hessiana di f si dicono *derivate seconde pure* e gli altri elementi si dicono *derivate seconde miste*.

Osserviamo che, se la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in un punto P di A sia rispetto a $x_i x_j$ che rispetto a $x_j x_i$ non è detto che valga l'uguaglianza:

$$f_{x_i x_j}(P) = f_{x_j x_i}(P); \tag{6.4}$$

se vale l'uguaglianza (6.4), si dice che *per la derivata parziale di f rispetto a $x_i x_j$ nel punto P l'ordine di derivazione è invertibile.*

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente per l'invertibilità dell'ordine di derivazione.

Teorema 6.1.8. (Teorema di Schwarz)
Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in A. Se le derivate parziali seconde miste di f, $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$, sono continue nel punto P di A allora vale la (6.4).

Esempio 4. Consideriamo la funzione $f(x,y) = 3x^2y + logy$; essa è definita nell'aperto $A = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ ed è ivi derivabile parzialmente sia rispetto a x che rispetto a y. Le sue derivate parziali sono date da:

$$f_x(x,y) = 6xy, \quad f_y(x,y) = 3x^2 + \frac{1}{y};$$

siccome le funzioni f_x e f_y sono derivabili in A e le loro derivate parziali sono continue in A, per il teorema di Schwarz c'è l'invertibilità dell'ordine di derivazione; infatti:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y}(6xy) = 6x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2 + \frac{1}{y}\big) = 6x.$$

A partire dalle derivate parziali seconde si definiscono in modo ovvio le *derivate parziali terze, ...*

Notazioni. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^k$, con il simbolo $C^0(A,\mathbb{R})$ denoteremo l'insieme costituito da tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ continue in A; con il simbolo

$C^1(A, \mathbb{R})$ denoteremo l'insieme costituito da tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ derivabili in A le cui derivate parziali sono continue in A; con il simbolo $C^n(A, \mathbb{R})$ denoteremo l'insieme costituito da tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ derivabili n volte in A le cui derivate parziali di ordine n sono continue in A; infine, con il simbolo $C^\infty(A, \mathbb{R})$ denoteremo l'insieme costituito da tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ indefinitamente derivabili in A con derivate parziali, di un qualunque ordine, continue in A.

6.2 Differenziali delle funzioni reali di k variabili reali.

Definizione 6.2.1. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, P un punto di A e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto P. La funzione:*

$$df(P) : \Delta P = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k) \in \mathbb{R}^k \to (Df(P), \Delta P) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P)\Delta x_i, \tag{6.5}$$

si chiama differenziale primo di f in P.

Fissiamo un $i \in \{1, \cdots, k\}$ e consideriamo la funzione:

$$g_i(P) = g_i(x_1, \cdots, x_k) = x_i, \quad \forall P \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $P \in \mathbb{R}^k$ risulta:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_h}(P) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = h \\ 0, & \text{se } i \neq h, \end{cases}$$

quindi, le componenti del gradiente di $g_i(P)$ sono tutte nulle, eccetto la $i-$esima, che vale 1.

Conseguentemente, qualunque sia $P \in \mathbb{R}^k$, si ha che:

$$dg_i(P) : \Delta P \in \mathbb{R}^k \to (Dg_i(P), \Delta P) = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial x_h}(P)\Delta x_h = \Delta x_i,$$

da cui, essendo $g_i(P) = x_i$, si ha:

$$dx_i : \Delta P \in \mathbb{R}^k \to \Delta x_i,$$

quindi, $dx_i = \Delta x_i$; allora, posto $dP = (dx_1, \cdots, dx_k)$, dalla (6.5) si ricava che:

$$df(P) = (Df(P), \Delta P) = (Df(P), dP) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P)dx_i.$$

Ora, consideriamo un aperto A di $\mathbb{R}^k$, una funzione $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, un vettore $dP = (dx_1, \cdots, dx_k)$ e la funzione:

$$df : P \in A \to df(P) = (Df(P), dP) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P)dx_i \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Per le ipotesi fatte su f, qualunque sia $P \in A$, la funzione (6.6) è derivabile in P; dunque, possiamo calcolare il differenziale in P della funzione (6.6):

$$ddf(P) : dP \in \mathbb{R}^k \to (D(df(P)), dP), \tag{6.7}$$

la funzione (6.7) *si chiama differenziale secondo di f nel punto P* e si denota con $d^2f(P)$. Notiamo che:

$$\begin{aligned} d^2f(P) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \; df(P) \right) dx_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P)dx_i \right) \right) dx_j = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} f_{x_i x_j}(P)dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{k} f_{x_i x_j}(P)dx_i dx_j. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Osserviamo che, essendo $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, per il teorema di Schwarz si ha $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$; quindi, nella (6.8) il termine $f_{x_i x_j} dx_i dx_j$ compare due volte. Allora, l'espressione di $d^2f(P)$ si può ottenere calcolando il quadrato del differenziale di f nel punto P e sostituendo il prodotto $f_{x_i} f_{x_j}$ con la derivata parziale seconda $f_{x_i x_j}$; cioè:

$$d^2f(P) = \Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P)dx_i \Big)^{(2)}. \tag{6.9}$$

In generale, se $f \in C^n(A, \mathbb{R})$ risulta:

$$d^n f(P) = \Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P) dx_i \Big)^{(n)}, \tag{6.10}$$

in questo caso il prodotto $(f_{x_1})^{p_1} \cdots (f_{x_k})^{p_k}$, dove $p_1 + \cdots + p_k = n$, si sostituisce con la derivata parziale $n - esima$:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_k^{p_k}} \; .$$

Esempio. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f \in C^3(A, \mathbb{R})$; il differenziale terzo di f in un punto P di A è dato da:

$$\begin{aligned} d^3 f(P) &= \big(f_x(P) dx + f_y(P) dy \big)^{(3)} = \\ &= f_{x^3}(P) dx^3 + 3 f_{x^2 y}(P) dx^2 dy + 3 f_{xy^2}(P) dx dy^2 + f_{y^3}(P) dy^3. \end{aligned}$$

6.3 Differenziabilità di una funzione in un punto.

Definizione 6.3.1. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, P un punto di A, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto P e $\Delta P = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k) \neq \mathbf{0}$ tale che $P + \Delta P \in A$. La funzione f si dice differenziabile nel punto P se:*

$$\lim_{\| \Delta P \| \to 0} \frac{\Delta f(P) - df(P)}{\| \Delta P \|} = 0, \tag{6.11}$$

dove $\Delta f(P) = f(P + \Delta P) - f(P)$.

Ovviamente, posto $r(\Delta P) = \Delta f(P) - df(P)$, se f è differenziabile nel punto P si ha che $r(\Delta P)$ è un infinitesimo nel punto $\mathbf{0}$ di ordine maggiore di $\| \Delta P \|$; quindi, la funzione:

$$\omega(\Delta P) = \begin{cases} \frac{r(\Delta P)}{\|\Delta P\|}, & \text{se } \Delta P \neq \mathbf{0} \\ \\ 0 & \text{se } \Delta P = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{6.12}$$

è il prolungamento continuo, nel punto $\mathbf{0}$, della funzione $\frac{r(\Delta P)}{\|\Delta P\|}$.

Essendo $r(\mathbf{0})$=0, qualunque sia $\Delta P \in \mathbb{R}^k$ tale che $P + \Delta P \in A$, risulta:

$$r(\Delta P) = \omega(\Delta P) \parallel \Delta P \parallel,$$

allora:

$$\Delta f(P) = df(P) + r(\Delta P) = (Df(P), \Delta P) + \omega(\Delta P) \parallel \Delta P \parallel . \tag{6.13}$$

Dalla (6.13) segue immediatamente la seguente:

Proposizione 6.3.2. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se la funzione f è differenziabile nel punto P di A allora f è continua in P.*

Si possono fornire esempi di funzioni derivabili parzialmente, rispetto a $x_1, \cdots, x_k$, in un punto ma non continue in tale punto.

Proviamo, ora, il seguente teorema che fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione sia differenziabile in un punto.

Teorema 6.3.3. *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $P \in \overset{\circ}{X}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ derivabile in un intorno I del punto P. Se le funzioni $f_{x_1}, \cdots, f_{x_k}$ sono continue nel punto P allora f è differenziabile nel punto P.*

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso $k = 2$. Consideriamo, quindi, una funzione $f(x, y)$ derivabile in un intorno del punto $P = (x, y)$ e supponiamo che f_x e f_y siano continue in P. Sia $\Delta P = (\Delta x, \Delta y)$, con $\Delta x \neq 0$ e $\Delta y \neq 0$, tale che $P + \Delta P = (x + \Delta x, y + \Delta y) \in I$. Osservato che:

$$\begin{aligned} &\Delta f(P) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y), \end{aligned}$$

per il teorema di Lagrange, applicato alle funzioni $f(t, y+\Delta y)$ e $f(x, t)$ della variabile t, esistono un punto ξ appartenente all'intervallo aperto di estremi x e $x + \Delta x$ e un punto η appartenente all'intervallo aperto di estremi y e $y + \Delta y$ tali che:

$$\Delta f(P) = f_x(\xi, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, \eta)\Delta y.$$

Allora, essendo $df(P) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$, si ha che:

$$\left|\frac{\Delta f(P) - df(P)}{\| \Delta P \|}\right| =$$

$$= \left|\frac{(f_x(\xi, y+\Delta y) - f_x(x,y))\Delta x + (f_y(x,\eta) - f_y(x,y))\Delta y}{\| \Delta P \|}\right| \leq$$

$$\leq |f_x(\xi, y+\Delta y) - f_x(x,y)|\frac{|\Delta x|}{\| \Delta P \|} + |f_y(x,\eta) - f_y(x,y)|\frac{|\Delta y|}{\| \Delta P \|} \leq$$

$$\leq |f_x(\xi, y+\Delta y) - f_x(x,y)| + |f_y(x,\eta) - f_y(x,y)|,$$

conseguentemente, grazie alla continuità delle funzioni f_x e f_y nel punto P, si ha che:

$$\lim_{\|\Delta P\| \to 0} \left|\frac{\Delta f(P) - df(P)}{\| \Delta P \|}\right| \leq$$

$$\leq \lim_{\|\Delta P\| \to 0} |f_x(\xi, y+\Delta y) - f_x(x,y)| + \lim_{\|\Delta P\| \to 0} |f_y(x,\eta) - f_y(x,y)| = 0.$$

L'asserto è così dimostrato.

Abbiamo dimostrato l'asserto nel caso in cui $\Delta x \neq 0$ e $\Delta y \neq 0$; la dimostrazione è analoga quando uno dei due incrementi è nullo. □

6.4 Equazione del piano tangente in un punto del diagramma di una funzione di classe C^1.

Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R})$. Denotato con S il diagramma di f, S ha equazione cartesiana:

$$z = f(x,y).$$

Posto $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, il piano passante per M_0 e parallelo al piano coordinato xz taglia S nella curva Γ_1 di equazioni:

$$\begin{cases} z = f(x, y), \qquad x \in I_1(x_0), \\ \\ y = y_0, \end{cases}$$

con $I_1(x_0)$ opportuno intorno di x_0.

Osserviamo che la proiezione ortogonale Γ_1' di Γ_1 sul piano xz ha equazione:

$$z = f(x, y_0),\ x \in I_1(x_0).$$

Detta Q_0^1 la proiezione di M_0 sul piano xz, essendo f derivabile parzialmente rispetto a x nel punto P_0, si ha che Γ_1' è dotata di retta tangente t_1', nel punto Q_0^1, la cui equazione è:

$$z = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osservato che la tangente t_1' a Γ_1', nel punto Q_0^1, è parallela alla tangente t_1 a Γ_1, nel punto M_0, abbiamo che t_1 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} z = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \\ y = y_0. \end{cases}$$

Si possono fare analoghe considerazioni intersecando la superficie S con il piano passante per il punto M_0 e parallelo al piano yz; infatti, si ottiene una curva Γ_2 di equazioni:

$$\begin{cases} z = f(x, y), \qquad y \in I_2(y_0), \\ \\ x = x_0, \end{cases}$$

con $I_2(y_0)$ opportuno intorno di y_0.

La proiezione ortogonale Γ_2' di Γ_2 sul piano yz ha equazione:

$$z = f(x_0, y), \quad y \in I_2(y_0).$$

Detta Q_0^2 la proiezione di M_0 sul piano yz, essendo f derivabile parzialmente rispetto a y nel punto P_0, si ha che Γ_2' è dotata di retta tangente t_2', nel punto Q_0^2, la cui equazione è:

$$z = f(P_0) + f_y(P_0)(y - y_0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Osservato che la tangente t_2' a Γ_2', nel punto Q_0^2, è parallela alla tangente t_2 a Γ_2, nel punto M_0, abbiamo che t_2 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} z = f(P_0) + f_y(P_0)(y - y_0), & y \in \mathbb{R}, \\ \\ x = x_0. \end{cases}$$

Il nostro scopo, ora, è determinare l'equazione del piano passante per il punto M_0 e contenente le rette t_1 e t_2.

Posto $z_0 = f(P_0)$ si ha che $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e quindi, l'equazione del generico piano passante per M_0 è data da:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{6.14}$$

Se vogliamo che la retta t_1 sia contenuta nel piano di equazione (6.14), bisogna sostituire, nella (6.14), y con y_0 e $z - z_0$ con $f_x(P_0)(x - x_0)$; così facendo si ottiene:

$$a(x - x_0) + b(y_0 - y_0) + cf_x(P_0)(x - x_0) = 0,$$

cioè:

$$a = -cf_x(P_0). \tag{6.15}$$

Analogamente, imponendo che la retta t_2 sia contenuta nel piano di equazione (6.14), si ottiene:

$$b = -cf_y(P_0). \tag{6.16}$$

Conseguentemente, dalle (6.14), (6.15) e (6.16) si ha:

$$-cf_x(P_0)(x - x_0) - cf_y(P_0)(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

cioè:

$$z = z_0 + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0). \tag{6.17}$$

Osserviamo che, se si interseca S con un qualunque piano passante per M_0 e ortogonale al piano xy si ottiene una curva Γ la quale, essendo f differenziabile in P_0, è dotata di retta tangente t nel punto M_0. Si può dimostrare che la retta t è contenuta nel piano di equazione (6.17).

Alla luce di quanto detto sopra, è naturale definire *piano tangente al diagramma S della funzione f nel punto M_0* il piano di equazione (6.17).

6.5 Derivate e integrali delle funzioni vettoriali.

Definizione 6.5.1. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. La funzione:*

$$f : t \in X \to (f_1(t), \cdots, f_m(t)) \in \mathbb{R}^m,$$

si dice derivabile nel punto $t_0 \in X \cap DrX$ se tali sono le sue componenti, $f_1, \cdots, f_m$; in tal caso si pone $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \cdots, f_m'(t_0))$.

Detto X' il sottoinsieme di X costituito dai punti in cui la f è derivabile, se $X' \neq \emptyset$ allora la funzione:

$$f' : t \in X' \to (f_1'(t), \cdots, f_m'(t)) \in \mathbb{R}^m$$

si chiama *derivata prima di f*. In modo ovvio si definiscono le derivate successive.

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f = (f_1, \cdots, f_m)$ una funzione vettoriale continua in I; le funzioni $f_1(t), \cdots, f_m(t)$ sono continue nell'intervallo I quindi sono dotate di primitive, denotiamole, risp., con $F_1(t), \cdots, F_m(t)$. La funzione vettoriale $F(t) = (F_1(t), \cdots, F_m(t))$ è derivabile in I e risulta:

$$F'(t) = f(t), \quad \forall t \in I;$$

per questo motivo, *la funzione $F(t)$ si dice primitiva di $f(t)$*.

Se $I = [a, b]$ si pone:

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_m(t)dt \right) = \left([F_1(t)]_a^b, \cdots, [F_m(t)]_a^b \right).$$

Passiamo, ora, alle derivate parziali delle funzioni vettoriali di più variabili reali.

Definizione 6.5.2. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$. La funzione:*

$$f : P = (x_1, \cdots, x_k) \in X \to (f_1(P), \cdots, f_m(P)) \in \mathbb{R}^m,$$

si dice derivabile parzialmente rispetto a x_i nel punto $P_0 \in \overset{\circ}{X}$ se tali sono le sue componenti, $f_1, \cdots, f_m$; in tal caso si pone:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P_0), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P_0) \right).$$

Quando la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a $x_1, \cdots, x_k$ nel punto P_0 si dice che f è derivabile nel punto P_0.

Supposto non vuoto il sottoinsieme X' di $\overset{\circ}{X}$ costituito dai punti in cui la f è derivabile, in X' sono definiti i seguenti k vettori a m componenti:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right), ..., \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \right), \tag{6.18}$$

e i seguenti m vettori a k componenti:

$$Df_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right), ..., Df_m = \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \right). \tag{6.19}$$

La matrice avente per righe le componenti dei vettori (6.19) e per colonne le componenti dei vettori (6.18) si chiama *matrice jacobiana delle funzioni* $f_1, \cdots, f_m$, e si denota con il simbolo:

$$\left[\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Se $k = m$ la matrice jacobiana delle funzioni $f_1, \cdots, f_k$ diventa quadrata e il suo determinante si chiama *determinante jacobiano delle funzioni* $f_1, \cdots, f_k$, tale determinante si denota con il simbolo:

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}.$$

Osservazione. Se $g \in C^2(A, \mathbb{R})$, con A aperto di $\mathbb{R}^k$, allora l'hessiano della funzione g coincide col determinante jacobiano delle funzioni $g_{x_1}, \cdots, g_{x_k}$, infatti:

$$\frac{\partial(g_{x_1}, \cdots, g_{x_k})}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} = \begin{vmatrix} g_{x_1^2} & g_{x_1 x_2} & \cdots & g_{x_1 x_k} \\ g_{x_2 x_1} & g_{x_2^2} & \cdots & g_{x_2 x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_k x_1} & g_{x_k x_2} & \cdots & g_{x_k^2} \end{vmatrix}.$$

Definizione 6.5.3. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$, $X(P), Y(P), Z(P)$ tre funzioni reali definite in A ed ivi deriavabili e $\mathbf{v}(\mathrm{P})$ il campo vettoriale avente come componenti $X(P), Y(P)$ e $Z(P)$, i.e.:*

$$\mathbf{v}(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}(\mathrm{P}), \mathrm{Y}(\mathrm{P}), \mathrm{Z}(\mathrm{P})) = \mathrm{X}(\mathrm{P})\mathrm{i} + \mathrm{Y}(\mathrm{P})\mathrm{j} + \mathrm{Z}(\mathrm{P})\mathrm{k}.$$

Si chiama divergenza di $\mathbf{v}(\mathrm{P})$ la seguente funzione reale di tre variabili reali:

$$div\mathbf{v}(\mathrm{P}) = \mathrm{X_x}(\mathrm{P}) + \mathrm{Y_y}(\mathrm{P}) + \mathrm{Z_z}(\mathrm{P}).$$

Si chiama rotore di $\mathbf{v}(\mathrm{P})$ il campo vettoriale:

$$rot\mathbf{v}(\mathrm{P}) = (\mathrm{Z_y}(\mathrm{P}) - \mathrm{Y_z}(\mathrm{P}))\mathrm{i} + (\mathrm{X_z}(\mathrm{P}) - \mathrm{Z_x}(\mathrm{P}))\mathrm{j} + (\mathrm{Y_x}(\mathrm{P}) - \mathrm{X_y}(\mathrm{P}))\mathrm{k}.$$

Il campo $\mathbf{v}(\mathrm{P})$ si dice irrotazionale su A se $rot\mathbf{v}(\mathrm{P}) = \mathbf{0}, \forall \mathrm{P} \in \mathrm{A}$.

Si noti che il $rot\mathbf{v}$ si può ottenere calcolando il determinante della matrice simbolica:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{pmatrix}.$$

Definizione 6.5.4. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $u : A \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in A. Si definisce laplaciano della funzione u, la divergenza del gradiente di u, i.e. la funzione reale definita in A:*

$$\Delta_2 u = div(Du) = u_{x^2} + u_{y^2} + u_{z^2}.$$

6.6 Derivate e differenziali delle funzioni composte.

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e A un aperto di $\mathbb{R}^k$. Consideriamo le funzioni $x : t \in I \to (x_1(t), \cdots, x_k(t)) \in A$ e:

$$f : (x_1, \cdots, x_k) \in A \to f(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}.$$

Denotata con $F(t)$ la funzione composta tra $x(t)$ e $f(x_1, \cdots, x_k)$, i.e.:

$$F = f \circ x : t \in I \to f(x_1(t), \cdots, x_k(t)) \in \mathbb{R},$$

proviamo il seguente:

Teorema 6.6.1. (**Teorema sulla derivabilità di una funzione composta**) *Se la funzione $x(t)$ è derivabile nel punto $t_0 \in I$ e la funzione $f(x_1, \cdots, x_k)$ è differenziabile nel punto $x(t_0) \in A$, allora la funzione $F(t)$ è derivabile in t_0 e risulta:*

$$F'(t_0) = (Df(x(t_0)), x'(t_0)) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0))x_i'(t_0). \tag{6.20}$$

Dimostrazione. Sia $\Delta t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $t_0 + \Delta t \in I$; consideriamo i punti:

$$x(t_0 + \Delta t) = (x_1(t_0 + \Delta t), \cdots, x_k(t_0 + \Delta t)), \quad x(t_0) = (x_1(t_0), \cdots, x_k(t_0)),$$

e poniamo:

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = (x_1(t_0 + \Delta t) - x_1(t_0), \cdots, x_k(t_0 + \Delta t) - x_k(t_0)).$$

Dalla differenziabilità di f in $x(t_0)$, essendo $x(t_0+\Delta t) = x(t_0) + \Delta x$, si ha che:

$$\begin{aligned}
&F(t_0+\Delta t) - F(t_0) = f(x(t_0+\Delta t)) - f(x(t_0)) = \\
&= f(x(t_0)+\Delta x) - f(x(t_0)) = df(x(t_0)) + \omega(\Delta x) \parallel \Delta x \parallel = \\
&= (Df(x(t_0)), \Delta x) + \omega(\Delta x) \parallel \Delta x \parallel = \\
&= \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0))(x_i(t_0+\Delta t) - x_i(t_0)) + \omega(\Delta x) \parallel \Delta x \parallel,
\end{aligned}$$

da cui, dividendo per Δt si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{F(t_0+\Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \\
&= \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0)) \frac{x_i(t_0+\Delta t) - x_i(t_0)}{\Delta t} + \omega(\Delta x) \frac{\parallel \Delta x \parallel}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Essendo $\omega(\Delta x)$ un infinitesimo nel punto $\mathbf{0}$ ed essendo:

$$\frac{\parallel \Delta x \parallel}{\Delta t} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i(t_0+\Delta t) - x_i(t_0)}{\Delta t} \right)^2}$$

si ha che:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \left(\omega(\Delta x) \ \frac{\parallel \Delta x \parallel}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \omega(\Delta x) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\parallel \Delta x \parallel}{\Delta t} = \\
&= \pm \lim_{\Delta t \to 0} \omega(\Delta x) \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i(t_0+\Delta t) - x_i(t_0)}{\Delta t} \right)^2} = \\
&= \pm \lim_{\Delta t \to 0} \big(\omega(\Delta x)\big) \parallel x'(t_0) \parallel = 0.
\end{aligned}$$

Conseguentemente:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t_0+\Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0)) \frac{x_i(t_0+\Delta t) - x_i(t_0)}{\Delta t} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0)) x_i'(t_0) = (Df(x(t_0)), x'(t_0)),
\end{aligned}$$

l'asserto è così dimostrato. □

Osserviamo che, se I è un intervallo di $\mathbb{R}$, A è un aperto di $\mathbb{R}^k$, $x : I \to A$ è derivabile in I ed $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ allora, per il teorema sulla derivabilità di una funzione composta, la funzione $F(t) = f(x(t)),\ t \in I$, è derivabile in I e risulta:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i'(t), \quad \forall t \in I. \tag{6.21}$$

Moltiplicando entrambi i membri della (6.21) per dt si ottiene il differenziale di $F(t)$:

$$dF(t) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i'(t)dt = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))dx_i, \quad \forall t \in I.$$

Inoltre, se si suppone $x(t)$ derivabile due volte in I e $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, allora la funzione $F(t)$ è derivabile due volte in I e risulta:

$$\begin{aligned}
F''(t) &= \frac{d}{dt}F'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i'(t)\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}\left(f_{x_i}(x(t))x_i'(t)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{d}{dt}\left(f_{x_i}(x(t))\right)x_i'(t) + f_{x_i}(x(t))x_i''(t)\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} f_{x_i x_j}(x(t))x_j'(t)x_i'(t) + f_{x_i}(x(t))x_i''(t)\right] = \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} f_{x_i x_j}(x(t))x_j'(t)x_i'(t) + \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i''(t).
\end{aligned}$$

Dall'appartenenza di f a $C^2(A, \mathbb{R})$ si ha che $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$, quindi:

$$F''(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i'(t)\right)^{(2)} + \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))x_i''(t). \tag{6.22}$$

Nel caso particolare in cui $x(t) = x_0 + (x - x_0)t,\ t \in I$, e cioè:

$$x_i(t) = x_i^0 + (x_i - x_i^0)t,\ t \in I, \quad i = 1, \cdots, k, \tag{6.23}$$

dalla (6.22) si ottiene che:

$$F''(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))(x_i - x_i^0)\right)^{(2)}.$$

Ferme restando le ipotesi (6.23), se $f \in C^n(A,\mathbb{R})$ allora $F(t)$ è derivabile n volte in I e risulta:

$$F^{(n)}(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))(x_i - x_i^0) \right)^{(n)}. \tag{6.24}$$

Ora, passiamo al calcolo delle derivate delle funzioni composte scalari di n variabili reali.

Siano D un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e A un aperto di $\mathbb{R}^k$. Consideriamo le funzioni:

$$x : (t_1, \cdots, t_n) \in D \to (x_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, x_k(t_1, \cdots, t_n)) \in A,$$

e:

$$f : (x_1, \cdots, x_k) \in A \to f(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R},$$

e denotiamo con $F(t_1, \cdots, t_n)$ la funzione composta tra le funzioni $x(t_1, \cdots, t_n)$ e $f(x_1, \cdots, x_k)$, i.e.:

$$F = f \circ x : (t_1, \cdots, t_n) \in D \to f(x_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, x_k(t_1, \cdots, t_n)) \in \mathbb{R}.$$

Vale il seguente teorema, la cui dimostrazione è analoga a quella del Teorema 6.5.1.

Teorema 6.6.2. (**Teorema sulla derivabilità di una funzione composta**) *Se la funzione $x(t_1, \cdots, t_n)$ è derivabile parzialmente rispetto a t_j nel punto $t_0 = (t_1^0, \cdots, t_n^0) \in \overset{\circ}{D}$ e la funzione $f(x_1, \cdots, x_k)$ è differenziabile nel punto $x(t_0) \in A$, allora la funzione $F(t_1, \cdots, t_n)$ è derivabile parzialmente rispetto a t_j in t_0 e risulta:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) = \left(Df(x(t_0)), \frac{\partial x}{\partial t_j}(t_0) \right) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t_0)) \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_0). \tag{6.25}$$

Teorema 6.6.3. *Se la funzione $x(t_1, \cdots, t_n) \in C^h(D, A)$ e la funzione $f(x_1, \cdots, x_k) \in C^h(A, \mathbb{R})$, allora:*

$$F(t_1, \cdots, t_n) = f(x(t_1, \cdots, t_n)) \in C^h(D, \mathbb{R}).$$

6.7 Teorema di Lagrange e formula di Taylor.

Teorema 6.7.1. (**Teorema di Lagrange**)
Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in A e* $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0) \in A$. *Qualunque sia il punto* $P = (x_1, \cdots, x_k) \in A - \{P_0\}$ *tale che il segmento di estremi* P_0 *e* P, $\overline{P_0P}$, *sia contenuto in A, esiste un punto* $Q \in \overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ (*con il simbolo* $\overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ *si denota il segmento* $\overline{P_0P}$ *privato degli estremi*) *tale che:*

$$f(P) - f(P_0) = (Df(Q), P - P_0) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(Q)(x_i - x_i^0). \tag{6.26}$$

Dimostrazione. Il segmento di estremi P_0 e P ha equazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \cdots, x_k(t)) = P_0 + t(P - P_0) = \\ &= (x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \cdots, x_k^0 + t(x_k - x_k^0)), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

quindi, la restrizione di f al segmento $\overline{P_0P}$ non è altro che la funzione reale di una variabile reale composta tra le funzioni $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_k(t))$ e $f(x_1, \cdots, x_k)$, i.e. la funzione $F(t) = f(x(t)))$, $t \in [0, 1]$. Ovviamente, la funzione $F(t)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, quindi esiste un $\xi \in]0, 1[$ tale che:

$$F(1) - F(0) = F'(\xi). \tag{6.27}$$

Dunque, essendo $F'(t) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(x(t))(x_i - x_i^0)$, $F(0) = f(P_0)$ e $F(1) = f(P)$, se si pone $Q = x(\xi)$ dalla (6.27) segue la (6.26).

Il teorema è così dimostrato. □

Corollario 6.7.2. *Siano A un aperto connesso di* $\mathbb{R}^k$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in A. Se risulta:*

$$Df(P) = \mathbf{0}, \ \forall \mathrm{P} \in \mathrm{A}, \tag{6.28}$$

allora la funzione f è costante in A.

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che le derivate parziali della f sono continue in A in quanto, per ipotesi, in A sono identicamente nulle; conseguentemente, f appartiene a $C^1(A,\mathbb{R})$ ed è quindi differenziabile in A.

Ora, fissato un punto $P_0 \in A$, proviamo che:

$$f(P) = f(P_0), \quad \forall P \in A.$$

Sia P un generico punto di $A - \{P_0\}$. Se il segmento $\overline{P_0P}$ è incluso in A, per il Teorema 6.7.1 esiste un punto $Q \in \overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ tale che:

$$f(P) - f(P_0) = (Df(Q), P - P_0) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(Q)(x_i - x_i^0),$$

quindi dalla (6.28) segue l'asserto.

Se il segmento $\overline{P_0P}$ non è incluso in A, essendo A connesso, esiste una poligonale di estremi P_0 e P e di vertici $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P$ inclusa in A. Allora, siccome i segmenti $\overline{P_0P_1}, \cdots, \overline{P_{n-1}P}$, sono tutti contenuti in A, dal Teorema 6.7.1 e dalla(6.28) si ha che:

$$f(P_0) = f(P_1),\ f(P_1) = f(P_2), \cdots, f(P_{n-1}) = f(P),$$

da cui segue l'asserto.

Il corollario è così dimostrato.

□

Teorema 6.7.3. (**Formula di Taylor con il resto di Lagrange**)
Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, $f \in C^{n+1}(A,\mathbb{R})$. Fissato $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0) \in A$, qualunque sia $P = (x_1, \cdots, x_k) \in A - \{P_0\}$, tale che il segmento $\overline{P_0P}$ sia contenuto in A, esiste un punto $Q \in \overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ (con il simbolo $\overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ si denota il segmento $\overline{P_0P}$ privato degli estremi) tale che:

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) = \ & \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P_0)(x_i - x_i^0)\Big)^{(h)} + \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(Q)(x_i - x_i^0)\Big)^{(n+1)}, \end{aligned} \tag{6.29}$$

la (6.29) si chiama formula di Taylor di ordine n e di punto iniziale P_0 con il resto di Lagrange.

Dimostrazione. Il segmento di estremi P_0 e P ha equazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \cdots, x_k(t)) = P_0 + t(P - P_0) = \\ &= (x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \cdots, x_k^0 + t(x_k - x_k^0)), \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

quindi la restrizione di f al segmento $\overline{P_0P}$ non è altro che la funzione reale di una variabile reale composta tra le funzioni $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_k(t))$ e $f(x_1, \cdots, x_k)$, i.e. la funzione:

$$F(t) = f(x(t))), \ t \in [0,1].$$

Per le ipotesi fatte su f, la funzione $F(t) \in C^{n+1}([0,1], \mathbb{R})$ quindi ad essa è applicabile la formula di Mac-Laurin di ordine n con il resto di Lagrange, allora esiste un $\xi \in]0,1[$ tale che:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{6.30}$$

Osserviamo che:

$$F(0) = f(P_0), \quad F(1) = f(P), \tag{6.31}$$

inoltre, per la (6.24), si ha che:

$$F^{(h)}(0) = \Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P_0)(x_i - x_i^0) \Big)^{(h)}, \quad h = 1, \cdots, n \tag{6.32}$$

e

$$F^{(n+1)}(\xi) = \Big(\sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(Q)(x_i - x_i^0) \Big)^{(n+1)}, \tag{6.33}$$

con $Q = (x_1(\xi), \cdots, x_k(\xi))$.

Conseguentemente, sostituendo le (6.31), (6.32) e (6.33) nella (6.30) si ottiene la (6.29).

L'asserto è così dimostrato.

□

6.8 Derivate direzionali.

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto di A, $f : A \to \mathbb{R}$ e $u = (u_1, \cdots, u_k)$ un versore di $\mathbb{R}^k$. La retta r di $\mathbb{R}^k$ passante per il punto P_0 e parallela ad u, ha equazione:

$$P(t) = P_0 + t\ u,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo su r il verso indotto dal versore u e denotiamo con $\vec{r}$ l'asse così ottenuto.

Definizione 6.8.1. *Si dice che la funzione f è derivabile nel punto P_0 lungo la direzione dell'asse $\vec{r}$* o *nella direzione di u se esiste finito:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\ u) - f(P_0)}{t}\ ; \tag{6.34}$$

tale limite si chiama derivata direzionale di f nel punto P_0, nella direzione dell'asse $\vec{r}$ o *nella direzione di u e si denota con uno dei simboli seguenti:*

$$\frac{\partial f}{\partial r}(P_0), \quad \frac{\partial f}{\partial u}(P_0), \quad D_u f(P_0). \tag{6.35}$$

Si noti che, qualunque sia $i \in \{1, \cdots, k\}$, se $u = e_i$ allora:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0).$$

Proviamo, ora, il seguente teorema che fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione sia derivabile secondo una qualunque direzione.

Teorema 6.8.2. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$ e P_0 un punto di A. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile nel punto P_0 allora, qualunque sia il versore $u = (u_1, \cdots, u_k)$ di $\mathbb{R}^k$, f è derivabile nel punto P_0 nella direzione di u e risulta:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = (Df(P_0), u) = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}(P_0) u_i\ . \tag{6.36}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme:

$$X = \{t \in \mathbb{R} \ : \ P_0 + tu \in A\},$$

ed osserviamo che $0 \in \overset{\circ}{X}$ in quanto P_0 è interno ad A. Posto $P(t) = P_0 + t\ u,\ t \in X$, e considerata la funzione composta tra $f(x_1, .., x_k)$ e $P(t)$:

$$F(t) = f(P(t)) = f(P_0 + t\ u),\ t \in X,$$

osserviamo che $F(0) = f(P_0)$ e $P'(t) = u, \forall t \in X$. Quindi, essendo f differenziabile nel punto P_0, si ha che $F(t)$ è derivabile nel punto 0 e risulta:

$$F'(0) = (Df(P_0), u), \tag{6.37}$$

d'altro canto, si ha che:

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\ u) - f(P_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(P_0), \tag{6.38}$$

allora da (6.37) e (6.38) segue la (6.36).

L'asserto è così provato.

□

Esempio. 1 - Calcolare la derivata direzionale della funzione:

$$f(x, y) = x^2 y + \sin xy,$$

nel punto $P_0 = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ secondo la direzione $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Essendo $f_x = 2xy + (\cos xy)y$ *e* $f_y = x^2 + (\cos xy)x$ si ha che:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = f_x\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = (\pi + 1)\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Esempio. 2 - Considerata la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

proviamo che $f(x,y)$ è dotata di limite nel punto $(0,0)$ secondo una qualunque direzione ed è derivabile nel punto $(0,0)$ secondo una qualunque direzione; infine, mostriamo che la funzione $f(x,y)$ non è dotata di limite nel punto $(0,0)$.

Iniziamo con l'osservare che $f(x,0)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, e $f(0,y)=0, \forall y \in \mathbb{R}$; allora, il limite della funzione $f(x,y)$ nella direzione degli assi coordinati esiste e vale 0. Consideriamo, ora, una qualunque retta passante per il punto $(0,0)$ di equazione $y=mx$, con $m \neq 0$, e calcoliamo il limite della funzione $f(x,y)$ nella direzione di tale retta:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^2(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0.$$

Dunque, abbiamo dimostrato che la funzione $f(x,y)$ è dotata di limite nel punto $(0,0)$ secondo una qualunque direzione e tale limite vale 0.

Ora, proviamo che la funzione $f(x,y)$ è derivabile nel punto $(0,0)$ secondo una qualunque direzione. Iniziamo con l'osservare che, essendo $f(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e $f(0,y)=0, \forall y \in \mathbb{R}$, ovviamente risulta $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ quindi $f(x,y)$ è derivabile nella direzione degli assi x e y.

Consideriamo, ora, un asse $\overrightarrow{r}$ passante per il punto $(0,0)$ e distinto dagli assi x e y e sia $u=(\alpha,\beta)$ il suo versore (si noti che, per le ipotesi fatte, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$); $\overrightarrow{r}$ ha equazione vettoriale $P(t)=O+tu=(t\alpha,t\beta)$, quindi:

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial r}(0,0) = {} & \lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\alpha^2 t\beta}{t(t^4\alpha^4+t^2\beta^2)} = \\ & = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^2\beta}{t^3(t^2\alpha^4+\beta^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^2\beta}{t^2\alpha^4+\beta^2} = \frac{\alpha^2\beta}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta},\end{aligned}$$

abbiamo così dimostrato che $f(x,y)$ è derivabile nel punto $(0,0)$ secondo una qualunque direzione.

Concludiamo mostrando che la funzione $f(x,y)$ non è dotata di limite nel punto $(0,0)$. A tale scopo, consideriamo la famiglia delle parabole passanti per il punto $(0,0)$ e aventi equazione $y=mx^2$, con $m \neq 0$; osserviamo che, considerato un $h \neq 0$, la restrizione della $f(x, y)$ alla parabola di equazione $y = hx^2$ è data da:

$$f(x, h\,x^2) = \frac{x^2 h x^2}{x^4 + h^2 x^4} = \frac{h}{1 + h^2}, \ \forall x \neq 0.$$

Quindi $f(x, y)$ è costante su ogni parabola e tale costante varia al variare della parabola; conseguentemente, $f(x, y)$ non può essere dotata di limite nel punto $(0, 0)$.

L'asserto è così provato.

6.9 Massimi e minimi relativi delle funzioni reali di più variabili reali.

Definizione 6.9.1. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto di X e $f : X \to \mathbb{R}$. Il punto P_0 si dice punto di massimo relativo per f se esiste un intorno I del punto P_0 tale che:*

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in X \cap I. \tag{6.39}$$

Definizione 6.9.2. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto di X e $f : X \to \mathbb{R}$. Il punto P_0 si dice punto di minimo relativo per f se esiste un intorno I del punto P_0 tale che:*

$$f(P_0) \leq f(P), \quad \forall P \in X \cap I. \tag{6.40}$$

Se, per $P \neq P_0$, nelle (6.39) (risp. (6.40)) vale la disuguaglianza stretta allora il punto P_0 si dice *punto di massimo* (risp. *minimo*) *relativo proprio per* f.

Proposizione 6.9.3. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto interno a X e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto P_0. Se P_0 è un punto di massimo relativo oppure di minimo relativo per f allora:*

$$Df(P_0) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. Proviamo l'asserto nel caso $k = 2$. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $P_0 = (x_0, y_0)$ sia un punto di massimo relativo per $f(x, y)$. Allora esiste un intorno $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ di P_0, incluso in X, tale che:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in I. \tag{6.41}$$

Dimostriamo che $f_x(x_0, y_0) = 0$, in modo analogo si prova che $f_y(x_0, y_0) = 0$. Consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x, y_0),\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

ed osserviamo che, dalla (6.41) segue che:

$$F(x) \leq F(x_0),\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

dunque x_0 è un punto di massimo relativo per $F(x)$. Allora $F'(x_0) = 0$ ed essendo $f_x(x_0, y_0) = F'(x_0)$ si ha che $f_x(x_0, y_0) = 0$.

L'asserto è così dimostrato. □

Definizione 6.9.4. *Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$, P_0 un punto interno a X e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto P_0. Il punto P_0 si dice punto estremale o punto stazionario per la f se $Df(P_0) = \mathbf{0}$.*

Enunciamo il seguente teorema che fornisce una condizione necessaria affinché un punto sia di massimo o di minimo relativo per una funzione.

Teorema 6.9.5. *Se $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, I è un intorno del punto P_0 e $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ tale che $Df(P_0) = \mathbf{0}$, si ha che:*

I) Se P_0 è un punto di massimo relativo per f allora:

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{y^2}(P_0) \end{vmatrix} \geq 0 \quad e \quad f_{x^2}(P_0) \leq 0. \tag{6.42}$$

II) Se P_0 è un punto di minimo relativo per f allora:

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} f_{x^2}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{y^2}(P_0) \end{vmatrix} \geq 0 \quad e \quad f_{x^2}(P_0) \geq 0. \tag{6.43}$$

Proviamo, ora, il seguente teorema che fornisce una condizione sufficiente affinché un punto sia di massimo o di minimo relativo:

Teorema 6.9.6. *Se $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, I è un intorno del punto P_0 e $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ tale che $Df(P_0) = \mathbf{0}$, si ha che:*

i) Se $H(P_0) > 0$ e $f_{x^2}(P_0) < 0$ allora il punto P_0 è un punto di massimo relativo proprio per f.

ii) Se $H(P_0) > 0$ e $f_{x^2}(P_0) > 0$ allora il punto P_0 è un punto di minimo relativo proprio per f.

Dimostrazione. Proviamo la **i)**, in modo analogo si prova la **ii)**. Per le ipotesi fatte su f esiste un cerchio aperto I^* di centro P_0, incluso in I, tale che:

$$H(x,y) > 0 \quad \text{e} \quad f_{x^2}(x,y) < 0, \quad \forall (x,y) \in I^*. \tag{6.44}$$

Qualunque sia il punto $P = (x,y) \in I^* - \{P_0\}$, per la formula di Taylor di ordine uno di punto iniziale P_0 e con il resto di Lagrange, esiste un punto $Q \in \overset{\circ}{\overline{P_0P}}$ tale che:

$$f(P) = f(P_0) + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}(f_x(Q)(x-x_0) + f_y(Q)(y-y_0))^{(2)},$$

da cui, essendo $Df(P_0) = \mathbf{0}$, si ha che $f(P) - f(P_0)$ è uguale a:

$$\frac{1}{2}\big(f_{x^2}(Q)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(Q)(x-x_0)(y-y_0) + f_{y^2}(Q)(y-y_0)^2\big). \tag{6.45}$$

L'asserto sarà provato se mostreremo che la (6.45) è minore di zero.

Se $y = y_0$ la (6.45) diventa:

$$\frac{1}{2} f_{x^2}(Q)(x-x_0)^2$$

che è minore di zero per la (6.44).

Se $y \neq y_0$, dividendo la (6.45) per $\frac{1}{2}(y-y_0)^2$ e ponendo:

$$t = \frac{x-x_0}{y-y_0},$$

si ottiene il seguente trinomio di II grado:

$$f_{x^2}(Q)t^2 + 2f_{xy}(Q)t + f_{y^2}(Q). \tag{6.46}$$

Osserviamo che, dall'appartenenza di Q al segmento $\overset{\circ}{\overline{P_0P}} \subseteq I^*$ e per la (6.44) si ha che:

$$H(Q) = f_{x^2}(Q)f_{y^2}(Q) - f_{xy}^2(Q) > 0 \quad \text{e} \quad f_{x^2}(Q) < 0, \tag{6.47}$$

quindi:

$$\frac{\Delta}{4} = -H(Q) < 0 \quad \text{e} \quad f_{x^2}(Q) < 0,$$

conseguentemente, il trinomio (6.46) è minore di zero. Abbiamo, dunque, provato che la (6.45) è una quantità negativa, quindi $f(P) < f(P_0)$. Dall'arbitrarietà di $P = (x, y) \in I^* - \{P_0\}$ segue l'asserto.

Il teorema è così dimostrato. □

Osservazione. Siano D un dominio di $\mathbb{R}^2$ internamente connesso (i.e. $\overset{\circ}{D}$ è connesso) e $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Denotato con S il diagramma di f, cioè:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

esso ha equazione $z = f(x, y)$.
Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$ tale che $Df(P_0) = \mathbf{0}$, cioè P_0 è un punto stazionario per f.
Essendo $f \in C^1$, f è differenziabile in P_0 quindi esiste il piano π tangente a S nel punto $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e tale piano ha equazione cartesiana:

$$z = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0),$$

da cui, essendo $Df(P_0) = \mathbf{0}$, π ha equazione

$$z = f(P_0),$$

dunque π è parallelo al piano xy.
Inoltre, se P_0 è un punto di massimo (risp. di minimo) relativo proprio per f e, cioè, se esiste in $I \in I(P_0)$, $I \subseteq D$, tale che:

$$f(P) < f(P_0) \text{ (risp. } f(P) > f(P_0)) \ \forall P \in I - \{P_0\},$$

allora, il diagramma della restrizione di f ad $I - \{P_0\}$ si trova tutto nel semispazio

$$z < f(P_0) \text{ (risp.} z > f(P_0)).$$

Definizione 6.9.7. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $P_0 \in \overset{\circ}{X}$. Il punto $P_0 \in \overset{\circ}{X}$ si dice punto di sella per la funzione f se:*

$$Df(P_0) = \mathbf{0} \ \text{ e } \ \mathrm{H(P_0)} < 0.$$

Esempi.

1. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = x^2(x^2-1) + y^2(y^2-1).$$

Essendo:

$$f_x = 4x^3 - 2x, \ \ f_y = 4y^3 - 2y, \ \ f_{xy} = f_{yx} = 0, \ \ f_{xx} = 12x^2 - 2, f_{yy} = 12y^2 - 2,$$

risulta:

$$Df(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2x^2-1) = 0 \\ 2y(2y^2-1) = 0. \end{cases}$$

Conseguentemente, le soluzioni dell'equazione $Df(x,y) = \mathbf{0}$ si ottengono dai sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 - 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2x^2 - 1 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} 2x^2 - 1 = 0 \\ 2y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dal primo sistema otteniamo il punto $(0,0)$, dal secondo i punti $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, dal terzo i punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, dal quarto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Allora, essendo $f_{x^2}(0,0) = -2$, $f_{y^2}(0,0) = -2$, $f_{xy}(0,0) = 0$ e $H(0,0) = 4 > 0$, il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo proprio per f; essendo $f_{x^2}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2$, $f_{y^2}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 12 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2 = 4$, $H(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -8 < 0$, il punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un punto di sella per f; ......; essendo $f_{x^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$, $H(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$, il punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un punto di minimo relativo per f.

2. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$; il suo insieme di definizione è $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$. Essendo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty, \quad \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty,$$

la $f(x,y)$ non è dotata di massimi assoluti.

Calcoliamo le derivate parziali della f:

$$f_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^3}, f_y(x,y) = 2y - \frac{2}{y^3}, \;\; f_{xy} = 0 = f_{yx},$$

$$f_{x^2} = 2 + \frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = 2 + \frac{6}{x^4}, f_{y^2} = 2 + \frac{6}{y^4}.$$

$$Df(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \\ 2y - \frac{2}{y^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 2 = 0 \\ 2y^4 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Allora gli eventuali punti i massimo o di minimo relativo sono:

$$(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1). \tag{6.48}$$

Osserviamo che:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 + \frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{6}{y^4} \end{vmatrix} = \left(2 + \frac{6}{x^4}\right)\left(2 + \frac{6}{y^4}\right) > 0, \;\; \forall (x,y) \in X,$$

ed essendo $f_{x^2}(x,y) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0, \forall (x,y) \in X$, si ha che i quattro punti in (6.48) sono tutti punti di minimo relativo proprio per $f(x,y)$. Essendo: $f(1,1) = f(-1,1) = f(-1,-1) = f(1,-1) = 4$, essi sono tutti punti di minimo assoluto.

6.10 Massimi e minimi assoluti delle funzioni reali di più variabili reali.

Se X è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ è continua in X, per il teorema di Weierstrass f è dotata di massimo e di minimo assoluto in X, i.e. esistono $\overline{P}, \overline{\overline{P}} \in X$ tali che:

$$f(\overline{P}) = \min f(X), \quad f(\overline{\overline{P}}) = \max f(X).$$

Se $\overline{P}$ e $\overline{\overline{P}}$ sono interni a X e f è derivabile in tali punti, allora:

$$Df(\overline{P}) = \mathbf{0}, \quad Df\left(\overline{\overline{P}} \right) = \mathbf{0};$$

invece, se $\overline{P}$ e $\overline{\overline{P}}$ sono di frontiera per X non è detto che il gradiente di f si annulli in $\overline{P}$ e $\overline{\overline{P}}$.

Per quanto detto sopra, i punti di massimo e di minimo assoluto devono essere ricercati tra i punti interni ad X in cui la f è derivabile e il suo gradiente è nullo oppure tra i punti della frontiera di X.

Esempi.

1) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ nel cerchio chiuso C di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

Le derivate parziali prime e seconde della f sono:

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{x^2} = 2, \quad f_{y^2} = -2,$$

dunque:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0, \quad \forall (x, y) \in C.$$

Allora, essendo:

$$Df(x, y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

il punto $(0,0)$ è un punto di sella per $f(x,y)$.

Ora, passiamo ai punti di frontiera di C. Le equazioni parametriche della ∂C (la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1) sono:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

dunque, la restrizione di f a ∂C è data da:

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t, \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Si noti che:

$$F'(t) = -2\sin 2t \;\text{ e }\; F''(t) = -4\cos 2t.$$

Inoltre:

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = k\pi \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi, t = \frac{3}{2}\pi.$$

Osserviamo che:

$F''(0) = -4 \Rightarrow 0$ punto di massimo relativo proprio per $F(t)$.

$F''(\frac{\pi}{2}) = 4 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$ punto di minimo relativo proprio per $F(t)$.

$F''(\pi) = -4 \Rightarrow \pi$ punto di massimo relativo proprio per $F(t)$.

$F''(\frac{3}{2}\pi) = 4 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi$ punto di minimo relativo proprio per $F(t)$.

Essendo:

$$F(0) = F(\pi) = 1, \;\; F(\frac{\pi}{2}) = F(\frac{3}{2}\pi) = -1,$$

si ha che 0 e π sono punti di massimo assoluto per $F(t)$ e che $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ sono punti di minimo assoluto per $F(t)$.

Così $(\cos 0, \sin 0) = (1,0)$, $(\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0)$ sono punti di massimo assoluto per $f(x,y)$ e $(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1), (\cos\frac{3}{2}\pi, \sin\frac{3}{2}\pi) = (0,-1)$ sono punti di minimo assoluto per $f(x,y)$.

2) Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione:

$$f(x,y) = xy(2x+y-2) = 2x^2y + xy^2 - 2xy,$$

nel triangolo T di vertici $(0,0), (1,0), (0,2)$.

Osserviamo che:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, -2x+2]\}.$$

Iniziamo a calcolare le derivate parziali prime e seconde di $f(x,y)$:

$f_x = 4xy + y^2 - 2y$, $f_y = 2x^2 + 2xy - 2x$, $f_{xy} = 4x + 2y - 2 = f_{yx}$, $f_{xx} = 4y$, $f_{yy} = 2x$.

Vediamo in quali punti si annulla il gradiente di f:

$$Df(x,y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy + y^2 - 2y = 0 \\ 2x^2 + 2xy - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(4x+y-2) = 0 \\ 2x(x+y-1) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $Df(x,y) = \mathbf{0}$ si ottengono risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x + y - 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ x = 0, \end{cases} \begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}.$$

Dal primo sistema si ottiene $(0,0)$, dal secondo $(1,0)$, dal terzo $(0,2)$ e dal quarto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Calcoliamo l'hessiano di f:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4y & 4x+2y-2 \\ 4x+2y-2 & 2x \end{vmatrix} = 8xy - (4x+2y-2)^2.$$

L'unico punto interno a T è $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; essendo $H(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$ e $f_{x^2}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{8}{3}$ si ha che $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ è un punto di minimo relativo proprio per f.

Ora, andiamo a studiare la restrizione di f alla frontiera di T, ∂T. Tale frontiera è composta da 3 segmenti le cui equazioni parametriche sono:

$$s_1) \begin{cases} x = t, & t \in [0,1]; \\ y = 0 \end{cases} \quad s_2) \begin{cases} x = t \\ \\ y = -2t + 2 \end{cases} t \in [0,1]; \quad s_3) \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \ t \in [0,2]. \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
f_{/s_1} &= f(t,0) = 0,\\
f_{/s_2} &= f(t,-2t+2) = t(-2t+2)(2t-2t+2-2) = 0,\\
f_{/s_3} &= f(0,t) = 0,
\end{aligned}$$

dunque $f = 0$ su ∂T, allora tutti i punti di ∂T sono punti di massimo assoluto per f. Si noti che $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è anche un punto di minimo assoluto per f.

3) In figura è rappresentato il diagramma della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si noti che il punto $(0,0)$ è un punto di sella per $f(x,y)$, il piano tangente al diagramma di f nel punto $(0,0,0)$ ha equazione:

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0,$$

quindi è il piano xy.

Capitolo 7

Equazioni differenziali ordinarie.

7.1 Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Definizione 7.1.1. *Si dice equazione differenziale ordinaria un'equazione nella quale figura come incognita una funzione reale di una variabile reale* $y(x)$ *e che stabilisce una relazione tra la variabile* x*, la funzione* $y(x)$ *e almeno una delle derivate di* $y(x)$ *.*

La forma più generale che può assumere un'equazione differenziale è la seguente:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

dove F è una funzione reale di $n + 2$ variabili reali.

Si dice *ordine dell'equazione differenziale* (7.1) l'ordine massimo tra le derivate che in essa compaiono.

Detto n l'ordine dell'equazione differenziale (7.1) si dice che *la (7.1) è di tipo normale* quando la si può scrivere nella forma seguente:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{7.2}$$

dove f è una funzione reale di $n+1$ variabili reali, i.e. quando la derivata di ordine massimo si può esprimere in funzione di $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$.

Esempi.

a) $y'' + y'^3 + e^x + 2 = 0$.

b) $\sqrt[3]{y''} + y' = 0$.

c) $y'''y + \sqrt{y''' + 3xy'} = e^x$.

Ovviamente, le equazioni **a)** e **b)** sono di tipo normale, invece la **c)** non lo è.

Definizione 7.1.2. *Si dice soluzione* (o *integrale*) *particolare della (7.2) ogni funzione* $y(x) \in C^n(I, \mathbb{R})$*, con* I *intervallo di* $\mathbb{R}$*, tale che:*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in I.$$

Il diagramma della funzione $y(x)$ *si chiama curva integrale della (7.2).*

In modo analogo si dà la definizione di soluzione dell'equazione (7.1).

Passiamo, ora, ai *sistemi di equazioni differenziali del prim'ordine.* Siano $f_1, \cdots, f_n$, n funzioni reali nelle $n+1$ variabili reali $x, y_1, \cdots, y_n$, definite in un aperto A di $\mathbb{R}^{n+1}$. Un *sistema di n equazioni differenziali del prim'ordine di tipo normale* è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{7.3}$$

nelle funzioni incognite $y_1(x), \cdots, y_n(x)$; in altre parole, in questo caso, la funzione incognita è la funzione vettoriale $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x))$.

Il generico sistema di n equazioni differenziali del prim'ordine è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

dove $F_i, i = 1, \cdots, n$, sono assegnate funzioni delle $2n+1$ variabili $x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n$, definite in un aperto A di $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Definizione 7.1.3. *Si dice soluzione* (o *integrale*) *particolare del sistema* (7.3) *ogni funzione vettoriale* $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x))$ *di classe* C^1 *in un intervallo* I *di* $\mathbb{R}$*, tale che:*

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)). \end{cases}$$

Il diagramma della funzione $y(x)$ *si chiama curva integrale della (7.3).*

In modo analogo si dà la definizione di soluzione del sistema (7.4).

D'ora in poi ci occuperemo solo di equazioni differenziali e di sistemi di equazioni differenziali di tipo normale, cioè del tipo (7.2) e (7.3).

Concludiamo questo paragrafo con la seguente:

Proposizione 7.1.4. *Ogni equazione differenziale di ordine* n *di tipo normale è riconducibile ad un sistema di* n *equazioni del prim'ordine di tipo normale.*

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{7.5}$$

e il sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{7.6}$$

Iniziamo col provare che, se $y(x)$ è una soluzione dell'equazione (7.5), posto:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \\ y_3(x) = y''(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}(x) = y^{(n-2)}(x) \\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x), \end{cases}$$

si ha che la funzione $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$ è soluzione del sistema (7.6); infatti, risulta:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y''(x) = y_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}'(x) = y^{(n-1)}(x) = y_n(x), \\ y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \end{cases}$$

da cui segue l'asserto.

Ora, proviamo che, se $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$ è una soluzione del sistema (7.6), posto $y(x) = y_1(x)$ si ha che $y(x)$ è soluzione dell'equazione (7.5). Infatti, essendo $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$ soluzione del sistema (7.6) si ha:

$$\begin{cases} y'(x) = y_1'(x) = y_2(x) \\ y''(x) = y_2'(x) = y_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}'(x) = y_n(x), \\ y^{(n)}(x) = y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)). \end{cases}$$

L'asserto è così dimostrato. □

Osservazione. Dalla proposizione appena dimostrata segue che ogni sistema di equazioni differenziali di tipo normale di un qualunque ordine si può ricondurre ad un sistema di equazioni differenziali di tipo normale del prim'ordine.

7.2 Problema di Cauchy per le equazioni e per i sistemi.

Siano X un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}) \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$.

Definizione 7.2.1. *Si chiama problema di Cauchy relativo all'equazione:*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{7.7}$$

e al punto iniziale $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)})$*, il problema che consiste nel ricercare le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione (7.7) soddisfacenti le condizioni:*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \tag{7.8}$$

tale problema si indica col simbolo:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{7.9}$$

Una soluzione dell'equazione (7.7) soddisfacente le condizioni (7.8) si dice soluzione del problema di Cauchy (7.9).

Casi particolari.

1) Siano X un aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$.

Il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

consiste nel ricercare le soluzioni dell'equazione $y' = f(x, y)$ il cui grafico passa per il punto (x_0, y_0).

2) Siano X un aperto di $\mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, y_0^{(1)}) \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$.

Il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{(1)}, \end{cases}$$

consiste nel ricercare le soluzioni dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$ il cui grafico passa per il punto (x_0, y_0) e in tale punto deve essere dotato di retta tangente avente coefficiente angolare $y_0^{(1)}$.

Esempio. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = 1, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2. \end{cases} \tag{7.10}$$

Integrando l'equazione $y'' = 1$ si ottiene $y' = x + c_1$ e, integrando quest'ultima, si ottiene $y = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$; dunque, le soluzioni dell'equazione $y'' = 1$ sono funzioni del tipo:

$$y(x, c_1, c_2) = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2.$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ si ottiene $1 = y(0, c_1, c_2) = 0 + 0 + c_2$, quindi $c_2 = 1$; dalla condizione $y'(0) = 2$ si ottiene $2 = y'(0, c_1, c_2) = 0 + c_1$, quindi $c_1 = 2$. Conseguentemente, la soluzione del problema (7.10) è:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 1;$$

il diagramma di questa funzione è una parabola passante per il punto $(0, 1)$ ed avente in tale punto retta tangente con coefficiente angolare 2.

Passiamo, ora, al *problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali del prim'ordine.* Siano A un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \in A$ e $f = (f_1, \cdots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$.

Definizione 7.2.2. *Si chiama problema di Cauchy relativo al sistema di equazioni differenziali del prim'ordine di tipo normale:*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{7.11}$$

e al punto iniziale $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$*, il problema che consiste nel ricercare le soluzioni* $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x))$ *del sistema (7.11) soddisfacenti le condizioni:*

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \cdots,\ y_n(x_0) = y_n^0; \tag{7.12}$$

tale problema si indica col simbolo:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \cdots,\ y_n(x_0) = y_n^0. \end{cases} \tag{7.13}$$

Una soluzione del sistema (7.11) soddisfacente le condizioni (7.12) si dice soluzione del problema di Cauchy (7.13).

7.3 Funzioni lipschitziane.

Siano $\mathcal{R} = I \times \prod_{i=1}^{n} I_i$, con $I, I_1, \cdots, I_n$, intervalli di $\mathbb{R}$, e $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Qualunque siano i punti $y_i', y_i'' \in I_i$, poniamo:

$$P_i' = (x, y_1, \cdots, y_{i-1}, y_i', y_{i+1}, \cdots, y_n), \quad P_i'' = (x, y_1, \cdots, y_{i-1}, y_i'', y_{i+1}, \cdots, y_n).$$

Definizione 7.3.1. *La funzione* $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *si dice lipschitziana in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* y_i *se esiste un* $l_i \in]0, +\infty[$ *tale che:*

$$|g(P_i') - g(P_i'')| \le\ l_i\ |y_i' - y_i''|, \quad \forall y_i', y_i'' \in I_i.$$

Proposizione 7.3.2. *Se* $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile parzialmente in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* y_i *e la sua derivata parziale* g_{y_i} *è limitata in* $\mathcal{R}$*, allora* g *è lipschitziana in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* y_i*.*

Dimostrazione. A norma del teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, qualunque siano i punti P_i' e P_i'' di $\mathcal{R}$, con $P_i' \neq P_i''$, esiste un $Q_i \in \overset{\circ}{\overline{P_i' P_i''}}$ tale che:

$$|g(P_i') - g(P_i'')| = |g_{y_i}(Q_i)||y_i' - y_i''|,$$

dalla limitatezza di g_{y_i} in $\mathcal{R}$ segue l'asserto. $\square$

Definizione 7.3.3. *La funzione* $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *si dice lipschitziana in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* $\mathbf{y} = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{n})$ *se esiste* $l \in]0, +\infty[$ *tale che, qualunque siano i punti* $(x, y_1', \cdots, y_n'), (x, y_1'', \cdots, y_n'') \in \mathcal{R}$*, risulta:*

$$|g(x, y_1', \cdots, y_n') - g(x, y_1'', \cdots, y_n'')| \leq \ l \ |(y_1', \cdots, y_n') - (y_1'', \cdots, y_n'')|.$$

Si dimostra che:

Proposizione 7.3.4. $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *è lipschitziana in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* $y_1, \cdots, y_n$ *se e solo se* $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *è lipschitziana in* $\mathcal{R}$ *rispetto a* $\mathbf{y} = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{n})$.

7.4 Teoremi di esistenza e di unicità.

Proviamo il seguente teorema che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Teorema 7.4.1. (**Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in piccolo per le equazioni del prim'ordine**)
Siano (x_0, y_0) *un punto di* $\mathbb{R}^2$ *e* f *una funzione reale definita e continua nel rettangolo:*

$$\mathcal{R} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Posto:

$$M = \max_{\mathcal{R}} |f|, \quad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad e \quad I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

se f *è lipschitziana rispetto a* y *in* $\mathcal{R}$*, i.e., esiste un* $L > 0$ *tale che:*

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|, \ \forall y', y'' \in [y_0 - b, y_0 + b],$$

allora esiste una ed una sola funzione $y(x) \in C^1(I_\delta, \mathbb{R})$ *soluzione del problema di Cauchy (7.14).*

Dimostrazione. Per dimostrare l'esistenza e l'unicità di $y(x) \in C^1(I_\delta, \mathbb{R})$ soluzione del problema di Cauchy (7.14), è utile provare l'equivalenza tra le seguenti due proposizioni:

i) *Esiste una funzione $y(x)$ derivabile in I_δ tale che:*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ \forall x \in I_\delta, \quad e \quad y(x_0) = y_0.$$

ii) *Esiste una funzione $y(x)$ continua in I_δ tale che:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad \forall x \in I_\delta. \tag{7.15}$$

La (7.15) prende il nome di forma integrale del problema di Cauchy.

i) $\Rightarrow$ **ii)**. Dalla **i)** sappiamo che esiste una funzione $y(x)$ derivabile in I_δ tale che, $\forall x \in I_\delta$, risulta:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{7.16}$$

Allora, qualunque sia $x \in I_\delta$, integrando la (7.16) tra x_0 e x si ottiene:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

da cui segue la **ii)** visto che, per ipotesi, $y(x_0) = y_0$.

ii) $\Rightarrow$ **i)**. Dalla **ii)** sappiamo che esiste una funzione $y(x)$ continua in I_δ tale che, $\forall x \in I_\delta$, risulta:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{7.17}$$

Se nella (7.17) si pone $x = x_0$ si ottiene $y(x_0) = y_0$. Inoltre, per il lemma fondamentale del calcolo integrale, la funzione $y(x)$, che compare nella (7.17), è derivabile nell'intervallo I_δ e risulta:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ \forall x \in I_\delta.$$

Dunque vale la **i)**.

Abbiamo, quindi, provato che $y(x)$ è soluzione del problema (7.14) se e solo se $y(x)$ è soluzione del problema (7.15). Conseguentemente, dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (7.14) equivale a dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (7.15).

Allo scopo di provare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (7.15), consideriamo la successione $(y_k(x))_{k\in\mathbb{N}_0}$ di funzioni reali, definite nell'intervallo I_δ, costruita per ricorrenza come segue:

$$\begin{aligned} &y_0(x) = y_0 \\ &y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7.18}$$

Proviamo, innanzitutto, che la successione (7.18) è ben definita. Per fare ciò basta far vedere che, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, la funzione $f(x, y_k(x))$, $x \in I_\delta$, è ben definita; dunque, dobbiamo provare che:

$$y_k(x) \in [y_0 - b, y_0 + b],\ \forall x \in I_\delta, \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{7.19}$$

Dimostriamo la (7.19) per induzione. Per $k = 0$ la (7.19) è evidente, supponiamo che la (7.19) sia vera per k, i.e. $y_k(x) \in [y_0 - b, y_0 + b], \forall x \in I_\delta$, e proviamo che è vera per $k + 1$, i.e. $y_{k+1}(x) \in [y_0 - b, y_0 + b], \forall x \in I_\delta$.

Essendo la (7.19) vera per k, qualunque sia $x \in I_\delta$, si ha che:

$$(x, y_k(x)) \in I_\delta \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

quindi, essendo $M = \max\limits_{\mathcal{R}} |f|$ e $I_\delta \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathcal{R}$, si ha:

$$|f(x, y_k(x))| \leq M,\ \forall x \in I_\delta;$$

allora, qualunque sia $x \in I_\delta$, risulta:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))| \, dt \right| \leq \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = M|x - x_0| \leq M\delta \leq b, \end{aligned}$$

quindi $y_{k+1}(x) \in [y_0 - b, y_0 + b], \forall x \in I_\delta$.

La (7.19) è così provata.

Allo scopo di provare la convergenza uniforme della successione (7.18) in I_δ, osserviamo che:

$$y_{k+1}(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + \cdots + (y_{k+1}(x) - y_k(x)),$$

dunque, gli elementi della successione (7.18) sono le somme parziali della serie:

$$y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1}(x) - y_k(x)), \tag{7.20}$$

cioè, la successione (7.18) può essere considerata come la successione delle somme parziali della serie (7.20). Allora, per provare la convergenza uniforme della successione (7.18), in I_δ, basta far vedere che la serie (7.20) converge uniformemente in I_δ.

Allo scopo di provare l'uniforme convergenza della serie (7.20), iniziamo con l'osservare che:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \, dt \right| \leq M|x - x_0|, \ \forall x \in I_\delta. \tag{7.21}$$

Dalla lipschitzianità di f rispetto a y e dalla (7.21) segue che:

$$\begin{aligned}|y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t,y_1(t))-f(t,y_0)\right)dt\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}L\,|y_1(t))-y_0|\,dt\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}LM\,|t-x_0|\,dt\right| = \frac{ML}{2}|x-x_0|^2,\ \forall x\in I_\delta.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Dalla lipschitzianità di f rispetto a y e dalla (7.22) si ottiene:

$$\begin{aligned}|y_3(x)-y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))\right)dt\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))|\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}L\,|y_2(t)-y_1(t)|\,dt\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}L\frac{ML}{2}\,|t-x_0|^2\,dt\right| \leq \frac{ML^2}{2}\frac{|x-x_0|^3}{3} = \\ &= \frac{ML^2}{3!}|x-x_0|^3,\ \forall x\in I_\delta.\end{aligned}$$

Iterando questo procedimento si ottiene:

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|x-x_0|^{k+1},\ \forall x\in I_\delta,\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{7.23}$$

Dalla (7.23), essendo $|x-x_0|\leq\delta, \forall x\in I_\delta$, si ha che:

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}\delta^{k+1},\ \forall x\in I_\delta,\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{7.24}$$

Dalla (7.24) segue che la serie dei moduli della (7.20) è maggiorata, in I_δ, dalla serie numerica:

$$|y_0| + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{ML^k}{(k+1)!}\delta^{k+1} = |y_0| + \frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L\delta)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{7.25}$$

Siccome la serie (7.25) è convergente, infatti ha somma $|y_0| + \frac{M}{L}\left(e^{L\delta} - 1\right)$, la serie (7.20) converge totalmente in I_δ e quindi converge uniformemente in I_δ. Da ciò e da quanto detto in precedenza, consegue la convergenza uniforme in I_δ della successione (7.18).

Denotato con $y(x)$ il limite uniforme della successione (7.18), dalla continuità delle funzioni $y_k(x)$ in I_δ, segue la continuità di $y(x)$ in I_δ. Inoltre, grazie alla lipschitzianità di f rispetto a y, si ha che:

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_k(x))| \leq L|y(x) - y_k(x)|, \ \forall x \in I_\delta,$$

quindi, dalla convergenza uniforme della successione (7.18) a $y(x)$ in I_δ segue la convergenza uniforme della successione $\{f(x, y_k(x))\}$ alla funzione $f(x, y(x))$ in I_δ.

Conseguentemente, a norma del teorema sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale, qualunque sia $x \in I_\delta$ risulta:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{k\to+\infty} y_{k+1}(x) = \lim_{k\to+\infty}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt\right) = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x}\left(\lim_{k\to+\infty} f(t, y_k(t))\right) dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \end{aligned}$$

Dunque, $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy nella forma integrale (7.15).

Ora resta da provare che la funzione $y(x)$ è l'unica soluzione del problema (7.15).

Sia $z(x)$ una soluzione del problema (7.15) definita nell'intervallo $I_{\delta_1} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, cioè :

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt, \ \forall x \in I_{\delta_1}.$$

Facciamo vedere che, posto $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$, si ha che:

$$z(x) = y(x), \ \forall x \in I_{\delta_2} = [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2].$$

Per fare ciò si seguono gli stessi ragionamenti che ci hanno permesso di ottenere le (7.22), (7.23), (7.24). Infatti:

$$
\begin{aligned}
|z(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, z(t))|\, dt \right| \leq \\
&\leq M|x - x_0|, \ \forall x \in I_{\delta_2},
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

inoltre:

$$
\begin{aligned}
&|z(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t, z(t)) - f(t, y_0)\right) dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, z(t)) - f(t, y_0)|\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\, |z(t)) - y_0|\, dt \right| \leq \\
&\leq LM \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| = \frac{ML}{2}|x - x_0|^2, \ \forall x \in I_{\delta_2}.
\end{aligned}
$$

Iterando questo procedimento si ottiene che:

$$
|z(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!}|x - x_0|^{k+1}, \ \forall x \in I_{\delta_2}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{7.27}
$$

Allora, siccome al divergere di k il secondo membro della (7.27) tende a zero, dalla (7.27) segue che:

$$
z(x) = \lim_{k \to +\infty} y_k(x) = y(x), \ \forall x \in I_{\delta_2}.
$$

Il teorema è così dimostrato. $\square$

Enunciamo, ora, alcuni teoremi che forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo a una equazione differenziale di ordine n e ad un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine.

Teorema 7.4.2. (**Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in piccolo per le equazioni di ordine n**)
Siano $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *una funzione continua nel seguente rettangolo di* $\mathbb{R}^{n+1}$*:*

$$X = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \times \prod_{i=1}^{n-1} [y_0^{(i)} - b_i, y_0^{(i)} + b_i].$$

Se f *è lipschitziana rispetto a* $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ *in* X*, allora esistono un intervallo* J *di centro* x_0 *incluso in* $[x_0 - a, x_0 + a]$ *e una ed una sola funzione* $y(x) \in C^n(J, \mathbb{R})$ *soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{7.28}$$

Teorema 7.4.3. (**Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in grande generalizzato per le equazioni di ordine n**)
Siano I *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e* $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *una funzione continua nella striscia* $I \times \mathbb{R}^n$*. Se* f *è lipschitziana rispetto a* $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ *in ogni striscia* $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq I \times \mathbb{R}^n$ *allora, qualunque sia il punto* $P_0 = (x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)})$ *appartenente a* $I \times \mathbb{R}^n$*, esiste una ed una sola funzione* $y(x) \in C^n(I, \mathbb{R})$ *soluzione del problema di Cauchy (7.28).*

Teorema 7.4.4. (**Teorema di esistenza di Peano per le equazioni di ordine n**) *Siano* A *un aperto di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *una funzione continua in* A*. Allora, qualunque sia il punto* $P_0 = (x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)})$ *appartenente ad* A*, esiste una funzione* $y(x) \in C^n(J, \mathbb{R})$*, con* J *un intervallo di centro* x_0*, soluzione del problema di Cauchy (7.28).*

Inoltre, se $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *è una funzione continua e limitata nella striscia* $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ *di* $\mathbb{R}^{n+1}$*, allora, per ogni* $P_0 = (x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)})$ *appartenente a* $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ *esiste almeno una funzione* $y(x) \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ *soluzione del problema di Cauchy (7.28).*

Teorema 7.4.5. (**Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in piccolo per i sistemi del prim'ordine**) *Siano* $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *e:*

$$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = (f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n))$$

una funzione vettoriale continua nel seguente rettangolo di $\mathbb{R}^{n+1}$*:*

$$\mathcal{R} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \prod_{i=1}^{n} [y_i^0 - b_i, y_i^0 + b_i].$$

Se le componenti, $f_1, \cdots, f_n$*, di* f *sono lipschitziane rispetto a* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *in* $\mathcal{R}$*, posto:*

$$M_i = \max_{\mathcal{R}} |f_i|, \; i = 1, \cdots, n, \quad \delta = \min\{a, \frac{b_1}{M_1}, \cdots, \frac{b_n}{M_n}\}, \quad I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

esiste una ed una sola funzione $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x)) \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ *soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_1(x_0) = y_1^0, \cdots, y_n(x_0) = y_n^0. \end{cases} \tag{7.29}$$

Teorema 7.4.6. (**Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in grande generalizzato per i sistemi del prim'ordine.**)
Siano I *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e:*

$$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = (f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n))$$

una funzione vettoriale continua nella striscia $I \times \mathbb{R}^n$*. Se le componenti,* $f_1, \cdots, f_n$*, di* f *sono lipschitziane rispetto a* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *in ogni striscia* $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq I \times \mathbb{R}^n$ *allora, qualunque sia il punto* $P_0 = (x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in I \times \mathbb{R}^n$*, esiste una ed una sola funzione* $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x)) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *soluzione del seguente problema di Cauchy (7.29).*

7.5 Integrale generale di un'equazione differenziale di ordine n.

Consideriamo l'equazione differenziale di ordine n di tipo normale:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{7.30}$$

se la funzione $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ è definita nella striscia $I \times \mathbb{R}^n$ di $\mathbb{R}^{n+1}$ e soddisfa le ipotesi del Teorema 7.4.3, allora esiste una funzione reale $y(x, c_1, \cdots, c_n)$, della variabile x e di n costanti arbitrarie $c_1, \cdots, c_n$, definita in $I \times \mathbb{R}^n$, godente delle seguenti due proprietà:

1) *per ogni fissata n-pla di costanti* $(c'_1, \cdots, c'_n)$*, la funzione* $y(x, c'_1, \cdots, c'_n)$ *è soluzione dell'equazione (7.30);*

2) *qualunque sia la soluzione* $z(x)$ *dell'equazione (7.30), esiste un'unica n-upla* $(\overline{c}_1, \cdots, \overline{c}_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $z(x) = y(x, \overline{c}_1, \cdots, \overline{c}_n)$.

In altri termini, al variare delle costanti $c_1, \cdots, c_n$, dalla funzione $y(x, c_1, \cdots, c_n)$ si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione (7.30).

La funzione $y(x, c_1, \cdots, c_n)$ si dice *integrale generale dell'equazione (7.30).*

In modo analogo si dà la definizione di integrale generale di un sistema di equazioni differenziali.

7.6 Equazioni differenziali lineari.

Definizione 7.6.1. *Siano* I *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e* $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), \varphi(x)$, $n+1$ *funzioni reali continue in* I*. L'equazione differenziale di tipo normale:*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \varphi(x), \tag{7.31}$$

si dice equazione differenziale lineare di ordine n*, le funzioni* $a_0(x), \cdots, a_{n-1}(x)$*, si dicono coefficienti dell'equazione differenziale (7.31) e la funzione* $\varphi(x)$ *si dice termine noto dell'equazione differenziale (7.31).*

La seguente equazione differenziale ottenuta dalla (7.31) eliminando il termine noto:

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}. \tag{7.32}$$

si dice equazione differenziale lineare omogenea associata alla (7.31).

Dal Teorema 7.4.3 segue facilmente il seguente:

Teorema 7.6.2. *Qualunque sia il punto* $P_0 = (x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)})$ *della striscia* $I \times \mathbb{R}^n$*, esiste una ed una sola funzione* $y(x) \in C^n(I, \mathbb{R})$ *soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \varphi(x), \\ \\ y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{7.33}$$

Dimostrazione. Posto:

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \varphi(x),$$

la (7.31) diventa:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

Osservato che la funzione $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ è continua in $I \times \mathbb{R}^n$, se facciamo vedere che $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ è lipschitziana rispetto alle variabili $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, in ogni striscia $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ contenuta in $I \times \mathbb{R}^n$, dal Teorema 7.4.3 segue l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (7.33). Calcoliamo le derivate parziali della f rispetto a $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$:

$$f_y = a_0(x),\ f_{y'} = a_1(x), \cdots, f_{y^{(n-1)}} = a_{n-1}(x);$$

dalla continuità delle funzioni $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x)$, nell'intervallo I, segue la continuità delle funzioni $f_y, \cdots, f_{y^{(n-1)}}$ nella striscia $I \times \mathbb{R}^n$; conseguentemente, la f è lipschitziana rispetto a $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ in ogni striscia $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ contenuta in $I \times \mathbb{R}^n$, in quanto le sue derivate parziali rispetto a $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ sono limitate in tale striscia.

L'asserto è così dimostrato. □

Di facile verifica sono le proposizioni seguenti:

Proposizione 7.6.3. *Se* $u_1, \cdots, u_h$ *sono soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea* (7.32) *e* $c_1, \cdots, c_h$ *sono numeri reali, allora la funzione:*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{h} c_i \; u_i(x), \;\; x \in I,$$

è soluzione della (7.32) (i.e. ogni combinazione lineare di soluzioni della (7.32) è ancora soluzione della (7.32)).

Proposizione 7.6.4. *Se u è una soluzione dell'equazione differenziale omogenea (7.32) e v e w sono soluzioni dell'equazione differenziale (7.31), allora la funzione $u + v$ è soluzione della (7.31) e la funzione $v - w$ è soluzione della (7.32).*

Osservazione. Considerato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(x)y + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} \\ y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases}$$

a norma del Teorema 7.4.3, l'unica soluzione di tale problema è data dalla funzione identicamente nulla su I, che è detta *soluzione banale.*
Allora, se si considera l'equazione differenziale lineare omogenea del prim'ordine:

$$y' = a_0(x)y, \tag{7.34}$$

per quanto detto sopra si ha che le soluzioni della (7.34), diverse dalla banale, sono sempre positive o sempre negative, i.e. il loro diagramma è tutto al di sopra oppure tutto al di sotto dell'asse delle x.

Esempio. Vediamo come si risolve l'equazione del prim'ordine:

$$y' = -2xy. \tag{7.35}$$

Determiniamo le soluzioni della (7.35), diverse dalla banale:

$$y' = -2xy \;\Rightarrow \frac{y'}{y} = -2x \;\Rightarrow \log|y| = -x^2 + c_1 \Rightarrow |y| = e^{-x^2} e^{c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1} e^{-x^2}.$$

Quindi, tutte le soluzioni della (7.35), compresa la banale, si ottengono da $y(x) = c\, e^{-x^2},\ c \in \mathbb{R}$.

Definizione 7.6.5. *Siano $u_1, ..., u_n$, n integrali particolari dell'equazione omogenea di ordine n:*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}. \tag{7.36}$$

Diremo che $u_1, ..., u_n$ sono linearmente dipendenti se:

$$\exists (h_1, ..., h_n) \neq (0, ..., 0) \ : \ h_1 u_1(x) + ... + h_n u_n(x) = 0, \ \forall\, x \in I,$$

in caso contrario, gli integrali $u_1, ..., u_n$ si diranno linearmente indipendenti.

Definizione 7.6.6. *Si dice wronskiano degli n integrali $u_1, ..., u_n$, della (7.36) la funzione reale definita in I:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & ... & u_n(x) \\ u_1'(x) & ... & u_n'(x) \\ ... & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & ... & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Detti $u_1, u_2, ..., u_n$, n integrali particolari della (7.36) proviamo che:

Proposizione 7.6.7. *Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

a) *$u_1, ..., u_n$ sono linearmente dipendenti.*

b) *$W(x) = 0$, $\forall x \in I$.*

c) *$\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Iniziamo a provare che:
a) $\Rightarrow$ **b)**.
Per le ipotesi fatte esiste una n-upla di numeri reali non tutti nulli, $h_1, h_2, ..., h_n$, tale che:

(1) $\quad h_1 u_1(x) + ... + h_n u_n(x) = 0, \ \forall\, x \in I.$

Conseguentemente, $\forall\, x \in I$, risulta:

(2) $\quad h_1 u_1'(x) + ... + h_n u_n'(x) = 0$

....

(n) $\quad h_1 u_1^{(n-1)}(x) + ... + h_n u_n^{(n-1)}(x) = 0.$

Dalle (1),(2),...,(n) segue che, $\forall x \in I$, il sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 u_1(x) + ... + \xi_n u_n(x) = 0 \\ .... \\ \xi_1 u_1^{(n-1)}(x) + ... + \xi_n u_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases} \tag{7.37}$$

è dotato della soluzione $(h_1, ..., h_n)$ diversa dalla banale; quindi, $\forall\, x \in I$, il determinante del sistema (7.37), che coincide con $W(x)$, è nullo. L'implicazione è così provata.

b) $\Rightarrow$ **c**). Tale implicazione è immediata.

Proviamo infine che:

c) $\Rightarrow$ **a**).

L'esistenza di un $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) = 0$ implica che il sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 u_1(x_0) + ... + \xi_n u_n(x_0) = 0 \\ ... \\ \xi_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + ... + \xi_n u_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{7.38}$$

è dotato di una soluzione $(h_1, ..., h_n)$ diversa dalla banale. Considerata la funzione:

$$u(x) = h_1 u_1(x) + ... + h_n u_n(x), \;\; x \in I,$$

osserviamo che, essendo $(h_1, ..., h_n)$ soluzione del sistema (7.38), risulta:

$$u(x_0) = h_1 u_1(x_0) + ... + h_n u_n(x_0) = 0,$$

$$u'(x_0) = h_1 u_1'(x_0) + ... + h_n u_n'(x_0) = 0,$$

$$...$$

$$u^{(n-1)}(x_0) = h_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + ... + h_n u_n^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

quindi, a norma del Teorema 7.4.3, la funzione $u(x)$ coincide con la funzione identicamente nulla, cioè:

$$h_1 u_1(x) + ... + h_n u_n(x) = 0, \ \ \forall\, x \in I,$$

quindi $u_1, .., u_n$ sono linearmente dipendenti.
L'asserto è così provato. $\square$

Dalla proposizione appena provata consegue banalmente che:

Proposizione 7.6.8. *Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

a') $u_1, ..., u_n$ sono n integrali linearmente indipendenti.

b') $W(x) \neq 0 \ \forall\, x \in I$.

c') $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$

Proviamo, infine, che:

Proposizione 7.6.9. *Se $u_1, ..., u_n$ sono n integrali linearmente indipendenti della (7.36), la funzione reale:*

$$y \ : \ (x, c_1, ..., c_n) \in I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)$$

è un integrale generale della (7.36).

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per la Proposizione 7.6.3, fissate ad arbitrio n costanti $c'_1, ..., c'_n$, la funzione $y(x, c'_1, ..., c'_n)$ è un integrale particolare della (7.36). Allora, l'asserto sarà provato se mostreremo che, fissato ad arbitrio un integrale $u(x)$ della (7.36), esiste una ed una sola n-upla $(\overline{c}_1, ...\overline{c}_n)$ tale che:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i u_i(x) = y(x, \overline{c}_1, ..., \overline{c}_n), \ \forall\, x \in I.$$

A tale scopo, detto x_0 un punto di I, consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} u_1(x_0)\xi_1 + ... + u_n(x_0)\xi_n = u(x_0) \\ u_1'(x_0)\xi_1 + ... + u_n'(x_0)\xi_n = u'(x_0) \\ ... \\ u_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + ... + u_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = u^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{7.39}$$

Essendo $u_1, ..., u_n$ linearmente indipendenti, risulta $W(x_0) \neq 0$; quindi il sistema (7.39), il cui determinante è $W(x_0)$, ammette una ed una sola soluzione $(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n)$. Dunque, considerata la funzione $z(x) = \overline{c}_1 u_1(x) + ... + \overline{c}_n u_n(x)$ e osservato che:

$$z(x_0) = u(x_0), z'(x_0) = u'(x_0), ..., z^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}(x_0),$$

per il Teorema 7.4.3 risulta $u(x) = z(x)$, $\forall\, x \in I$.

La proposizione è così provata. □

7.7 Integrale generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea.

Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea:

$$y^{(n)} = a_0(x)y + ... + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \varphi(x) \tag{7.40}$$

e l'omogenea associata alla (7.40):

$$y^{(n)} = a_0(x)y + ... + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} \tag{7.41}$$

Proviamo che:

Proposizione 7.7.1. *Qualunque sia la n-upla $(u_1, ..., u_n)$ di integrali linearmente indipendenti della (7.41) e qualunque sia l'integrale particolare $v_0(x)$ della (7.40), la funzione reale definita in $I \times \mathbb{R}^n$:*

$$y^\star(x, c_1, .., c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) + v_0(x)$$

è un integrale generale della (7.40).

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, fissate ad arbitrio n costanti $c_1, ..., c_n$, per le Proposizioni 7.6.3 e 7.6.4, la funzione $y^\star(x, c_1, ..., c_n)$ è un integrale particolare della (7.40).
Allora, per dimostrare l'asserto, basterà provare che ogni soluzione della (7.40) si ottiene particolarizzando le costanti $c_1, ..., c_n$. A tale scopo, detti v una generica soluzione di (7.40) e x_0 un generico punto di I, consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} u_1(x_0)\xi_1 + ... + u_n(x_0)\xi_n + v_0(x_0) = v(x_0) \\ u_1'(x_0)\xi_1 + ... + u_n'(x_0)\xi_n + v_0'(x_0) = v'(x_0) \\ ... \\ u_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + ... + u_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n + v_0^{(n-1)}(x_0) = v^{(n-1)}(x_0), \end{cases} \tag{7.42}$$

che scriviamo nella forma:

$$\begin{cases} u_1(x_0)\xi_1 + ... + u_n(x_0)\xi_n = v(x_0) - v_0(x_0) \\ ... \\ u_1^{(n-1)}(x_0)\xi_1 + ... + u_n^{(n-1)}(x_0)\xi_n = v^{(n-1)}(x_0) - v_0^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{7.43}$$

Essendo $u_1, ..., u_n$ linearmente indipendenti si ha che $W(x_0) \neq 0$ quindi il sistema (7.43) ammette una ed una sola soluzione $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
Considerata la funzione:

$$z(x) = y^\star(x, \lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x) + v_0(x),$$

osserviamo che dal sistema (7.42) segue che:

$$z(x_0) = v(x_0)$$

$$z'(x_0) = v'(x_0)$$

$$...$$

$$z^{(n-1)}(x_0) = v^{(n-1)}(x_0),$$

conseguentemente, a norma del Teorema 7.4.3, si ha che:

$$z(x) = v(x), \quad \forall\, x \in I.$$

L'asserto è così provato. $\square$

Alla luce della proposizione appena provata si può dire che:

Un integrale generale della (7.40) si ottiene una volta noti un integrale generale della (7.41) e un integrale particolare della (7.40).

Da ciò segue l'importanza di saper calcolare un integrale particolare della (7.40).

Nel paragrafo seguente forniremo un metodo per il calcolo di un integrale particolare della (7.40).

7.8 Metodo di Lagrange per la determinazione di un integrale particolare.

Consideriamo l'equazione completa:

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \varphi(x) \tag{7.44}$$

e l'omogenea associata:

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}. \tag{7.45}$$

Denotate con $u_1(x), ..., u_n(x)$, n soluzioni linearmente indipendenti della (7.45), consideriamo il sistema di n equazioni nelle n incognite $\xi_1, ..., \xi_n$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\xi_i = 0 \\ ... \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-2)}(x)\xi_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-1)}(x)\xi_i = \varphi(x). \end{cases} \tag{7.46}$$

Essendo $u_1(x), ..., u_n(x)$ linearmente indipendenti ha senso considerare la funzione vettoriale $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, che ad ogni $x \in I$ associa la soluzione $(g_1(x), ..., g_n(x))$ del sistema (7.46).

Teorema 7.8.1. *Qualunque sia $x_0 \in I$, la funzione:*

$$v : x \in I \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \int_{x_0}^{x} g_i(t)dt \tag{7.47}$$

è una soluzione particolare di (7.44).

Dimostrazione. Proviamo il teorema nel caso in cui $n = 2$. A tale scopo consideriamo l'equazione:

$$y'' = a_0(x)y + a_1(x)y' + \varphi(x) \tag{7.48}$$

e l'omogenea associata:

$$y'' = a_0(x)y + a_1(x)y'. \tag{7.49}$$

Se $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti di (7.49), considerato il sistema:

$$\begin{cases} u_1(x)\xi_1 + u_2(x)\xi_2 = 0 \\ u_1'(x)\xi_1 + u_2'(x)\xi_2 = \varphi(x), \end{cases} \tag{7.50}$$

ha senso considerare la funzione vettoriale $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, che ad ogni $x \in I$ associa la soluzione $(g_1(x), g_2(x))$ del sistema (7.50).

Fissato un $x_0 \in I$, proviamo che la funzione:

$$v(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt \tag{7.51}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (7.48).
A tale scopo, calcoliamo la derivata prima di $v(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= u_1'(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_1(x)g_1(x) + u_2'(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt + u_2(x)g_2(x) = \\ &= u_1'(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2'(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt + u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x), \end{aligned}$$

da cui, essendo $(g_1(x), g_2(x))$ soluzione della prima equazione del sistema (7.50), si ha che:

$$v'(x) = u_1'(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2'(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt. \tag{7.52}$$

Calcoliamo, ora, la derivata seconda di $v(x)$:

$$v''(x) = u_1''(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_1'(x)g_1(x) + u_2''(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt + u_2'(x)g_2(x) =$$
$$= u_1''(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2''(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt + u_1'(x)g_1(x) + u_2'(x)g_2(x),$$

allora, essendo $(g_1(x), g_2(x))$ soluzione della seconda equazione del sistema (7.50), si ha che:

$$v''(x) = u_1''(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2''(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt + \varphi(x),$$

e quindi:

$$v''(x) - \varphi(x) = u_1''(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2''(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt. \tag{7.53}$$

A questo punto, dalle (7.51) e (7.52) si ha che:

$$a_0(x)v(x) + a_1(x)v'(x) = a_0(x) \left(u_1(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt \right) +$$
$$+ a_1(x) \left(u_1'(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2'(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt \right) =$$
$$= \big(a_0(x)u_1(x) + a_1(x)u_1'(x)\big) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + \big(a_0(x)u_2(x) + a_1(x)u_2'(x)\big) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt,$$

allora, essendo u_1 e u_2 soluzioni della (7.49), si ha che:

$$a_0(x)v(x) + a_1(x)v'(x) = u_1''(x) \int_{x_0}^{x} g_1(t)dt + u_2''(x) \int_{x_0}^{x} g_2(t)dt. \tag{7.54}$$

Conseguentemente, dalla (7.53) segue che:

$$a_0(x)v(x) + a_1(x)v'(x) = v''(x) - \varphi(x),$$

quindi, $v(x)$ è soluzione della (7.48).

Il teorema è così dimostrato. $\square$

7.9 L'equazione differenziale lineare del prim'ordine.

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $a(x), \varphi(x) \in C^0(I, \mathbb{R})$. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del prim'ordine:

$$y' = a(x)y + \varphi(x), \tag{7.55}$$

e l'omogenea associata alla (7.55):

$$y' = a(x)y. \tag{7.56}$$

Sia x_0 un punto di I, considerato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)y, \\ y(x_0) = 0, \end{cases} \tag{7.57}$$

per il Teorema 7.4.3, la funzione $y(x) = 0,\ x \in I$, *soluzione banale del problema (7.57)*, è l'unica soluzione di tale problema.

Essendo x_0 un generico punto di I si ha che:

Ogni soluzione dell'equazione (7.56), distinta dalla soluzione banale, deve essere sempre positiva o sempre negativa; quindi, le curve integrali della (7.56) sono tutte al di sopra o tutte al di sotto dell'asse delle x, eccetto quella corrispondente alla soluzione banale.

Se $y(x)$ è una soluzione della (7.56) distinta dalla banale, si ha che:

$$y'(x) = a(x)y(x),$$

quindi:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x),$$

dunque:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\ dx = \int a(x)\ dx,$$

da cui, denotata con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, si ottiene:

$$log|y(x)| = A(x) + c_1,$$

cioè:

$$|y(x)| = e^{A(x)+c_1} = e^{c_1}e^{A(x)},$$

quindi:

$$y(x) = \pm e^{c_1}e^{A(x)},$$

conseguentemente, essendo $e^{c_1} > 0$, un integrale generale dell'equazione (7.56) è dato da:

$$y(x, c) = c\ e^{A(x)},\ \ c \in \mathbb{R}.$$

A questo punto, per determinare un integrale generale dell'equazione completa (7.55) ci serve un suo integrale particolare. Per fare ciò utilizziamo il metodo di Lagrange; prendiamo, quindi, un integrale particolare della (7.56):

$$u(x) = y(x, 1) = e^{A(x)},$$

e consideriamo l'equazione:

$$u(x)\xi = \varphi(x),$$

da essa si ricava:

$$\xi = \frac{\varphi(x)}{e^{A(x)}},$$

quindi, per il Teorema 7.8.1, una soluzione particolare della (7.55) è data da:

$$v(x) = e^{A(x)} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{-A(t)}\ dt, \tag{7.58}$$

con x_0 punto di I.

Allora un *integrale generale della (7.55)* è dato da:

$$y^{\star}(x, c) = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{-A(t)}\ dt. \tag{7.59}$$

Esempio 1. Consideriamo l'equazione:

$$y' = \frac{1}{x}y + \log x, \tag{7.60}$$

notiamo che $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = \log x$ e $I =]0, +\infty[$. L'omogenea associata alla (7.60) è:

$$y' = \frac{1}{x} y.$$

Determiniamo un integrale generale dell'omogenea associata:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow \log|y| = \log x + c_1 \;\Rightarrow |y| = xe^{c_1} \;\Rightarrow y(x,c) = cx,\;\; c \in \mathbb{R}.$$

Ora, determiniamo un integrale particolare della (7.60). A tale scopo, consideriamo un integrale particolare dell'omogenea $y(x,1) = x$ e, utilizzando il metodo di Lagrange, determiniamo un integrale particolare della completa:

$$x\xi = \log x \Rightarrow \xi = \frac{\log x}{x}$$

allora:

$$v(x) = x \int_1^x \frac{\log t}{t} dt = x \left[\frac{1}{2} \log^2 t \right]_1^x = \frac{1}{2} x \log^2 x.$$

Dunque, un integrale generale della (7.60) è dato da:

$$y^\star(x,c) = cx + \frac{1}{2} x \log^2 x.$$

Esempio 2. Consideriamo l'equazione:

$$y' = -y \cos x + \sin x \cos x \tag{7.61}$$

e l'omogenea associata:

$$y' = -y \cos x.$$

Determiniamo un integrale generale dell'omogenea associata:

$$\frac{y'}{y} = -\cos x \;\Rightarrow \log|y| = -\sin x + c_1 \;\Rightarrow |y| = e^{-\sin x} e^{c_1} \;\Rightarrow y = \pm e^{c_1} e^{-\sin x},$$

quindi:

$$y(x,c) = ce^{-\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ora, determiniamo un integrale particolare della (7.61). A tale scopo, consideriamo un integrale particolare dell'omogenea $y(x,1) = e^{-\sin x}$ e, utilizzando il metodo di Lagrange, determiniamo un integrale particolare della completa:

$$e^{-\sin x}\xi = \sin x \cos x \Longrightarrow \xi = e^{\sin x} \sin x \cos x,$$

allora:

$$g_1(x) = e^{\sin x} \sin x \cos x.$$

Conseguentemente:

$$v(x) = e^{-\sin x} \int_{x_0}^{x} e^{\sin t} \sin t \cos t dt. \tag{7.62}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \int e^{\sin t} \sin t \cos t dt &= e^{\sin t} \cdot \sin t - \int e^{\sin t} \cos t dt = \\ &= e^{\sin t} \sin t - e^{\sin t} + c_1, \end{aligned}$$

da cui, se nella (7.62) si sceglie $x_0 = 0$, si ottiene che:

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\sin x} \cdot \int_{0}^{x} e^{\sin t} \sin t \cos t dt = e^{-\sin x} \left[e^{\sin t} \sin t - e^{\sin t} \right]_0^x = \\ &= e^{-\sin x} \left[e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + 1 \right] = \sin x - 1 + e^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Allora un integrale generale della (7.61) è dato da:

$$y^*(x,c) = y(x,c) + v(x) = ce^{-\sin x} + \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

7.10 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

Definizione 7.10.1. *Siano $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, n numeri reali. L'equazione differenziale:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0, \tag{7.63}$$

si dice **equazione differenziale lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti.**

L'equazione nella variabile complessa z:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \tag{7.64}$$

si chiama **equazione caratteristica dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti (7.63).**

Allo scopo di determinare n soluzioni linearmente indipendenti della (7.63), distinguiamo due casi.

Caso 1. L'equazione (7.64) ha solo radici distinte. Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ le radici reali e $\alpha_1 \pm i\beta_1, \cdots, \alpha_s \pm i\beta_s$ le complesse e coniugate (si noti che $p + 2s = n$).

In questo caso, si verifica facilmente che le seguenti funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale (7.63):

$$e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_p x} \tag{7.65}$$

e

$$e^{(\alpha_1+i\beta_1)x}, \cdots, e^{(\alpha_s+i\beta_s)x}, \quad e^{(\alpha_1-i\beta_1)x}, \cdots, e^{(\alpha_s-i\beta_s)x}. \tag{7.66}$$

Siccome le funzioni della (7.66) sono funzioni complesse, allo scopo di ricavare da esse altrettante funzioni reali, che siano soluzioni dell'equazione (7.63), useremo le seguenti formule di Eulero:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \tfrac{e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}}{2} &= e^{\alpha x}\, \tfrac{\cos\beta x + i\sin\beta x + \cos\beta x - i\sin\beta x}{2} = \\ &= e^{\alpha x}\cos\beta x, \end{aligned}$$

e che:

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Allora, per quanto detto sopra, dalle (7.66) si ottengono le seguenti funzioni:

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \cdots, e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \cdots, e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x; \tag{7.67}$$

si prova facilmente che esse sono soluzioni dell'equazione (7.63).

Inoltre, si può dimostrare che le funzioni della (7.65) e della (7.67) forniscono n integrali linearmente indipendenti dell'equazione (7.63); quindi, un integrale generale dell'equazione (7.63) è dato da:

$$y(x, c_1, \cdots, c_n) = \sum_{i=1}^{p} c_i e^{\lambda_i x} + \sum_{j=1}^{s} c_{p+j}\, e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x + \sum_{j=1}^{s} c_{p+s+j}\, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Caso 2. Le radici dell'equazione (7.64) non sono tutte semplici. Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$, le radici reali e distinte dell'equazione (7.64) con molteplicità, risp., $n_1, \cdots, n_q$ e siano $\alpha_1 \pm i\beta_1, \cdots, \alpha_r \pm i\beta_r$, le radici complesse e coniugate e distinte dell'equazione (7.64) con molteplicità, risp., $m_1, \cdots, m_r$ (si noti che $n_1 + \cdots + n_q + 2m_1 + \cdots + 2m_r = n$).

Anche in questo secondo caso si può provare che le seguenti funzioni reali definite in $\mathbb{R}$:

$$e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_q x}, \cdots, x^{n_q-1}e^{\lambda_q x},$$

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \cdots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x, \cdots, x^{m_r-1}e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x,$$

$$e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \cdots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\alpha_r x}\sin\beta_r x, \cdots, x^{m_r-1}e^{\alpha_r x}\sin\beta_r x,$$

sono n integrali linearmente indipendenti dell'equazione (7.63); quindi, un integrale generale della (7.63) si ottiene come combinazione lineare dei suddetti integrali.

Esempi

1. Consideriamo l'equazione differenziale omogenea:

$$y''' - y' = 0 \tag{7.68}$$

e l'equazione caratteristica della (7.68):

$$z^3 - z = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione $z^3 - z = z(z^2 - 1) = 0$ sono:

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = -1$$

quindi, un integrale generale della (7.68) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale omogenea:

$$y''' - y'' = 0 \tag{7.69}$$

e l'equazione caratteristica della (7.69):

$$z^3 - z^2 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione $z^3 - z^2 = z^2(z - 1) = 0$ sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 1$ che è semplice; quindi, un integrale generale della (7.69) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y'' + y = x + 1, \tag{7.70}$$

l'omogenea associata:

$$y'' + y = 0,$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^2 + 1 = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione $z^2 + 1 = 0$ sono:

$$\alpha_1 \pm i\beta_1 = \pm i, \ \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1,$$

allora un integrale generale dell'omogenea è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Col metodo di Lagrange calcoliamo un integrale particolare della completa. A tale scopo consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \xi_1 \cos x + \xi_2 \sin x = 0 \\ \\ -\xi_1 \sin x + \xi_2 \cos x = x + 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_1 = -\frac{\sin x}{\cos x}\xi_2 \\ \\ \frac{\sin^2 x}{\cos x}\xi_2 + \cos x \xi_2 = x + 1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \xi_1 = -\frac{\sin x}{\cos x}\xi_2 \\ \\ \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}\xi_2 = x + 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_1 = -\sin x(x + 1) \\ \\ \xi_2 = \cos x(x + 1). \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} v(x) &= \cos x \int_0^x - \sin t(t+1)dt + \sin x \int_0^x \cos t(t+1)dt = \\ &= \cos^2 x(x+1) + \sin^2 x(x+1) - \cos x - \sin x = \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(x+1) - \cos x - \sin x = x + 1 - \cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Concludendo un integrale generale della (7.70) è dato da:

$$z(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + 1 - \cos x - \sin x.$$

7.11 Equazioni differenziali lineari complete a coefficienti costanti: casi notevoli.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare di ordine n completa a coefficienti costanti:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \varphi(x), \tag{7.71}$$

l'equazione omogenea associata alla (7.71):

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0, \tag{7.72}$$

e l'equazione caratteristica della (7.72):

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0. \tag{7.73}$$

Vogliamo occupiamoci del caso in cui il termine noto della (7.71) soddisfa una delle seguenti condizioni:

A) $\varphi(x) = p_1(x)e^{\lambda x}$,

B) $\varphi(x) = e^{\lambda x}\,(p_1(x)\cos\mu x + p_2(x)\sin\mu x)$,

con $p_1(x)$ e $p_2(x)$ polinomi a coefficienti reali.

Caso A).

Se il numero λ che compare in A) non è soluzione della (7.73), allora un integrale particolare della (7.71) sarà del tipo:

$$v(x) = p(x)e^{\lambda x},$$

dove $p(x)$ è un polinomio avente lo stesso grado di $p_1(x)$.
Se il numero λ è soluzione della (7.73) con molteplicità m, allora un integrale particolare della (7.71) sarà del tipo:

$$v(x) = x^m p(x)e^{\lambda x},$$

con $p(x)$ polinomio avente lo stesso grado di $p_1(x)$.

Esempi.

1. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y'' + y = x + 1, \tag{7.74}$$

l'omogenea associata:

$$y'' + y = 0 \tag{7.75}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^2 + 1 = 0, \tag{7.76}$$

quest'ultima ha soluzioni:

$$z = \pm i,$$

quindi un integrale generale della (7.75) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Siccome $\lambda = 0$ non è soluzione della (7.76), un integrale particolare della (7.74) sarà del tipo:

$$v(x) = ax + b.$$

Calcoliamo le prime due derivate di $v(x)$:

$$v'(x) = a, \quad v''(x) = 0$$

e sostituiamo in (7.74):

$$0 + ax + b = x + 1$$

quindi $a = 1$ e $b = 1$.
Dunque $v(x) = x + 1$ è soluzione di (7.74), così un integrale generale di (7.74) è dato da:

$$z(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + 1.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y''' - y' = e^x \tag{7.77}$$

l'omogenea associata:

$$y''' - y' = 0 \tag{7.78}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^3 - z = 0 \Longleftrightarrow z(z^2 - 1) = 0; \tag{7.79}$$

quest'ultima ha soluzioni:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1,$$

quindi, un integrale generale della (7.78) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x.$$

Essendo $\lambda = 1$ soluzione di (7.79) (con molteplicità 1) si ha che un integrale particolare di (7.77) è del tipo:

$$v(x) = x \cdot c \cdot e^x$$

(si noti che $p(x) = 1$ è un polinomio di grado zero quindi in $v(x)$ si mette una costante c).

Calcoliamo le derivate di $v(x)$ (fino a quelle del terz'ordine):

$$v'(x) = ce^x + cxe^x = ce^x(1 + x)$$

$$v''(x) = ce^x + c(1 + x)e^x = ce^x(2 + x)$$

$$v'''(x) = ce^x(3 + x);$$

sostituendo nella (7.77) si ha:

$$ce^x(3 + x) - ce^x(1 + x) = e^x \Longleftrightarrow c(3 + x - 1 - x) = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2c = 1 \Longleftrightarrow c = \tfrac{1}{2}, \tag{7.80}$$

dunque:

$$v(x) = \frac{1}{2}xe^x.$$

Così, un integrale generale di (7.77) è dato da:

$$z(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^x + \frac{1}{2}xe^x.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y'' - y' - y = (3x^2 + 1)e^x \tag{7.81}$$

l'omogenea associata:

$$y'' - y' - y = 0 \tag{7.82}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}, \tag{7.83}$$

quest'ultima ha soluzioni:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

quindi, un integrale generale della (7.83) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}.$$

Siccome $\lambda = 1$ non è soluzione della (7.83) un integrale particolare di (7.81) è dato da:

$$v(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

Calcolando le prime due derivate di $v(x)$ e sostituendo nella (7.81) si ottengono le costanti a, b, c. Poi si procede come sopra.

4. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y'' - y' - 2y = (3x^2 + 1)e^{2x}, \tag{7.84}$$

l'omogenea associata:

$$y'' - y' - 2y = 0, \tag{7.85}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm 3}{2} \tag{7.86}$$

L'equazione caratteristica ha soluzioni:

$$\lambda = -1, \ \ \lambda_2 = 2,$$

quindi, un integrale generale della (7.85) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

Essendo $\lambda = 2$ soluzione della (7.86) si ha che un integrale particolare di (7.77) è del tipo:

$$v(x) = x(ax^2 + bx + c)e^{2x}.$$

Procedendo come sopra si ottiene un integrale generale della (7.84).

Caso B):

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}(p_1(x) \cos \mu x + p_2(x) \sin \mu x).$$

Posto:

$$h = \max\{\text{grado } p_1(x), \text{grado } p_2(x)\},$$

distinguiamo due casi:

$\mathbf{B_1}$) *Il numero complesso $\lambda + i\mu$ non è soluzione* dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (7.71).
In questo caso una soluzione particolare della (7.71) è del tipo:

$$v(x) = e^{\lambda x}(r_1(x) \cos \mu x + r_2(x) \sin \mu x),$$

con grado $r_1 \leqslant h$, grado $r_2 \leqslant h$.

B₂) *Il numero complesso* $\lambda + i\mu$ *è soluzione* dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata alla (7.71), con molteplicità m.
In questo caso una soluzione particolare della (7.71) è del tipo:

$$v(x) = x^m e^{\lambda x}(r_1(x)\cos\mu x + r_2(x)\sin\mu x)$$

con grado $r_1(x) \leqslant h$ e grado $r_2(x) \leqslant h$.

Esempi.

1. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y''' - y' = \cos x, \tag{7.87}$$

l'omogenea associata:

$$y''' - y' = 0, \tag{7.88}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^3 - z = 0; \tag{7.89}$$

quest'ultima ha soluzioni:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1,$$

quindi un integrale generale della (7.88) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x.$$

Siccome dall'uguaglianza $e^{\lambda x}(r_1(x)\cos\mu x + r_2(x)\sin\mu x) = \cos x$ si deduce che $\lambda + i\mu = i$ e quest'ultima non è soluzione della (7.89) si ha che un integrale particolare della (7.87) è del tipo:

$$v(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x.$$

Calcoliamo le derivate di $v(x)$ fino a quella del terz'ordine:

$$v'(x) = -a_1 \sin x + a_2 \cos x,$$

$$v''(x) = -a_1 \cos x - a_2 \sin x,$$

$$v'''(x) = a_1 \sin x - a_2 \cos x,$$

sostituendole nella (7.87) si ottiene:

$$a_1 \sin x - a_2 \cos x - (-a_1 \sin x + a_2 \cos x) = \cos x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a_1 \sin x - a_2 \cos x + a_1 \sin x - a_2 \cos x = \cos x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2a_1 \sin x - 2a_2 \cos x = \cos x,$$

da cui si ricava:

$$2a_1 = 0 \text{ e } -2a_2 = 1,$$

cioè:

$$a_1 = 0 \text{ e } a_2 = -\frac{1}{2},$$

allora un integrale particolare della (7.87) è:

$$v(x) = -\frac{1}{2} \sin x.$$

Conseguentemente, un integrale generale della (7.87) è dato da:

$$z(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y'' + y = \cos x \tag{7.90}$$

l'omogenea associata:

$$y'' + y = 0 \tag{7.91}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^2 + 1 = 0, \tag{7.92}$$

quest'ultima ha soluzioni:

$$z = \pm i,$$

quindi un integrale generale della (7.91) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Siccome dall'uguaglianza $e^{\lambda x}(r_1(x)\cos \mu x + r_2(x)\sin \mu x) = \cos x$ si deduce che $\lambda + i\mu = i$ e quest'ultima è soluzione della (7.92) si ha che un integrale particolare della (7.90) è del tipo:

$$v(x) = x(a_1 \cos x + a_2 \sin x).$$

Calcoliamo le derivate di $v(x)$ fino a quella del second'ordine:

$$v'(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x + x(-a_1 \sin x + a_2 \cos x),$$

$$\begin{aligned} v''(x) &= -a_1 \sin x + a_2 \cos x - a_1 \sin x + a_2 \cos x + x(-a_1 \cos x - a_2 \sin x) = \\ &= -2a_1 \sin x + 2a_2 \cos x - x(a_1 \cos x + a_2 \sin x), \end{aligned}$$

sostituendole nella (7.90) si ha:

$$-2a_1 \sin x + 2a_2 \cos x - x(a_1 \cos x + a_2 \sin x) + x(a_1 \cos x + a_2 \sin x) = \cos x,$$

da cui si ottiene $-2a_1 = 0$ e $2a_2 = 1$, cioè $a_1 = 0$ e $a_2 = \frac{1}{2}$, allora:

$$v(x) = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Concludendo, l'integrale generale di (7.90) è:

$$z(x, c_1, c_2) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Proposizione 7.11.1. *Consideriamo l'equazione lineare completa:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1\ y' + a_0\ y = \varphi(x). \tag{7.93}$$

Posto:

$$T(y) = y^{(n)} + a_{n-1}\ y^{(n-1)} + \cdots + a_1\ y' + a_0\ y, \tag{7.94}$$

la (7.93) possiamo scriverla:

$$T(y) = \varphi(x).$$

Se $\varphi(x)$ è la somma di k funzioni continue in un intervallo I di $\mathbb{R}$, cioè se:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + ... + \varphi_k(x)$$

e se $v_1(x), ..., v_k(x)$ sono k integrali particolari, rispettivamente, delle equazioni:

$$\begin{aligned} &T(y) = \varphi_1(x) \\ &...... \\ &T(y) = \varphi_k(x), \end{aligned} \tag{7.95}$$

allora la funzione $v(x) = v_1(x) + ... + v_k(x)$ è un integrale particolare della (7.93).

Dimostrazione. La dimostrazione di questa proposizione è immediata; infatti, basta ricordare che la derivata (di un qualunque ordine) di una somma è uguale alla somma delle derivate e, quindi, ottenere che:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v_1 + ... + v_k) = T(v_1) + ... + T(v_k) \\ &= \varphi_1(x) + ... + \varphi_k(x) = \varphi(x). \end{aligned} \tag{7.96}$$

L'asserto è così dimostrato. □

Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale completa:

$$y''' + y'' = x^2 + 1 - e^{2x}, \tag{7.97}$$

l'omogenea associata:

$$y''' + y'' = 0, \tag{7.98}$$

e l'equazione caratteristica:

$$z^3 + z^2 = 0. \tag{7.99}$$

L'equazione caratteristica ha una soluzione doppia $\lambda_1 = 0$ e una soluzione semplice $\lambda_2 = -1$, quindi:

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}.$$

La funzione $\varphi(x) = x^2 + 1 - e^{2x}$ non rientra nei casi notevoli, ma è somma delle funzioni $\varphi_1(x) = x^2 + 1$ e $\varphi_2(x) = -e^{2x}$ che rientrano nei casi notevoli. Allora, volendo applicare la Proposizione 7.11.1, consideriamo le equazioni:

$$y''' + y'' = x^2 + 1, \tag{7.100}$$

$$y''' + y'' = -e^{2x}. \tag{7.101}$$

Siccome $\lambda = 0$ è una soluzione, con molteplicità 2, dell'equazione caratteristica (7.99) un integrale particolare della (7.100) è del tipo:

$$v_1(x) = x^2(ax^2 + bx + c);$$

quindi, calcolando le derivate di $v_1(x)$ e sostituendo nell'equazione (7.100) si ottiene $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{3}{2}$, allora:

$$v_1(x) = x^2\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right).$$

Passiamo all'equazione (7.101). Siccome $\lambda = 2$ non è soluzione della (7.99) si ha che un integrale particolare della (7.101) è del tipo:

$$v_2(x) = ce^{2x};$$

quindi, calcolando le derivate di $v_2(x)$ e sostituendo in (7.101) si ottiene $c = -\frac{1}{12}$, così $v_2(x) = -\frac{e^{2x}}{12}$.

Concludendo, per la Proposizione 7.11.1, un integrale generale di (7.97) è dato da:

$$z(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{e^{2x}}{12}.$$

7.12 Equazioni differenziali a variabili separabili.

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni differenziali del tipo:

$$y' = h(x)g(y), \tag{7.102}$$

dove $h(x) \in C^0(X, \mathbb{R})$, $g(y) \in C^0(Y, \mathbb{R})$, con X e Y intervalli di $\mathbb{R}$.

Osserviamo che, se $y_1 \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione:

$$g(y) = 0, \tag{7.103}$$

allora la funzione $y(x) = y_1,\ x \in X$, è soluzione dell'equazione differenziale (7.102). Dunque, tutti gli zeri reali dell'equazione (7.103) danno luogo a soluzioni dell'equazione differenziale (7.102). Tali soluzioni si dicono *soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale (7.102).*

Considerato l'insieme:

$$T = \{y \in Y \ :\ g(y) \neq 0\},$$

e supposto che esista un intervallo J di $\mathbb{R}$ incluso in T, essendo la funzione g continua, si ha che g soddisfa una delle condizioni seguenti:

1) $g(y) > 0,\ \forall y \in J$,

2) $g(y) < 0,\ \forall y \in J$.

Sia (x_0, y_0) un punto interno al rettangolo $X \times J$. Essendo $f(x, y) = h(x)g(y)$ continua nel rettangolo $X \times J$, per il teorema di Peano esistono un intorno I di x_0, incluso in X, e una funzione $y(x) \in C^1(I, J)$ tale che:

$$y'(x) = h(x)g(y(x)),\ x \in I \tag{7.104}$$

e

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.105}$$

Dalla (7.104), essendo $g(y(x)) \neq 0, \forall x \in I$, si ottiene:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x),\ x \in I, \tag{7.106}$$

quindi, integrando tra x_0 e x entrambi i membri della (7.106) si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\ dt = \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt. \tag{7.107}$$

Denotata con $G(y)$ una primitiva della funzione $\frac{1}{g(y)}$ nell'intervallo J, si ha che $G(y(t))$ è una primitiva della funzione $\frac{y'(t)}{g(y(t))}$ quindi, dalla (7.107), si ricava:

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt,$$

da cui, essendo $y(x_0) = y_0$, si ha:

$$G(y(x)) = G(y_0) + \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt. \tag{7.108}$$

Osserviamo che $G(y)$ è invertibile in J in quanto $g(y)$ soddisfa la 1) oppure la 2) e quindi $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ è sempre positiva o sempre negativa in J, dunque $G(y)$ è strettamente monotona in J.

Considerata l'inversa G^{-1} di G, dalla (7.108) si ricava che:

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt\right),\ x \in I;$$

la funzione $y(x)$ così ottenuta è soluzione in I del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = h(x)g(y(x)),\ x \in I, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Esempi.

1. Consideriamo l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$(1 + \cos^2 x)y' + y \sin x \cos x = 0. \tag{7.109}$$

Confrontando la (7.109) con la (7.102) si ottiene che $h(x) = -\frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}$ e $g(y) = y$ ed entrambe le funzioni sono definite in $\mathbb{R}$. La soluzione stazionaria, che si ricava dall'equazione $g(y) = 0$, è $y = 0$. Ora, supposto $y \neq 0$ e separando le variabili la (7.109) diventa:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x},$$

da cui:

$$\log |y| = \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2 x) + c_1 = \log \sqrt{1 + \cos^2 x} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

dunque:

$$|y| = e^{c_1 + \log \sqrt{1+\cos^2 x}} \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

i.e.

$$y = \pm e^{c_1} \sqrt{1 + \cos^2 x}, \quad c_1 \in \mathbb{R};$$

da cui, ricordando che $y = 0$ è la soluzione stazionaria, si ha che un integrale generale della (7.109) è dato da:

$$y(x, c) = c\sqrt{1 + \cos^2 x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Consideriamo l'equazione a variabili separabili:

$$y' = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7.110}$$

Confrontando la (7.110) con la (7.102) si ottiene che $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in \left]-1, 1\right[$ e $g(y) = y$. La soluzione stazionaria, che si ricava dall'equazione $g(y) = 0$, è $y = 0$. Ora, supposto $y \neq 0$ e separando le variabili la (7.110) diventa:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -D(\sqrt{1 - x^2}),$$

i.e.

$$\log |y| = -\sqrt{1 - x^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

da cui segue che:

$$|y| = e^{c_1} e^{-\sqrt{1-x^2}}, \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

dunque:

$$y = \pm e^{c_1} e^{-\sqrt{1-x^2}}, \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

da cui, ricordando che $y = 0$ è la soluzione stazionaria, si ha che un integrale generale della (7.110) è dato da:

$$y(x, c) = c\ e^{-\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = c\ e^{-\sqrt{1-x^2}}, \ c \in \mathbb{R}.$$

3. Consideriamo l'equazione a variabili separabili:

$$y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{7.111}$$

Confrontando la (7.111) con la (7.102) si ottiene che:

$$h(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in]-1, 1[\quad \text{e} \quad g(y) = \sqrt{1-y^2}, \ y \in Y = [-1, 1].$$

Le soluzioni stazionarie, che si ricavano dall'equazione $g(y) = 0$, sono $y(x) = \pm 1, x \in]-1, 1[$. Ora, supposto $y \neq \pm 1$ e separando le variabili la (7.111) diventa:

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{7.112}$$

se $y(x)$ è una soluzione della (7.112) si ha che:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

da cui, integrando primo e secondo membro si ha:

$$\text{arcsen} y(x) = -\text{arcsen} x + c,$$

quindi un integrale generale della (7.111) è dato da:

$$y(x, c) = \sin(c - \text{arcsen} x) = \sin c \cos(\text{arcsen} x) - \sin(\text{arcsen} x) \cdot \cos c =$$

$$= \sin c\ \sqrt{1 - (\sin(\text{arcsen} x))^2} - x \cos c = \sin c\ \sqrt{1-x^2} - x \cos c.$$

7.13 Equazione di Bernoulli.

Siano $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $a(x), \varphi(x) \in C^0(I, \mathbb{R})$.

L'equazione differenziale del prim'ordine non lineare di tipo normale:

$$y' = a(x)y + \varphi(x)y^\alpha, \tag{7.113}$$

si dice *equazione di Bernoulli.*

Si noti che, se $\alpha = 0$ la (7.113) diventa lineare del prim'ordine completa e, se $\alpha = 1$ la (7.113) diventa lineare del prim'ordine omogenea.

Consideriamo la funzione $f(x, y) = a(x)y + \varphi(x)y^\alpha$; la $f(x, y)$ è definita in $I\times]0, +\infty[$, è ivi continua e, inoltre, la sua derivata parziale rispetto a y:

$$f_y = a(x) + \alpha\varphi(x)y^{\alpha-1},$$

è continua in $I\times]0, +\infty[$. Allora tale funzione soddisfa, in un qualunque rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ incluso in $I\times]0, +\infty[$, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità di Cauchy in piccolo. Quindi, qualunque sia il punto (x_0, y_0) interno a $I\times]0, +\infty[$, esiste un'unica funzione $y(x) \in C^1(J,]0, +\infty[)$, con J intervallo di centro x_0 contenuto in I, soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + \varphi(x)y^\alpha, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{7.114}$$

Inoltre, osserviamo che:

1) Se $\alpha > 0$, per il Teorema 7.4.1, la funzione $y(x) = 0, \forall x \in I$, è l'unica soluzione del problema:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + \varphi(x)y^\alpha, \\ \\ y(x_0) = 0, \end{cases}$$

e, sempre per il Teorema 7.4.1, è l'unica che si può annullare in un punto di I.

2) Se $\alpha \in \mathbb{N}$, la funzione $f(x, y) = a(x)y + \varphi(x)y^{\alpha}$ è definita e continua in $I \times \mathbb{R}$; inoltre, essendo $f_y(x, y) = a(x) + \alpha\varphi(x)y^{\alpha-1}$, si ha che $f(x, y)$ è lipschitziana in ogni rettangolo $[a, b] \times [c, d] \subseteq I \times \mathbb{R}$. Dunque, per il Teorema 7.4.1, qualunque sia il punto (x_0, y_0) appartenente al rettangolo $[a, b] \times [c, d]$, esiste un'unica soluzione $y(x)$ del problema (7.114) definita in un intorno J del punto x_0; inoltre, per quanto detto nella 1), la soluzione $y(x)$ soddisfa una delle seguenti condizioni:

i) $y(x) = 0, \forall x \in J$, se $y_0 = 0$;

ii) $y(x) > 0, \forall x \in J$, se $y_0 > 0$;

iii) $y(x) < 0, \forall x \in J$, se $y_0 < 0$.

Ritorniamo al caso generale in cui $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, quindi occupiamoci della funzione $y(x) \in C^1(J,]0, +\infty[)$, con J intervallo di centro x_0 contenuto in I, soluzione del problema di Cauchy (7.114).
Sappiamo che:

$$y'(x) = a(x)y(x) + \varphi(x)y^{\alpha}(x),$$

dividendo entrambi i membri per $y^{\alpha}(x)$ si ha:

$$y'(x)y^{-\alpha}(x) = a(x)y^{1-\alpha}(x) + \varphi(x),$$

da cui, posto $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ e osservato che

$$z'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$$

si ottiene:

$$\frac{z'(x)}{1 - \alpha} = a(x)z(x) + \varphi(x)$$

cioè:

$$z'(x) = (1 - \alpha)a(x)z(x) + (1 - \alpha)\varphi(x). \tag{7.115}$$

Quindi, con la posizione $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, la (7.113) si trasforma nella (7.115) che è un'equazione lineare.
Una volta trovata una soluzione $z(x) \in C^1(J,]0, +\infty[)$ di (7.115) la funzione

$$y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

sarà soluzione della (7.113).

Esempio. Consideriamo l'equazione di Bernoulli:

$$y' = 4xy + e^{x^2}\sqrt{y}, \quad X = \mathbb{R} \times [0, +\infty[. \tag{7.116}$$

Si noti che la funzione $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, è soluzione di (7.116).
Supponiamo $y > 0$ e dividiamo primo e secondo membro della (7.116) per $\sqrt{y}$, otteniamo così:

$$y'y^{-\frac{1}{2}} = 4xy^{\frac{1}{2}} + e^{x^2}, \tag{7.117}$$

posto $z = y^{\frac{1}{2}}$ si ha:

$$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y',$$

sostituendo in (7.117) si ha:

$$2z' = 4xz + e^{x^2}$$

e cioè si ottiene l'equazione lineare:

$$z' = 2xz + \frac{1}{2}e^{x^2}. \tag{7.118}$$

Calcoliamo un integrale generale del'omogenea associata alla (7.118).

$$\begin{aligned} z' = 2xz \Rightarrow \quad & \tfrac{z'}{z} = 2x \Rightarrow \log z = x^2 + c \Rightarrow \\ & \Rightarrow z(x,c) = e^{x^2+c}. \end{aligned} \tag{7.119}$$

Allo scopo di determinare un integrale particolare della (7.118), utilizziamo il metodo di Lagrange. Dunque, consideriamo $u_1(x) = e^{x^2}$ e l'equazione:

$$u_1(x)\xi = \frac{1}{2}e^{x^2},$$

da quest'ultima equazione si ricava:

$$\xi = \frac{1}{2}.$$

Così, un integrale particolare di (7.118) è dato da:

$$v(x) = e^{x^2}\int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}e^{x^2}x. \tag{7.120}$$

Conseguentemente, essendo $z = y^{\frac{1}{2}}$, da (7.119) e (7.120) si ricava che l'integrale generale della (7.116) è dato da:

$$y(x,c) = \left(e^{x^2+c} + \frac{1}{2}xe^{x^2}\right)^2.$$

7.14 Equazione di Eulero.

Siano $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. L'equazione differenziale lineare:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = \varphi(x), \tag{7.121}$$

si chiama *equazione di Eulero di ordine n.*

Mostriamo che, se si suppone $x \in]0, +\infty[$, con la sostituzione $x = e^t$ l'equazione (7.121) diventa un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Infatti, $x = e^t \Longleftrightarrow t = logx$, quindi $\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}$; inoltre:

$$y(x) \longrightarrow z(t) = y(e^t),$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \longrightarrow \frac{1}{x}\frac{d}{dt}z(t),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dt}z(t)\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}z(t) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{d^2}{dt^2}z(t) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{d}{dt}z(t) + \frac{d^2}{dt^2}z(t)\right),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x) \longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{d}{dt}z(t) + \frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^4}2x\left(-\frac{d}{dt}z(t) + \frac{d^2}{dt^2}z(t)\right) + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x}\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{1}{x}\frac{d^3}{dt^3}z(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(2\frac{d}{dt}z(t) - 3\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{d^3}{dt^3}z(t)\right).$$

Iterando questo procedimento e andando a sostituire le espressioni delle derivate della $y(x)$ nella (7.121) si ottiene:

$$z^{(n)} + b_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + b_1 z' + b_0 z = \varphi(e^t), \tag{7.122}$$

che è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

In modo analogo si vede che, se si considera $x \in]-\infty, 0[$, con la sostituzione $x = -e^t$ l'equazione (7.121) diventa ancora un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

Consideriamo l'equazione di Eulero:

$$x^2 y'' + xy' - y = 2 - \log^2 x, \tag{7.123}$$

determiniamo dapprima un integrale generale dell'omogenea:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0. \tag{7.124}$$

Se si pone $x = e^t$, dunque $z(t) = y(e^t)$ e $y(x) = z(\log x)$ si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dz}{dt}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\right),$$

da cui, sostituendo nella (7.124) si ha:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dt} - z = 0$$

cioè:

$$z'' - z = 0, \tag{7.125}$$

la cui equazione caratteristica:

$$w^2 - 1 = 0,$$

ha soluzioni $w = \pm 1$, così l'integrale generale della (7.125) è dato da:

$$z(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \tag{7.126}$$

ricordando che $x = e^t$ si trova l'integrale della (7.124):

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 x + c_2 x^{-1} \; (x > 0). \tag{7.127}$$

Riguardo all'integrale particolare, ricordiamo che la (7.124), tramite la sostituzione $x = e^t$, era stata trasformata nella (7.125) e quindi la (7.123) diventa:

$$z'' - z = 2 - t^2. \tag{7.128}$$

Un integrale particolare della (7.128) si ottiene osservando che il termine noto $\varphi(t) = 2 - t^2$ rientra tra i casi notevoli e, siccome $\lambda = 0$ non è soluzione della equazione caratteristica, esso sarà del tipo $v(t) = at^2 + bt + c$; dunque $v'(t) = 2at + b$, $v''(t) = 2a$ e sostituendo nella (7.128) si ottiene:

$$2a - at^2 - bt - c = 2 - t^2 \Rightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ b = 0 \\ 2a - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2 - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

allora $v(t) = t^2$ è un integrale particolare di (7.128); quindi, ricordando che $t = logx$, si ottiene che un integrale generale della (7.123) è dato da:

$$y^*(x, c_1, c_2) = c_1 x + c_2 x^{-1} + log^2 x \ (x > 0).$$

Ora, invece di seguire questa strada, ricerchiamo le soluzioni della (7.124) tra quelle del tipo $y(x) = x^\alpha$.

Calcoliamo le prime due derivate di $y(x)$:

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, y''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$$

e sostituiamo nella (7.124):

$$\alpha(\alpha - 1)x^\alpha + \alpha x^\alpha - x^\alpha = 0, \ \forall x > 0$$

da cui segue che:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha^2 = 1 \ \Rightarrow \ \alpha = \pm 1,$$

allora un integrale generale della (7.125) è dato da:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 x + c_2 x^{-1} \ (x > 0).$$

Abbiamo ritrovato, così, la (7.127).

NOTA. Osserviamo che ricercare soluzioni del tipo $y(x) = x^\alpha$ è molto comodo quando si ha a che fare con equazioni di Eulero omogenee.
Consideriamo, ad esempio, l'equazione di Eulero omogenea di ordine 3:

$$x^3 y''' + x^2 a_2 y'' + x a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7.129}$$

posto $y = x^\alpha$ si ha:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ \ y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

e sostituendo nella (7.129) si ha:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^\alpha + \alpha(\alpha-1)a_2 x^\alpha + \alpha a_1 x^\alpha + a_0 x^\alpha = 0, \tag{7.130}$$

allora, essendo $x > 0$, dalla (7.130) si può eliminare x^α ottenendo così:

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \alpha(\alpha-1)a_2 + \alpha a_1 + a_0 = 0,$$

da questa si trovano le soluzioni reali o complesse e si ottengono le relative soluzioni dell'equazione (7.129).
Un discorso analogo vale per le equazioni di Eulero di ordine n.

Capitolo 8

Curve di $\mathbb{R}^k$.

8.1 Curve regolari.

Definizione 8.1.1. *Una funzione continua* $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : I \to \mathbb{R}^k$*, con* I *un intervallo di* $\mathbb{R}$*, si chiama curva di* $\mathbb{R}^k$*. Le equazioni:*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ \\ \text{..............} \qquad t \in I, \\ \\ x_k = \varphi_k(t), \end{cases}$$

si dicono equazioni parametriche della curva φ*. L'insieme* $\varphi(I)$ *si chiama sostegno della curva* φ*.*

Esempi.

1) Sia f una funzione reale continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. La funzione $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, f(t)),\ t \in I$, è una curva di $\mathbb{R}^2$. Il sostegno di φ coincide con il diagramma della funzione f.

2) Consideriamo le curve di $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi], \quad \psi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 4\pi],$$

si noti che le curve φ e ψ, pur avendo lo stesso sostegno (la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1), sono due curve distinte.

Definizione 8.1.2. *Una curva* $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : I \to \mathbb{R}^k$ *si dice semplice se risulta:*

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2),$$

qualunque siano i punti $t_1, t_2 \in I$, *con* $t_1 \neq t_2$ *e* $t_1 \in \overset{\circ}{I}$ *oppure* $t_2 \in \overset{\circ}{I}$.

Definizione 8.1.3. *Una curva* $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *si dice aperta* (risp. *chiusa*) *quando* $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ (risp. $\varphi(a) = \varphi(b)$).

La curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, è una curva semplice e chiusa, invece, la curva $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 4\pi]$, è una curva chiusa ma non è semplice.

Definizione 8.1.4. *Una curva* $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *si dice regolare quando* $\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R}^k)$ *e, per ogni* $t \in [a,b]$, *il vettore* $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \cdots, \varphi_k'(t)) \neq \mathbf{0}$, *i.e. le derivate* $\varphi_1'(t), \cdots, \varphi_k'(t)$ *non si annullano contemporaneamente in uno stesso punto.*

Definizione 8.1.5. *Una curva* $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, *con* $[a,b]$ *intervallo di* $\mathbb{R}$, *si dice regolare a tratti se esiste una partizione* $\{I_1, \cdots, I_n\}$ *di* $[a,b]$, *costituita da intervalli chiusi, tale che la restrizione di* φ *ad ogni intervallo della partizione è una curva regolare.*

Esempi.

1. La curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$, è una curva regolare; infatti, $\varphi \in C^1$ e $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq \mathbf{0}, \forall \mathrm{t} \in [0, 2\pi]$.

2. La curva $\psi(t) = (t, |t|), t \in [-1, 1]$ è regolare a tratti in quanto è regolare negli intervalli $[-1, 0]$ e $[0, 1]$ ma non è derivabile nel punto 0.

3. La seguente curva di $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(t) = (a\ t \cos t, a\ t\ \sin t),\ t \in [0, 2n\pi],$$

con $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, si chiama *spirale di Archimede*; si vede facilmente che essa è una curva regolare semplice aperta di $\mathbb{R}^2$.

4. La seguente curva di $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(t) = (r \cos t, r \ \sin t, bt), \ t \in [0, 2n\pi],$$

con $r > 0$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, si chiama *elica cilindrica*; si vede facilmente che essa è una curva regolare semplice aperta di $\mathbb{R}^3$.

Equazione vettoriale della tangente in un punto di una curva regolare.

Consideriamo una curva regolare $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ e due punti $t_0, t_1 \in [a, b]$, con $\varphi(t_0) \neq \varphi(t_1)$. La retta passante per i punti $\varphi(t_0)$ e $\varphi(t_1)$ ha equazione vettoriale:

$$x(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0), \ t \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Siccome $\varphi \in C^1$, nella (8.1) si può passare al limite per $t_1 \to t_0$ ottenendo *l'equazione vettoriale della tangente alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$*:

$$x(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0), \ t \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Il vettore $\varphi'(t_0)$ è detto *vettore tangente alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$* e il versore:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \tag{8.3}$$

si chiama *versore tangente alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$.*

8.2 Curve equivalenti.

Definizione 8.2.1. *Siano I e J due intervalli compatti di $\mathbb{R}$. Le curve regolari a tratti $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^k$ si dicono curve equivalenti se esiste una funzione suriettiva $g \in C^1(I, J)$ tale che $g'(t) \neq 0, \forall t \in I$, e inoltre:*

$$\psi(g(t)) = \varphi(t), \ \forall t \in I.$$

Per denotare il fatto che φ e ψ sono equivalenti si usa il simbolo:

$$\varphi \sim \psi.$$

La funzione g si dice diffeomorfismo (o *cambiamento ammissibile di parametro*) *di I in J.*

Essendo $g \in C^1$ e $g'(t) \neq 0, \forall t \in I$, si ha che:

$$g'(t) > 0, \forall t \in I, \quad \text{oppure} \quad g'(t) < 0, \forall t \in I,$$

allora g è invertibile in I e risulta $g^{-1} \in C^1(J, I)$ e $(g^{-1})'(s) > 0, \forall s \in J$, oppure $(g^{-1})'(s) < 0, \forall s \in J$, inoltre:

$$\varphi(g^{-1}(s)) = \psi(s), \ \forall s \in J.$$

Si può dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza (i.e. $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva) nella famiglia delle curve regolari a tratti di $\mathbb{R}^k$.

D'ora in poi, col termine curva regolare a tratti indicheremo sia una singola curva φ che la sua classe d'equivalenza, i.e. $\gamma = [\varphi] = \{\psi : \psi \sim \varphi\}$; *gli elementi della classe d'equivalenza $\gamma = [\varphi]$ si dicono rappresentazioni parametriche della curva γ.*

Esempio. Proviamo che le curve $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi]$, e $\psi(s) = (\cos 2s, \sin 2s), \ s \in [0, \pi]$, sono equivalenti. A tale scopo, consideriamo la funzione $g : t \in [0, 2\pi] \to s = g(t) = \frac{t}{2} \in [0, \pi]$. Ovviamente $g \in C^1$, inoltre $g'(t) = \frac{1}{2}$, quindi g è un cambiamento ammissibile di parametro e risulta:

$$\psi(g(t)) = (cos 2\frac{t}{2}, \sin 2\frac{t}{2}) = (\cos t, \sin t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Se si considera l'inversa di g, $g^{-1} : s \in [0, \pi] \to g^{-1}(s) = 2s = t \in [0, 2\pi]$, si ottiene che:

$$\varphi(g^{-1}(s)) = \psi(s), \quad \forall s \in [0, \pi].$$

Per il seguito sarà utile la seguete:

Osservazione 8.2.2. *Se φ e ψ sono equivalenti, $\varphi \sim \psi$, allora φ è semplice se e solo se ψ è semplice. Conseguentemente, se φ è semplice la sua classe d'equivalenza $\gamma = [\varphi]$ è univocamente determinata dal suo sostegno.*

8.3 Curve orientate.

Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una curva regolare a tratti e sia $\gamma = [\varphi]$ la sua classe d'equivalenza. Alla curva $\gamma = [\varphi]$ possiamo associare un *verso di percorrenza* (*orientamento*) *indotto da φ;* infatti, considerati i punti $P_1 = \varphi(t_1)$ e $P_2 = \varphi(t_2)$, con $P_1 \neq P_2$, diremo che P_1 *precede* P_2 *nel verso indotto dalla rappresentazione parametrica φ se $t_1 < t_2$; il verso indotto da φ si dice verso delle t crescenti rispetto a φ.*

Siano $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^k$ curve equivalenti e sia $g : I \to J$ un cambiamento ammissibile di parametro; diremo che *φ e ψ hanno lo stesso verso* (risp. *verso opposto*) se $g'(t) > 0, \forall t \in I$ (risp. $g'(t) < 0, \forall t \in I$).

Ovviamente, se $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^k$ appartengono alla stessa classe d'equivalenza $\gamma = [\varphi]$, *dire che φ e ψ hanno lo stesso verso equivale a dire che esse inducono su $\gamma = [\varphi]$ lo stesso orientamento.* Per denotare il fatto che φ e ψ oltre ad essere equivalenti hanno anche lo stesso verso si usa il simbolo:

$$\varphi \overset{\circ}{\sim} \psi.$$

Osservazione. Sia Γ il sostegno di $\gamma = [\varphi]$, **scelto su Γ un verso di percorrenza, detto verso positivo,** la classe d'equivalenza $\gamma = [\varphi]$ si può suddividere in due sottoclassi, la classe γ^+ costituita dalle rappresentazioni parametriche che inducono su Γ un orientamento concorde con quello (positivo) prefissato su Γ e la classe γ^- costituita dalle rappresentazioni parametriche che inducono su Γ un orientamento discorde con quello (positivo) prefissato su Γ. Naturalmente, se $\varphi \overset{\circ}{\sim} \psi$ allora $\varphi, \psi \in \gamma^+$ oppure $\varphi, \psi \in \gamma^-$.

8.4 Lunghezza di una curva.

Considerata una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$, ad ogni partizione di $[a, b]$:

$$\{[t_0, t_1], \cdots, [t_{n-1}, t_n]\},$$

con $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$, possiamo associare una poligonale $\mathcal{P}$, inscritta nella curva, di vertici $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_{n-1}), \varphi(t_n)$, e viceversa.

La lunghezza della poligonale $\mathcal{P}$ è data da:

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \big(\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})\big)^2}.$$

Considerato l'insieme $\mathcal{A} = \{l(\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ poligonale inscritta nella curva $\varphi\}$, si definisce *lunghezza di* φ il numero reale positivo:

$$L(\varphi) = \sup \mathcal{A}.$$

La curva φ si dice rettificabile quando $L(\varphi) < +\infty$.

Vale il seguente:

Teorema 8.4.1. (**Teorema di rettificabilità delle curve di classe C^1**) *Se la curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ è di classe C^1 allora φ è rettificabile e risulta:*

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt. \tag{8.4}$$

Esempio 1. Consideriamo la *cicloide* $\varphi(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Risulta $\varphi'(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t), t \in [0, 2\pi]$, e:

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2r \sin \frac{t}{2},$$

si è sfruttato il fatto che $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$. Allora:

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} 2r \sin\frac{t}{2} dt = 4r \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{2} dt = 4r \Big[-\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 4r(-\cos\pi + \cos 0) = 8r.$$

Esempio 2. Consideriamo *l'elica cilindrica* $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t, bt), t \in [0, 2\pi]$. Risulta $\varphi'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b), t \in [0, 2\pi]$, e:

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2 cos^2 t + b^2} = \sqrt{r^2 + b^2}.$$

Allora:

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{r^2 + b^2}.$$

Osservazione. Se $\psi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^k)$ non è iniettiva né iniettiva a tratti, allora il numero $L(\psi) = \int_a^b |\psi'(t)|dt$ non fornisce la lunghezza del sostegno di ψ. Infatti, considerate le curve $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ e $\psi(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 4\pi]$, esse hanno lo stesso sostegno ma risulta:

$$L(\varphi) = 2\pi, \qquad L(\psi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi.$$

Vale la seguente:

Proposizione 8.4.2. *Sia $\gamma = [\varphi]$ una curva regolare. Comunque si scelgono due rappresentazioni parametriche φ e ψ di γ risulta:*

$$L(\varphi) = L(\psi).$$

Dalla definizione di lunghezza di una curva $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^k)$ e dalla proprietà di finita additività dell'integrale si deduce che, se $c \in]a, b[$ allora, denotate con φ_1 e φ_2, risp., le restrizioni di φ ad $[a, c]$ e a $[c, b]$, risulta:

$$L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2).$$

Più in generale, si ha che:

Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ è una curva regolare a tratti, denotata con:

$$\{[t_0, t_1], \cdots, [t_{n-1}, t_n]\},$$

con $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$, una partizione di $[a, b]$ tale che la restizione di φ ad ognuno degli elementi della partizione sia una curva regolare, risulta:

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt.$$

8.5 Ascissa curvilinea.

Sia $\gamma = [\varphi]$ una curva regolare e sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una sua rappresentazione parametrica, si ricordi che $|\varphi'(t)| > 0, \forall t \in [a, b]$. Fissato un generico punto $t_0 \in [a, b]$, la funzione:

$$s : t \in [a, b] \to s(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi'(\tau)| d\tau.$$

è di classe C^1 e risulta $s'(t) = |\varphi'(t)| > 0, \forall t \in [a, b]$, quindi $s(t)$ è un diffeomorfismo di $[a, b]$ nell'intervallo compatto $J = s([a, b])$.

Se si indica con $t(s)$ la funzione inversa di $s(t)$ e si pone:

$$\psi(s) = \varphi(t(s)), \ s \in J,$$

risulta $\varphi \overset{\circ}{\sim} \psi$.

Il parametro s si chiama *ascissa curvilinea.* Il suo significato geometrico è il seguente, **supposto che γ sia orientata nel verso indotto da φ**, se $t_0 < t$ il numero reale $s(t) \in J$ è uguale alla lunghezza dell'arco di γ di primo estremo $\varphi(t_0)$ e secondo estremo $\varphi(t)$, invece, se $t < t_0$ il numero reale $s(t) \in J$ è uguale all'opposto della lunghezza dell'arco di γ di primo estremo $\varphi(t)$ e secondo estremo $\varphi(t_0)$.

Passiamo alla derivata della funzione ψ:

$$\psi'(s) = \frac{d}{ds}\varphi(t(s)) = \varphi'(t(s))\frac{d}{ds}t(s);$$

essendo $t(s)$ l'inversa di $s(t)$ e $s'(t) = |\varphi'(t)|$, risulta:

$$\frac{d}{ds}t(s) = \frac{1}{[s'(t)]_{t=t(s)}} = \frac{1}{[|\varphi'(t)|]_{t=t(s)}} = \frac{1}{|\varphi'(t(s))|} \ ,$$

allora:

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|},$$

così:

$$|\psi'(s)| = 1;$$

possiamo concludere dicendo che: se $\psi(s)$ è una rappresentazione parametrica di γ tramite l'ascissa curvilinea allora $\psi'(s)$ è il versore tangente alla curva γ nel generico punto di ascissa curvilinea s, supposto che γ sia orientata nel verso delle t crescenti rispetto a φ, o ciò che è lo stesso, nel verso delle s crescenti rispetto a $\psi(s)$.

8.6 Curve piane.

Siano $\gamma = [\varphi]$ una curva piana regolare e $\varphi(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$, una sua rappresentazione parametrica (regolare). Ricordiamo che il versore tangente a φ nel punto $\varphi(t_0)$ è dato da:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} = \left(\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}\right). \tag{8.5}$$

Definizione 8.6.1. *Si definisce versore normale a φ nel punto $\varphi(t_0)$ il versore $N(t_0)$ tale che la coppia $(N(t_0), T(t_0))$ sia direttamente congruente alla coppia (i, j).*

Ovviamente risulta:

$$N(t_0) = \left(\frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, -\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}\right), \tag{8.6}$$

infatti:
$$\begin{vmatrix} \frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} & -\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \\ \\ \frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} & \frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \end{vmatrix} = \frac{(y'(t_0))^2}{|\varphi'(t_0)|^2} + \frac{(x'(t_0))^2}{|\varphi'(t_0)|^2} = 1.$$

Passiamo, ora, alle **curve del piano in coordinate polari**.

Supponiamo che nel piano siano stati introdotti sia un sistema di coordinate cartesiane Oxy che un sistema di coordinate polari di polo O e asse polare x. Ricordiamo che il sistema che ci permette di passare dalle coordinate polari ρ e θ alle coordinate cartesiane è dato da:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \ \sin\theta. \end{cases} \tag{8.7}$$

Dalla (8.7) si ricava che $x^2 + y^2 = \rho^2$. Consideriamo la circonferenza C di centro $(0, 0)$ e raggio 1, essa ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, quindi passando a coordinate polari, si ottiene $\rho^2 = 1, \theta \in [0, 2\pi]$ e cioè:

$$\rho = 1, \ \theta \in [0, 2\pi], \tag{8.8}$$

la (8.8) si dice *equazione polare di C*.

La semicirconferenza H di centro $(1, 0)$ e raggio 1, contenuta nel primo quadrante, ha equazione cartesiana $(x - 1)^2 + y^2 = 1, y > 0$ cioè:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \ y > 0,$$

quindi l'equazione polare di H è data da $\rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e cioè:

$$\rho = 2\cos\theta, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Ora, partiamo dall'equazione polare di una curva γ del piano:

$$\rho = \rho(\theta), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1],$$

dove $\rho(\theta) \in C^0([\theta_0, \theta_1], [0, +\infty[)$.

La funzione vettoriale:

$$\varphi : \theta \in [\theta_0, \theta_1] \longrightarrow (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\ \sin\theta) \in \mathbb{R}^2,$$

è una curva piana; inoltre, se $\rho(\theta) \in C^1([\theta_0, \theta_1], [0, +\infty[)$, si ha che:

$$\varphi'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\ \sin\theta, \rho'(\theta)\ \sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta),$$

quindi:

$$|\varphi'(\theta)| = \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2},$$

allora la curva $\varphi(\theta)$ è rettificabile e risulta:

$$L(\varphi) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta.$$

8.7 Domini regolari di $\mathbb{R}^2$.

In questo paragrafo e nel successivo ci occuperemo di curve semplici e chiuse di $\mathbb{R}^2$, quindi, chiameremo curva il loro sostegno.

Teorema 8.7.1. (Teorema di Jordan) *Ogni curva piana semplice e chiusa è la frontiera di un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$, tale dominio si dice dominio di Jordan.*

Se Γ è una curva semplice chiusa, *con il simbolo $D(\Gamma)$ si denota il dominio limitato avente come frontiera la curva Γ; $D(\Gamma)$ si dice dominio ad unico contorno.* Si può dimostrare che $D(\Gamma)$ *è internamente connesso.*

Definizione 8.7.2. *Sia Γ_0 una curva semplice chiusa del piano e siano $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ curve semplici chiuse, contenute nell'interno di $D(\Gamma_0)$ tali che i domini $D(\Gamma_1), \cdots, D(\Gamma_n)$ siano a due a due disgiunti. L'insieme:*

$$T = D(\Gamma_0) - \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{D}(\Gamma_i),$$

si dice dominio limitato a $n+1$ contorni; Γ_0 si dice contorno esterno e $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ si dicono contorni interni.

Osserviamo che la frontiera di T è data da:

$$\partial T = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i.$$

Si può dimostrare che:

L'insieme T è un dominio internamente connesso.

Detto D un dominio di $\mathbb{R}^2$, consideriamo la seguente proprietà:

α) *Qualunque sia la curva Γ semplice chiusa, contenuta nel dominio D, il dominio $D(\Gamma)$ è incluso in D.*

Definizione 8.7.3. *Sia D un dominio internamente connesso. D si dice semplicemente connesso se soddisfa la condizione α). D si dice a connessione multipla se non soddisfa la condizione α).*

Osservazione. Un dominio limitato ad unico contorno è semplicemente connesso; invece, un dominio limitato a $n+1$ contorni è un dominio a connessione multipla e si dice $n+1$ volte connesso.

Esempio. Se H è l'unione di due cerchi aventi in comune un solo punto, allora H è un dominio connesso soddisfacente la condizione α), ma non è semplicemente connesso perché non è internamente connesso.

Definizione 8.7.4. *Un dominio limitato D, ad uno o più contorni, si dice regolare se i suoi contorni sono curve regolari a tratti.*

8.8 Orientamento della frontiera di un dominio ad uno o più contorni.

i) Sia D un dominio regolare ad unico contorno Γ.
Sia P un punto di regolarità di Γ; in P è possibile considerare la retta tangente e la retta normale; se la retta normale si orienta verso l'interno si dice *normale interna*, se si orienta verso l'esterno si dice *normale esterna.*
I corrispondenti versori n_i e n_e applicati in P si dicono *versore normale interno* e *versore normale esterno alla curva* Γ *nel punto* P.

Il verso positivo su Γ si sceglie in modo tale che, denotato con t il versore tangente positivo, la coppia (n_e, t) sia direttamente congruente con la coppia (i, j) o, ciò che è lo stesso (t, n_i) sia direttamente congruente a (i, j). Dunque il verso positivo su Γ è il verso antiorario.

Una curva semplice chiusa regolare a tratti Γ, orientata nel verso positivo che le compete come frontiera di $D(\Gamma)$ si indica con il simbolo $+\Gamma$.

Considerata $+\Gamma$ e denotata con $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ una rappresentazione parametrica di Γ, se il verso indotto da φ coincide con il verso di $+\Gamma$ allora, qualunque sia il punto $\varphi(t_0)$ di regolarità di φ, tenendo presenti le (8.5) e (8.6) risulta:

$$t = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} = \left(\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right),$$

$$n_e = \left(\frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, -\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right),$$

$$n_i = -n_e = \left(-\frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right).$$

Se il verso indotto da φ su Γ è opposto al verso di $+\Gamma$, allora:

$$t = -\frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} = \left(-\frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, -\frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right),$$

$$n_e = \left(-\frac{y'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \frac{x'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right), \qquad n_i = -n_e.$$

ii) Sia D un dominio regolare a $n+1$ contorni, Γ_0 contorno esterno, $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ contorni interni.
Sia $P \in FrD$, se $P \in \Gamma_0$ si chiama versore normale interno a D, e si denota con n_i, il versore normale interno a $D(\Gamma_0)$; se $P \in \Gamma_k, k \geqslant 1$, si chiama versore normale interno a D il versore normale esterno a $D(\Gamma_k)$ nel punto P.
La FrD si orienta scegliendo, su ogni contorno, t in modo tale che la coppia (n_e, t) sia direttamente congruente alla coppia (i, j). Il verso così ottenuto si dice verso positivo su ∂D e si denota con $+\partial D$. Dunque Γ_0 si orienta nel verso antiorario e $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ si orientano nel verso orario.

Capitolo 9

Integrali curvilinei.

9.1 Integrale curvilineo e sue proprietà.

Siano $\gamma = [\varphi]$ una curva regolare, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una sua rappresentazione parametrica e Γ il sostegno di φ. Se $f \in C^0(\Gamma, \mathbb{R})$ allora la funzione $f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ quindi ha senso considerare l'integrale seguente:

$$\int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt.$$

Vale il seguente:

Teorema 9.1.1. *Siano $\gamma = [\varphi]$ una curva regolare e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ una sua rappresentazione parametrica. Qualunque sia la rappresentazione parametrica $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^k$ di γ risulta:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(\tau))|\psi'(\tau)|d\tau. \tag{9.1}$$

Per quanto detto in precedenza ha senso dare la definizione seguente:

Definizione 9.1.2. *Si definisce integrale curvilineo della funzione $f \in C^0(\Gamma, \mathbb{R})$ esteso alla curva regolare $\gamma = [\varphi]$ e si denota con il simbolo:*

$$\int_\gamma f ds, \tag{9.2}$$

il numero reale (9.1).

9.2 Proprietà dell'integrale curvilineo.

Dalla definizione di integrale curvilineo segue immediatamente che, se γ è una curva regolare avente sostegno Γ e $f, g \in C^0(\Gamma, \mathbb{R})$, allora:

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f ds + \beta \int_\gamma g ds, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \tag{9.3}$$

$$\int_\gamma f ds \leqslant \int_\gamma g ds, \ \ \text{se}\, f \leqslant g \ \ \text{su}\,\Gamma; \tag{9.4}$$

$$\left| \int_\gamma f ds \right| \leqslant \int_\gamma |f| ds \leqslant L(\gamma) \max_\Gamma |f|. \tag{9.5}$$

Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ è una rappresentazione parametrica di γ e $c \in]a, b[$ risulta:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f ds = \quad &= \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \\ &= \int_a^c f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt + \int_c^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt; \end{aligned} \tag{9.6}$$

posto $\varphi_1 = \varphi_{/[a,c]}$ e $\varphi_2 = \varphi_{/[c,b]}$ e considerate le curve regolari $\gamma_1 = [\varphi_1]$, $\gamma_2 = [\varphi_2]$, dalla (9.6) segue che:

$$\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

Quanto è stato appena osservato ci permette di estendere, in modo ovvio, la nozione di integrale curvilineo al caso in cui γ è una curva regolare a tratti.

Esempi

1. Consideriamo l'elica cilindrica $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t, bt)$, $t \in [0, \pi]$, e la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Essendo $\varphi'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b)$, posto $\gamma = [\varphi]$ risulta:
$$\int_\gamma f ds = \int_0^\pi f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt =$$
$$= \int_0^\pi \left((r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 + (bt)^2\right)|(-r\sin t, r\cos t, b)|dt =$$
$$= \int_0^\pi \left(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + b^2t^2\right)\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + b^2}dt =$$
$$= \int_0^\pi (r^2 + b^2t^2)\sqrt{r^2 + b^2}dt = \sqrt{r^2 + b^2}\left[r^2 t + b^2\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi =$$
$$= \sqrt{r^2 + b^2}\left(r^2\pi + b^2\frac{\pi^3}{3}\right).$$

2. Consideriamo l'asteroide $\varphi(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e la funzione $f(x, y) = x$. Essendo $\varphi'(t) = (3a\cos^2 t(-\sin t), 3a\sin^2 t\cos t)$ posto $\gamma = [\varphi]$ risulta:
$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t|(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t)|dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\cos t\sin t dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t dt =$$
$$= 3a^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2.$$

3. Sia $\varphi(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), t \in [0, 2\pi]$, e sia $f(x, y) = \sqrt{y}$. Essendo $\varphi'(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t))$, posto $\gamma = [\varphi]$ risulta:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(1 - \cos t)} |(r(1 - \cos t), r \sin t| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(1 - \cos t)} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(1 - \cos t)} \sqrt{r^2 1 + r^2 \cos^2 t - 2r^2 \cos t + r^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(1 - \cos t)} \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2r}(1 - \cos t) dt =$$

$$= r\sqrt{2r}\, [t - \sin t]_0^{2\pi} = 2\pi r \sqrt{2r}.$$

4. Sia γ la curva semplice e regolare a tratti il cui sostegno è la frontiera del triangolo rappresentato in figura.
Sia $f(x, y) = x + y$.
Calcolare il seguente integrale:

$$\int_\gamma f ds.$$

Osserviamo che:
s_1 è il sostegno della curva regolare $\varphi_1(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$, s_2 è il sostegno della curva regolare $\varphi_2(t) = (t, 1 - t), t \in [0, 1]$ e s_3 è il sostegno della curva regolare $\varphi_3(t) = (0, t), t \in [0, 1]$.
Considerate le curve regolari $\gamma_1 = [\varphi_1]$, $\gamma_2 = [\varphi_2]$, $\gamma_3 = [\varphi_3]$, abbiamo che:

$$\int_\gamma f ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} f ds = \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 f(\varphi_i(t)) |\varphi_i'(t)| dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (t+1-t)|(1,-1)| dt + \int_0^1 t dt = \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} dt + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Concludiamo questo paragrafo con la nozione di baricentro di una curva.

Definizione 9.2.1. *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ una rappresentazione parametrica della curva γ semplice e regolare a tratti e sia Γ il sostegno di γ. Si dice baricentro (o centro di massa) di Γ il punto $x_0 = (x_1^0, ..., x_k^0) \in \mathbb{R}^k$ le cui coordinate sono date da:*

$$x_i^0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x_i ds, \quad i = 1, .., k.$$

Esempio. Consideriamo la curva:

$$\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t), t \in [0, \pi].$$

Osserviamo che $\gamma = [\varphi]$ è regolare ed è semplice; il suo sostegno, $\Gamma = \varphi([0,\pi])$, è la semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, contenuta nel semipiano positivo delle y.

Calcoliamo il baricentro di Γ.

Essendo:

$$L(\varphi) = 2\pi, \quad x_0 = \frac{\int_\gamma x ds}{2\pi}, \quad y_0 = \frac{\int_\gamma y ds}{2\pi},$$

e:

$$\varphi'(t) = (-2\sin t, 2\cos t), \; |\varphi'(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2,$$

abbiamo che:

$$\int_\gamma x ds = \int_0^\pi 2\cos t \cdot 2 dt = 4 [\sin t]_0^\pi = 0,$$

e:
$$\int_\gamma y ds = \int_0^\pi 2\sin t \cdot 2dt = 4\left[-\cos t\right]_0^\pi = 8,$$
quindi:
$$x_0 = 0 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}.$$
Si noti che il baricentro di Γ, $(0, \frac{4}{\pi})$, non appartiene a Γ.

9.3 Circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva regolare a tratti orientata.

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^k$, $v : P \in A \to v(P) \in \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale continuo su A e γ una curva regolare di $\mathbb{R}^k$ il cui sostegno Γ sia contenuto in A.

Fissiamo un orientamento di γ, cioè scegliamo su Γ un verso di percorrenza che diremo positivo e, per ogni punto $P \in \Gamma$, denotiamo con $T(P)$ il versore tangente positivo a γ nel punto P.

La funzione:
$$f(P) = \big(v(P), T(P)\big), \quad P \in \Gamma, \tag{9.7}$$
appartiene a $C^0(\Gamma, \mathbb{R})$, quindi, ha senso considerare il seguente integrale curvilineo:
$$\int_\gamma f(P)ds = \int_\gamma \big(v(P), T(P)\big)ds. \tag{9.8}$$
L'integrale (9.8) si dice circuitazione del campo vettoriale $v(P)$ lungo la curva orientata γ e la curva γ si dice curva d'integrazione.

Al solito, denotata con γ^+ (risp. γ^-) la sottoclasse di $\gamma = [\varphi]$ costituita dalle rappresentazioni parametriche che inducono su γ un orientamento concorde (risp. discorde) con quello (positivo) prefissato, e considerata una rappresentazione parametrica $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ di γ risulta:
$$T(\varphi(t)) = \begin{cases} \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} & \text{se } \varphi \in \gamma^+, \\ \\ -\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} & \text{se } \varphi \in \gamma^-. \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \big(v(P), T(P)\big)ds = \\
&= \pm \int_a^b \left(v(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \right) |\varphi'(t)| dt = \\
&= \pm \int_a^b (v(\varphi(t)), \varphi'(t)) dt,
\end{aligned} \tag{9.9}$$

dove si sceglie il segno $+$ se $\varphi \in \gamma^+$ e il segno $-$ se $\varphi \in \gamma^-$.

Quanto detto per le curve regolari si estende, in modo ovvio, alle curve regolari a tratti.

Esempi.

1. Sia $\gamma = [\varphi]$ con $\varphi(t) = (t, e^t), t \in [0, 2]$, supponiamo che γ sia orientata in modo tale che il punto $\varphi(2)$ preceda il punto $\varphi(0)$.
   Se $v = \frac{x}{y^3}\underline{j}$ allora la circuitazione del campo vettoriale v lungo la curva orientata γ è data da:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (v(P), T(P))ds = -\int_0^2 \frac{t}{(e^t)^3} \cdot e^t dt = \\
&= -\int_0^2 te^{-2t} dt = -\int_0^2 tD\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right) dt = \\
&= -\left\{ \left[-\frac{e^{-2t}}{2} t \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{-2t}}{-2} dt \right\} = -\left\{ -\frac{e^{-4}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^2 \right\} = \\
&= e^{-4} + \frac{1}{4} e^{-4} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2. Sia $\gamma = [\varphi]$, con $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, bt), t \in [0, 2\pi]$; supponiamo che γ sia orientata in modo tale che il punto $\varphi(2\pi)$ preceda il punto $\varphi(0)$.
   Se $v(P) = x\,i + y^2\,j + 3xz\,k$ allora la circuitazione del campo vettoriale

v lungo la curva orientata γ è data da:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (v(P), T(P))ds = \\
&= -\int_0^{2\pi} [r\cos t(-r\sin t) + (r\sin t)^2 r\cos t + 3r\cos t\cdot bt\cdot b]dt = \\
&= -\int_0^{2\pi} [r^2\cos t D(\cos t) + r^3\sin^2 t D(\sin t) + 3b^2 rt D(\sin t)]dt = \\
&= -\left[r^2\frac{\cos^2 t}{2} + r^3\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} - 3b^2 r\left\{[t\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin t dt\right\} = \\
&= -\left[r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + r^2\cdot 0\right] - 3b^2 r\left\{0 + [\cos t]_0^{2\pi}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

9.4 Lavoro compiuto da un campo vettoriale.

Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che un punto materiale P di A si sposti, in A, in modo rettilineo dal punto P' al punto P'' sotto l'azione di un campo vettoriale (campo di forze) $v(P)$ costante in A. Si chiama *lavoro del campo vettoriale $v(P)$ corrispondente allo spostamento $P''-P'$ del punto materiale P*, il prodotto scalare:

$$\mathcal{L} = (v(P), P'' - P') = |v(P)||P'' - P'|\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo convesso formato dal campo vettoriale $v(P)$ e dal vettore spostamento $P'' - P'$.

Ora supponiamo che in A sia definito il campo vettoriale variabile:

$$v(P) = X(P)i + Y(P)j + Z(P)k,$$

con $v(P) \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$, e che il punto P si sposti sotto l'azione del campo vettoriale $v(P)$ dal punto P' al punto P'' lungo la curva Γ inclusa in A, con Γ sostegno della curva semplice aperta e regolare $\gamma = [\varphi]$.

In questo caso, si definisce *lavoro del campo vettoriale $v(P)$ corrispondente allo spostamento del punto P, lungo la curva Γ, dalla posizione P'*

alla posizione P'' il numero reale:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma(P',P'')} (v(P), T(P))ds,$$

dove $T(P)$ è il versore tangente, nel punto P, alla curva γ orientata in modo che P' preceda P''. Dunque, il lavoro coincide con la circuitazione del campo vettoriale $v(P)$ lungo la curva γ orientata in modo che P' preceda P''.

9.5 Campi vettoriali gradienti.

Consideriamo un aperto A di $\mathbb{R}^3$ e un campo vettoriale su A:

$$v(P) = v(x, y, z) = X(x, y, z)i + Y(x, y, z)j + Z(x, y, z)k.$$

Definizione 9.5.1. *v(P) si dice campo vettoriale gradiente su A se esiste una funzione reale $U(P)$ definita in A e ivi derivabile tale che:*

$$D(U(P)) = v(P), \ \forall P \in A,$$

i.e.:

$$U_x(P) = X(P), \quad U_y(P) = Y(P), \quad U_z(P) = Z(P), \ \forall P \in A.$$

In questo caso, la funzione $U(P)$ si dice potenziale scalare del campo vettoriale $v(P)$ (su A).

Proposizione 9.5.2. *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e $v(P)$ un campo vettoriale gradiente su A. Se $U(P)$ è un potenziale scalare di $v(P)$, allora ogni potenziale scalare $V(P)$ di $v(P)$ su A è del tipo:*

$$V(P) = U(P) + c, \ \forall P \in A,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. E' chiaro che, qualunque sia il numero reale c, $U(P)+c$ è un potenziale scalare di $v(P)$. D'altro canto, se $V(P)$ è un potenziale scalare di $v(P)$, considerata la funzione $U(P) - V(P)$ si ha che essa è derivabile nell'aperto connesso A e, inoltre, $D(U(P) - V(P)) = \mathbf{0}, \forall \mathrm{P} \in \mathrm{A}$; conseguentemente, per il Corollario 6.7.2 si ha che $U(P) - V(P)$ è costante in A. □

Vale la seguente:

Proposizione 9.5.3. *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e $v(P) \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$. Se la circuitazione di $v(P)$ lungo una qualunque curva aperta, regolare a tratti e orientata, il cui sostegno sia contenuto in A, non dipende dalla curva ma dipende solo dagli estremi e dall'orientamento della curva, allora $v(P)$ è un campo vettoriale gradiente su A e, per ogni fissato punto $P_0 \in A$, la funzione reale definita in A:*

$$U(P) = \int_{P_0}^{P} (v(Q), T(Q))\ ds, \tag{9.10}$$

è un potenziale scalare di $v(P)$ su A; l'integrale (9.10) si intende esteso ad una qualunque curva aperta, regolare a tratti e orientata, avente come primo estremo P_0 e secondo estremo P.

Passiamo, ora, ad enunciare il seguente:

Teorema 9.5.4. (**Teorema di caratterizzazione dei campi vettoriali gradienti**) *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e $v(P) \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

1. *$v(P)$ è un campo vettoriale gradiente su A;*

2. *qualunque sia la curva γ regolare a tratti orientata e chiusa, il cui sostegno sia contenuto in A, la circuitazione di $v(P)$ lungo γ è nulla;*

3. *qualunque siano i punti P' e P'' di A, con $P' \neq P''$, e qualunque siano le curve γ_1 e γ_2 regolari a tratti di estremi P' e P'', i cui sostegni sono contenuti in A, se γ_1 e γ_2 sono entrambe orientate da P' a P'' allora risulta:*
$$\int_{\gamma_1} (v(P), T(P))ds = \int_{\gamma_2} (v(P), T(P))ds.$$

Ora, consideriamo *un aperto A di $\mathbb{R}^2$ e un campo vettoriale su A:*

$$v(P) = v(x, y) = X(x, y)i + Y(x, y)j.$$

Definizione 9.5.5. *v(P) si dice campo vettoriale gradiente su A se esiste una funzione reale $U(P)$ definita in A e ivi derivabile tale che $D(U(P)) = v(P)$, $\forall P \in A$, i.e.:*

$$U_x(P) = X(P), \quad U_y(P) = Y(P), \quad \forall P \in A.$$

In tal caso $U(P)$ si dice potenziale scalare del campo vettoriale $v(P)$ (su A).

Le Proposizioni 9.5.2 e 9.5.3 e il Teorema 9.5.4 continuano a valere per i campi vettoriali $v(P) = X(x, y)i + Y(x, y)j$.

9.6 Campi vettoriali di classe C^1.

2 Consideriamo un aperto connesso A di $\mathbb{R}^3$ e un campo vettoriale su A:

$$v(P) = v(x, y, z) = X(x, y, z)i + Y(x, y, z)j + Z(x, y, z)k.$$

Proviamo la seguente:

Proposizione 9.6.1. *Se $v(P)$ è un campo vettoriale gradiente su A appartenente a $C^1(A, \mathbb{R}^3)$, allora:*

$$X_y(P) = Y_x(P), \quad X_z(P) = Z_x(P), \quad Y_z(P) = Z_y(P), \ \forall P \in A. \tag{9.11}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, essendo $v(P)$ un campo vettoriale gradiente su A, esiste un potenziale scalare $U(P)$ di $v(P)$, quindi sono soddisfatte le condizioni:

$$U_x(P) = X(P), \quad U_y(P) = Y(P), \quad U_z(P) = Z(P), \ \forall P \in A,$$

ma $v(P) \in C^1$, dunque $U(P) \in C^2$ e, per il teorema di Schwarz, risulta:

$$X_y(P) = U_{xy}(P) = U_{yx}(P) = Y_x(P), \quad X_z(P) = U_{xz}(P) = U_{zx}(P) = Z_x(P),$$

$$Y_z(P) = U_{yz}(P) = U_{zy}(P) = Z_y(P).$$

□

Definizione 9.6.2. *Un campo vettoriale $v(P) \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ si dice irrotazionale se:*

$$rotv(P) = (Z_y(P) - Y_z(P))i + (X_z(P) - Z_x(P))j + (Y_x(P) - X_y(P))k = \mathbf{0}.$$

Enunciamo, ora, il seguente:

Teorema 9.6.3. (**Teorema di Poincaré**) *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $v(P) \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$. Se A è convesso rispetto ad un punto P_0* (i.e. $\forall P \in A$ *il segmento di estremi P_0 e P è contenuto in A*) *allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

1) $v(P)$ è un campo vettoriale gradiente su A,

2) $rotv(P) = \mathbf{0}$, $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{A}$.

Definizione 9.6.4. *Un aperto connesso A di $\mathbb{R}^3$ si dice a connessione lineare semplice se ogni curva semplice chiusa $\Gamma \subseteq A$ può essere deformata con continuità fino a ridurla ad un punto senza uscire da A.*

Vale il seguente:

Teorema 9.6.5. *Se A è un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ a connessione lineare semplice e $v(P) \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

1) $v(P)$ *è un campo vettoriale gradiente su* A*,*

2) $rot v(P) = \mathbf{0}, \ \forall \mathrm{P} \in \mathrm{A}.$

Ora, consideriamo *un aperto connesso* A *di* $\mathbb{R}^2$ *e un campo vettoriale su* A*:*

$$v(P) = v(x, y) = X(x, y)i + Y(x, y)j.$$

Si dimostra che:

Proposizione 9.6.6. *Se* $v(P) \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ *è un campo vettoriale gradiente su* A*, allora:*

$$X_y(P) = Y_x(P), \ \forall P \in A. \tag{9.12}$$

Definizione 9.6.7. *Un aperto connesso* A *di* $\mathbb{R}^2$ *si dice a connessione lineare semplice se ogni curva semplice chiusa* $\Gamma \subseteq A$ *può essere deformata con continuità fino a ridurla ad un punto senza uscire da* A*.*

Per gli aperti di $\mathbb{R}^2$ la definizione di connessione lineare semplice si può dare anche nel modo seguente equivalente al precedente:

Definizione 9.6.8. *Un aperto* A *di* $\mathbb{R}^2$ *si dice a connessione lineare semplice se e solo se, per ogni curva semplice chiusa* $\Gamma \subseteq A$*, il dominio di Jordan limitato di contorno* Γ *è incluso in* A*.*

Vale, infine, il seguente:

1 **Teorema 9.6.9.** *Se* A *è un aperto connesso di* $\mathbb{R}^2$ *a connessione lineare semplice e* $v(P) = (X(P), Y(P)) \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$*, allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

1) $v(P)$ *è un campo vettoriale gradiente su* A*,*

2) $X_y(P) = Y_x(P), \ \forall P \in A.$

L'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) è stata dimostrata all'inizio del paragrafo; l'implicazione 2) $\Rightarrow$ 1) sarà provata nel Capitolo 11, cfr. Proposizione 11.4.4.

Esempi

1. Consideriamo $v(x,y) = (y \sin 2x + \cos^2 y)\, i + (\sin^2 x - x \sin 2y)\, j$. Ovviamente $v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, inoltre:

$$X_y = \sin 2x - 2 \cos y \sin y = \sin 2x - \sin 2y,$$

$$Y_x = 2 \sin x \cos x - \sin 2y = \sin 2x - \sin 2y,$$

quindi:

$$X_y = Y_x \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^2.$$

Allora $v(x,y)$ è un campo vettoriale gradiente su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. Consideriamo il campo vettoriale:

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} i + \frac{x}{x^2+y^2} j, \quad (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Osserviamo che A non è semplicemente connesso e $v \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$, inoltre:

$$X_y = -\frac{x^2+y^2-y2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$Y_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

quindi:

$$X_y = Y_x \quad \text{su} \quad A.$$

Ora proviamo che $v(x,y)$ non è un campo vettoriale gradiente su A. A tale scopo consideriamo la curva semplice chiusa regolare $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$, il cui sostegno Γ è incluso in A. Supposto che $\gamma = [\varphi]$ sia orientata nel verso indotto da $\varphi(t)$, risulta:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\gamma (v(P), T(P)) ds &= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t]\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,\end{aligned}$$

quindi, per il Teorema 9.5.4 $v(x,y)$ non è un campo vettoriale gradiente su tutto A.

Però se ci mettiamo in $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, che è un aperto semplicemente connesso, allora $v(x,y)$ è un campo vettoriale gradiente su A_1 e $U(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ è un suo potenziale scalare.

9.7 Metodo per calcolare un potenziale scalare di un campo vettoriale di classe C^1.

(a) Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $v \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ un campo irrotazionale.
Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists \delta > 0$ tale che il cubo:

$$H = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

è contenuto in A.
Essendo H semplicemente connesso e rot$v = \mathbf{0}$ su H, per il Teorema 9.6.5, si ha che v è un campo vettoriale gradiente su H quindi, un potenziale scalare di v è dato da:

$$U(P) = \int_{\gamma(P_0,P)} (v(Q), T(Q))ds, \quad P \in H,$$

dove $\gamma(P_0, P)$ è una qualunque curva regolare a tratti orientata da $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a $P = (x, y, z)$ il cui sostegno sia incluso in H.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $x_0 < x, y_0 < y, z_0 < z$ e, inoltre, come curva $\gamma(P_0, P)$ scegliamo la curva il cui sostegno è la poligonale rappresentata in figura, dove $P_1 = (x, y_0, z_0), P_2 = (x, y, z_0), P = (x, y, z)$ e quindi:

$$\overline{P_0P_1} \begin{cases} x(t) = t, \ t \in [x_0, x] \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

$$\overline{P_1P_2} \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = t, \ t \in [y_0, y] \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

$$\overline{P_2P} \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = y \\ z(t) = t, \ t \in [z_0, z]. \end{cases}$$

Allora, qualunque sia $P \in H$:

$$U(P) = \int_{\overline{P_0P_1}} (v,T)ds + \int_{\overline{P_1P_2}} (v,T)ds + \int_{\overline{P_2P}} (v,T)ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x} X(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} Z(x, y, t)dt.$$

(b) Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $v \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ tale che $X_y = Y_x$. Se $P_0 = (x_0, y_0) \in A$, essendo A aperto, $\exists\delta > 0$ tale che il quadrato:

$$H = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$$

è contenuto in A.

Essendo H semplicemente connesso si ha che $v(P)$ è un campo vettoriale gradiente su H e un potenziale scalare di $v(P)$ è dato da:

$$U(P) = \int_{x_0}^{x} X(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Y(x, t)dt, \; P \in H.$$

Esempio. Consideriamo il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$:

$$v(x, y, z) = (3x^2 + y^2 + 2xz + 2xz^2)i + 2y(x + z)j + (x^2 + y^2 + 2x^2z)k,$$

proviamo che rot$v = \mathbf{0}$ su $\mathbb{R}^3$; infatti:

$$X_y = 2y = Y_x, \;\; X_z = 2x + 4xz = Z_x, \; Y_z = 2y = Z_y.$$

Allora v è un campo vettoriale gradiente su tutto $\mathbb{R}^3$. Scelto $P_0 = (0, 0, 0)$, un potenziale scalare di $v(P)$ è dato da:

$$U(P) = \int_0^x X(t, 0, 0)dt + \int_0^y Y(x, t, 0)dt + \int_0^z Z(x, y, t)dt =$$

$$= \int_0^x 3t^2dt + \int_0^y 2txdt + \int_0^z (x^2 + y^2 + 2x^2t)dt =$$

$$= \left[t^3\right]_0^x + x\left[t^2\right]_0^y + \left[x^2t + y^2t + x^2t^2\right]_0^z = x^3 + xy^2 + x^2z + y^2z + x^2z^2.$$

9.8 Forme differenziali lineari.

Definizione 9.8.1. *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e:*

$$v(P) = v(x, y, z) = X(x, y, z)i + Y(x, y, z)j + Z(x, y, z)k,$$

un campo vettoriale di classe C^0 in A.

Considerato il vettore spostamento $dP = (dx, dy, dz)$, per ogni fissato $P \in A$, il prodotto scalare:

$$(v(P), dP) = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz, \tag{9.13}$$

è funzione del vettore spostamento dP e si chiama forma differenziale lineare in tre variabili. Le componenti del vettore $v(P)$ si dicono coefficienti della forma differenziale lineare.

Sia γ una curva regolare il cui sostegno Γ sia contenuto in A. **Orientiamo la curva γ, i.e. scegliamo su Γ un verso di percorrenza che diremo positivo** e, per ogni $P \in \Gamma$, denotiamo con $T(P)$ il versore tangente positivo a γ nel punto P.

Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una rappresentazione parametrica regolare di γ, la circuitazione di $v(P)$ lungo la curva γ è data da:

$$\int_\gamma (v(P), T(P))ds = \pm \int_a^b (v(\varphi(t)), \varphi'(t))dt, \tag{9.14}$$

dove si prende il segno $+$ se l'orientamento indotto da φ su γ coincide col verso prefissato su γ e si prende il segno $-$ se l'orientamento indotto da φ su γ è discorde col verso prefissato su γ.

Osserviamo che l'espressione $(v(\varphi(t)), \varphi'(t))dt$, che compare nel secondo membro della (9.14), si ottiene dalla (9.13) ponendo $P = \varphi(t)$. Allora, la circuitazione di $v(P)$ lungo la curva orientata γ si può anche denotare con il simbolo:

$$\int_{+\gamma} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz,$$

dove con $+\gamma$ si denota la curva γ orientata nel verso positivo prefissato.

Per quanto detto sopra abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&\int_{+\gamma} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = \\
&= \int_{\gamma} (v(P), T(P))ds = \pm \int_a^b (v(\varphi(t)), \varphi'(t))dt.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Definizione 9.8.2. *L'integrale (9.15) si chiama anche integrale curvilineo della forma differenziale lineare (9.13) esteso alla curva orientata γ.*

Definizione 9.8.3. *La forma differenziale (9.13) definita in A, si dice forma differenziale esatta (in A) se esiste una funzione $U(P)$ derivabile in A tale che:*

$$\begin{aligned}
dU(P) \quad &= U_x(P)dx + U_y(P)dy + U_z(P)dz = \\
&= X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz,
\end{aligned} \tag{9.16}$$

in questo caso, la funzione $U(P)$ si dice primitiva della forma differenziale (9.13).

Ovviamente:

Il campo vettoriale:

$$v(P) = X(x,y,z)i + Y(x,y,z)j + Z(x,y,z)k$$

è un campo vettoriale gradiente su A se e solo se la forma differenziale (9.13) è una forma differenziale esatta in A. Inoltre, un potenziale scalare $U(P)$ di $v(P)$ è una primitiva della forma differenziale (9.13) e viceversa.

Quanto detto per le curve regolari si estende, in modo ovvio, alle curve regolari a tratti.

Allora, dai teoremi visti nei paragrafi 9.5 e 9.6 conseguono facilmente i teoremi seguenti.

Teorema 9.8.4. *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e $v(P) \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$. Se l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare (9.13) esteso ad una qualunque curva aperta, regolare a tratti e orientata, il cui sostegno sia contenuto in A, non dipende dalla curva ma dipende solo dagli estremi e dall'orientamento della curva, allora la forma differenziale lineare (9.13) è esatta su A e, per ogni fissato punto $P_0 \in A$, la funzione reale definita in A:*

$$U(P) = \int_{P_0}^{P} X dx + Y dy + Z dz, \tag{9.17}$$

è una primitiva della forma differenziale lineare (9.13) su A; l'integrale (9.17) si intende esteso ad una qualunque curva aperta, regolare a tratti e orientata, avente come primo estremo P_0 e secondo estremo P.

Teorema 9.8.5. (**Teorema di caratterizzazione delle forme differenziali esatte continue**) *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e la (9.13) una forma differenziale con i coefficienti continui in A. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) *la (9.13) è esatta;*

ii) *qualunque sia la curva γ, regolare a tratti e chiusa, il cui sostegno sia contenuto in A, si ha che:*

$$\int_{+\gamma} X(P)dx + Y(P)dy + Z(P)dz = 0;$$

iii) *qualunque siano i punti P e Q di A, con $P \neq Q$, e qualunque siano le curve γ_1 e γ_2 regolari a tratti di estremi P e Q, i cui sostegni sono contenuti in A, se γ_1 e γ_2 sono entrambe orientate da P a Q allora risulta:*

$$\int_{\gamma_1(P,Q)} X(P)dx+Y(P)dy+Z(P)dz = \int_{\gamma_2(P,Q)} X(P)dx+Y(P)dy+Z(P)dz.$$

Definizione 9.8.6. *Supponiamo che la forma differenziale (9.13) abbia i coefficienti di classe C^1 nell'aperto connesso A di $\mathbb{R}^3$. La forma differenziale (9.13) si dice chiusa o localmente esatta in A se risulta:*

$$X_y(P) = Y_x(P), \quad X_z(P) = Z_x(P), \quad Y_z(P) = Z_y(P), \ \forall P \in A.$$

Teorema 9.8.7. *Se i coefficienti della forma differenziale (9.13) sono di classe C^1 nell'aperto A di $\mathbb{R}^3$ e A è convesso rispetto ad un punto, allora la forma differenziale (9.13) è esatta se e solo se è chiusa.*

Teorema 9.8.8. *Se i coefficienti della forma differenziale (9.13) sono di classe C^1 nell'aperto A di $\mathbb{R}^3$ e A è semplicemente connesso, allora la forma differenziale (9.13) è esatta se e solo se è chiusa.*

Definizione 9.8.9. *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e:*

$$v(P) = v(x, y) = X(x, y)i + Y(x, y)j\,,$$

un campo vettoriale di classe C^0 su A.
Considerato il vettore spostamento $dP = (dx, dy)$, per ogni fissato $P \in A$, il seguente prodotto scalare:

$$(v(P), dP) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy, \tag{9.18}$$

è funzione del vettore spostamento dP e si chiama forma differenziale lineare in due variabili; le componenti del vettore $v(P)$ si dicono *coefficienti della forma differenziale lineare.*

Tutto quello che è stato detto per le forme differenziali lineari in tre variabili vale per le forme differenziali lineari in due variabili, in particolare, valgono i Teoremi 9.8.4 e 9.8.5.

Diamo, ora, la seguente:

Definizione 9.8.10. *Supponiamo che la forma differenziale (9.18) abbia i coefficienti di classe C^1 nell'aperto connesso A di $\mathbb{R}^2$. La forma differenziale (9.18) si dice chiusa o localmente esatta in A se risulta:*

$$X_y(P) = Y_x(P), \ \forall P \in A.$$

Concludiamo il paragrafo enunciando il seguente:

Teorema 9.8.11. *Se i coefficienti della forma differenziale (9.18) sono di classe C^1 nell'aperto connesso A di $\mathbb{R}^2$ e se A è semplicemente connesso, allora la forma differenziale (9.18) è esatta se e solo se è chiusa.*

Esempi.

1. Considerata la forma differenziale lineare in due variabili:

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \log y\right) dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$$

definita nell'aperto semplicemente connesso $A = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ di $\mathbb{R}^2$, verificare che tale forma differenziale è un differenziale esatto in A e determinarne una primitiva. Osservato che:

$$X_y = \frac{x^2+y^2-y2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y}$$

e

$$Y_x = \frac{1}{y} - \frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{y} - \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y},$$

abbiamo che $X_y = Y_x$ allora, essendo A semplicemente connesso, si ha che la forma differenziale è esatta su tutto A.

Determiniamo, ora, una primitiva di tale forma differenziale:

$$U(x,y) = \int_1^y Y(0,t)dt + \int_0^x X(t,y)dt =$$

$$= \int_1^y 0dt + \int_0^x \left(\frac{y}{t^2+y^2} + \log y \right) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{\frac{t^2}{y^2}+1} + \log y \right) dt =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{\frac{1}{y}}{(\frac{t}{y})^2+1} + \log y \right) dt =$$

$$= \left[\text{arctg}\frac{t}{y} + \log y \cdot t \right]_0^x = \text{arctg}\frac{x}{y} + x\log y.$$

2. Consideriamo la forma differenziale:
$$\left(y+\frac{2x}{y+x^2}\right)dx+\left(x+\frac{1}{y+x^2}\right)dy \tag{9.19}$$
e osserviamo che:
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y+x^2\neq 0\}$$
quindi $A=A_1\cup A_2$ dove:
$$A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>-x^2\}$$
$$A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<-x^2\}$$
A_1 e A_2 sono aperti semplicemente connessi, invece A non è connesso. Inoltre:
$$X_y=1+\frac{-2x}{(y+x^2)^2},\ Y_x=1+\frac{-2x}{(y+x^2)^2},$$
quindi $X_y=Y_x$, dunque la forma differenziale è localmente esatta. In questo caso, una primitiva in A_1 è data da:
$$U_1(x,y)=\int_1^x X(t,0)dt+\int_0^y Y(x,t)dt;$$
e una primitiva in A_2 è data da:
$$U_2(x,y)=\int_{-1}^y Y(0,t)dt+\int_0^x X(t,y)dt.$$
Calcoliamo una primitiva della (9.19) in A_1. Essendo:
$$X(t,0)=0+\frac{2t}{t^2}\quad\text{e}\quad Y(x,t)=x+\frac{1}{t+x^2},$$
si ha che:
$$\begin{aligned}U_1(x,y)=\ &\int_1^x\frac{2}{t}dt+\int_0^y\left(x+\frac{1}{t+x^2}\right)dt=\\ &=[2logt]_1^x+\left[xt+log(t+x^2)\right]_0^y=\\ &=2logx+xy+log(y+x^2)-logx^2=\\ &=xy+log(y+x^2).\end{aligned}$$

Ora, per determinare una primitiva della (9.19), seguiamo un'altra strada.

Mettiamoci, ad esempio, nella regione di piano A_1. Siccome la (9.19) è esatta in A_1, possiamo considerare una sua primitiva $U(x,y)$.

Essendo $U(x,y)$ una primitiva di (9.19) deve risultare:

$$U_x = X(x,y) = y + \frac{2x}{y+x^2} \tag{9.20}$$

e:

$$U_y = Y(x,y) = x + \frac{1}{y+x^2}. \tag{9.21}$$

Dalla (9.20), integrando rispetto a x si ottiene:

$$U(x,y) = \int \left(y + \frac{2x}{y+x^2} \right) dx + g(y) = yx + \log(y+x^2) + g(y),$$

da cui, derivando $U(x,y)$ rispetto a y, si ottiene:

$$U_y(x,y) = x + \frac{1}{y+x^2} + g'(y),$$

conseguentemente, dalla (9.21) si ha che:

$$x + \frac{1}{y+x^2} + g'(y) = x + \frac{1}{y+x^2}$$

allora $g'(y) = 0$ da cui segue che $g(y) =$ costante.

Dunque, le primitive della (9.19) sono date da:

$$U(x,y) = yx + \log(y+x^2) + c.$$

Osservazione. Siano $\mathbf{v}(\mathrm{P}) = \mathrm{X(P)i} + \mathrm{Y(P)j} + \mathrm{Z(P)k}$ un campo vettoriale di classe C^0 su un aperto connesso A di $\mathbb{R}^3$ e γ una curva regolare a tratti orientata, il cui sostegno sia contenuto in A.

Se $T(P)$ è il versore tangente positivo a γ nel punto P, dalla (9.15) si ha che:

$$\begin{aligned}
&\int_{+\gamma} X(P)\ dx + Y(P)\ dy + Z(P)\ dz = \int_{\gamma} (v(P), T(P))\ ds = \\
&= \int_{\gamma} (X(P)i + Y(P)j + Z(P)k, T(P))\ ds = \\
&= \int_{\gamma} [(X(P)i, T(P)) + (Y(P)j, T(P)) + (Z(P)k, T(P))]\ \ ds = \\
&= \int_{\gamma} [X(P)(i, T(P)) + Y(P)(j, T(P)) + Z(P)(k, T(P))]\, ds = \\
&= \int_{\gamma} X(P)(i, T(P))\ ds + \int_{\gamma} Y(P)(j, T(P))\ ds + \int_{\gamma} Z(P)(k, T(P))\ ds = \\
&= \int_{+\gamma} X(P)\ dx + \int_{+\gamma} Y(P)\ dy + \int_{+\gamma} Z(P)\ dz,
\end{aligned}$$

quindi:

$$\int_{+\gamma} X(P)\ dx + Y(P)\ dy + Z(P)\ dz = \int_{+\gamma} X(P)\ dx + \int_{+\gamma} Y(P)\ dy + \int_{+\gamma} Z(P)\ dz.$$

In particolare si ha che:

$$\int_{+\gamma} X(P)\ dx = \int_{\gamma} (X(P)i, T(P))\ ds = \int_{\gamma} X(P)(i, T(P))\ ds,$$

$$\int_{+\gamma} Y(P)\ dy = \int_{\gamma} (Y(P)j, T(P))\ ds = \int_{\gamma} Y(P)(j, T(P))\ ds,$$

$$\int_{+\gamma} Z(P)\ dz = \int_{\gamma} (Z(P)k, T(P))\ ds = \int_{\gamma} Z(P)(k, T(P))\ ds.$$

Capitolo 10

Elementi di teoria della misura secondo Peano - Jordan in $\mathbb{R}^k$.

10.1 Insiemi misurabili secondo Peano - Jordan.

Definizione 10.1.1. *Sia* $I = \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ *un rettangolo chiuso di* $\mathbb{R}^k$*, si dice misura di* I *il numero reale non negativo:*

$$m(I) = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i).$$

Definizione 10.1.2. *Si dice plurirettangolo chiuso di* $\mathbb{R}^k$ *ogni unione di un numero finito di rettangoli chiusi di* $\mathbb{R}^k$*.*

Definizione 10.1.3. *Siano* P *un plurirettangolo chiuso di* $\mathbb{R}^k$ *e* $\{I_1, ..., I_n\}$ *una partizione di* P *costituita da rettangoli chiusi di* $\mathbb{R}^k$*, si dice misura elementare di* P *il numero reale non negativo:*

$$m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i). \tag{10.1}$$

Nota. Si può dimostrare che il numero dato dalla (10.1) non varia al variare della partizione di P costituita da rettangoli chiusi di $\mathbb{R}^k$.

Denotato con $\mathcal{P}$ l'insieme dei plurirettangoli chiusi di $\mathbb{R}^k$, consideriamo la funzione:

$$m : P \in \mathcal{P} \longrightarrow m(P) \in [0, +\infty[, \tag{10.2}$$

essa prende il nome di *misura elementare nell'insieme* $\mathcal{P}$.

La funzione (10.2) gode delle seguenti proprietà:

1) *Finita additività:*

$$P_1, P_2 \in \mathcal{P}, \overset{\circ}{P_1} \cap \overset{\circ}{P_2} = \emptyset \Longrightarrow m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2). \tag{10.3}$$

2) *Crescenza:*

$$P_1, P_2 \in \mathcal{P}, P_1 \subseteq P_2 \Longrightarrow m(P_1) \leq m(P_2). \tag{10.4}$$

Definizione 10.1.4. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato e tale che $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. Considerati i seguenti sottoinsiemi di $[0, +\infty[$:*

$$\mathcal{A} = \{m(P') : P' \in \mathcal{P} \ \text{ e } \ P' \subseteq X\}, \quad \mathcal{B} = \{m(P'') : P'' \in \mathcal{P} \ \text{ e } \ X \subseteq P''\}, \tag{10.5}$$

si dice misura interna di X, e si denota con il simbolo $m_i(X)$, il numero reale positivo:

$$m_i(X) = \sup \mathcal{A}; \tag{10.6}$$

si dice misura esterna di X, e si denota con il simbolo $m_e(X)$, il numero reale positivo:

$$m_e(X) = \inf \mathcal{B}. \tag{10.7}$$

Dalla crescenza della misura elementare in $\mathcal{P}$ segue che:

$$m_i(X) = \sup \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B} = m_e(X), \tag{10.8}$$

dunque $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono separati.

Definizione 10.1.5. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato tale che $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. L'insieme X si dice misurabile secondo Peano-Jordan se gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono contigui, cioè risulta:*

$$m_i(X) = m_e(X). \tag{10.9}$$

Osserviamo che, se $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ allora $\mathcal{A} = \{0\}$, quindi è naturale dare la seguente:

Definizione 10.1.6. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato tale che $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. L'insieme X si dice misurabile secondo Peano-Jordan se:*

$$m_e(X) = \inf \mathcal{B} = 0. \tag{10.10}$$

Dalla caratterizzazione dei sottoinsiemi contigui di $\mathbb{R}$ seguono immediatamente le seguenti due proposizioni:

Proposizione 10.1.7. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato e tale che $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. X è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P', P'' \in \mathcal{P} \ : \ P' \subseteq X \subseteq P'' \ e \ m(P'') - m(P') < \varepsilon. \tag{10.11}$$

Proposizione 10.1.8. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato e tale che $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. X è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P} \ : \ X \subseteq P \ e \ m(P) < \varepsilon. \tag{10.12}$$

Vale, inoltre, la seguente:

Proposizione 10.1.9. *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ limitato. X è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se ∂X è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua misura è uguale a zero.*

Esempio di insieme non misurabile secondo Peano-Jordan.

Proviamo che l'insieme $X = [0,1]^k \cap \mathbb{Q}^k$ non è misurabile secondo Peano-Jordan. Siccome $\overset{\circ}{X} = \emptyset$, per provare che X non è misurabile basta far vedere che la misura esterna di X è positiva; ma ciò è evidente visto che ogni plurirettangolo P includente X include $[0,1]^k$ quindi $m_e(X) = m([0,1]^k) = \inf \mathcal{B} = 1$.

Consideriamo, ora, l'insieme:

$\mathcal{M}^{(k)} = \{X \subseteq \mathbb{R}^k : X$ è limitato e misurabile secondo Peano-Jordan$\}$.

Si può provare che:

Proposizione 10.1.10. *Qualunque siano $X, Y \in \mathcal{M}^{(k)}$ si ha che:*

$$X \cup Y \in \mathcal{M}^{(k)}, \quad X \cap Y \in \mathcal{M}^{(k)}, \quad Y - X \in \mathcal{M}^{(k)}. \tag{10.13}$$

La funzione:

$$m_k : X \in \mathcal{M}^{(k)} \longrightarrow m_k(X) \in [0, +\infty[, \tag{10.14}$$

si chiama *misura secondo Peano-Jordan in* $\mathbb{R}^k$; il valore che essa assume in un $X \in \mathcal{M}^{(k)}$ si dice *misura secondo Peano-Jordan di* X.

Si dimostra che:

Proposizione 10.1.11. *Qualunque siano $X, Y \in \mathcal{M}^{(k)}$ risulta:*

$$\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \emptyset \Longrightarrow m_k(X \cup Y) = m_k(X) + m_k(Y); \tag{10.15}$$

$$X \subseteq Y \Longrightarrow m_k(X) \leq m_k(Y); \tag{10.16}$$

$$X \subseteq Y \Longrightarrow m_k(Y - X) = m_k(Y) - m_k(X); \tag{10.17}$$

$$m_k(X \cup Y) = m_k(X) + m_k(Y) - m_k(X \cap Y). \tag{10.18}$$

Proposizione 10.1.12. *Se $\{X_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}^{(k)}$ tale che:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{M}^{(k)} \quad e \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \ \forall i \neq j,$$

allora:

$$m_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_k(X_n). \tag{10.19}$$

Proposizione 10.1.13. *Se* $X \in \mathcal{M}^{(k)}$ *allora* $\overset{\circ}{X} \in \mathcal{M}^{(k)}$ *e* $\overline{X} \in \mathcal{M}^{(k)}$, *inoltre:*

$$m_k(X) = m_k(\overset{\circ}{X}) = m_k\big(\overline{X}\big).$$

Ora, occupiamoci della misurabilità dei sottoinsiemi non limitati di $\mathbb{R}^k$. A tale scopo, consideriamo la successione $\{[-n,n]^k\}$ di quadrati di $\mathbb{R}^k$. Posto $I_n = [-n,n]^k, \forall n \in \mathbb{N}$, diamo la seguente:

Definizione 10.1.14. *Sia* X *un sottoinsieme non limitato di* $\mathbb{R}^k$. *L'insieme* X *si dice misurabile secondo Peano-Jordan se, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *risulta:*

$$X \cap I_n \in \mathcal{M}^{(k)}.$$

In tal caso, si pone:

$$m_k(X) = \lim_{n\to+\infty} m_k(X \cap I_n). \tag{10.20}$$

Si noti che:

$$X \cap I_n \subseteq X \cap I_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi dalla (10.16) segue la crescenza della successione $\{m(X \cap I_n)\}$, allora:

$$m_k(X) = \lim_{n\to+\infty} m_k(X \cap I_n) = \sup_n \; m_k(X \cap I_n).$$

Definizione 10.1.15. *Siano* X *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^k$ *e* $[a,b]$ *un intervallo di* $\mathbb{R}$. *Si definisce cilindro di basi* $X \times \{a\}$ *e* $X \times \{b\}$ *il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}^{k+1}$*:*

$$X \times [a,b].$$

Si dimostra che:

Proposizione 10.1.16. *Se* X *è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan, allora il cilindro* $X \times [a,b]$ *è misurabile secondo Peano-Jordan e risulta:*

$$m_{k+1}(X \times [a,b]) = m_k(X)(b-a).$$

10.2 Misurabilità del cilindroide.

Ricordiamo che, considerato un sottoisieme limitato X di $\mathbb{R}^k$, si dice *diametro di* X il numero reale non negativo:

$$\mathrm{diam\ X} = \sup_{\mathrm{P,Q} \in \mathrm{X}} |\mathrm{P} - \mathrm{Q}|.$$

Definizione 10.2.1. *Sia X un sottoinsieme non vuoto compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$, si dice che l'insieme $\{X_1, \cdots, X_n\}$ è una partizione di X costituita da insiemi compatti e misurabili* se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

a) *Ogni X_i è non vuoto, compatto e misurabile;*

b) $\overset{\circ}{X}_i \cap \overset{\circ}{X}_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} : i \neq j;$

c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X.$

La partizione $\{X_1, \cdots, X_n\}$ di X la denoteremo con il simbolo:

$$D = D(X_1, \cdots, X_n).$$

Diremo *ampiezza della partizione* D il numero reale non negativo:

$$\delta_D = \max_{1 \leq i \leq n} \ diam X_i.$$

Vale la proposizione seguente:

Proposizione 10.2.2. *Sia X un sottoinsieme non vuoto compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$, qualunque sia il numero reale positivo σ esiste una partizione D di X costituita da insiemi compatti e misurabili tale che $\delta_D < \sigma$.*

Definizione 10.2.3. *Siano X un sottoinsieme non vuoto compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to [0, +\infty[$. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{k+1}$:*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \ : \ x \in X \ e \ y \in [0, f(x)]\},$$

si dice cilindroide di base X relativo alla funzione f.

Proviamo il seguente:

Teorema 10.2.4. *Se X è un sottoinsieme non vuoto compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to [0, +\infty[$ è una funzione continua in X, allora il cilindroide C di base X relativo alla funzione f è misurabile secondo Peano-Jordan.*

Dimostrazione. Consideriamo la partizione $D = D(X_1, \cdots, X_n)$ di X costituita da insiemi compatti e misurabili.

Posto, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$m_i = \min f(X_i), \quad M_i = \max f(X_i), \quad C'_i = X_i \times [0, m_i], \quad C''_i = X_i \times [0, M_i],$$

e considerati i pluricilindri:

$$C'_D = \bigcup_{i=1}^{n} C'_i, \quad C''_D = \bigcup_{i=1}^{n} C''_i,$$

risulta:

$$C'_D \subseteq C \subseteq C''_D.$$

Se denotiamo, risp., con s_D e S_D le misure dei pluricilindri C'_D e C''_D, risulta:

$$s_D = m_{k+1}(C'_D) = \sum_{i=1}^{n} m_{k+1}(C'_i) = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) m_i,$$

e

$$S_D = m_{k+1}(C''_D) = \sum_{i=1}^{n} m_{k+1}(C''_i) = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) M_i,$$

ovviamente risulta $s_D \leq S_D$. A questo punto, sfruttando il teorema di Cantor, con un discorso analogo a quello fatto per la misurabilità di un rettangoloide (vedi Appunti del corso di Analisi Matematica I), si prova che:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; : \; \forall D = D(X_1, \cdots, X_n) \; : \; \delta_D < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_D - s_D < \varepsilon. \quad (10.21)$$

Dunque C è misurabile secondo Peano-Jordan. □

Per quanto detto nella dimostrazione del Teorema 10.2.4 si ha che:

$$m_{k+1}(C) = \sup_D s_D = \inf_D S_D. \tag{10.22}$$

Ora, considerata una partizione $D = D(X_1, \cdots, X_n)$ di X costituita da insiemi compatti e misurabili e scelto, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, un $P_i \in X_i$, poniamo:

$$\sigma_D = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) f(P_i).$$

Ovviamente, risulta:

$$s_D \leq \sigma_D \leq S_D;$$

d'altro canto, sappiamo che:

$$s_D \leq m_{k+1}(C) \leq S_D,$$

quindi:

$$|\sigma_D - m_{k+1}(C)| \leq S_D - s_D.$$

Allora, dalla (10.21) si ha che:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ : \ \forall D = D(X_1, \cdots, X_n), \ \delta_D < \delta_\varepsilon, \ \ \forall P_i \in X_i \Longrightarrow \\ \Longrightarrow |\sigma_D - m_{k+1}(C)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{10.23}$$

Capitolo 11

Integrali multipli.

11.1 Integrale di una funzione continua in un insieme compatto.

Con un discorso analogo a quello fatto per le funzioni reali di una variabile reale, si prova il seguente:

Teorema 11.1.1. *Se X è un sottoinsieme compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, allora esiste un unico $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione seguente:*

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \ \forall D = D(X_1, \cdots, X_n), \ \delta_D < \delta_\varepsilon, \ \forall P_i \in X_i \Longrightarrow \\ &\qquad \Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^n m_k(X_i) f(P_i) - \lambda \right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Il numero reale λ soddisfacente la (11.1) si chiama integrale definito della funzione f esteso all'insieme X e si denota con uno dei simboli:

$$\int\limits_X f(x)dx, \quad \int\limits_X f(x_1, \cdots, x_k)\ dx_1 \cdots dx_k, \quad \int\limits_X f dm_k. \tag{11.2}$$

Si vede facilmente che, nelle ipotesi del Teorema 11.1.1, denotato con $\mathcal{P}_C$ l'insieme delle partizioni di X costituite da insieme compatti e misurabili e considerati gli insiemi:

$$\mathcal{H}' = \{s_D \ : \ D \in \mathcal{P}_C\} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}' = \{S_D \ : \ D \in \mathcal{P}_C\}$$

con $s_D = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) \min f(X_i)$ e $S_D = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) \max f(X_i)$, risulta:

$$\sup \mathcal{H}' = \inf \mathcal{K}' = \lambda.$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 11.1.1, allora:

a) *se* $f \geq 0$, denotato con C il cilindroide di base X relativo alla funzione f, si ha che:

$$\int_X f(x)dx = m_{k+1}(C);$$

b) *se* $f \leq 0$, denotato con C il cilindroide di base X relativo alla funzione $-f$, si ha che:

$$\int_X f(x)dx = -m_{k+1}(C);$$

c) *se f ha segno qualunque*, posto $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) = \min\{0, f(x)\}$ e denotati con C^+ e C^-, risp., il cilindroide di base X relativo alle funzioni f^+ e $-f^-$, si ha che:

$$\int_X f(x)dx = m_{k+1}(C^+) - m_{k+1}(C^-).$$

Se X è un sottoinsieme compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ è immediato verificare che:

I) *Se $f \in C^0(X, [0, +\infty[)$, qualunque sia il sottoinsieme B di X compatto e misurabile, risulta:*

$$0 \leq \int_B f(x)dx \leq \int_X f(x)dx.$$

Inoltre, se $m_k(X) > 0$ allora:

$$\int_X f(x)dx = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in X.$$

II) *Se $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ allora:*

$$\begin{aligned}\int_X \mid f(x) \mid dx &= \int_X (f^+(x) - f^-(x))dx = \\ &= \int_X f^+(x)dx - \int_X f^-(x)dx = m_{k+1}(C^+) + m_{k+1}(C^-).\end{aligned}$$

III) *Se $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ allora:*

$$\left| \int_X f(x)dx \right| \le \int_X \mid f(x) \mid dx.$$

IV) *Qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, risulta:*

$$\int_X c\ dx = c\ m_k(X).$$

V) *Se X_1 e X_2 sono sottoinsiemi compatti e misurabili di $\mathbb{R}^k$ tali che:*

$$\overset{\circ}{X}_1 \cap \overset{\circ}{X}_2 = \emptyset,$$

e se $f \in C^0(X_1 \cup X_2, \mathbb{R})$ allora:

$$\int_{X_1 \cup X_2} f(x)dx = \int_{X_1} f(x)dx + \int_{X_2} f(x)dx, \tag{11.3}$$

la (11.3) si dice proprietà di finita additività dell'integrale.

VI) *Qualunque siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in C^0(X, \mathbb{R})$, vale la seguente proprietà di linearità dell'integrale*:

$$\int_X (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx = \alpha \int_X f_1(x)dx + \beta \int_X f_2(x)dx.$$

VII) *Qualunque siano $f_1, f_2 \in C^0(X, \mathbb{R})$, tali che $f_1 \le f_2$ in X, vale la* *seguente proprietà di monotonia dell'integrale:*

$$\int_X f_1(x)dx \leq \int_X f_2(x)dx.$$

Teorema 11.1.2. (**Teorema della media integrale**) *Se X è un sottoinsieme compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, allora:*

$$m_k(X)\ \min f(X) \leq \int_X f(x)\ dx \leq m_k(X)\ \max f(X).$$

Inoltre, se X è connesso, esiste un $P \in X$ tale che:

$$\int_X f(x)\ dx = m_k(X)\ f(P).$$

11.2 Integrazione secondo Riemann.

Siano X un sottoinsieme non vuoto limitato e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ limitata in X. Qualunque sia la partizione $P = \{X_1, \cdots, X_n\}$ di X, costituita da sottoinsiemi misurabili e non vuoti di X, consideriamo:

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) \inf f(X_i), \quad S_P = \sum_{i=1}^{n} m_k(X_i) \sup f(X_i),$$

s_P e S_P si dicono, risp., *somma inferiore e somma superiore di Riemann relative alla partizione P.*

Denotato con $\mathcal{P}$ *l'insieme delle partizioni di X costituite da sottoinsiemi misurabili e non vuoti di X* e considerati gli insiemi:

$$\mathcal{H} = \{s_P\ :\ P \in \mathcal{P}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \{S_P\ :\ P \in \mathcal{P}\}$$

si dimostra che:

$$\mathcal{H} \text{ \emph{e} } \mathcal{K} \text{ \emph{sono separati} } \ (\text{i.e. } \sup \mathcal{H} \leq \inf \mathcal{K}).$$

Definizione 11.2.1. *La funzione f si dice integrabile secondo Riemann in X se* $\sup \mathcal{H} = \inf \mathcal{K}$*, cioè se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono contigui. L'elemento di separazione di $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ si chiama integrale di f esteso all'insieme X e si denota con uno dei simboli:*

$$\int\limits_X f(x)\ dx, \quad \int\limits_X f\ dm_k, \quad \int\limits_X f(x_1, \cdots, x_k)\ dx_1 \cdots dx_k.$$

Per l'integrale di Riemann valgono proprietà analoghe a quelle viste per l'integrale di una funzione continua in un sottoinsieme compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$.

Proviamo che:

Proposizione 11.2.2. *Se X è un sottoinsieme compatto e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, allora f è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Denotato con $\mathcal{P}_C$ *l'insieme delle partizioni di X costituite da sottoinsiemi compatti misurabili e non vuoti di X* e considerati gli insiemi:

$$\mathcal{H}' = \{s_D \ :\ D \in \mathcal{P}_C\} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}' = \{S_D \ :\ D \in \mathcal{P}_C\},$$

ovviamente risulta $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ e $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$, allora:

$$\sup \mathcal{H}' \leq \sup \mathcal{H} \leq \inf \mathcal{K} \leq \inf \mathcal{K}',$$

ma f è continua in X quindi $\sup \mathcal{H}' = \inf \mathcal{K}'$, allora $\sup \mathcal{H} = \inf \mathcal{K}$.

L'asserto è così provato. □

Siano X un sottoinsieme limitato e misurabile di $\mathbb{R}^k$ e $f : X \to \mathbb{R}$ integrabile in X secondo Riemann. Denotato con $\mathcal{M}_X^{(k)}$ l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di X misurabili secondo Peano-Jordan, si prova facilmente che f è integrabile in ogni $Y \in \mathcal{M}_X^{(k)}$. Allora, ha senso considerare la funzione:

$$F : Y \in \mathcal{M}_X^{(k)} \to \int_Y f(x)dx,$$

che si dice *funzione integrale di* f.

Si dimostra che :

1. F *è assolutamente continua*, cioè:
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \ :\ Y \in \mathcal{M}_X^{(k)} \quad \text{e} \quad m_k(Y) < \delta \ \Rightarrow \left| \int_Y f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

2. *Se f e g sono integrabili in X e $a, b \in \mathbb{R}$, allora vale la seguente proprietà di linearità dell'integrale:*
$$\int_X (a\, f(x) + b\, g(x))\, dx = a \int_X f(x)dx + b \int_X g(x)dx.$$

3. *Se f e g sono integrabili in X e $f \leqslant g$ su X, allora vale la seguente proprietà di crescenza dell' integrale:*
$$\int_X f(x)\, dx \ \leqslant\ \int_X g(x)\, dx.$$

Definizione 11.2.3. *Sia X un sottoinsieme limitato e misurabile di $\mathbb{R}^k$. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice quasi ovunque continua secondo Peano-Jordan in X quando esiste $X_0 \in \mathcal{M}_X^{(k)}$ tale che $m_k(X_0) = 0$ e f continua in $X - X_0$.*

Vale il seguente:

Teorema 11.2.4. *Se $X \in \mathcal{M}^{(k)}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e quasi ovunque continua in X, allora f è integrabile in X secondo Riemann.*

11.3 Formule di riduzione per gli integrali doppi.

Definizione 11.3.1. *Siano $\alpha(x), \beta(x) \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ tali che:*
$$\alpha(x) \leq \beta(x),\ \forall x \in [a,b].$$

Il dominio del piano xy:
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b] \ \text{e} \ y \in [\alpha(x), \beta(x)]\},$$

si dice dominio normale rispetto all'asse x*, di base* $[a, b]$*, relativo alle funzioni* $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$*.*

Se $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$ *appartengono a* $C^1([a, b], \mathbb{R})$ *allora* D_1 *si dice dominio regolare rispetto all'asse* x*, di base* $[a, b]$*, relativo alle funzioni* $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$*.*

Definizione 11.3.2. *Siano* $\gamma(y), \delta(y) \in C^0([c, d], \mathbb{R})$ *tali che:*

$$\gamma(y) \leq \delta(y), \forall y \in [c, d].$$

Il dominio del piano xy*:*

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in [c, d] \ e \ x \in [\gamma(y), \delta(y)]\},$$

si dice dominio normale rispetto all'asse y*, di base* $[c, d]$*, relativo alle funzioni* $\gamma(y)$ *e* $\delta(y)$*.*

Se $\gamma(y)$ *e* $\delta(y)$ *appartengono a* $C^1([c, d], \mathbb{R})$ *allora* D_2 *si dice dominio regolare rispetto all'asse* y*, di base* $[c, d]$*, relativo alle funzioni* $\gamma(y)$ *e* $\delta(y)$*.*

Si può dimostrare che:

Proposizione 11.3.3. *Ogni dominio normale rispetto ad un asse è misurabile secondo Peano-Jordan.*

Proposizione 11.3.4. *Un dominio limitato regolare* (*ad uno o più contorni*) *è decomponibile in un numero finito di domini regolari rispetto all'asse* x *o all'asse* y*; quindi, esso è misurabile secondo Peano-Jordan.*

Teorema 11.3.5. (**Formule di riduzione per gli integrali doppi**)
Se $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b] \ e \ y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$ *è un dominio normale rispetto all'asse* x *e* $f \in C^0(D_1, \mathbb{R})$*, allora:*

$$\int\int_{D_1} f(x, y) \ dx \ dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \ dy. \tag{11.4}$$

Se $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in [c, d] \ e \ x \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$ *è un dominio normale rispetto all'asse* y *e* $f \in C^0(D_2, \mathbb{R})$*, allora:*

$$\int\int_{D_2} f(x, y) \ dx \ dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \ dx. \tag{11.5}$$

Esempio 1. Consideriamo il rettangolo $H = [0, 2] \times [0, 1]$, esso si può guardare come un dominio regolare rispetto all'asse x relativo alle funzioni:

$$\alpha(x) = 0, \ \forall x \in [0, 2], \quad \beta(x) = 1, \ \forall x \in [0, 2].$$

Usufruendo del Teorema 11.3.5, calcoliamo l'integrale:

$$\int\int_H \left(\sin(x + y) + y^2\right) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^1 \left(\sin(x + y) + y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left[-\cos(x + y) + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(-\cos(x + 1) + \cos x + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \left[-\sin(x + 1) + \sin x + \frac{1}{3}x\right]_0^2 = -\sin 3 + \sin 2 + \frac{2}{3} + \sin 1.$$

Esempio 2. Considerato l'insieme:

$$H = \left\{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [-x^2, x^2]\right\},$$

calcoliamo l'integrale:

$$\int\int_H (y^2x^2) dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} y^2x^2 dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}x^2\right]_{-x^2}^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^6}{3}x^2 - \frac{(-x^2)^3}{3}x^2\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^8 dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}.$$

Esempio 3. Considerato l'insieme:

$$H = \left\{(x,y) : x \in [0,1], y \in [x^2, x]\right\},$$

calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}\int\int_H x^3 e^y dxdy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^3 e^y dy = \int_0^1 x^3(e^x - e^{x^2})dx = \\ &= \int_0^1 x^3 e^x dx - \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \\ &= \left[x^3 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx - \left[\frac{x^2}{2} e^{x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 2x \frac{e^{x^2}}{2} dx = \\ &= e - 3\left[x^2 e^x\right]_0^1 + \int_0^1 6xe^x dx - \frac{1}{2}e + \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \end{aligned}$$

$$= e - 3e + 6\left[xe^x\right]_0^1 - 6\int_0^1 e^x dx - \frac{1}{2}e + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= e - 3e + 6e - 6(e-1) - \frac{1}{2}.$$

Esempio 4. Considerato l'insieme:

$$H = \left\{(x,y) : x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], y \in [x^2, 1]\right\},$$

calcoliamo l'integrale:

$$\int\int_H \frac{1}{x^2(x+1)^2}\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\, dx \int_{x^2}^1 dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-x^2)}{x^2(x+1)^2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-x)(1+x)}{x^2(x+1)(x+1)}\, dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x^2(x+1)} dx = ...$$

Esempio 5. Considerato l'insieme:

$$H = \left\{(x,y) : x \in [0,2], y \in \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right]\right\},$$

calcoliamo l'integrale:

$$\int\int_H xy\,dx\,dy = \int_0^2 x\,dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} y\,dy =$$
$$= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} dx =$$
$$= \int_0^2 x \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}(4-x^2)\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \frac{1}{8}\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = ...$$

Esempio 6. Consideriamo il dominio T rappresentato in figura.
Osserviamo che T si può scrivere nei seguenti due modi:

$T = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [a,x]\}$,

$T = \{(x,y) : y \in [a,b], x \in [y,b]\}$.

Allora, usufruendo della (11.4), si ha che:

$$\int\int_T f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy, \tag{11.6}$$

ed usufruendo della (11.5) si ottiene:

$$\int\int_T f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx. \tag{11.7}$$

Dalle (11.6) e (11.7) si ottiene la **formula di inversione di Dirichlet**:

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx. \tag{11.8}$$

11.4 Formule di Gauss-Green, teorema della divergenza e formula di Stokes nel piano.

Dalla Proposizione 11.3.4 sappiamo che un dominio limitato regolare (ad uno o più contorni) è decomponibile in un numero finito di domini regolari rispetto all'asse x o all'asse y. Inoltre, è evidente che la frontiera di un dominio regolare è costituita da un numero finito di curve semplici regolari aventi, a due a due, in comune al più i loro estremi.

Detto ciò, passiamo al seguente:

Teorema 11.4.1. (**Formule di Gauss-Green**)
Sia D un dominio limitato regolare del piano xy e siano f, g funzioni reali definite in D tali che:

$$f, g, f_x, g_y \in C^0(D, \mathbb{R}).$$

Allora:

$$\iint_D f_x(x,y)\ dx\ dy = \int_{+\partial D} f(x,y)\ dy\ \left(= \int_{\partial D} (f(x,y)j, t)\ ds \right), \qquad (11.9)$$

$$\iint_D g_y(x,y)\ dx\ dy = -\int_{+\partial D} g(x,y)\ dx\ \left(= -\int_{\partial D} (g(x,y)i, t)\ ds \right), \qquad (11.10)$$

con t si denota il versore tangente positivo a $+\partial D$.

Dimostrazione. Siccome un dominio limitato regolare (ad uno o più contorni) è decomponibile in un numero finito di domini regolari rispetto all'asse x o all'asse y ed inoltre, sia gli integrali doppi che gli integrali curvilinei godono della proprietà di finita additivà, per provare l'asserto basterà dimostrare le (11.9) e (11.10) nel caso in cui D è un dominio regolare rispetto all'asse x

e nel caso in cui D è un dominio regolare rispetto all'asse y. Noi, però, ci limiteremo a provare la (11.9) e solo nel caso in cui D è un dominio regolare rispetto all'asse y, cioè:

$D = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [\gamma(y), \delta(y)]\}$,

con $\gamma(y), \delta(y) \in C^1([c, d], \mathbb{R})$.
A norma delle formule di riduzione per gli integrali doppi, si ha che:

$$\begin{aligned} \int\int_D f_x dxdy &= \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f_x(x, y)dx = \\ &= \int_c^d [f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)]\, dy = \\ &= \int_c^d f(\delta(y), y)dy - \int_c^d f(\gamma(y), y)dy. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Ora, occupiamoci del secondo membro della (11.9); a tale scopo consideriamo le equazioni parametriche delle curve semplici e regolari che compongono la frontiera di D:

$$s_1) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = c, \quad t \in [\gamma(c), \delta(c)]; \end{cases} \qquad \Gamma_1) \begin{cases} x(t) = \delta(t) \\ y(t) = t, \qquad t \in [c, d]; \end{cases}$$

$$s_2) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = d, \quad t \in [\gamma(d), \delta(d)]; \end{cases} \qquad \Gamma_2) \begin{cases} x(t) = \gamma(t) \\ y(t) = t, \qquad t \in [c, d]. \end{cases}$$

Posto $\varphi_1(t) = (\delta(t), t), t \in [c, d]$, $\varphi_2(t) = (\gamma(t), t), t \in [c, d]$, $\gamma_1 = [\varphi_1]$ e $\gamma_2 = [\varphi_2]$, si ha che:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} f dy &= \int_{+s_1} f dy + \int_{+\gamma_1} f dy + \int_{+s_2} f dy + \int_{+\gamma_2} f dy = \\ &= 0 + \int_c^d f(\delta(t), t)dt + 0 - \int_c^d f(\gamma(t), t)dt. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Dalla (11.11) e dalla (11.12) segue la (11.9).
L'asserto è così provato. □

Esempio. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\int_D x^2y^2dx\,dy,$$

dove D è il dominio regolare limitato la cui frontiera è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Le equazioni parametriche di tale ellisse sono:

$$\begin{cases} x = a\,\cos t \\ y = b\,\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Allora, osservato che $x^2y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3y^2\right)$, a norma della formula di Gauss (11.9) si ha che:

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2y^2\,dx\,dy &= \int_{+\partial D}\frac{1}{3}x^3\,y^2\,dy = \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\,a^3\,b^2\,\cos^3 t\,\sin^2 t\,b\,\cos t\,dt = \\ &= \frac{1}{3}\,a^3\,b^3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,\sin^2 t\,dt = \\ &= \frac{\pi}{2\pi}a^3\,b^3. \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \int\cos^4 t\,\sin^2 t\,dt &= \int\cos^4 t\,D(-\cos t)\,\sin t\,dt = \\ &= \int D\left(\frac{\cos^5 t}{5}\right)\sin t\,dt = \\ &= \frac{\cos^5 t}{5}\,\sin t - \int\frac{\cos^5 t}{5}\,\cos t dt = \\ &= \frac{\cos^5 t}{5}\,\sin t - \frac{1}{5}\int\cos^6 t dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\cos^6 t\,dt &= \int\cos^4 t\,(1-\sin^2 t)\,dt = \int\cos^4 t dt - \int\cos^4 t\,\sin^2 t\,dt = \\ &= \int\cos^4 t\,dt + \int\cos^4 t\,(-\sin t)\,\sin t\,dt = \\ &= \int\cos^4 t\,dt + \frac{\cos^5 t}{5}\sin t - \int\frac{\cos^5 t}{5}\,\cos t\,dt = \\ &= \int\cos^4 t\,dt + \frac{\cos^5 t}{5}\,\sin t - \frac{1}{5}\int\cos^6 t\,dt \end{aligned}$$

allora:

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)\int \cos^6 t\,dt = \frac{\cos^5 t}{5}\,\sin t + \int \cos^4 t\,dt$$

cioè:

$$\int \cos^6 t\,dt = \frac{1}{6}\cos^5 t\,\sin t + \frac{5}{6}\int \cos^4 t\,dt$$

....

Usufruendo delle formule di Gauss proviamo il seguente:

Teorema 11.4.2. (**Teorema della divergenza nel piano**)
Siano D un dominio limitato regolare del piano xy e $v = Xi + Yj$ un campo vettoriale su D tale che:

$$X, Y, X_x, Y_y \in C^0(D, \mathbb{R}).$$

Allora, denotato con n_e il versore normale esterno a ∂D, risulta:

$$\int\int_D \mathrm{div}\, v\,dx\,dy = \int_{\partial D} (v, n_e)\,ds. \tag{11.13}$$

Dimostrazione. Essendo div$v = X_x + Y_y$, per le formule di Gauss si ha che:

$$\begin{aligned}
\int\int_D (X_x + Y_y)\,dxdy &= \int_{+\partial D} X dy - \int_{+\partial D} Y dx = \\
&= \int_{\partial D} X(j,t)ds - \int_{\partial D} Y(i,t)ds = \\
&= \int_{\partial D} X(j,t)ds + \int_{\partial D} Y(i,-t)ds = \\
&= \int_{\partial D} X(i,n_e)ds + \int_{\partial D} Y(j,n_e)ds = \\
&= \int_{\partial D} (Xi, n_e)\,ds + \int_{\partial D} (Yj, n_e)\,ds = \\
&= \int_{\partial D} [(Xi, n_e) + (Yj, n_e)]\,ds = \\
&= \int_{\partial D} (v, n_e)\,ds.
\end{aligned}$$

L'asserto è così provato. □

L'integrale a secondo membro della (11.13) si chiama *flusso del vettore v uscente dalla frontiera di D.*
Dalle formule di Gauss segue anche il seguente:

Teorema 11.4.3. (**Teorema di Stokes nel piano**) *Se D è un dominio limitato regolare del piano xy, X e Y sono funzioni reali definite in D tali che:*

$$X, Y, X_y, Y_x \in C^0(D, \mathbb{R}),$$

allora vale la seguente fomula di Green:

$$\int\int_D (Y_x - X_y)\, dx\, dy = \int_{+\partial D} X dx + Y dy. \tag{11.14}$$

Dimostrazione. L'asserto discende immediatamente dalle formule di Gauss, infatti:

$$\begin{aligned}\int\int_D (Y_x - X_y)\ dx\, dy &= \int\int_D Y_x\, dx\, dy - \int\int_D X_y\, dx\, dy = \\ &= \int_{+\partial D} Y\ dy + \int_{+\partial D} X\ dx,\end{aligned}$$

da cui segue la (11.14). □

Proviamo, ora, la proposizione seguente che fornisce una condizione sufficiente affinché un campo vettoriale sia un campo vettoriale gradiente:

Proposizione 11.4.4. *Siano A un aperto semplicemente connesso del piano xy, $v = Xi + Yj$ un campo vettoriale su A tale che:*

$$X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A, \mathbb{R}).$$

Se risulta:

$$X_y = Y_x \ \text{ su } A, \tag{11.15}$$

allora v è un campo vettoriale gradiente su A.

Dimostrazione. Per le ipotesi fatte su A, considerata una qualunque curva γ semplice chiusa regolare a tratti il cui sostegno Γ sia contenuto in A, risulta che Γ è la frontiera di un dominio $D(\Gamma)$ incluso in A pertanto, denotato con $t(P)$ il versore tangente positivo relativo a $+\partial D(\Gamma)$, dalle (9.15) e (11.14) si ha che:

$$\int_{\gamma} (v(P), t(P))\, ds = \int_{+\partial D(\Gamma)} X dx + Y dy = \int\int_{D(\Gamma)} (Y_x - X_y)\, dx\, dy \tag{11.16}$$

e dalla (11.15) segue che:

$$\int_{\gamma} (v(P), t(P))\, ds = 0.$$

Per l'arbitrarietà di γ e per il Teorema 9.5.4 segue l'asserto. □

Concludiamo con il seguente:

Teorema 11.4.5. (**Formule di integrazione per parti per gli integrali doppi**) *Siano D un dominio limitato regolare del piano xy e $f, g \in C^1(D, \mathbb{R})$. Allora:*

$$\int\int_D f(x,y) g_x(x,y) dxdy = \int_{+\partial D} fgdy - \int\int_D f_x gdxdy, \tag{11.17}$$

$$\int\int_D f(x,y) g_y(x,y) dxdy = -\int_{+\partial D} fgdx - \int\int_D f_y gdxdy. \tag{11.18}$$

11.5 Cambiamento di variabili negli integrali doppi.

Definizione 11.5.1. *Siano B e D due domini limitati regolari, risp., dei piani uv e xy. La funzione:*

$$\tau : (u,v) \in B \to \tau(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in D,$$

si dice trasformazione piana regolare di B in D se soddisfa le condizioni seguenti:

i) $\tau \in C^1(B,D)$;

ii) τ *è biettiva in* B;

iii) risulta:

$$J_\tau(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{vmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ in } B.$$

Valgono i seguenti due teoremi.

Teorema 11.5.2. *Se τ è una trasformazione piana regolare di B in D e $f \in C^0(D,\mathbb{R})$, allora:*

$$\int\!\!\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int\!\!\int_B f(\tau(u,v))|J_\tau(u,v)|\, du\, dv. \tag{11.19}$$

Teorema 11.5.3. *Se $f \in C^0(D,\mathbb{R})$ e $\tau \in C^1(B,D)$ soddisfa la condizione seguente:*

P) *Esiste una successione di domini regolari $\{B_k\}$ inclusi in B tali che, $\forall k \in \mathbb{N}$, la restrizione di τ a B_k è regolare ed inoltre:*

$$\lim_k m_2(B_k) = m_2(B), \quad \lim_k m_2(\tau(B_k)) = m_2(D),$$

allora:

$$\int\!\!\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int\!\!\int_B f(\tau(u,v))|J_\tau(u,v)|\, du\, dv. \tag{11.20}$$

11.6 Passaggio a coordinate polari.

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ il cerchio chiuso, del piano xy, di centro $(0, 0)$ e raggio $r > 0$ e sia $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.
Introdotto nel piano xy un sistema di coordinate polari (ρ, θ) con polo in O e asse polare l'asse delle x, sappiamo che le formule per il passaggio dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta, \;\; \rho \in [0, +\infty[, \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Considerato il rettangolo $B = [0, r] \times [0, 2\pi]$, del piano $\rho\theta$ e la funzione:

$$\tau : (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \longrightarrow \tau(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2;$$

osserviamo che $\tau(B) = D$, $\tau \in C^1$ e, inoltre, risulta:

$$\tau(0, \theta) = (0, 0), \;\; \forall\, \theta \in [0, 2\pi],$$

$$\tau(\rho, 0) = \tau(\rho, 2\pi), \;\; \forall\, \rho \in [0, r],$$

e:

$$J_\tau(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho,$$

quindi la restrizione di τ a B, $\tau_{/B}$, non è biettiva e $J_\tau(0, \theta) = 0 \;\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$; conseguentemente, $\tau_{/B}$ non è regolare.

Ora, mostriamo che $\tau_{/B}$ soddisfa la condizione P) del Teorema 11.5.3. A tale scopo poniamo:

$$B_k = \left[\frac{1}{k}, r\right] \times \left[0, 2\pi - \frac{1}{k}\right], \; \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e osserviamo che $\tau_{/B_k}$ è regolare $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Essendo:

$$m(B_k) = \left(r - \frac{1}{k}\right)\left(2\pi - \frac{1}{k}\right)$$

si ha che:

$$\lim_{k\to+\infty} m(B_k) = r{\cdot}2\pi = m(B).$$

Inoltre, essendo $\tau(B_k)$ il settore
di corona circolare rappresentato
in figura si ha che:

$$m(\tau(B_k)) = \frac{2\pi - \frac{1}{k}}{2}\left(r^2 - (\frac{1}{k})^2\right),$$

quindi:

$$\lim_{k\to+\infty} m(\tau(B_k)) = \pi r^2 = m(D),$$

allora la $P)$ è soddisfatta, quindi
dalla (11.20) si ha che:

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int\int_B f(\tau(\rho,\theta))\rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\tau(\rho,\theta))d\theta.\end{aligned}$$

Esempio 1. Consideriamo il dominio D rappresentato in figura.
Si noti che l'equazione polare
di Γ_1 è data da:

$$\rho = r_1, \quad \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}],$$

e l'equazione polare di Γ_2 è
data da:

$$\rho = r_2, \quad \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}];$$

quindi:

$$B = [r_1, r_2] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \quad \text{e} \quad D = \tau(B).$$

Siano $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$, calcoliamo il seguente integrale:

$$\int\int_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}\, \frac{1}{xy} dxdy = \int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}} \cdot \frac{1}{\rho^2 \cos\theta \sin\theta} \cdot \rho d\theta =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta \sin\theta} d\theta = [\text{settsenh}\, \rho]_1^2 \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} d\theta =$$

$$= (\text{settsenh}\, 2 - \text{settsenh} 1) \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\text{tg}\theta} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta =$$

$$= (\text{settsenh}\, 2 - \text{settsenh} 1) \cdot \Big[\log(\text{tg}\theta)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}.$$

Esempio 2. Consideriamo il dominio D rappresentato in figura.
L'equazione cartesiana dell'arco
di circonferenza Γ_1 è data da:

$x^2+y^2 = 1, \quad y \geq 0,$

e l'equazione cartesiana dell'arco
di circonferenza Γ_2 è data da:

$(x-1)^2+y^2 = 1, \quad y \geq 0,$

cioè:

$x^2+y^2-2x = 0, \quad y \geq 0,$

Calcoliamo l'ascissa del punto di intersezione tra Γ_1 e Γ_2:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

A questo punto, possiamo calcolare la misura in radianti dell'angolo acuto θ formato dal semiasse positivo delle x e dal semiasse t rappresentato in figura. Infatti, risulta che:

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Allora l'equazione polare di Γ_1 è data da:

$$\rho = 1, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{3}],$$

e l'equazione polare di Γ_2 è data da:

$$\rho = 2\cos\theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{3}],$$

infatti:

$$x^2+y^2 = 1 \longrightarrow \rho^2 = 1 \rightarrow \rho = 1,$$

e:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \longrightarrow \rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0 \rightarrow \rho = 2\cos\theta.$$

Infine, si ha che:

$$B = \left\{(\rho, \theta) : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \rho \in [1, 2\cos\theta]\right\} \quad \text{e} \quad \tau(B) = D.$$

Calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int\int_D xy \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho \cos\theta \cdot \rho \sin\theta \cdot \rho \, d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \, d\rho = \\ &= ... \end{aligned}$$

Capitolo 12

Superfici e area di una superficie.

12.1 Superfici regolari.

Definizione 12.1.1. *Sia D un dominio limitato internamente connesso del piano uv. Si dice superficie regolare parametrizzata una funzione:*

$$P(u,v) : (u,v) \in D \longrightarrow P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3, \quad (12.1)$$

soddisfacente le condizioni seguenti:

(i) $P(u,v) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$,

(ii) *P è invertibile in $\overset{\circ}{D}$,*

(iii) *qualunque sia $(u,v) \in \overset{\circ}{D}$ la seguente matrice jacobiana ha rango 2:*

$$A(u,v) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

Osserviamo che, considerati i minori del secondo ordine di $A(u,v)$:

$$J_1(u,v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad J_2(u,v) = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad J_3(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

la condizione **(iii)** equivale alla condizione:

$$J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v) > 0, \quad \forall (u,v) \in \overset{\circ}{D}. \tag{12.3}$$

D'altro canto, essendo $P_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$ e $P_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$, la condizione **(iii)** è soddisfatta se e solo se i vettori $P_u(u,v)$ e $P_v(u,v)$ sono linearmente indipendenti in tutto $\overset{\circ}{D}$.

Ricordando che:

$$P_u \wedge P_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = J_1\ i + J_2\ j + J_3\ k,$$

si ottiene che la condizione **(iii)** equivale alla condizione:

$$P_u(u,v) \wedge P_v(u,v) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (\mathrm{u},\mathrm{v}) \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}. \tag{12.4}$$

Si noti che:

$$|P_u \wedge P_v|^2 = |J_1 i + J_2 j + J_3 k|^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

quindi si ottiene l'equivalenza tra (12.3) e (12.4).
Consideriamo, ora, il prodotto riga per colonna delle matrici:

$$A^T = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

cioè:

$$A^2 = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 & x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v & x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{pmatrix},$$

da cui, posto:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = |P_u|^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = (P_u, P_v),$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = |P_v|^2,$$

si ha che:

$$\det A^2 = EG - F^2,$$

d'altro canto, per un teorema di Binet, risulta che:

$$\det A^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

cioè il determinante di A^2 è uguale alla somma dei quadrati dei minori del second'ordine della matrice A; quindi:

$$EG - F^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

allora la **(ii)**, la (12.3) e la (12.4) sono tutte equivalenti alla condizione:

$$EG - F^2 > 0 \ \text{ su } \overset{\circ}{D}. \tag{12.5}$$

Ora, qualunque sia $(u,v) \in \overset{\circ}{D}$, consideriamo la forma quadratica nelle variabili λ e μ:

$$\phi_1(\lambda,\mu) = E(u,v)\lambda^2 + 2F(u,v)\lambda\mu + G(u,v)\mu^2 \tag{12.6}$$

e osserviamo che, essendo $\frac{\Delta}{4} = F^2 - EG < 0$ e $E = |P_u|^2 > 0$, la forma quadratica (12.6) è maggiore di zero, qualunque sia $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, in questo caso si dice che **la forma quadratica è definita positiva**.
La (12.6) si dice *prima forma quadratica della superficie.*

Nota. Sia $P : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata, l'insieme $S = P(D)$ si dice *sostegno della superficie* $P(u,v)$. Spesso il termine superficie viene utilizzato per indicare l'insieme S sottointendendo che sia stata assegnata una funzione $P(u,v)$. Inoltre, le equazioni:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in D, \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche della superficie.*

Esempio 1. Sia $f(x,y) \in C^1(D,\mathbb{R})$, con D dominio limitato internamente connesso del piano xy. Considerata la funzione:

$$P(u,v) = (u, v, f(u,v)), \;\; (u,v) \in D, \tag{12.7}$$

proviamo che $P(u,v)$ è una superficie regolare parametrizzata. Ovviamente $P(u,v) \in C^1(D,\mathbb{R}^3)$; inoltre, $P(u,v)$ è invertibile in D in quanto se $(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$ allora $(u_1,v_1,f(u_1,v_1)) \neq (u_2,v_2,f(u_2,v_2))$. Mostriamo, infine, che $EG - F^2 > 0$ in D; a tale scopo osserviamo che:

$$P_u = (1,0,f_u) \quad \text{e} \quad P_v = (1,0,f_v),$$

quindi $E = |P_u| = 1 + f_u^2$, $G = |P_v| = 1 + f_v^2$ e $F = (P_u, P_v) = f_u f_v$ da cui segue che:

$$EG - F^2 = (1+f_u^2)(1+f_v^2) - f_u^2 f_v^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2 + f_u^2 f_v^2 - f_u^2 f_v^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2 > 0.$$

Abbiamo, dunque, provato che la (12.7) è una superficie regolare parametrizzata.

Esempio 2. Siano B un dominio limitato internamente connesso del piano yz e $f(y,z) \in C^1(B,\mathbb{R})$. La funzione $P(u,v) = (f(u,v), u, v)$, $(u,v) \in B$ è una superficie regolare parametrizzata e le equazioni parametriche di $P(u,v)$ sono date da:

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = u & \quad (u,v) \in B. \\ z = v \end{cases}$$

Un discorso analogo vale per $f(x,z) \in C^1(D,\mathbb{R})$, con D dominio limitato internamente connesso nel piano xz.

Esempio 3. Sia $\alpha > 0$, consideriamo il segmento del piano xz di equazione $z = \alpha x$, $x \in [0,r]$. Facendo ruotare tale segmento intorno all'asse z otteniamo la superficie laterale S di un cono circolare retto avente come vertice il punto $(0,0)$. L'equazione cartesiana della superficie di rotazione S è data da:

$$z = \alpha\sqrt{x^2+y^2}, \;\; (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Osserviamo che la funzione:

$$P(u,v) = \left(u, v, \alpha\sqrt{u^2+v^2}\right),\ (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leqslant r^2\},$$

ha come sostegno S ma non è una superficie regolare in quanto $P(u,v)$ non è derivabile in $(0,0)$.
Consideriamo, ora, la funzione:

$$P_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \alpha u),\ (u,v) \in [0,r] \times [0,2\pi] = B.$$

Proviamo che tale funzione è una superficie regolare parametrizzata. Siano $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ punti distinti di $\overset{\circ}{B}$, se $u_1 \neq u_2$ l'asserto è immediato; se $u_1 = u_2$ e $v_1 \neq v_2$, essendo $v_1, v_2 \in]0,2\pi[$, risulta $(\cos v_1, \sin v_1) \neq (\cos v_2, \sin v_2)$ quindi $P_1(u_1,v_1) \neq P_1(u_2,v_2)$. Dunque, P_1 è invertibile in $\overset{\circ}{B}$.
Ora, proviamo che $EG - F^2 > 0$ su $\overset{\circ}{B}$. A tale scopo, osserviamo che:

$$\frac{\partial P_1}{\partial u} = (\cos v, \sin v, \alpha),\ \frac{\partial P_1}{\partial v} = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

quindi:

$$E = |\frac{\partial P_1}{\partial u}|^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + \alpha^2 = 1+\alpha^2$$

$$G = |\frac{\partial P_1}{\partial v}|^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2$$

$$F = \left(\frac{\partial P_1}{\partial u}, \frac{\partial P_1}{\partial v}\right) = -u\cos v\sin v + u\cos v \sin v = 0$$

allora:

$$EG - F^2 = (1+\alpha^2)u^2 > 0 \text{ su } \overset{\circ}{B}.$$

Abbiamo provato che $P_1(u,v)$ è regolare; si vede, inoltre, che $P_1(B) = S$ quindi la superficie di rotazione S è sostegno sia della superficie non regolare $P(u,v)$ che della superficie regolare parametrizzata $P_1(u,v)$.

12.2 Cambiamento ammissibile di parametro.

Siano T un dominio limitato internamente connesso del piano $\xi\eta$ e D un dominio limitato internamente connesso del piano uv.

Definizione 12.2.1. *La funzione $\tau : T \to D$ si dice cambiamento ammissibile di parametro se $\tau \in C^1, \tau$ è biettiva, $\tau^{-1} \in C^1$ e il determinante jacobiano:*

$$J_\tau = \begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} \neq 0 \quad in \quad \overset{\circ}{T}.$$

Proviamo che:

Proposizione 12.2.2. *Se $P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$, è una superficie regolare e $\tau(\xi,\eta)$ è un cambiamento ammissibile di parametro allora la funzione $P_1(\xi,\eta) = P(\tau(\xi,\eta)) = P(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$, $(\xi,\eta) \in T$, è una superficie regolare (parametrizzata).*

Dimostrazione. Ovviamente $P_1(\xi,\eta)$ è invertibile su $\overset{\circ}{T}$ e $P_1(\xi,\eta) \in C^1$. Ora, facciamo vedere che:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \neq \mathbf{0} \ \text{ in } \ \overset{\circ}{\mathrm{T}}.$$

A tale scopo, calcoliamo le derivate parziali di P_1:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

ora, tenendo presente che $P_u \wedge P_u = \mathbf{0}$ e $P_v \wedge P_v = \mathbf{0}$, calcoliamo il prodotto vettoriale tra $\frac{\partial P_1}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial P_1}{\partial \eta}$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = P_u \wedge P_v(u_\xi v_\eta) + P_v \wedge P_u(v_\xi u_\eta) = P_u \wedge P_v(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi),$$

ma $J_\tau = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi$, quindi:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = (P_u \wedge P_v) J_\tau \neq \mathbf{0} \text{ in } \overset{\circ}{\mathrm{T}}. \tag{12.8}$$

(Si noti che $\frac{\partial P}{\partial u}$ e $\frac{\partial P}{\partial v}$ sono calcolate in $(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$, $(\xi,\eta) \in \overset{\circ}{T}$)

Abbiamo così provato che $P_1(\xi,\eta)$ è una superficie regolare. □

Alla luce di quanto è stato appena detto, è naturale dare la seguente:

Definizione 12.2.3. *Due superfici regolari $P : D \to \mathbb{R}^3$ e $P_1 : T \to \mathbb{R}^3$ sono equivalenti se esiste un cambiamento ammissibile di parametro $\tau : T \to D$ tale che:*

$$P_1 = P \circ \tau,$$

o equivalentemente:

$$P = P_1 \circ \tau^{-1}.$$

La relazione appena introdotta la indicheremo con il simbolo $\sim$, essa è una relazione di equivalenza nell'insieme costituito da tutte le superfici regolari.

Nel seguito con il termine superficie regolare ci riferiremo sia ad una data rappresentazione parametrica $P(u, v)$ che alla classe di equivalenza da essa individuata.

Osservazione 12.2.4. *Essendo $\tau \in C^1$ si ha che $J_\tau = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi \in C^0$; quindi, l'ipotesi $J_\tau \neq 0$ in $\overset{\circ}{T}$ implica che:*

$$J_\tau > 0 \quad in \quad \overset{\circ}{T} \quad oppure \quad J_\tau < 0 \quad in \quad \overset{\circ}{T}.$$

12.3 Piano tangente e versore normale in un punto di una superficie regolare.

Consideriamo una superficie regolare:

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in D.$$

Posto $S = P(D)$, sia P_0 un punto di S di coordinate locali $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$, i.e. $P_0 = P(u_0, v_0)$.
Siano $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, una curva regolare il cui sostegno sia contenuto in $\overset{\circ}{D}$ e $t_0 \in [a, b]$ tale che $\varphi(t_0) = (u_0, v_0)$.

Osservato che $P(u, v)$ trasforma φ in una curva:

$$\tilde{\varphi}(t) = P(\varphi(t)) = P(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b],$$

con sostegno contenuto in S e passante per P_0, proviamo che $\widetilde{\varphi}$ è regolare.

Ovviamente $\widetilde{\varphi}(t) \in C^1([a,b],\mathbb{R}^3)$, inoltre:

$$\widetilde{\varphi}'(t) = P_u u'(t) + P_v v'(t). \tag{12.9}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\varphi}'(t)|^2 &= (\widetilde{\varphi}'(t), \widetilde{\varphi}'(t)) = (P_u u' + P_v v', P_u u' + P_v v') = \\
&= (P_u u', P_u u') + (P_v v', P_u u') + (P_u u', P_v v') + (P_v v', P_v v') = \\
&= |P_u|^2 u'^2 + 2u'v'(P_u, P_v) + |P_v|^2 v'^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2,
\end{aligned}$$

da cui, essendo la prima forma quadratica $\phi_1(\lambda,\mu)$ definita positiva in $\overset{\circ}{D}$, $\varphi(t) \in \overset{\circ}{D}, \forall t \in [a,b]$, e $(u'(t), v'(t))) \neq (0,0), \forall t \in [a,b]$, si ha che:

$$|\widetilde{\varphi}'(t)|^2 > 0, \forall t \in [a,b],$$

quindi $\widetilde{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}, \forall \mathrm{t} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Abbiamo, dunque, provato che:

Proposizione 12.3.1. *Se $P : D \to \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ e $P_0 = P(u_0, v_0)$ allora, qualunque sia la curva regolare $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$, tale che $\varphi(t_0) = (u_0, v_0)$ e $\varphi(t) \in \overset{\circ}{D}, \forall t \in [a,b]$, risulta che la curva:*

$$\widetilde{\varphi}(t) = P(\varphi(t)),\ t \in [a,b] \tag{12.10}$$

è regolare e $\widetilde{\varphi}(t_0) = P_0$.

Inoltre, si può dimostrare che:

Proposizione 12.3.2. *Ogni curva regolare il cui sostegno passa per il punto $P_0 = P(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$, ed è contenuto in $S = P(D)$ è localmente immagine, tramite la funzione $P(u,v)$, di una curva regolare $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(t) \in \overset{\circ}{D}, \forall t \in [a,b]$, e $\varphi(t_0) = (u_0, v_0)$ per qualche $t_0 \in [a,b]$.*

Alla luce di quanto detto sopra, possiamo dire che:

La (12.10) rappresenta localmente la generica curva regolare passante per il punto $P_0 = P(u_0, v_0)$, il cui sostegno è incluso in S.

Dalla (12.9) si ottiene che:

$$\widetilde{\varphi}'(t_0) = P_u(u_0, v_0)u'(t_0) + P_v(u_0, v_0)v'(t_0), \tag{12.11}$$

cioè $\widetilde{\varphi}'(t_0)$ è combinazione lineare dei vettori $P_u(u_0, v_0), P_v(u_0, v_0)$, quindi il vettore tangente alla curva $\widetilde{\varphi}$ nel punto $P_0 = P(u_0, v_0) = P(\varphi(t_0)) = \widetilde{\varphi}(t_0)$ giace sul piano passante per P_0 determinato dai vettori $P_u(u_0, v_0), P_v(u_0, v_0)$. Allora, siccome la (12.10) rappresenta localmente una generica curva regolare contenuta in S e passante per P_0, abbiamo che:
le tangenti nel punto P_0 di una generica curva regolare, il cui sostegno sia contenuto in $S = P(D)$, giacciono tutte sul piano individuato dai vettori $P_u(u_0, v_0)$ e $P_v(u_0, v_0)$.

Il suddetto piano si chiama *piano tangente alla superficie $P(u, v)$ nel punto P_0.*
Poichè il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale al piano da essi individuato, il piano tangente alla superficie in P_0 è ortogonale al vettore $P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)$ e, quindi, è ortogonale al versore:

$$n(P_0) = \frac{P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)}{|P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)|},$$

che viene detto *versore normale alla superficie $P(u, v)$ nel punto P_0.*

Conseguentemente, l'equazione del piano π tangente alla superficie $P(u, v)$ nel punto P_0 è data da:

$$((P - P_0), P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)) = 0, \tag{12.12}$$

quindi, ricordando che $P_u \wedge P_v = J_1 i + J_2 j + J_3 k$, la (12.12) diventa:

$$\big((x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k, J_1(u_0, v_0)i + J_2(u_0, v_0)j + J_3(u_0, v_0)k\big) = 0,$$

da cui si ricava che l'equazione del piano π, tangente alla superficie $P(u, v)$ nel punto P_0, è:

$$(x - x_0)J_1(u_0, v_0) + (y - y_0)J_2(u_0, v_0) + (z - z_0)J_3(u_0, v_0) = 0. \tag{12.13}$$

Concludiamo osservando che, per quanto detto in precedenza, *la retta passante per P_0 e ortogonale a π ha numeri direttori $J_1(u_0, v_0), J_2(u_0, v_0), J_3(u_0, v_0)$*, quindi, le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + J_1(u_0, v_0)t \\ y = y_0 + J_2(u_0, v_0)t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + J_3(u_0, v_0)t \end{cases}$$

Esempio. Se $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ e $P(x, y) = (x, y, f(x, y))$ allora:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix},$$

quindi, $J_1 = -f_x$, $J_2 = -f_y$, $J_3 = 1$, e l'equazione del piano tangente a S nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

si ritrova, così, il risultato ottenuto nel Capitolo VI.

12.4 Superfici orientabili. Superfici con bordo.

Sia $P : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare di sostegno S. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, considerato il punto $P_0 \in S_0 = P(\overset{\circ}{D})$, il versore normale alla superficie nel punto $P_0 = P(u_0, v_0)$ è dato da:

$$\begin{aligned} n(P_0) &= \frac{P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)}{|P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)|} = \\ &= \frac{J_1(u_0, v_0)}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\, i + \frac{J_2(u_0, v_0)}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\, j + \frac{J_3(u_0, v_0)}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\, k. \end{aligned} \tag{12.14}$$

Definizione 12.4.1. *La superficie regolare $P(u, v)$ si dice orientabile se è possibile prolungare il campo dei versori normali da S_0 a S in modo tale che l'applicazione ottenuta:*

$$n : P \in S \to n(P) \in \mathbb{R}^3 \tag{12.15}$$

sia continua in S.

Ricordiamo che, se $P : D \to \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare, considerata una riparametrizzazione $P_1 : T \to \mathbb{R}^3$ di $P(u,v)$, ottenuta tramite il cambiamento ammissibile di parametro $\tau : T \to D$, risulta che (vedi (12.8)):

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\right) J_\tau \neq \mathbf{0} \text{ in } \overset{\circ}{\mathrm{T}},$$

quindi:

$$\frac{\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta}}{|\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta}|} = \frac{J_\tau}{|J_\tau|} \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{|\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}|}.$$

D'altro canto, dall'Osservazione 12.2.4, sappiamo che $J_\tau > 0$ in $\overset{\circ}{T}$ oppure $J_\tau < 0$ in $\overset{\circ}{T}$; conseguentemente, cambiando rappresentazione parametrica, il campo normale rimane lo stesso se $J_\tau > 0$ invece cambia verso se $J_\tau < 0$. Alla luce di quanto detto sopra, diamo la seguente:

Definizione 12.4.2. *Considerate due superfici orientabili ed equivalenti $P(u,v)$ e $P_1(\xi,\eta)$, esse si dicono equivalenti rispetto alla relazione $\overset{\circ}{\sim}$ quando:*

$$J_\tau > 0 \textit{ in } \overset{\circ}{T}.$$

Considerata una superficie orientabile $P(u,v)$ e la classe di equivalenza $[P(u,v)]$ rispetto a $\sim$, questa classe si decompone in due classi di equivalenza rispetto a $\overset{\circ}{\sim}$ ciascuna delle quali è detta un orientamento della superficie.

Esempio. Siano D un dominio limitato internamente connesso di $\mathbb{R}^2$, $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ e S il diagramma di f. Ovviamente la superficie cartesiana:

$$P : (x,y) \in D \to (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, \tag{12.16}$$

è una superficie orientabile; i due orientamenti possibili corrispondono al caso in cui i versori normali sono diretti verso l'alto, cioè quando:

$$(n(P_0),k) > 0, \ \forall P_0 \in P(\overset{\circ}{D}),$$

oppure al caso in cui i versori normali sono diretti verso il basso, cioè quando:

$$(n(P_0), k) < 0, \ \forall P_0 \in P(\overset{\circ}{D}).$$

Se si sceglie su S l'orientamento indotto dalla (12.16) si ha che:

$$\begin{aligned} n(P_0) &= \frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} i + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} j + \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} k = \\ &= n_1 i + n_2 j + n_3 k. \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$n_1 = (n(P_0), i) = \text{coseno dell'angolo formato da } n(P_0) \text{ e } i,$$

$$n_2 = (n(P_0), j) = \text{coseno dell'angolo formato da } n(P_0) \text{ e } j,$$

$$n_3 = (n(P_0), k) = \text{coseno dell'angolo formato da } n(P_0) \text{ e } k,$$

ed essendo $n_3 = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} > 0$, otteniamo che l'angolo formato da $n(P_0)$ e k è acuto quindi $P(x, y)$ orienta S verso l'alto.

Passiamo, ora, alle superfici dotate di bordo.

Definizione 12.4.3. *Siano X un aperto del piano uv e D un dominio limitato regolare, ad uno o più contorni, incluso in X. Si definisce superficie regolare con bordo una funzione:*

$$P : D \to \mathbb{R}^3,$$

che sia la restrizione a D di una funzione $P^*(u, v) \in C^1(X, \mathbb{R}^3)$, soddisfacente le seguenti due condizioni:

i) $P(u, v)$ è iniettiva su D;

ii) la matrice jacobiana $A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$ *ha rango due in* D.

Denotato con S *il sostegno di* $P(u,v)$, *l'immagine tramite* $P(u,v)$ *della frontiera di* D *si dice bordo della superficie e si denota con* ∂S.

Si noti che $\partial S = P(\partial D)$ è l'unione di un numero finito di curve regolari. E' facile provare che:

Una superficie regolare con bordo $P(u,v)$ *è anche orientabile.*

Si è visto che $P(u,v)$ determina un orientamento sulla superficie, mostriamo che $P(u,v)$ *determina un orientamento anche su* ∂S.
A tale scopo, tanto per fissare le idee, *supponiamo che* D *abbia un unico contorno*, cioè ∂D sia un'unica curva regolare a tratti.
Sia $\varphi(t)$ una curva regolare a tratti di sostegno ∂D e tale che il verso indotto da $\varphi(t)$ su ∂D sia concorde con l'orientamento positivo di ∂D (verso antiorario). Considerata la curva regolare a tratti $\widetilde{\varphi}(t) = P(\varphi(t))$, si ha che $\widetilde{\varphi}(t)$ ha come sostegno il bordo ∂S della superficie $P(u,v)$.
L'orientamento determinato da $\widetilde{\varphi}(t)$ su ∂S si denota con $+\partial S$ oppure $\partial^+ S$ e si dice **orientamento positivo del bordo relativo alla rappresentazione parametrica** $P(u,v)$**.**

Nel caso in cui D *è un dominio regolare limitato a* $n+1$ *contorni*, l'orientamento positivo del bordo di S si definisce in modo analogo.

Esempio. Se D è un dominio regolare limitato del piano uv (ad uno o più contorni) e $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, allora la funzione:

$$P(u,v) = (u, v, f(u,v)),\ (u,v) \in D,$$

è una superficie regolare con bordo.

12.5 Superfici cilindriche.

Nei prossimi due paragrafi tratteremo solo con curve semplici e regolari e, siccome tali curve sono univocamente determinate dal loro sostegno (cfr Osservazione 8.2.2) **chiameremo curva il loro sostegno.**

Definizione 12.5.1. *Sia* Γ *una curva piana semplice e regolare dello spazio* xyz*, si chiama superficie cilindrica generata da* Γ *il luogo dei punti dello spazio* xyz *la cui proiezione ortogonale sul piano contenente* Γ *appartiene a* Γ*. Dunque, la superficie cilindrica* S *generata da* Γ *è il luogo delle rette passanti per i punti di* Γ *e ortogonali al piano contenente* Γ*. Tali rette si chiamano generatrici di* S *e* Γ *si chiama direttrice di* S*.*

Sia Γ una curva del piano xy, sostegno della curva regolare $\varphi(u) = (x(u), y(u)), u \in [a, b]$, e sia S_1 la parte della superficie cilindrica S generata da Γ, compresa tra i piani di equazioni $z = c$ e $z = d$, $c < d$. Si noti che S_1 è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u, v) = (x(u), y(u), v), \;\; (u, v) \in [a, b] \times [c, d].$$

Esempio. Se Γ è la circonferenza del piano xy di centro $(0, 0)$ e raggio r, una rappresentazione parametrica regolare di Γ è data da:

$$\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi],$$

allora una rappresentazione parametrica della superficie cilindrica S generata da Γ è data da:

$$\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}. \\ z = v \end{cases}$$

Se consideriamo la parte S_1 di S compresa tra i piani di equazione $z = c$ e $z = d$, con $c < d$, e la funzione:

$$P(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v) \in C^1([0, 2\pi] \times [c, d], \mathbb{R}^3),$$

si ha che $S_1 = P([0, 2\pi] \times [c, d])$ e:

$$A = \begin{pmatrix} -r\sin u & 0 \\ r\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi, $E = |P_u|^2 = r^2 \sin^2 u + r^2 \cos^2 u = r^2 > 0$, $G = |P_v|^2 = 1$, $F = 0$, dunque $EG - F^2 = r^2 > 0$ su $[0, 2\pi] \times [c, d]$. Inoltre, $P(u, v)$ è invertibile su $]0, 2\pi[\times]c, d[$, conseguentemente $P(u, v)$ è una superficie regolare.

12.6 Superfici di rotazione.

Sia σ un semipiano dello spazio xyz avente come origine l'asse z e avente in comune con il piano xy il semiasse t di origine O. Sia Γ una curva semplice e regolare giacente su σ e priva di punti in comune con l'asse z o al più, se Γ è aperta, avente in comune con l'asse z solo gli estremi. Siano θ_0 l'anomalia del semiasse t e (r, θ_0, z) le coordinate cilindriche del generico punto P di Γ. Si osservi che i numeri r e z rappresentano le coordinate cartesiane di P nel sistema di riferimento $0tz$.
Consideriamo una rappresentazione parametrica regolare $\varphi(u) = (r(u), z(u))$, $u \in [a, b]$, di Γ (si noti che, per le ipotesi fatte su Γ, $r(u) > 0, \forall u \in]a, b[$).
Osserviamo che le coordinate cartesiane (x, y, z) del punto $\varphi(u) = (r(u), z(u))$ di Γ sono date da:

$$\begin{cases} x = r(u)\cos\theta_0 \\ y = r(u)\sin\theta_0 \\ z = z(u). \end{cases}$$

Sia S la superficie generata dalla rotazione di Γ, nel verso antiorario intorno all'asse z, di ampiezza $\alpha \in]0, 2\pi]$. Si dicono *meridiani di S* le curve che si ottengono intersecando S con i semipiani aventi come origine l'asse di rotazione z, le curve ottenute intersecando S con i piani di equazione $z = h$ sono dette *paralleli di S*.

Consideriamo la funzione:

$$P(u,\theta) = (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u))\,,\ \ (u,\theta) \in [a,b] \times [\theta_0, \theta_0 + \alpha],$$

ovviamente essa appartiene a $C^1\left([a,b] \times [\theta_0, \theta_0 + \alpha], \mathbb{R}^3\right)$ e il suo sostegno $P([a,b]\times[\theta_0,\theta_0+\alpha])$ coincide con S. Mostriamo che $P(u,\theta)$ è una superficie regolare.
Infatti:

$$P_u = (r'(u)\cos\theta, r'(u)\sin\theta, z'(u))$$

$$P_\theta = (-r(u)\sin\theta, r(u)\cos\theta, 0),$$

quindi:

$$E = |P_u|^2 = r'^2(u)\cos^2\theta + r'^2(u)\sin^2\theta + z'^2(u) = r'^2(u) + z'^2(u)$$

$$F = (P_u, P_\theta) = -r(u)r'(u)\cos\theta\sin\theta + r'(u)r(u)\sin\theta\cos\theta + 0 = 0$$

$$G = |P_\theta|^2 = r^2(u),$$

così:

$$EG - F^2 = (r'^2(u) + z'^2(u))r^2(u) > 0 \text{ in }]a,b[\times]\theta_0, \theta_0 + \alpha[.$$

Esempi.

1. Sia $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, con $a \geq 0$. La curva Γ del piano xz diagramma della funzione f ha equazione cartesiana:

   $$z = f(x),\ \ x \in [a,b].$$

   Una rappresentazione parametrica regolare di Γ è data da:

   $$\varphi(u) = (u, f(u)),\ u \in [a,b],$$

   conseguentemente, la funzione:

   $$P(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, f(u)),\ \ (u,\theta) \in [a,b] \times [0,\alpha]$$

   è una superficie regolare ed ha come sostegno la superficie S ottenuta dalla rotazione, nel verso antiorario intorno all'asse z, di ampiezza $\alpha \in]0, 2\pi[$, della curva Γ.

2. **Tronco di cono.** Sia s il segmento del piano xz avente equazione:

$$z = kx, \ x \in [a, b](a > 0).$$

La superficie S ottenuta dalla rotazione, di ampiezza 2π, di s intorno a z è il codominio della superficie regolare $P(u, \theta) = (u \cos\theta, u \sin\theta, ku)$, $(u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$.

3. **Superficie sferica.** Sia Γ la semicirconferenza del piano tz avente equazioni parametriche:

$$\begin{cases} r = R \sin\varphi, \\ z = R \cos\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Sia S la superficie generata dalla rotazione, di ampiezza 2π, di Γ intorno all'asse z. Ovviamente S è la superficie sferica di centro O e raggio R ed è il codominio della seguente funzione appartenente a $C^1([0, \pi] \times [0, 2\pi], \mathbb{R}^3)$:

$$P(\varphi, \theta) = (R \sin\varphi \cos\theta, R \sin\varphi \sin\theta, R \cos\varphi).$$

Facciamo vedere che $P(\varphi, \theta)$ è una superficie regolare. A tale scopo osserviamo che:

$$P_\varphi = (R \cos\varphi \cos\theta, R \cos\varphi \sin\theta, -R \sin\varphi),$$

e

$$P_\theta = (-R \sin\varphi \sin\theta, R \sin\varphi \cos\theta, 0),$$

quindi:

$$A = \begin{pmatrix} R \cos\varphi \cos\theta & -R \sin\varphi \sin\theta \\ R \cos\varphi \sin\theta & R \sin\varphi \cos\theta \\ -R \sin\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

e:

$$E = |P_\varphi|^2 = R^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta + R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi = R^2,$$

$$F = (P_\varphi, P_\theta) = 0,$$

$$G = |P_\theta|^2 = R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta = R^2 \sin^2\varphi,$$

così:

$$EG - F^2 = R^4 \sin^2\varphi > 0 \quad]0,\pi[\times[0,2\pi].$$

L'asserto è così dimostrato.

12.7 Area di una superficie.

Siano D un dominio regolare limitato del piano uv e $P(u,v) \in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ una superficie regolare. Denotato con S il sostegno di $P(u,v)$, si definisce *area della superficie $P(u,v)$ il numero reale positivo:*

$$\begin{aligned}
\text{area di } S \quad &= \int\int_D |P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)| \; du \; dv = \\
&= \int\int_D \sqrt{J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v)} \; du \; dv = \\
&= \int\int_D \sqrt{EG - F^2} \; du \; dv.
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Ricordiamo che, se $P_1(\xi,\eta) \in C^1(T,\mathbb{R}^3)$ è una riparametrizzazione di $P(u,v)$ e $\tau : T \to D$ è un cambiamento ammissibile di parametro, i.e. $P_1(\xi,\eta) = P(\tau(\xi,\eta))$, allora:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = J_\tau \left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right);$$

quindi, qualunque sia il punto $(\xi,\eta) \in \overset{\circ}{T}$, risulta:

$$\frac{\left| \frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \right|}{|J_\tau|} = \left| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right|;$$

conseguentemente, tramite il cambiamento di variabili $(u,v) = \tau(\xi,\eta)$, dalla (12.17) si ottiene che:

$$\begin{aligned}
\text{area di } S &= \int\!\!\int_D |P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)| \; du\; dv = \\
&= \int\!\!\int_T \frac{\left| \frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right|}{|J_\tau|} \, |J_\tau| \; d\xi\; d\eta = \qquad (12.18) \\
&= \int\!\!\int_T \left| \frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right| \; d\xi\; d\eta.
\end{aligned}$$

Dunque, *l'area di S non dipende dalla scelta del rappresentante nella classe d'equivalenza* $[P(u,v)]$.

Esempio 1. Siano D un dominio regolare limitato di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^1(D,\mathbb{R})$. Considerata la superficie regolare $P(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $(x,y) \in D$ e denotato con S il suo sostegno, si ha che:

$$\text{area di } S = \int\!\!\int_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \; dx\; dy.$$

Esempio 2.
Sia $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ definita nel settore circolare rappresentato in figura. Calcolare l'area della superficie S diagramma della funzione f:

$$\begin{aligned}
&\text{area}\, S = \\
&= \int\!\!\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \; dxdy = \\
&= \int\!\!\int_D \sqrt{1 + (2x+y)^2 + (x-2y)^2} \; dxdy =
\end{aligned}$$

$$= \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4xy+y^2+x^2-4xy+4y^2}\,dxdy =$$
$$= \int\int_D \sqrt{1+5x^2+5y^2}\,dxdy,$$

passando alle coordinate polari si ha che:

$$\text{area}\,S = \int\int_{[0,1]\times[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]} \sqrt{1+5\rho^2\cos^2\theta+5\rho^2\sin^2\theta}\cdot\rho d\rho d\theta =$$
$$\int\int_{[0,1]\times[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]} \sqrt{1+5\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+5\rho^2}\cdot\frac{10\rho}{10}d\rho =$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{10}\left[\frac{(1+5\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}\left[(1+5)^{\frac{3}{2}}-1\right] =$$
$$= \frac{\pi}{30}(6^{\frac{3}{2}}-1).$$

Esempio 3. Area di una superficie cilindrica.

Sia Γ una curva regolare del piano xy, sostegno della curva semplice e regolare $\varphi(u) = (x(u), y(u)), u \in [a,b]$; la superficie S avente come direttrice la curva Γ e come generatrici le rette passanti per Γ e ortogonali al piano xy ha rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \quad (u,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}. \\ z = v \end{cases}$$

La parte S_1 di S compresa tra i piani $z = c$ e $z = d$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \quad (u,v) \in [a,b]\times[c,d]. \\ z = v \end{cases}$$

Dunque $P(u,v) = (x(u), y(u), v) \in C^1([a,b]\times[c,d],\mathbb{R}^3)$ è una superficie regolare e ha come sostegno S_1. Notiamo che:

$$P_u = (x'(u), y'(u), 0), \quad P_v = (0,0,1),$$

quindi:

$$E = |P_u|^2 = x'^2(u) + y'^2(u), \quad F = 0, \quad G = |P_v|^2 = 1.$$

Allora:

$$\text{area}S_1 = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} \sqrt{EG - F^2}dudv = \int_c^d dv \int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}du =$$
$$= (d - c) \cdot l(\Gamma).$$

Concludendo, *l'area della superficie cilindrica:*

$$P(u, v) = (x(u), y(u), v) \in C^1([a, b] \times [c, d], \mathbb{R}^3)$$

è data da:

$$\text{area}S_1 = (d - c) \cdot l(\Gamma). \tag{12.19}$$

Esempio 4. Area di una superficie di rotazione.

Sia σ un semipiano dello spazio xyz avente come origine l'asse z e avente in comune con il piano xy il semiasse t di origine O. Sia θ_0 l'anomalia del semiasse t. Sia Γ una curva semplice e regolare giacente su σ. Se $\varphi(u) = (r(u), z(u)), u \in [a, b]$, è una rappresentazione parametrica regolare di Γ, allora la superficie S ottenuta dalla rotazione di Γ nel verso antiorario intorno all'asse z, di ampiezza $\alpha \in]0, 2\pi]$, è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u, \theta) = (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u)), (u, \theta) \in [a, b] \times [\theta_0, \theta_0 + \alpha].$$

Essendo:

$$P_u = \left(r'(u)\cos\theta, r'(u)\sin\theta, z'(u)\right), \quad P_\theta = (-r(u)\sin\theta, r(u)\cos\theta, 0),$$

si ha:

$$E = |P_u|^2 = r'^2(u) + z'^2(u), \quad F = (P_u, P_\theta) = 0, \quad G = |P_\theta|^2 = r^2(u);$$

allora:

$$\text{area}S = \int\int_{[a,b]\times[\theta_0,\theta_0+\alpha]} \sqrt{EG - F^2}dud\theta =$$
$$= \int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} d\theta \int_a^b r(u)\sqrt{r'^2(u) + z'^2(u)}du = \alpha \int_a^b r(u)\sqrt{r'^2(u) + z'^2(u)}du.$$

Concludendo, *l'area della superficie di rotazione:*

$$P(u,\theta) = (r(u)\cos\theta, r(u)\sin\,\theta, z(u))\,, (u,\theta) \in [a,b] \times [\theta_0, \theta_0+\alpha],$$

è data da:

$$\text{area}S = \alpha \int_a^b r(u)\sqrt{r'^2(u)+z'^2(u)}du. \tag{12.20}$$

Esempio 5. Sia Γ la curva del piano xz sostegno della curva regolare $\varphi(u) = (u, u^2)$, $u \in [0,2]$. La superficie S ottenuta dalla rotazione, di ampiezza 2π, di Γ intorno all'asse z è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u^2),\ (u,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Essendo:

$$P_u = (\cos\theta.\sin\theta, 2u),\ P_\theta = (-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$$

risulta:

$$E = |P_u|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 4u^2 = 1+4u^2, \quad F = 0,$$

$$G = u^2\sin^2\theta + u^2\cos^2\theta = u^2;$$

allora:

$$\text{area}\,S = \int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \sqrt{(1+4u^2)u^2}dud\theta = 2\pi\int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}du =$$

$$= 2\pi\int_0^2 \frac{8u}{8}(1+4u^2)^{\frac{1}{2}}du = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = ...$$

Esempio 6. Sia Γ la semicirconferenza del piano xz, sostegno della curva regolare $(R\sin\varphi, R\cos\varphi)$, $\varphi \in [0,\pi]$.
La superficie sferica S ottenuta dalla rotazione, di ampiezza 2π, di Γ intorno all'asse z è il sostegno della superficie regolare:

$$P(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),\ (\varphi,\theta) \in [0,\pi]\times[0,2\pi].$$

Osserviamo che:

$$P_\varphi = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi), \quad P_\theta = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0),$$

quindi:

$$E = |P_\varphi|^2 = R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + R^2\cos^2\varphi\,\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi = R^2,$$

$$G = |P_\theta|^2 = R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta = R^2\sin^2\varphi,$$

$$F = (P_\varphi, P_\theta) = -R^2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta + R^2\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta = 0.$$

Allora:

$$\begin{aligned}\operatorname{area} S &= \int\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{R^4\sin^2\varphi}\,d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^2\sin\varphi d\varphi = \\ &= 2\pi R^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 4\pi R^2.\end{aligned}$$

Capitolo 13

Integrali superficiali.

13.1 Integrale superficiale di una funzione.

Siano D un *dominio regolare limitato* del piano uv, $P(u,v) \in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ una superficie regolare e S il sostegno di $P(u,v)$. Se $f : S \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in S, allora la funzione $f(P(u,v))|P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)|$ è continua in D, quindi ha senso considerare l'integrale seguente:

$$\int\int_D f(P(u,v))\ |P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)|\ du\ dv. \tag{13.1}$$

Ricordiamo che, se $P_1(\xi,\eta) \in C^1(T,\mathbb{R}^3)$ è una riparametrizzazione di $P(u,v)$ e $\tau : T \to D$ è un cambiamento ammissibile di parametro, i.e. $P_1(\xi,\eta) = P(\tau(\xi,\eta))$, allora:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = J_\tau \left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right);$$

quindi, qualunque sia il punto $(\xi,\eta) \in \overset{\circ}{T}$, risulta:

$$\frac{\left| \frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \right|}{|J_\tau|} = \left| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right|;$$

conseguentemente, tramite il cambiamento di variabili $(u,v) = \tau(\xi,\eta)$, dalla (13.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int\int_D f(P(u,v))\ |P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)|\ du\ dv = \\ &= \int\int_T f(P_1(\xi,\eta))\ \left|\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta}\right|\ d\xi\ d\eta. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Abbiamo, quindi, provato che:

Teorema 13.1.1. *Qualunque sia la superficie $P_1(\xi,\eta) \in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ equivalente a $P(u,v)$, risulta:*

$$\begin{aligned} &\int\int_D f(P(u,v))\ |P_u(u,v) \wedge P_v(u,v)|\ du\ dv = \\ &= \int\int_T f(P_1(\xi,\eta))\ \left|\frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|\ d\xi\ d\eta. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Dunque, l'integrale che compare nella (13.1) non varia al variare della rappresentazione parametrica di S; esso si chiama *integrale della funzione f esteso alla superficie S* e si denota con uno dei simboli:

$$\int_S f\ d\sigma, \quad \int_S f(P)\ d\sigma.$$

Essendo $|P_u \wedge P_v| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{EG - F^2}$, si ha che:

$$\begin{aligned} &\int_S f\ d\sigma = \\ &= \int\int_D f(P(u,v))\sqrt{J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v)}\ du\ dv = \\ &= \int\int_D f(P(u,v))\sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\ du\ dv. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Siano D un dominio regolare limitato del piano uv, $P(u,v) \in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ una superficie regolare e S il sostegno di $P(u,v)$.

Ovviamente, se $f(x,y,z) = 1$ in S allora:

$$\int_S f \; d\sigma = \int_S \; d\sigma = \text{area } S.$$

In pratica, gli integrali superficiali sono degli integrali doppi quindi godono di tutte le loro proprietà, richiamiamone alcune.

I) Qualunque siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in C^0(S,\mathbb{R})$, vale la seguente *proprietà di linearità dell'integrale*:

$$\int_S (\alpha f_1 + \beta f_2) \; d\sigma = \alpha \int_S f_1 \; d\sigma + \beta \int_S f_2 \; d\sigma. \tag{13.5}$$

II) Se $f \in C^0(S,\mathbb{R})$ esiste un punto $Q \in S$ tale che:

$$\int_S f(P) \; d\sigma = f(Q) \int_S \; d\sigma = f(Q) \text{ area } S. \tag{13.6}$$

III) Se $f \in C^0(S,\mathbb{R})$ allora:

$$\left| \int_S f(P) \; d\sigma \right| \leq \int_S |f(P)| \; d\sigma. \tag{13.7}$$

Esempio 1. Calcolare l'integrale superficiale della funzione:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

esteso alla superficie conica S ottenuta dalla rotazione, di ampiezza 2π, intorno all'asse z del segmento del piano xz di equazione $z = x, \; x \in [0,1]$.

Osservato che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u), \; (u,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi],$$

iniziamo a calcolare $EG - F^2$.

Essendo $P_u = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$ e $P_\theta = (-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$, si ha che:

$$E = |P_u|^2 = cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 = 2,\ G = |P_\theta|^2 = u^2\sin^2\theta + u^2 cos^2\theta = u^2, F = 0,$$

quindi $\sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{2}$. Allora dalla (13.4) si ha che:

$$\int_S f\ d\sigma = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (u^2 cos^2\theta + u^2\sin^2\theta + u^2)u\sqrt{2}\ du\ d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2\sqrt{2}\ u^3\ du = 2\pi 2\sqrt{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

Esempio 2. Calcolare l'integrale superficiale della funzione:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2R},$$

con $R > 0$, esteso alla superficie sferica S di equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ y \geq 0.$$

Osservato che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(\varphi, \theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),\ (\varphi, \theta) \in [0, \pi]^2,$$

iniziamo a calcolare $EG - F^2$.

Essendo:

$$P_\varphi = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi) \quad \text{e} \quad P_\theta = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0),$$

si ha che:

$$E = |P_\varphi|^2 = R^2 cos^2\varphi cos^2\theta + R^2 cos^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi = R^2, \quad F = 0,$$

$$G = |P_\theta|^2 = R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi cos^2\theta = R^2\sin^2\varphi,$$

quindi $\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$. Allora dalla (13.4) si ha che:

$$\begin{aligned}\int_S f\ d\sigma &= \int\int_{[0,\pi]^2} \frac{R^2\sin^2\varphi cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{2R} R^2\sin\varphi d\varphi\ d\theta = \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \frac{R^3}{2}\sin^3\varphi\ d\varphi,\end{aligned}$$

da cui, essendo:

$$\begin{aligned}\int \sin^3\varphi d\varphi &= \int \sin^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \int (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi = \\ &= \int \sin\varphi d\varphi - \int \cos^2\varphi D(-\cos\varphi) d\varphi = \\ &= -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} + c,\end{aligned}$$

si ha che:

$$\begin{aligned}\int_S f\ d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \frac{R^3}{2}\sin^3\varphi\ d\varphi = \frac{\pi}{2}R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi\ d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2}R^3\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}R^3(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = \pi R^3.\end{aligned}$$

Esempio 3. Calcolare l'integrale superficiale della funzione:

$$f(x,y,z) = \frac{z^2tg^2x}{\sqrt{1+e^{2x}}},$$

esteso alla superficie cilindrica S avente per direttrice la curva, del piano xy, di equazione $y=e^x,\ x\in[0,\frac{\pi}{4}]$, e compresa tra i piani di equazione $z=0$ e $z=1$.

Osservato che S è il sostegno della superficie regolare $P(u,v)=(u,e^u,v),\ (u,v)\in[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]$, iniziamo a calcolare $EG-F^2$.

Essendo $P_u=(1,e^u,0)$ e $P_v=(0,0,1)$, si ha che:

$$E=|P_u|^2=1+e^{2u},\quad G=1,\quad F=0,$$

quindi $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + e^{2u}}$. Allora dalla (13.4) abbiamo che:

$$\int_S f\ d\sigma = \int\int_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \frac{v^2 tg^2 u}{\sqrt{1+e^{2u}}} \sqrt{1+e^{2u}}\ du\ dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 u du \int_0^1 v^2 dv,$$

da cui, essendo $tg^2 u = \frac{sen^2 u}{cos^2 u} = \frac{1-cos^2 u}{cos^2 u} = \frac{1}{cos^2 u} - 1 = D(tgu - u)$, otteniamo:

$$\int_S f\ d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 u du \int_0^1 v^2 dv = \Big[tgu - u\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{v^3}{3}\right]_0^1 = (tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})\frac{1}{3} = (1 - \frac{\pi}{4})\frac{1}{3}.$$

13.2 Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

Siano $v(P) = (X(P), Y(P), Z(P))$ un campo vettoriale continuo nell'aperto A di $\mathbb{R}^3$, D un dominio regolare limitato del piano uv e $P(u, v)$ una superficie regolare orientabile, di dominio base D, il cui sostegno S sia incluso in A. Denotato con $n(P)$ il versore normale relativo alla superficie regolare orientabile $P(u, v)$ nel generico punto P di S, la funzione:

$$f\ :\ P \in S \to (v(P), n(P)) \in \mathbb{R}$$

è continua in S.

Ricordiamo che, per ogni $(u, v) \in D$, il versore normale positivo alla superficie nel punto $P(u, v)$ è dato da:

$$n(P(u,v)) = \frac{P_u \wedge P_v}{|P_u \wedge P_v|} =$$

$$= \frac{J_1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\ i + \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\ j + \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}}\ k;$$

allora abbiamo che:

$$f(P(u,v)) = (v(P(u,v)), n(P(u,v))) =$$

$$= X(P(u,v))\frac{J_1(u,v)}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}} + Y(P(u,v))\frac{J_2(u,v)}{\sqrt{\cdots}} + Z(P(u,v))\frac{J_3(u,v)}{\sqrt{\cdots}},$$

quindi:

$$\int_S f\ d\sigma = \int\int_D f(P(u,v))\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\ du\ dv =$$
$$= \int\int_D [X(P(u,v))J_1 + Y(P(u,v))J_2 + Z(P(u,v))J_3]\ du\ dv. \tag{13.8}$$

L'integrale (13.8) si chiama *flusso del campo vettoriale* $v(P)$ *attraverso la superficie* S *nella direzione* $n(P)$.

Si vede facilmente che l'integrale (13.8) non cambia se al posto di $P(u,v)$ si considera $P_1(\xi,\eta)$, con $P_1 \overset{\circ}{\sim} P$; infatti, in questo caso risulta:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = J_\tau \left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\right),$$

con $J_\tau > 0$.

Definizione 13.2.1. *Siano* $X(P), Y(P)$ *e* $Z(P)$ *tre funzioni reali, continue nell'aperto* A *di* $\mathbb{R}^3$. *L'espressione:*

$$X(P)\ dy\ dz + Y(P)\ dz\ dx + Z(P)\ dx\ dy, \tag{13.9}$$

si chiama forma differenziale quadratica di coefficienti X, Y, Z.

Siano D un dominio regolare limitato del piano uv, $P(u,v) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ una superficie regolare orientabile, $S = P(D) \subset A$ e $+S$ la pagina positiva di S determinata da $P(u,v)$. Denotato con $v(P) = (X(P), Y(P), Z(P))$ il campo vettoriale avente come componenti i coefficienti della forma differenziale quadratica (13.9), si dice *integrale superficiale della forma* *differenziale quadratica (13.9) esteso alla pagina positiva* $+S$*,* il flusso del campo vettoriale $v(P)$ attraverso S nella direzione $n(P) = \dfrac{P_u \wedge P_v}{|P_u \wedge P_v|}$, cioè:

$$\int_{+S} X(P)\ dy\ dz + Y(P)\ dz\ dx + Z(P)\ dx\ dy = \int_S (v(P), n(P))\ d\sigma =$$

$$= \int\int_D [X(P(u,v))J_1(u,v) + Y(P(u,v))J_2(u,v) + Z(P(u,v))J_3(u,v)]\ du\ dv. \tag{13.10}$$

Esempi.

1. Sia S il diagramma della funzione:

$$g(x,y) = xe^y, \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

Orientiamo S nel verso positivo dell'asse z, denotiamo con $+S$ tale orientamento e con $n(P)$ il versore normale positivo nel generico punto P.

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x,y,z) = x^2\ i + y\ j + z\ k$ attraverso la superficie orientata $+S$.

Iniziamo con l'osservare che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,v) = (u, v, ue^v), \quad (u,v) \in [0,1]^2,$$

quindi:

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^v & ue^v \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = -e^v, \quad J_2 = -ue^v, \quad J_3 = 1.$$

Essendo $J_3 > 0$, l'orientamento indotto da $P(u,v)$ su S coincide con l'orientamento prefissato su S. Allora:

$$\int_S (v(P), n(P))\, d\sigma = \int\int_{[0,1]^2} [u^2(-e^v) + v(-ue^v) + ue^v]\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 du \int_0^1 [-u^2e^v - uve^v + ue^v]\, dv = \int_0^1 \left[-u^2e^v - u(v-1)e^v + ue^v\right]_0^1\, du =$$

$$= \int_0^1 (-u^2e + u^2 - u + u(e-1))\, du = \cdots$$

2. Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z, di un angolo $\alpha = 2\pi$, il segmento del piano xz di equazione cartesiana $z = x,\ x \in [1,2]$. Orientiamo S nel verso negativo dell'asse z, denotiamo con $+S$ tale orientamento e con $n(P)$ il versore normale positivo nel generico punto P.

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x,y,z) = x^2y^2\ k$ attraverso la superficie orientata $+S$.

Iniziamo con l'osservare che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u), \quad (u,\theta) \in [1,2] \times [0,2\pi],$$

quindi:

$$A(u,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -u\sin\theta \\ \sin\theta & u\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = -u\cos\theta, \quad J_2 = -u\sin\theta, \quad J_3 = u.$$

Essendo $J_3 > 0$, l'orientamento indotto da $P(u,\theta)$ su S è discorde con l'orientamento prefissato su S. Allora:

$$\int_S (v(P), n(P))\, d\sigma = -\int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} \left(u^2cos^2\theta\ u^2\sin^2\theta\ u\right)\, du\, d\theta = \cdots$$

3. Sia S la porzione di piano, di equazione cartesiana $z = x + y + 1$, che si proietta ortogonalmente sul piano xy nel triangolo T di vertici $(0,0),(2,0),(0,1)$. Orientiamo S nel verso positivo dell'asse z, denotiamo con $+S$ tale orientamento e con $n(P)$ il versore normale positivo nel generico punto P.

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x,y,z) = x(1+y)\ i + (z+x)\ k$ attraverso la superficie orientata $+S$.

Iniziamo con l'osservare che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,v) = (u, v, u+v+1), \quad (u,v) \in T = \left\{(u,v)\ :\ u \in [0,2], v \in \left[0, -\frac{1}{2}u + 1\right]\right\},$$

quindi:

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = -1, \quad J_2 = -1, \quad J_3 = 1.$$

Essendo $J_3 > 0$, l'orientamento indotto da $P(u,v)$ su S coincide con l'orientamento prefissato su S. Allora:

$$\int_S (v(P), n(P))\ d\sigma = \int\int_T [u(1+v)(-1) + ((u+v+1)+u)\,1]\ du\ dv =$$

$$= \int_0^2 du \int_0^{-\frac{1}{2}u+1} [-u - uv + 2u + v + 1]\ dv =$$

$$= \int_0^2 du \int_0^{-\frac{1}{2}u+1} [u - uv + v + 1]\ dv =$$

$$= \int_0^2 \left[uv - u\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} + v\right]_0^{-\frac{1}{2}u+1} du = \cdots$$

4. Sia $S = [0,1]^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ la superficie piana contenuta nel piano xy. Orientiamo S nel verso negativo dell'asse z, denotiamo con $+S$ tale orientamento e con $n(P)$ il versore normale positivo nel generico punto P.

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x,y,z) = x^2\, i + x^3 y\, j + \frac{1+z}{1+x+y}\, k$ attraverso la superficie orientata $+S$.

Iniziamo con l'osservare che S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,v) = (u,v,0), \quad (u,v) \in [0,1]^2,$$

quindi:

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 1.$$

Essendo $J_3 > 0$, l'orientamento indotto da $P(u,v)$ su S è discorde con l'orientamento prefissato su S. Allora:

$$\int_S (v(P), n(P))\, d\sigma = -\int\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1+u+v}\, du\, dv =$$

$$= -\int_0^1 du \int_0^1 \frac{1}{1+u+v}\, dv = -\int_0^1 [log(1+u+v)]_0^1\, du =$$

$$= -\int_0^1 log(2+u)du + \int_0^1 log(1+u)du = \cdots$$

5. Sia S la porzione di paraboloide, di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$, che si proietta ortogonalmente sul piano xy nella corona circolare C di centro O e raggi 1 e 2. Orientiamo S nel verso negativo dell'asse z, denotiamo con $+S$ tale orientamento e con $n(P)$ il versore normale positivo nel generico punto P.

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $v(x, y, z) = \frac{y}{2x^2}\ i + e^x\ j + z\ k$ attraverso la superficie orientata $+S$.

Iniziamo con l'osservare che S si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z, di un angolo $\alpha = 2\pi$, la curva del piano xz di equazione $z = x^2, x \in [1, 2]$; dunque, S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u, \theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u^2), \quad (u, \theta) \in [1, 2] \times [0, 2\pi],$$

quindi:

$$A(u, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -u\sin\theta \\ \sin\theta & u\cos\theta \\ 2u & 0 \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = -2u^2\cos\theta, \quad J_2 = -2u^2\sin\theta, \quad J_3 = u.$$

Essendo $J_3 > 0$, l'orientamento indotto da $P(u, v)$ su S è discorde con l'orientamento prefissato su S. Allora:

$$\int\limits_S (v(P), n(P))\ d\sigma =$$

$$= -\int\int\limits_{[1,2]\times[0,2\pi]} \left(\frac{u\sin\theta}{2u^2cos^2\theta}(-2u^2\cos\theta) + e^{u\cos\theta}(-2u^2\sin\theta) + u^2u\right)\ du\ d\theta =$$

$$= -\int\int\limits_{[1,2]\times[0,2\pi]} \left(-u\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - e^{u\cos\theta}2u^2\sin\theta + u^3\right)\ du\ d\theta =$$

$$= -\int\int\limits_{[1,2]\times[0,2\pi]} uD(log\cos\theta)\ du\ d\theta - \int\int\limits_{[1,2]\times[0,2\pi]} 2u\ e^{u\cos\theta}(-u\sin\theta)\ du\ d\theta +$$

$$-\int\int\limits_{[1,2]\times[0,2\pi]} u^3\ du\ d\theta =$$

$$= -\int_1^2 udu\int_0^{2\pi} D(log\cos\theta)\ d\theta - \int_1^2 2u\ du\int_0^{2\pi} D(e^{u\cos\theta})\ d\theta - \int_1^2 u^3du\int_0^{2\pi}\ d\theta =$$

$$= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 [log\cos\theta]_0^{2\pi} - \int_1^2 2u\left[e^{u\cos\theta}\right]_0^{2\pi}\ du - \left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 2\pi =$$

$$= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 (log1 - log1) - \int_1^2 2u\,(e^u - e^u)\ du - \frac{15}{4}2\pi = -\frac{15}{2}\pi.$$

Si noti che, si ottiene lo stesso risultato se si considera la superficie regolare orientabile $P(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u,v) \in C$.

Infatti in questo caso:

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix},$$

e:

$$J_1 = -2u, \quad J_1 = -2v, \quad J_3 = 1.$$

Quindi:

$$\int_S (v(P), n(P))\ d\sigma = -\int\int_C \left(\frac{v}{2u^2}(-2u) + e^u(-2v) + u^2 + v^2 \right)\ du\ dv,$$

da cui, passando a coordinate polari si ottiene che:

$$\int_S (v(P), n(P))\ d\sigma =$$

$$= -\int \int_{[1,2]\times[0,2\pi]} \left(\frac{\rho \sin\theta}{2\rho^2 cos^2\theta}(-2\rho^2\cos\theta) + e^{\rho\cos\theta}(-2\rho^2\sin\theta) + \rho^2\rho \right)\ d\rho\ d\theta,$$

che è l'integrale che abbiamo trovato prima.

13.3 Teorema di Stokes nello spazio.

Enunciamo il seguente:

Teorema 13.3.1. (**Teorema di Stokes nello spazio**) *Siano D un dominio regolare limitato del piano uv e A un aperto di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo una superficie regolare $P(u,v)$ dotata di bordo, di base D, il cui sostegno S sia incluso in A e un campo vettoriale $v(P) = X(P)\ i + Y(P)\ j + Z(P)\ k$ di classe C^1 nell'aperto A. Per ogni punto $P \in S$, denotiamo con $n(P)$ il versore normale alla superficie $P(u,v)$ e con $T(P)$ il versore tangente a $+\partial S$, dove $+\partial S$ indica l'orientamento positivo del bordo di S relativo a $P(u,v)$.*

Allora:

$$\int\limits_S (rotv(P), n(P))\ d\sigma = \int\limits_{\partial S} (v(P), T(P))\ ds. \tag{13.11}$$

La (13.11) si esprime dicendo che: *il flusso del rotore del campo vettoriale $v(P)$ nella direzione del versore normale relativo a $P(u,v)$ è uguale alla circuitazione di $v(P)$ lungo il bordo di S orientato nel verso positivo relativo a $P(u,v)$.*

Esempio.
Calcolare il flusso del rotore del vettore:

$$\underline{v} = x^2 i - zk,$$

attraverso la superficie S rappresentata in figura, la cui pagina positiva sia quella individuata dai versori normali formanti un angolo acuto con il semiasse negativo delle z.

L'equazione della sfera di centro $(0,1,1)$ e raggio 1 è data da:

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1,$$

allora la superficie S è definita dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z \leqslant \frac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{13.12}$$

Osserviamo che il bordo di S, ∂S, è la circonferenza giacente sul piano di equazione $z = \frac{1}{2}$ avente centro nel punto $(0,1,\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}$; infatti, dal sistema (13.12) si ricava per $z = \frac{1}{2}$:

$$x^2 + (y-1)^2 + (\frac{1}{2} - 1)^2 = 1,$$

cioè:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

quindi, ∂S è il sostegno della curva regolare:

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{1}{2}\right),\ \ t \in [0, 2\pi]. \tag{13.13}$$

Osserviamo che dalla (13.13) si ricava che:

$$\varphi(0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2}),$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = (0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$\varphi(\pi) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2}),$$

allora il verso indotto su ∂S dalla (13.13) è quello antiorario, denotiamolo con $+\partial S$. Per quanto detto in precedenza la pagina individuata da $+\partial S$ e cioè la pagina su cui cammina un osservatore che percorre ∂S nel verso di

$+\partial S$ lasciando i punti di S alla sua sinistra, è opposta alla pagina positiva prefissata. Allora:

$$\begin{aligned}
\int_S (\mathrm{rot} v, n) d\sigma &= -\int\limits_{\partial S} (v(P), T(P))\ ds = -\int\limits_{+\partial S} X dx + Y dy + Z dz = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} \cos^2 t \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right) + 0 \right] dt = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 t \sin t dt = \frac{\sqrt{3}}{8} \left[-\cos^3 t \right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Capitolo 14

Integrali tripli.

14.1 Formule di riduzione per gli integrali tripli.

Definizione 14.1.1. *Sia D un dominio limitato e misurabile del piano xy. Siano $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ funzioni reali, continue nel dominio D, tali che:*

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D \text{ e } z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)]\}, \tag{14.1}$$

si chiama dominio normale rispetto al piano xy di base D relativo alle funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$.

Se $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ appartengono a $C^1(D, \mathbb{R})$ allora E si dice dominio regolare rispetto al piano xy.

In modo analogo si definiscono i domini normali rispetto ai piani xz e yz.

Ovviamente:

L'insieme E è misurabile secondo Peano - Jordan e risulta:

$$m_3(E) = \int\int_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) \, dx \, dy.$$

Teorema 14.1.2. (Formula di riduzione per gli integrali tripli) *Se E è il dominio dello spazio xyz dato dalla* (14.1) *e* $f \in C^0(E, \mathbb{R})$*, allora:*

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int\int_D\ dx\ dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\ dz.$$

Inoltre, se $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [a,b]\ e\ y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$ *è un dominio normale rispetto all'asse x, si ha che:*

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b\ dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\ dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\ dz.$$

Esempio 1. Calcolare il volume del tetraedro H delimitato dai tre piani coordinati e dal piano $x + y + z = 1$.
Siccome:

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], y \in [0, 1-x], z \in [0, 1-x-y]\right\},$$

per le formule di riduzione si ha che:

$$\begin{aligned}
m_3(H) &= \int\int\int_H dxdydz = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(1 - x - x + x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)dx = ...
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_T e^{x+y+z} dxdydz,$$

dove T denota la piramide quadrangolare avente per vertice O e come base il quadrilatero del piano $y = a, a > 0$, di vertici $(0,a,0), (0,a,a), (a,a,0)$, $(a,a,2a)$.

Iniziamo a calcolare l'equazione del piano passante per i punti $(0,0,0)$, $(0,a,a)$, $(a,a,2a)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \\ a & a & 2a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & a & a \\ a & a & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ a & 2a \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 2a \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & a \end{vmatrix} z =$$

$$= (2a^2 - a^2)x - (-a^2)y - a^2 z = a^2 x + a^2 y - a^2 z = 0,$$

da cui $x + y - z = 0$, cioè:

$$z = x + y.$$

Allora la piramide T si può guardare come dominio normale rispetto al piano xy relativo alle funzioni $\varphi(x,y) = 0$ e $\psi(x,y) = x + y$ definite nel dominio:

$$D = \{(x,y) \in [0,a] \times \mathbb{R} : x \leqslant y \leqslant a\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,a] \text{ e } y \in [x,a]\right\}.$$

Dunque, per le formule di riduzione si ha che:

$$\int\int\int_T e^{x+y+z} dxdydz = \int_0^a dx \int_x^a dy \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz =$$

$$= \int_0^a e^x dx \int_x^a e^y dy \int_0^{x+y} e^z dz = \int_0^a e^x dx \int_x^a e^y \left[e^z\right]_0^{x+y} dy =$$

$$= \int_0^a e^x dx \int_x^a e^y (e^{x+y} - 1) dy =$$

$$= \int_0^a e^x dx \int_x^a (e^{x+2y} - e^y) dy = \int_0^a e^x \left[\frac{1}{2} e^{x+2y} - e^y\right]_x^a dx =$$

$$= \int_0^a e^x \left(\frac{1}{2} e^{x+2a} - \frac{1}{2} e^{x+2x} - e^a + e^x\right) dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{2} e^{2x+2a} - \frac{1}{2} e^{4x} - e^{x+a} + e^{2x}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x+2a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} - e^{x+a} + \frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^a dx =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2a+2a} - \frac{1}{4}e^{2a} - \frac{1}{8}e^{4a} + \frac{1}{8}e^{0} - e^{2a} + e^{a} + \frac{1}{2}e^{2a} - \frac{1}{2}e^{0} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{4a} - \frac{1}{4}e^{2a} - \frac{1}{8}e^{4a} + \frac{1}{8} - e^{2a} + e^{a} + \frac{1}{2}e^{2a} - \frac{1}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{4a} + \left(-\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) e^{2a} + e^{a} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}e^{4a} - \frac{3}{4}e^{2a} - \frac{3}{8} + e^{a}.$$

14.2 Formule di Gauss e teorema della divergenza nello spazio.

Definizione 14.2.1. *Un dominio T connesso e limitato dello spazio xyz, si dice* **dominio regolare** se soddisfa le seguenti due condizioni:

1) *T è decomponibile in un numero finito di domini $T_1, \cdots, T_n$, privi di punti interni in comune, ognuno dei quali è regolare rispetto ad uno dei piani coordinati.*

2) *Esistono m superfici regolari dotate di bordo $P_1(u_1, v_1), \cdots, P_m(u_m, v_m)$, i cui sostegni $S_1, \cdots, S_m$, hanno in comune al più punti dei loro bordi e sono tali che:*

$$\partial T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i.$$

Ogni S_i si chiama faccia della frontiera di T, ∂T; su ogni faccia S_i riguarderemo come faccia positiva, $+S_i$, quella rivolta verso l'esterno di T, dunque:

$$+\partial T = (+S_1) \cup \cdots \cup (+S_m).$$

Teorema 14.2.2. (**Formule di Gauss nello spazio**) *Se T è un dominio regolare dello spazio xyz e f, g, h sono funzioni reali definite in T tali che $f, g, h, f_x, g_y, h_z \in C^0(T, \mathbb{R})$, allora valgono le seguenti formule:*

$$\int\int\int_T f_x(x,y,z)dxdydz = \int_{+\partial T} f(x,y,z)\ dydz = \int_{\partial T} (f(x,y,z)i, \nu_e)d\sigma,$$

$$\int\int\int_T g_y(x,y,z)dxdydz = \int_{+\partial T} g(x,y,z)\ dzdx = \int_{\partial T} (g(x,y,z)j, \nu_e)d\sigma,$$

$$\int\int\int_T h_z(x,y,z)dxdydz = \int_{+\partial T} h(x,y,z)\ dxdy = \int_{\partial T} (h(x,y,z)k, \nu_e)d\sigma,$$

dove con ν_e si denota il campo normale a ∂T orientato verso l'esterno del dominio T.

Dalle formule di Gauss segue immediatamente il seguente:

Teorema 14.2.3. (**Teorema della divergenza nello spazio**) *Se T è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, $v = Xi + Yj + Zk \in C^1(T, \mathbb{R}^3)$ e ν_e è il versore normale esterno a T, allora:*

$$\int\int\int_T (\mathrm{div} v) dxdydz = \int_{\partial T} (v, \nu_e) d\sigma = \int_{+\partial T} X dydz + Y dzdx + Z dxdy,$$

i.e., *l'integrale della* div$v$ *esteso a T è uguale al flusso di v uscente dalla ∂T.*

Dimostrazione. Usufruendo delle formule di Gauss si ha che:

$$\begin{aligned}\int\int\int_T \mathrm{div} v \; dxdydz &= \int\int\int_T (X_x + Y_y + Z_z) dxdydz = \\ &= \int_{\partial T} (X\; i, \nu_e) d\sigma + \int_{\partial T} (Y\; j, \nu_e) d\sigma + \int_{\partial T} (Z\; k, \nu_e) d\sigma = \\ &= \int_{\partial T} (v, \nu_e) d\sigma.\end{aligned}$$

□

Esempio 1. Siano $T = [0, 1]^3$ e $v(x, y, z) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$. Calcolare il flusso di v uscente da T.
Iniziamo a calcolare il flusso di v uscente da T senza usufruire del teorema della divergenza.
Occupiamoci della frontiera di T:

$$S_1 : \begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_1 = J_2 = 0, J_3 = 1; n = k = -\nu_e, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_1 = J_2 = 0, J_3 = 1; n = k = \nu_e, \\ z = 1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x = u, \\ y = 0, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_1 = J_3 = 0, J_2 = -1; n = -j = \nu_e, \\ z = v \end{cases}$$

$$S_4: \begin{cases} x = u, \\ y = 1, \quad (u,v) \in [0,1]^2, \\ z = v \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_1 = J_3 = 0, J_2 = -1; n = -j = -\nu_e,$$

$$S_5: \begin{cases} x = 0, \\ y = u, \quad (u,v) \in [0,1]^2, \\ z = v \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_1 = 1, J_2 = J_3 = 0; n = i = -\nu_e,$$

$$S_6: \begin{cases} x = 1, \\ y = u, \quad (u,v) \in [0,1]^2, \\ z = v \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_1 = 1, J_2 = J_3 = 0; n = i = \nu_e.$$

Calcoliamo il flusso di v uscente dalla ∂T:

$$\int_{\partial T} (v, \nu_e) d\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int_{S_i} (v, \nu_e) d\sigma = -\int\int_{[0,1]^2} \left[u^2 \cdot 0 + v^2 \cdot 0 + 0 \cdot 1\right] dudv +$$

$$+\int\int_{[0,1]^2} \left[u^2 \cdot 0 + v^2 \cdot 0 + 1 \cdot 1\right] dudv + \int\int_{[0,1]^2} \left[u^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + v^2 \cdot 0\right] dudv +$$

$$-\int\int_{[0,1]^2} \left[u^2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + v^2 \cdot 0\right] dudv - \int\int_{[0,1]^2} \left[0 \cdot 1 + u^2 \cdot 0 + v^2 \cdot 0\right] dudv +$$

$$+\int\int_{[0,1]^2} \left[1 \cdot 1 + u^2 \cdot 0 + v^2 \cdot 0\right] dudv =$$

$$= 0 + 1 + 0 - (-1) - 0 + 1 = 3.$$

Ora, calcoliamo il flusso di v uscente dalla ∂T applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial T} (v, \nu_e) d\sigma = \int\int\int_T \operatorname{div} v \, dxdydz = \int\int\int_{[0,1]^3} (2x + 2y + 2z) dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (2x + 2y + 2z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left[2xz + 2yz + z^2\right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (2x + 2y + 1) dy = \int_0^1 \left[2xy + y^2 + y\right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (2x+1+1)dx = \left[x^2+2x\right]_0^1 = 1+2 = 3.$$

Esempio 2. Sia H il cilindro avente come base il cerchio C di centro O e raggio R, compreso tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = h > 0$. Sia $v = x^3 i + yx^2 j + x^2 z k$. Calcolare il flusso di v uscente da ∂H.
Applichiamo il teorema della divergenza. Osserviamo che:

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C \text{ e } z \in [0,h]\right\},$$

e:

$$\text{div}v = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2,$$

allora:

$$I = \int_{\partial H} (v, \nu_e) d\sigma = \int\int\int_H 5x^2 dxdydz =$$

$$= \int\int_C 5x^2 dxdy \int_0^h dz = 5h \int\int_C x^2 dxdy,$$

passando a coordinate polari, $\tau(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, si ha che $C = \tau([0,R]\times[0,2\pi])$ quindi:

$$I = 5h \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \rho^2 \cos^2\theta \rho d\rho d\theta = 5h \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \int_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= 5h \left[\frac{\cos\theta\sin\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = 5h\pi\frac{R^4}{4}.$$

Ricordiamo che:

$$\int \cos^2\theta d\theta = \int \cos\theta D(\sin\theta) d\theta = \cos\theta\sin\theta + \int \sin^2\theta d\theta =$$

$$= \cos\theta\sin\theta + \int (1-\cos^2\theta) d\theta =$$

$$= \cos\theta\sin\theta + \theta - \int \cos^2\theta d\theta,$$

da cui si ricava:

$$2\int \cos^2\theta d\theta = \cos\theta\sin\theta + \theta \Rightarrow \int \cos^2\theta d\theta = \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} + \frac{\theta}{2}.$$

Teorema 14.2.4. (**Formule di integrazione per parti per gli integrali tripli**) *Siano T un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ e $f, g \in C^1(T, \mathbb{R})$.*
Allora:

$$\int\int\int_T fg_x dxdydz = \int_{+\partial T} fgdydz - \int\int\int_T f_x gdxdydz, \tag{14.2}$$

$$\int\int\int_T fg_y dxdydz = \int_{+\partial T} fgdzdx - \int\int\int_T f_y gdxdydz, \tag{14.3}$$

$$\int\int\int_T fg_z dxdydz = \int_{\partial T} fgdxdy - \int\int\int_T f_z gdxdydz. \tag{14.4}$$

Dimostrazione. Proviamo la (14.2), in modo analogo si provano la (14.3) e la (14.4). Per dimostrare la (14.2) basta osservare che:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f_x g + fg_x$$

cioè:

$$uv_x = \frac{\partial}{\partial x}(fg) - f_x g;$$

quindi:

$$\int\int\int_T fg_x dxdydz = \int\int\int_T \frac{\partial}{\partial x}(fg)dxdydz - \int\int\int_T f_x gdxdydz =$$

$$= \int_{\partial T}(fgi, \nu_e)d\sigma - \int\int\int_T f_x gdxdydz.$$

□

14.3 Cambiamento di variabili negli integrali tripli.

Definizione 14.3.1. *Siano B e T due domini regolari, risp., dello spazio uvw e dello spazio xyz. La funzione:*

$$\tau : (u,v,w) \in B \to \tau(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in T,$$

si dice trasformazione regolare da B in T se soddisfa le seguenti tre condizioni:

i) $\tau \in C^1(B,T)$,

ii) τ *è biettiva in B,*

iii) *il determinante:*

$$J_\tau = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0, \ \textit{in } B.$$

Valgono i seguenti due teoremi:

Teorema 14.3.2. *Se $f \in C^0(T,\mathbb{R})$ e τ è una trasformazione regolare da B in T, allora:*

$$\iiint_T f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint_B f(\tau(u,v,w))|J_\tau(u,v,w)|\ du\ dv\ dw. \tag{14.5}$$

Teorema 14.3.3. *Sia f una funzione appartenente a $C^0(T,\mathbb{R})$. Se τ appartiene a $C^1(B,T)$ e soddisfa la condizione seguente:*

P) *Esiste una successione di domini regolari $\{B_n\}$ inclusi in B tali che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la restrizione di τ a B_n è regolare ed inoltre:*

$$\lim_n m_3(B_n) = m_3(B), \quad \lim_n m_3(\tau(B_n)) = m_3(T),$$

allora vale la (14.5).

14.4 Passaggio a coordinate cilindriche.

Ricordiamo che, per passare dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane si usa il sistema:

$$\begin{cases} x = \rho\ \cos\theta \\ y = \rho\ \ \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

con $\rho \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Se consideriamo la trasformazione di classe C^1, $\tau(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, definita in un dominio regolare $B \subseteq [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, si ha che:

$$J_\tau = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta.z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho,$$

e:

$$\tau(\rho, 0, z) = \tau(\rho, 2\pi, z)\ \ \forall\,\rho \in [0, +\infty[\text{ e } \forall z \in \mathbb{R}.$$

Dunque, se in B ci sono punti del tipo $(0, \theta, z)$ allora τ non è regolare perchè in tali punti J_τ si annulla; inoltre, se in B ci sono coppie di punti del tipo $(\rho, 0, z)$ e $(\rho, 2\pi, z)$, τ non è regolare perchè non è invertibile in B.
Ovviamente, se in B non ci sono nè punti del tipo $(0, \theta, z)$ nè coppie di punti del tipo $(\rho, 0, z)$ e $(\rho, 2\pi, z)$, τ è regolare. In caso contrario, se in B ci sono punti del tipo $(0, \theta, z)$ oppure coppie del tipo $(\rho, 0, z)$ e $(\rho, 2\pi, z)$, si può dimostrare che esiste una successione $\{B_n\}$ di domini regolari inclusi in B tale che τ è regolare in ogni B_n ed è soddisfatta la condizione P) del Teorema 14.3.3, quindi vale la (14.5).

Vediamo degli esempi in cui è conveniente il passaggio a coordinate cilindriche.

Esempio 1. Sia C il cerchio del piano xy di centro O e raggio R e siano $\varphi(x, y)$,$\psi(x, y) \in C^0(C, \mathbb{R})$ tali che:

$$\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y), \quad \forall\,(x, y) \in C.$$

Il dominio dello spazio xyz, normale rispetto al piano xy:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in C \text{ e } z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)]\},$$

è il trasformato tramite $\tau(\rho, \theta, z)$ del seguente dominio:

$$B = \{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [\varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)]\},$$

dunque, se $f \in C^0(T, \mathbb{R})$, risulta:

$$\int\int\int_T f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_{\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{\psi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\tau(\rho, \theta, z))\ \rho dz.$$

Il passaggio a coordinate cilindriche è conveniente anche quando al posto del cerchio C si considera:

a) un *settore circolare:* $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$;

b) *una corona circolare:* $\rho \in [r, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

c) *un settore di corona circolare:* $\rho \in [r, R]$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Esempio 2. Sia T il dominio dello spazio xyz limitato dai piani xz e yz, dal piano di equazione $z = 3$ e dal paraboloide di equazione:

$$z = x^2 + y^2.$$

Calcolare l'integrale seguente:

$$\int\int\int_T xydxdydz.$$

Intersecando il paraboloide con il piano $z = 3$ si ottiene:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 3, \end{cases}$$

queste sono le equazioni della circonferenza di centro $(0, 0, 3)$ e raggio $\sqrt{3}$ che giace sul piano di equazione $z = 3$. Allora, la sezione del dominio T con il piano $z = 3$ è data da:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 3, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z = 3\right\},$$

dunque, il dominio D proiezione di H sul piano xy è dato da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Così:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e, } x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 3\right\}.$$

Il dominio T è il trasformato tramite $\tau(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ del seguente dominio:

$$B = \{(\rho, \theta, z) \ : \ \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], z \in [\rho^2, 3]\}.$$

Dunque:

$$\int\int\int_T xydxdydz = \int\int\int_B \rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho d\rho d\theta dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^3 dz =$$

$$= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} [z]_{\rho^2}^3 \, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3(3 - \rho^2)d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{9}{4} - \frac{27}{6}\right) = \frac{27}{24}.$$

Esempio 3. Sia T_1 il dominio dello spazio xyz delimitato dalla superficie cilindrica di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$ e dai piani di equazione $z = a$ e $z = b$, con $a < b$.

Considerata la trasformazione:

$$\tau(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z), \tag{14.6}$$

si ha che il dominio T_1 è immagine tramite τ del seguente dominio:

$$B_1 = \{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, r], \theta \in [0, 2\pi], z \in [a, b]\}.$$

Esempio 4. Sia T_2 la sfera dello spazio xyz di centro 0 e raggio R. T_2 è immagine tramite la trasformazione (14.6) del seguente dominio:

$$B_2 = \left\{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]\right\}.$$

Infatti, l'equazione cartesiana di ∂T_2 è $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, da cui $z^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$ e cioè $z = \pm\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$.

Esempio 5. Sia T_3 il dominio dello spazio xyz contenuto nella superficie cilindrica di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$ e nella superficie sferica di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con $r < R$.
Il dominio T_3 è immagine tramite la trasformazione (14.6) del seguente dominio:

$$B_3 = \left\{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, r], \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]\right\}.$$

14.5 Passaggio a coordinate sferiche o polari nello spazio.

Le formule per il passaggio dalle coordinate sferiche alle coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi, \end{cases} \tag{14.7}$$

dove $\rho \in [0, +\infty[$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Se consideriamo la trasformazione $\tau(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$, definita in un dominio regolare $B \subseteq [0,+\infty[\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, si ha che:

$$
\begin{aligned}
J_\tau = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \cos\varphi \begin{vmatrix} \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} + \rho\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = \\
&= \cos\varphi\left(\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\right) + \\
&+ \rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) = \\
&= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin\varphi\sin^2\varphi = \rho^2\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Dunque:

$$J_\tau = \rho^2\sin\varphi.$$

Si noti che, se $\rho = 0$ allora $J_\tau = 0$, $\forall\,\varphi \in [0,\pi]$, $\forall\theta \in [0,2\pi]$ e se $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$ allora $J_\tau = 0$ $\forall\rho \in [0,+\infty[, \forall\theta \in [0,2\pi]$.

Inoltre, τ non è invertibile se a B appartengono coppie di punti del tipo:

$$(\rho,\varphi,0) \text{ e } (\rho,\varphi,2\pi).$$

Conseguentemente, τ non è regolare in B.
Ovviamente, se in B non ci sono nè punti del tipo $(0,\varphi,\theta)$, nè punti del tipo $(\rho,0,\theta)$ oppure del tipo (ρ,π,θ) e nè coppie di punti del tipo $(\rho,\varphi,0)$ e $(\rho,\varphi,2\pi)$, allora τ è regolare. In caso contrario, si può dimostrare che esiste una successione $\{B_n\}$ di domini regolari inclusi in B tale che τ è regolare in ogni B_n ed è soddisfatta la condizione P) del Teorema 14.3.3, quindi vale la (14.5).

Osservazione. Il passaggio a coordinate sferiche è utile, ad esempio, quando il dominio T dello spazio xyz è una sfera, cioè se:

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\right\}.$$

La ∂T ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ed ha equazione polare $\rho = R$; infatti, ricordando il sistema (14.7) si ha che:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 =& (\rho \sin\varphi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\varphi \sin\theta)^2 + (\rho \cos\varphi)^2 = \\ &= \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi = \\ &= \rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2, \end{aligned}$$

dunque $\rho^2 = R^2$ e quindi $\rho = R$.
Alla luce di quanto detto sopra il dominio T è l'immagine tramite $\tau(\rho, \varphi, \theta)$ del seguente dominio:

$$B = \{(\rho, \varphi, \theta) : \rho \in [0, R], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Allora, se $f \in C^0(T, \mathbb{R})$ si ha che:

$$\int\int\int_T f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \int\int\int_B f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\theta.$$

Esempio. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_T (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz, \tag{14.8}$$

con T sfera di xyz di centro $(0, 0, R)$ passante per l'origine O.
L'equazione cartesiana della ∂T è $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ cioè:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

Passando a coordinate sferiche si ha:

$$\rho^2 - 2R\rho \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \rho = 2R \cos\varphi.$$

Si noti che $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Allora T è l'immagine tramite la trasformazione $\tau(\rho, \varphi, \theta)$ del seguente dominio:

$$B = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) : \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 2R\cos\varphi] \right\}.$$

Così, l'integrale (14.8) è uguale a:

$$\int\int\int_B \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} \rho^4 \sin\varphi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{(2R\cos\varphi)^5}{5} d\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{2^5 R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(-\cos\varphi)\cos^5\varphi d\varphi = -2\pi \frac{2^5 R^5}{5} \left[\frac{\cos^6\varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{32}{15}\pi R^5.$$

14.6 Applicazioni al calcolo del volume di un solido di rotazione.

Sia D un dominio limitato e misurabile del semipiano di origine z includente il semiasse positivo delle x $(y = 0,\ x \geqslant 0)$. Sia E il solido ottenuto dalla rotazione in senso antiorario di D, intorno all'asse z, di un angolo di ampiezza $\alpha \in]0, 2\pi]$.
Ogni semipiano di origine z e anomalia $\theta \in [0, \alpha]$ sega il solido E secondo un dominio D_θ che è uguale a D e che, rispetto agli assi ρ e z della figura 2, è disposto come il dominio D rispetto agli assi x e z della figura 1.
Perciò, facendo uso delle coordinate cilindriche ρ, θ, z possiamo dire che, *il solido di rotazione E è il corrispondente del cilindro U dello spazio $\rho\theta z$ rappresentato in figura 2.*
Poichè U è un dominio limitato e misurabile lo è anche E e, per il teorema sul cambiamento di variabili e per le formule di riduzione degli integrali

tripli, risulta che:

$$m_3(E) = \int\int\int_E dxdydz = \int\int\int_U \rho d\rho d\theta dz =$$

$$= \int_0^\alpha d\theta \int\int_D \rho d\rho dz = \alpha \int\int_D \rho d\rho dz.$$

Infine, per le proprietà osservate del dominio D, l'integrale doppio $\int\int_D \rho d\rho dz$ risulta uguale a $\int\int_D xdxdz$, quindi:

$$m_3(E) = \alpha \int\int_D xdxdz.$$

Abbiamo, dunque, provato che:

Teorema 14.6.1. *Il solido E generato dalla rotazione intorno all'asse z, di un angolo α, del dominio limitato e misurabile D situato nel semipiano $y = 0$ $x \geqslant 0$ è un dominio limitato e misurabile di $\mathbb{R}^3$ il cui volume è dato da:*

$$m_3(E) = \alpha \int\int_D xdxdz. \tag{14.9}$$

In modo analogo si vede che:

Teorema 14.6.2. *Il solido H generato dalla rotazione intorno all'asse x, di un angolo α, del dominio D limitato e misurabile situato nel semipiano $y = 0$ $z \geqslant 0$, è un dominio limitato e misurabile di $\mathbb{R}^3$ il cui volume è dato da:*

$$m_3(H) = \alpha \int\int_D zdxdz. \tag{14.10}$$

Esempio 1. Siano $a \geq 0$, $f(x) \in C^0\left([a, b], [0, +\infty[\right)$ e:

$$D = \{(x, z) : x \in [a, b], z \in [0, f(x)]\},$$

i.e., D è il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo alla funzione f, contenuto nel semipiano $y = 0$ $x \geqslant 0$.

a) Denotato con E *il solido generato dalla rotazione di* D *intorno all'asse* z, di un angolo α, dalla (14.9) si ha che:

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \alpha \int\int_D x dx dz = \alpha \int_a^b x dx \int_0^{f(x)} dz = \\ &= \alpha \int_a^b x f(x) dx. \end{aligned} \tag{14.11}$$

b) Sia H *il solido generato dalla rotazione di* D *intorno all'asse* x, di un angolo α, dalla (14.10) si ha che:

$$\begin{aligned} m_3(H) &= \alpha \int\int_D z dx dz = \alpha \int_a^b dx \int_0^{f(x)} z dz = \\ &= \alpha \int_a^b \frac{f^2(x)}{2} dx = \frac{\alpha}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Esempio 2. Siano $c \geq 0$, $f(z) \in C^0\left([c,d],[0,+\infty[\right)$ e:

$$D' = \{(x,z) : z \in [c,d], x \in [0,f(z)]\},$$

i.e., D' è il rettangoloide di base $[c,d]$ relativo alla funzione f, contenuto nel semipiano $y = 0$ $z \geqslant 0$. Denotato con H' il solido ottenuto dalla rotazione di D' intorno all'asse z, di un angolo α, per la (14.9) si ha che:

$$\begin{aligned} m_3(H') &= \alpha \int\int_D x dx dz = \alpha \int_c^d dz \int_0^{f(z)} x dx = \\ &= \alpha \int_c^d \frac{f^2(z)}{2} dz = \frac{\alpha}{2} \int_c^d f^2(z) dz. \end{aligned}$$

Esempio 3. Si calcoli il volume del solido E ottenuto dalla rotazione, di ampiezza α, intorno all'asse z del dominio:

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], z \in [0,x^2]\right\}.$$

Dalla (14.9) segue che:

$$\begin{aligned} m_3(E) = \alpha \int\int_D x dx dz = \\ = \alpha \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} dz = \alpha \int_0^1 x^3 dx = \alpha \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Ora, si calcoli il volume del solido H ottenuto dalla rotazione, di ampiezza α, intorno all'asse x del dominio D. Dalla (14.9) segue che:

$$\begin{aligned} m_3(H) &= \alpha \int\int_D z dx dz = \alpha \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z dz = \\ &= \alpha \int_0^1 \frac{(x^2)^2}{2} dx = \alpha \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \alpha \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{10}. \end{aligned}$$

Esempio 4. Si calcoli il volume del solido T ottenuto dalla rotazione di ampiezza 2π, intorno all'asse z, del triangolo di vertici:

$$A = (5, 0, 0), \;\; B = (3, 0, -2), \;\; C = (3, 0, 0);$$

inoltre, si determini l'area della superficie S generata dalla rotazione del segmento AB.
L'equazione del segmento del piano xz avente per estremi i punti $(5, 0)$ e $(3, -2)$ è data da:

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{z-0}{-2-0}, \quad x \in [3, 5],$$

cioè

$$z = x - 5, \quad x \in [3, 5].$$

Dunque, il triangolo D di estremi ABC è dato da:

$$D = \{(x, z) : x \in [3, 5], z \in [x - 5, 0]\},$$

quindi per la (14.9) si ha che:

$$\begin{aligned} m_3(T) &= 2\pi \int\int_D x dx dz = 2\pi \int_3^5 x dx \int_{x-5}^0 dz = 2\pi \int_3^5 x(5-x) dx = \\ &= 2\pi \int_3^5 (5x - x^2) dx = 2\pi \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_3^5 = \\ &= 2\pi \left[\frac{5}{2} \cdot 25 - \frac{5}{2} \cdot 9 - \frac{5^3}{3} + \frac{3^3}{3}\right] = \frac{44}{3}\pi. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Passiamo alla superficie S. Le equazioni parametriche del segmento di estremi $(5,0)$ e $(3,-2)$ sono:

$$\begin{cases} x = u, & u \in [3,5], \\ z = u - 5 \end{cases}$$

quindi S è il sostegno della superficie regolare:

$$P(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u-5), \;\; (u,\theta) \in [3,5] \times [0,2\pi].$$

Essendo $P_u = (\cos\theta, \sin\theta, 1), P_\theta = (-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$, si ha:

$$\begin{aligned} &E = |P_u|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 = 2, \\ &F = (P_u, P_\theta) = 0, \\ &G = |P_\theta|^2 = u^2\sin^2\theta + u^2\cos^2\theta = u^2, \end{aligned}$$

quindi:

$$\sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{2}.$$

Allora dalla (12.20) si ha che:

$$\begin{aligned} \operatorname{area} S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_3^5 u\sqrt{2}du = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_3^5 = \pi\sqrt{2}(25-9) = \\ &= 16\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Definizione 14.6.3. *Sia D un dominio limitato e misurabile del piano xz, si dice baricentro di D il punto del piano xz di coordinate:*

$$x_0 = \frac{1}{m_2(D)}\int\int_D xdxdz, \quad z_0 = \frac{1}{m_2(D)}\int\int_D zdxdz. \tag{14.14}$$

È bene osservare che il baricentro di D non appartiene necessariamente a D, si pensi alla corona circolare il cui baricentro coincide con il suo centro.

a) Denotato con E il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse z, di un angolo α, di un dominio D limitato e misurabile situato nel semipiano $y = 0,\ x \geqslant 0$, dalla (14.9) e dalla prima delle (14.14) si ha che:

$$m_3(E) = \alpha\int\int_D xdxdz = m_2(D)\alpha x_0,$$

quidi, il volume di E è uguale alla misura di D per il numero αx_0 che è la lunghezza dell'arco di circonferenza di centro $(0, 0, z_0)$ e raggio x_0, descritto dal baricentro (x_0, z_0) di D.

b) Denotato con H il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x, di un angolo α, di un dominio D limitato e misurabile situato nel semipiano $y = 0,\ z \geqslant 0$, dalla (14.9) e dalla seconda delle (14.14) si ha che:

$$m_3(H) = \alpha \int\int_D z dx dz = m_2(D)\alpha z_0,$$

quindi il volume di H è uguale al prodotto della misura di D per il numero αz_0 che è la lunghezza dell'arco di circonferenza di centro $(x_0, 0, 0)$ e raggio z_0, descritto dal baricentro (x_0, z_0) di D.

Esempio 1. Sia C il cerchio di raggio r situato nella regione di piano $y = 0\ x \geqslant 0\ z \geqslant 0$ ed il cui centro abbia distanza $R(\geq r)$ dall'asse z e distanza $R'(\geq r)$ dall'asse x.
Allora il *toro* E che si ottiene facendo ruotare, di un giro completo, intorno all'asse z il cerchio C ha volume:

$$m_3(E) = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

Il *toro* H che si ottiene facendo ruotare, di un giro completo, intorno all'asse x il cerchio C ha volume:

$$m_3(H) = \pi r^2 \cdot 2\pi R' = 2\pi^2 r^2 R'.$$

In generale vale il seguente:

Teorema 14.6.4. (**Teorema di Guldino**) *Il volume del solido E ottenuto dalla rotazione di un dominio piano D limitato e misurabile, intorno a una retta r che sia l'origine del semipiano contenente D, è uguale al prodotto dell'area del dominio D per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal suo baricentro.*

Dimostrazione. Basta scegliere il sistema di riferimento $0xyz$ in modo tale che z coincida con la retta r e D sia contenuto nel semipiano $y = 0$ $x \geqslant 0$ ed osservare che per la (14.9):

$$m_3(E) = \alpha \int\int_D x dx dz = \alpha x_0 m_2(D).$$

$\square$

Capitolo 15

Funzioni sommabili.

15.1 Criteri di sommabilità per le funzioni reali di una variabile reale.

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$ e $f \in C^0([a, b[, [0, +\infty[)$. Consideriamo la funzione integrale della funzione f di punto iniziale a:

$$F : x \in [a, b[\longrightarrow \int_a^x f(t)dt,$$

a norma del Lemma fondamentale del calcolo integrale sappiamo che F è derivabile in $[a, b[$ e risulta:

$$F'(x) = f(x), \ \forall\, x \in [a, b[,$$

allora, essendo $f(x) \geq 0$ in $[a, b[$, si ha che $F(x)$ è crescente in $[a, b[$, quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt &= \lim_{x \to b^-} F(x) = \\ &= \sup_{x \in [a,b[} F(x). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Definizione 15.1.1. *La funzione f si dice sommabile in $[a, b[$ se il limite* (15.1) *è minore di $+\infty$, in tal caso si pone:*

$$\int_{[a,b[} f(x)dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Un discorso analogo si fa quando $f \in C^0\left(]a,b],[0,+\infty[\right)$, con $a \in [-\infty, b[$.

Esempio 1. Sia α un numero reale positivo, considerata la funzione:

$$f(x) = x^{-\alpha}, \ \ x \in [1, +\infty[,$$

distinguiamo tre casi:

a) Se $\alpha \in]0,1[$, risulta:

$$\int_1^x t^{-\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha},$$

quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = +\infty,$$

allora $f(x)$ non è sommabile in $[1, +\infty[$. Si noti che f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine $\alpha < 1$.

b) Se $\alpha = 1$ risulta:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x - \log 1,$$

quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty,$$

allora $f(x)$ non è sommabile in $[1, +\infty[$. Si noti che f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine $\alpha = 1$.

c) Se $\alpha > 1$ risulta:

$$\int_1^x t^{-\alpha} dt = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} = \\ = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

allora $f(x)$ è sommabile in $[1, +\infty[$. Si noti che f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine $\alpha > 1$.

Possiamo concludere dicendo che:

Se f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine α, allora f è sommabile in $[1, +\infty[$ se $\alpha > 1$ e non è sommabile se $\alpha \leq 1$.

Esempio 2. Sia α un numero reale positivo, considerata la funzione:

$$f(x) = x^{-\alpha}, \;\; x \in]0, 1],$$

distinguiamo tre casi:

a) Se $\alpha \in]0, 1[$, risulta:

$$\int_x^1 t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \; ,$$

quindi:

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \; ,$$

allora $f(x)$ è sommabile in $]0, 1]$. Si noti che f è un infinito in 0 di ordine $\alpha < 1$.

b) Se $\alpha = 1$ risulta:

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\log t]_x^1 = \log 1 - \log x = -\log x,$$

quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{x \to 0^+} (-\log x) = +\infty$$

allora $f(x) = \frac{1}{x}$ non è sommabile in $]0, 1]$. Si noti che f è un infinito in 0 di ordine $\alpha = 1$.

c) Se $\alpha > 1$ risulta:

$$\begin{aligned} \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \\ = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}, \end{aligned}$$

quindi:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha-1}\right)=+\infty$$
allora $f(x)$ non è sommabile in $]0,1]$. Si noti che f è un infinito in 0 di ordine $\alpha>1$.

Possiamo concludere dicendo che:

Se f è un infinito nel punto 0 di ordine α, allora f è sommabile in $]0,1]$ se $\alpha<1$ e non è sommabile se $\alpha\geq 1$.

Esempio 3. Sia α un numero reale positivo e $c\in]a,b[$, considerata la funzione:
$$f(x)=\frac{1}{|x-c|^\alpha}\quad x\in[a,c[\cup]c,b],$$
distinguiamo due casi:

a) Se $\alpha\in]0,1[$, posto $P_\varepsilon=[a,c-\varepsilon]\cup[c+\varepsilon,b]$, risulta:
$$\int_{P_\varepsilon}\frac{1}{|x-c|^\alpha}dx=\int_a^{c-\varepsilon}\frac{1}{|x-c|^\alpha}dx+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{1}{|x-c|^\alpha}dx=$$
$$=\int_a^{c-\varepsilon}(c-x)^{-\alpha}dx+\int_{c+\varepsilon}^b(x-c)^{-\alpha}dx=$$
$$=\left[-\frac{(c-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^{c-\varepsilon}+\left[\frac{(x-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{c+\varepsilon}^b=$$
$$=-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(c-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

allora:
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{P_\varepsilon}\frac{1}{|x-c|^\alpha}dx=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(c-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=$$
$$=\frac{(c-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

quindi f è sommabile in $[a, c[\cup]c, b]$.

$b)$ Se $\alpha \geqslant 1$, in modo analogo a com'è stato fatto negli esempi precedenti, si prova che f non è sommabile in $[a, c[\cup]c, b]$.

Definizione 15.1.2. *Siano $f \in C^0\left(]a, b[, [0, +\infty[\right)$ e $c \in]a, b[$. Se f è sommabile in $]a, c]$ e in $[c, b[$ allora si dice che f è sommabile in $]a, b[$ e si pone:*

$$\int_{]a,b[} f(x)dx = \int_{]a,c]} f(x)dx + \int_{[c,b[} f(x)dx.$$

Definizione 15.1.3. *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$ e $f : [a, b[\longrightarrow [0, +\infty[$. Si dice rettangoloide generalizzato di base $[a, b[$ relativo alla funzione f il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : x \in [a, b[, y \in [0, f(x)]\}.$$

Si dimostra che:

Proposizione 15.1.4. *Se $f \in C^0\left([a, b[, [0, +\infty[\right)$ allora f è sommabile in $[a, b[$ se e solo se $m(\mathcal{R}) < +\infty$.*

Proposizione 15.1.5. (**Criterio di sommabilità**) *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f, g \in C^0\left(I, [0, +\infty[\right)$. Se risulta:*

$$f(x) \leqslant g(x)\ \forall\, x \in I, \tag{15.2}$$

allora le seguenti proposizioni sono vere:

1. *g sommabile in $I \Rightarrow f$ sommabile in I.*

2. *f non sommabile in $I \Rightarrow g$ non sommabile in I.*

Dimostrazione. Supposto, tanto per fissare le idee che $I = [a, b[$, per la (15.2) si ha che $\forall\, x \in [a, b[$ risulta:

$$\int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt,$$

quindi:

$$\sup_{x\in[a,b[}\int_a^x f(t)dt \leqslant \sup_{x\in[a,b[}\int_a^x g(t)dt,$$

da cui segue immediatamente l'asserto. $\square$

15.2 Sommabilità di una funzione di segno qualunque.

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Considerate le funzioni definite in I:

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \;\; f^-(x) = \min\{0, f(x)\},$$

qualunque sia $x \in I$ risulta:

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x), \;\; |f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$$

e:

$$0 \leqslant f^+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant -f^-(x) \leqslant |f(x)|. \tag{15.3}$$

Proviamo, ora, la seguente:

Proposizione 15.2.1. *La funzione $|f|$ è sommabile in I se e solo se f^+ e $-f^-$ sono sommabili in I.*

Dimostrazione. Se $|f|$ è sommabile in I, per la (15.3) e per la Proposizione 15.1.5, tali sono anche f^+ e $-f^-$.
Viceversa, se f^+ e $-f^-$ sono sommabili in I, tanto per fissare le idee, supposto $I = [a, b[$ risulta:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b[}\int_a^x |f(t)|dt &= \sup_{x\in[a,b[}\int_a^x (f^+(t) - f^-(t))dt = \\ &= \sup_{x\in[a,b[}\left(\int_a^x f^+(t)dt + \int_a^x -f^-(t)\right)dt \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b[}\int_a^x f^+(t)dt + \sup_{x\in[a,b[}\int_a^x -f^-(t)dt,\end{aligned}$$

da cui segue l'asserto. $\square$

Osservazione. Considerate le funzioni:

$$h : I \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : I \to \mathbb{R},$$

e posto:

$$l_1 = \sup_I h(x) \quad \text{e} \quad l_2 = \sup_I g(x),$$

facciamo vedere che:

$$\sup_I (h(x) + g(x)) \leqslant \sup_I h(x) + \sup_I g(x).$$

Infatti, essendo $h(x) \leq l_1, \forall x \in I$ e $g(x) \leq l_2, \forall x \in I$, risulta che:

$$h(x) + g(x) \leqslant l_1 + l_2, \ \forall x \in I,$$

quindi:

$$\sup_{x \in I} (h(x) + g(x)) \leqslant l_1 + l_2.$$

Definizione 15.2.2. *Sia $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ f si dice sommabile in I se la funzione $|f|$ è sommabile in I, in tale caso si pone:*

$$\int_I f(x)dx = \int_I f^+(x)dx - \int_I -f^-(x)dx.$$

Le proprietà viste per le funzioni integrabili valgono anche per le funzioni sommabili.

Inoltre, valgono i seguenti due criteri di sommailità:

Proposizione 15.2.3. (Criterio di sommabilità dell'ordine dell'infinitesimo) *Siano $a > 0$ e $f \in C^0([a, +\infty[, \mathbb{R})$ una funzione infinitesima in $+\infty$. Le proposizioni seguenti sono vere:*

i) Se esiste un $\alpha > 1$ tale che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^\alpha}} = l \in [0, +\infty[, \tag{15.4}$$

allora f è sommabile in $[a, +\infty[$.

ii) Se esiste un $0 < \alpha \leqslant 1$ *tale che:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^\alpha}} = l \in]0,+\infty], \tag{15.5}$$

allora f *non è sommabile in* $[a,+\infty[$.

Dimostrazione. Proviamo la i), in modo analogo si prova la ii). Dalla (15.4) e per il teorema del confronto sui limiti, considerato $k \in]l,+\infty[$, esiste un $h > a$ tale che:

$$|f(x)| \leqslant k\frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in [h,+\infty[,$$

da cui, essendo $\alpha > 1$, per il criterio di sommabilità segue l'asserto (si noti che in $[a,h]$ non ci sono problemi in quanto f è continua in tale intervallo).

□

Esempio 1. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,+\infty[.$$

f è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine 2 quindi, per il criterio di sommabilità dell'ordine dell'infinitesimo, è sommabile in $[0,+\infty[$.
Ora calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} [\text{arctg}t]_0^x = \\ = \lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2}.$$

Si noti che il rettangoloide generalizzato, di base $[0,+\infty[$, relativo alla funzione f è misurabile ed ha misura uguale a $\frac{\pi}{2}$.

Esempio 2. Calcolare l'integrale:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+2)}dx.$$

La funzione $f(x) = \frac{1}{x(x^2+x+2)}$ è in infinitesimo in $+\infty$ di ordine 3, quindi $f(x)$ è sommabile in $[1,+\infty[$. Scomponiamo in fratti semplici la funzione

$f(x)$:

$$\frac{1}{x(x^2+x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2}.$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2},$$

allora:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+x+2)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+x+2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}\log(x^2+x+2) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+x+2}dx = \\ &= \log\sqrt{x} - \log\sqrt[4]{x^2+x+2} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} = \\ &= \log\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

Quindi:

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left[\log\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{t^2+t+2}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right]_1^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\log\sqrt[4]{\frac{x^2}{x^2+x+1}} - \log\frac{1}{\sqrt[4]{1+1+2}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2+1}{\sqrt{7}}\right] =$$

$$= \log 1 - \log\frac{1}{\sqrt[4]{4}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}} =$$

$$= \log\sqrt[4]{4} - \frac{1}{4\sqrt{7}}\pi + \frac{1}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Esempio 3. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x\log x}, \quad x \in [2, +\infty[.$$

Si noti che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{1}{x}} = 0,$$

quindi $f(x)$ è un infinitesimo, in $+\infty$, di ordine maggiore di 1; d'altro canto, $\forall\,\beta > 1$ si ha che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{\log x} = +\infty.$$

Dunque f in $+\infty$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 ma minore di ogni $\beta > 1$, quindi a f non si può applicare il criterio dell'infinitesimo.
Allora facciamo una verifica diretta:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t\log t}dt = \lim_{x\to+\infty}[\log\log t]_2^x = \lim_{x\to+\infty}(\log\log x - \log\log 2) =$$
$$= +\infty,$$

dunque f non è sommabile.

Analoga alla dimostrazione del *Criterio di sommabilità dell'ordine dell'infinitesimo* è la dimostrazione della seguente:

Proposizione 15.2.4. (**Criterio di sommabilità dell'ordine dell'**∞)
Sia $f \in C^0\left([a,c[\cup]c,b],\mathbb{R}\right)$ *tale che:*

$$\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty.$$

Le proposizioni seguenti sono vere:

i) Se esiste un $\alpha \in]0,1[$ *tale che:*

$$\lim_{x\to c}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x-c|^\alpha}} = l \in [0,+\infty[, \tag{15.6}$$

allora f *è sommabile in* $[a,b]-\{c\}$.

ii) Se esiste $\alpha \geqslant 1$ *tale che:*

$$\lim_{x\to c}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x-c|^\alpha}} = l \in]0,+\infty], \tag{15.7}$$

allora f *non è sommabile in* $[a,b|-\{c\}$.

Esempio 1. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \;\; x \in]-1,1[.$$

Osserviamo che sia in -1 che in 1 la $f(x)$ è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ quindi, per il criterio di sommabilità dell'ordine dell'∞, la f è sommabile in $]-1,1[$.
Inoltre:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} (\text{arcsen}(1-\varepsilon) - \text{arcsen}(-1+\varepsilon)) =$$
$$= \text{arcsen}1 - \text{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Esempio 2. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad x \in]0,1].$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

quindi la f è un infinito nel punto 0 di ordine 1, allora per il criterio di sommabilità dell'ordine dell'∞, la f non è sommabile in $]0,1]$.
Esempio 3. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x \log x}, \quad x \in]0, \frac{1}{2}].$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x \log x}}{\frac{1}{x}} = 0,$$

quindi $f(x)$ è un infinito nel punto 0 di ordine minore di 1. D'altro canto, qualunque sia $\beta \in]0,1[$, risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x \log x}}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\beta-1}}{\log x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\beta-1)x^{\beta-2}}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x \to 0^+} (\beta-1)x^{\beta-1} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{(1-\beta)}{x^{1-\beta}} = +\infty,$$

dunque $f(x)$ è un infinito nel punto 0 di ordine maggiore di ogni $\beta < 1$. Allora non è applicabile il criterio dell'infinito. Calcoliamo l'integrale direttamente:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\log t} dt = \lim_{x\to 0^+} \Big[\log|\log t| \Big]_x^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \log|\log \frac{1}{2}| - \lim_{x\to 0^+} \log|\log x| = -\infty,$$

quindi $f(x)$ non è sommabile.

Esempio 4. Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Osserviamo che:

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(x^{2-\frac{1}{2}}+1\right)},$$

quindi nel punto 0 la f è in infinito di ordine $\frac{1}{2}$.

D'altro canto:

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2\left(1+x^{\frac{1}{2}-2}\right)}$$

quindi in $+\infty$ la f è un infinitesimo di ordine 2.

Allora f è sommabile in $]0, +\infty[$.

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} dx =$$
$$= \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{t^2+\sqrt{t}} dt + \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2+\sqrt{t}} dt,$$

Ponendo $y = \sqrt{t}$, si ha che $y^2 = t$ e $dt = 2ydy$ quindi:

$$\int \frac{1}{t^2+\sqrt{t}} dt = \int \frac{1}{y^4+y} 2ydy = \int \frac{2}{y^3+1} dy =$$
$$= 2\int \frac{dy}{(y+1)(y^2-y+1)}.$$

A questo punto non si deve fare altro che calcolare un integrale di una funzione razionale.

15.3 Criteri di sommabilità per le funzioni reali di due variabili reali.

Siano $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e α un numero reale positivo. Consideriamo la funzione:

$$f : P \in \mathbb{R}^2 - \{P_0\} \to \frac{1}{|P - P_0|^\alpha} \in]0, +\infty[. \tag{15.8}$$

Proviamo che:

Proposizione 15.3.1. *Se f è la funzione definita dalla (15.8) e I_r è il cerchio di centro il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e raggio $r > 0$, allora:*

$$\int\int_{I_r - \{P_0\}} f(x, y)dxdy = \begin{cases} \frac{2\pi r^{2-\alpha}}{2-\alpha} & se\ \alpha < 2 \\ +\infty & se\ \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia Y_k la corona circolare di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raggi $\frac{1}{k}$ e r. Ovviamente $\{Y_k\}$ è crescente e:

$$m_2 \left(I_r - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k \right) = 0.$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, calcoliamo il seguente integrale:

$$\int\int_{Y_k} f(x, y)dxdy.$$

Osserviamo che il dominio Y_k, del piano xy, è il trasformato tramite $\tau(\rho, \theta) = (x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ del seguente dominio del piano $\rho\theta$:

$$D_k = \left\{ (\rho, \theta) : \rho \in [\frac{1}{k}, r], \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Inoltre, con la trasformazione τ sopra considerata si ottiene che:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = \rho^2,$$

inoltre:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho,$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int\int_{Y_k} f(x,y)dxdy &= \int\int_{D_k} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{1}{k}}^{r}\frac{1}{(\sqrt{\rho^2})^\alpha}\rho = 2\pi\int_{\frac{1}{k}}^{r}\frac{1}{\rho^\alpha}\cdot\rho d\rho = \\ &= 2\pi\int_{\frac{1}{k}}^{r}\rho^{1-\alpha}d\rho.\end{aligned}$$

Essendo:

$$\int\rho^{1-\alpha}d\rho = \begin{cases}\log\rho, & \text{se } \alpha=2\\ \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \text{se } \alpha\neq 2,\end{cases}$$

si ha che:

$$\int\int_{Y_k} f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\pi\left[\log\rho\right]_{\frac{1}{k}}^{r} = 2\pi\left(\log r - \log\frac{1}{k}\right) = 2\pi\log rk, & \text{se } \alpha=2\\ \\ 2\pi\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{k}}^{r} = \frac{2\pi}{2-\alpha}r^{2-\alpha} - \frac{2\pi}{2-\alpha}\frac{1}{k^{2-\alpha}}, & \text{se } \alpha\neq 2.\end{cases}$$

Allora:

$$\lim_k\int\int_{Y_k} f(x,y)dxdy = \begin{cases}+\infty, & \alpha=2\\ \frac{2\pi}{2-\alpha}r^{2-\alpha} & \alpha<2\\ +\infty, & \alpha>2.\end{cases}$$

□

Abbiamo, dunque, visto che *la funzione:*

$$f(x,y) = \frac{1}{|P-P_0|^\alpha},$$

è sommabile in $I_r = \{P : |P-P_0| < r\}$ *se e solo se* $\alpha < 2$.

Proposizione 15.3.2. *Se* f *è la funzione definita dalla (15.8) e* I_r *è il cerchio di centro il punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *e raggio* $r > 0$*, allora:*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2 - I_r} f(x,y)dxdy = \begin{cases}\frac{2\pi r^{2-\alpha}}{\alpha-2} & \text{se } \alpha>2\\ +\infty & \text{se } \alpha\leqslant 2\ .\end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia Y_k la corona circolare di centro (x_0, y_0) e raggi r e $r+k$. Ovviamente $\{Y_k\}$ è crescente e risulta:

$$m_2\left((\mathbb{R}^2 - I_r) - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k\right) = 0.$$

Fissato un $k \in \mathbb{N}$, calcoliamo il seguente integrale:

$$\int\int_{Y_k} f(x,y)dxdy.$$

Osserviamo che il dominio Y_k, del piano xy, è il trasformato tramite $\tau(\rho,\theta) = (x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ del seguente dominio del piano:

$$D_k = \{(\rho,\theta) : \rho \in [r, r+k], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Al solito, essendo:

$$f(x,y) = \frac{1}{|P - P_0|^\alpha} = \frac{1}{\rho^\alpha}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho,$$

si ha che:

$$\int\int_{Y_k} \frac{1}{|P-P_0|^\alpha} dxdy = \int\int_{D_k} \frac{1}{\rho^\alpha} \cdot \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^{r+k} \rho^{1-\alpha} d\rho = 2\pi \int_r^{r+k} \rho^{1-\alpha} d\rho,$$

da cui, essendo:

$$\int \rho^{1-\alpha} d\rho = \begin{cases} \log\rho, & \text{se } \alpha = 2 \\ \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases},$$

si ha:

$$\int\int_{Y_k} \frac{1}{|P-P_0|^\alpha} dxdy = \begin{cases} 2\pi\left[\log\rho\right]_r^{r+k} = 2\pi\left(\log(r+k) - \log r\right) & \alpha = 2 \\ 2\pi\left[\frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_r^{r+k} = 2\pi\frac{(r+k)^{2-\alpha}}{2-\alpha} - 2\pi\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \alpha \neq 2. \end{cases}$$

Allora:

$$\lim_k \int\int_{Y_k} \frac{1}{|P-P_0|^\alpha} dxdy = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha < 2 \\ -2\pi\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} = 2\pi\frac{r^{2-\alpha}}{\alpha-2} & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

$\square$

Abbiamo, dunque, visto che *la funzione* $f(x,y) = \frac{1}{|P-P_0|^\alpha}$ *è sommabile in* $\mathbb{R}^2 - I_r$ *se e solo se* $\alpha > 2$.

Esempio 1. Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x,y) = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

all'interno del cerchio C di centro $(0,0)$ e raggio $R > 0$. Osserviamo che, sulla frontiera di C la funzione f è un infinito di ordine 1; inoltre, f è continua all'interno del cerchio C ed è ivi positiva, allora f è sommabile in $C - \partial C$ per il criterio dell'infinito.
Come successione $\{S_n\}$ invadente C, possiamo considerare quella dei cerchi di centro $(0,0)$ e raggio $R - \frac{1}{n}$, così:

$$\begin{aligned}
\lim_n \int\int_{S_n} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy &= \lim_n R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R-\frac{1}{n}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\
&= 2\pi\, R \lim_n \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R-\frac{1}{n}} = \\
&= 2\pi\, R \lim_n \left[R - \sqrt{R^2 - (R^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2R}{n})} \right] = \\
&= 2\pi\, R \lim_n \left[R - \sqrt{\frac{2R}{n} - \frac{1}{n^2}} \right] = \\
&= 2\pi\, R^2.
\end{aligned}$$

Esempio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int\int_{C - \{(0,0)\}} \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

dove C è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Se si considera come successione A_n, invadente C, quella costituita da corone circolari di centro $(0,0)$ e raggi

$\frac{1}{n}$, 1, si ottiene che:

$$\int\int_{C-\{(0,0)\}} \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \lim_n \int\int_{A_n} \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy =$$
$$= \lim_n \int_{\frac{1}{n}}^{1} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\log\rho^2}{\rho} \cdot \rho d\theta = 2\lim_n \int_{\frac{1}{n}}^{1} d\rho \int_0^{2\pi} \log\rho d\theta =$$
$$= 4\pi \lim_n \int_{\frac{1}{n}}^{1} \log\rho d\rho = 4\pi \lim_n \left[[\rho\log\rho]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho \cdot \frac{1}{\rho} d\rho \right] =$$
$$= 4\pi \lim_n \left[(\log 1 - \frac{1}{n}\log\frac{1}{n}) - \int_{\frac{1}{n}}^{1} d\rho \right] =$$
$$= 4\pi \left(\lim_n \frac{1}{n}\log n - \lim_n (1 - \frac{1}{n}) \right) =$$
$$= -4\pi.$$

15.4 Criteri di sommabilità per le funzioni reali di tre variabili reali.

Siano $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e α un numero reale positivo. Consideriamo la funzione:

$$f : P \in \mathbb{R}^3 - \{P_0\} \to \frac{1}{|P-P_0|^\alpha} \in]0,+\infty[. \tag{15.9}$$

Proviamo che:

Proposizione 15.4.1. *Se f è la funzione definita dalla (15.9) e I_r è la sfera di centro il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raggio $r > 0$, allora:*

$$\int\int\int_{I_r - \{P_0\}} f(x,y,z) dxdydz = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} & se\ \alpha < 3 \\ +\infty & se\ \alpha \geqslant 3. \end{cases}$$

Dimostrazione. Qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, detta $I_{\frac{1}{k}}$ la sfera di centro P_0 e raggio $\frac{1}{k}$, poniamo:

$$Y_k = I_r - I_{\frac{1}{k}}.$$

La successione $\{Y_k\}$ è crescente e risulta:

$$m_3\left(I_r - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k\right) = 0.$$

Usando le coordinate sferiche $\rho\varphi\theta$, con polo il punto P_0, cioè la trasformazione:

$$\tau : (\rho, \varphi, \theta) \to (x_0 + \rho \sin\varphi \cos\theta, y_0 + \rho \sin\varphi \sin\theta, z_0 + \rho \cos\varphi) \qquad (15.10)$$

si ottiene che Y_k è il trasformato tramite τ del seguente sottoinsieme dello spazio $\rho\varphi\theta$:

$$U_k = \left\{(\rho, \varphi, \theta) : \rho \in [\frac{1}{k}, r], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\right\},$$

quindi, essendo:

$$|P - P_0|^\alpha = \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right)^\alpha = (\sqrt{\rho^2})^\alpha = \rho^\alpha,$$

si ha:

$$\begin{aligned}\int\int\int_{Y_k} f(x, y, z)dxdydz &= \int\int\int_{U_k} \frac{1}{\rho^\alpha}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_{\frac{1}{k}}^{r} \rho^{2-\alpha} \, d\rho = \\ &= 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi \int_{\frac{1}{k}}^{r} \rho^{2-\alpha} \, d\rho = 4\pi \int_{\frac{1}{k}}^{r} \rho^{2-\alpha} \, d\rho.\end{aligned}$$

Osservato che:

$$\int_{\frac{1}{k}}^{r} \rho^{2-\alpha} d\rho = \begin{cases} [\log\rho]_{\frac{1}{k}}^{r} = \log kr, & \text{se } \alpha = 3 \\ \left[\frac{\rho^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_{\frac{1}{k}}^{r} = \frac{1}{3-\alpha}\left(r^{3-\alpha} - \frac{1}{k^{3-\alpha}}\right) & \text{se } \alpha \neq 3, \end{cases}$$

si ha che:

$$\lim_k \int\int\int_{Y_k} f(x, y, z)dxdydz = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 3 \\ \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} & \text{se } \alpha < 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

□

Possiamo, dunque, concludere dicendo che *la funzione* $f(x,y,z) = \frac{1}{|P-P_0|^\alpha}$ *è sommabile in* $I_r - \{P_0\}$ *se e solo se* $\alpha < 3$.

Proposizione 15.4.2. *Se f è la funzione definita dalla (15.9) e I_r è la sfera di centro il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raggio $r > 0$, allora:*

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3 - I_r} f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} \frac{4\pi}{\alpha-3} r^{3-\alpha} & se\ \alpha > 3 \\ +\infty & se\ \alpha \leqslant 3. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, detta C_k la sfera di centro P_0 e raggio $r+k$, poniamo:

$$Y_k = C_k - I_r.$$

La successione $\{Y_k\}$ è crescente e risulta:

$$m_3\left((\mathbb{R}^3 - I_r) - \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k\right) = 0.$$

Usando coordinate sferiche $\rho\varphi\theta$, con polo P_0, si ottiene che Y_k è il trasformato tramite τ del seguente sottoinsieme di $\rho\varphi\theta$:

$$U_k = \{(\rho, \varphi, \theta) : \rho \in [r, r+k], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int\int\int_{Y_k} f(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_{U_k} \frac{1}{\rho^\alpha}\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^{r+k} d\rho \int_0^{\pi} \rho^{2-\alpha} \sin\varphi d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_r^{r+k} \rho^{2-\alpha} d\rho = \\ &= 4\pi \int_r^{r+k} \rho^{2-\alpha} d\rho = \\ &= \begin{cases} 4\pi \left[\log\rho\right]_r^{r+k} = 4\pi\left(\log(r+k) - \log r\right) & \text{se } \alpha = 3 \\ 4\pi \left[\frac{\rho^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right]_r^{r+k} = \frac{4\pi}{3-\alpha}\left((r+k)^{3-\alpha} - r^{3-\alpha}\right) & \text{se } \alpha \neq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_k \int\int\int_{Y_k} f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 3 \\ \frac{4\pi}{3-\alpha}(-r^{3-\alpha}) = \frac{4\pi}{\alpha-3}r^{3-\alpha} & \text{se } \alpha > 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

□

Possiamo, dunque, concludere dicendo che *la funzione* $f(x,y,z) = \frac{1}{|P-P_0|^\alpha}$ *è sommabile in* $\mathbb{R}^3 - I_r$ *se e solo se* $\alpha > 3$.

Capitolo 16

Funzioni implicite.

16.1 Funzioni implicitamente definite da un'equazione.

Definizione 16.1.1. *Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Considerata l'equazione:*

$$f(x, y) = 0, \tag{16.1}$$

se esistono $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, con $X \times Y \subseteq A$, tali che:

$$\forall x \in X \quad \exists!\ y(x) \in Y \ : \ f(x, y(x)) = 0,$$

allora si dice che nell'insieme $X \times Y$ l'equazione (16.1) *definisce implicitamente y come funzione di x e la funzione:*

$$y : x \in X \longrightarrow y(x) \in Y,$$

si chiama funzione della variabile x definita implicitamente dall'equazione (16.1) *nell'insieme $X \times Y$.*

Esempio. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0; \tag{16.2}$$

esplicitando la y in funzione di x si ottiene $y^2 = 1 - x^2$ e quindi $y = \pm\sqrt{1-x^2}$; dovendo essere $1 - x^2 \geq 0$, si ha che l'equazione (16.2) definisce implicitamente le seguenti due funzioni:

$$y_1 : x \in [-1,1] \to \sqrt{1-x^2} \in [0,1], \quad y_2 : x \in [-1,1] \to -\sqrt{1-x^2} \in [-1,0].$$

Osservazione 1. Sia $f(x,y) = xy + log(xy) - 1$, $(x,y) \in]-\infty, 0[^2 \cup]0,+\infty[^2$. Considerata l'equazione:

$$xy + log(xy) - 1 = 0, \tag{16.3}$$

notiamo che, con passaggi elementari, non siamo in grado di esprimere né la y in funzione di x né la x in funzione di y.

Dunque, non è sempre possibile stabilire se un'equazione del tipo (16.1) definisce implicitamente la y in funzione di x o la x in funzione di y. Il teorema seguente ci aiuta a risolvere il suddetto problema.

Teorema 16.1.2. (**Teorema del Dini per le funzioni reali di due variabili reali**)
Siano $f(x,y)$ una funzione reale derivabile nell'aperto A di $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) un punto di A tale che $f(x_0, y_0) = 0$.

Se le funzioni $f(x,y)$ e $f_y(x,y)$ sono continue in un intorno I di (x_0,y_0), incluso in A, e se $f_y(x_0,y_0) \neq 0$, allora esistono un intorno X di x_0 e un intorno Y di y_0, con $X \times Y \subseteq I$, tali che in $X \times Y$ l'equazione:

$$f(x,y) = 0, \tag{16.4}$$

definisce y in funzione di x; la funzione $y(x)$ definita implicitamente dalla (16.4) soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$ ed è continua in X.

Inoltre, se $f_x(x,y)$ è continua in I allora $y(x) \in C^1(X,Y)$ e, $\forall x \in X$, risulta:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}. \tag{16.5}$$

Dimostrazione. Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $f_y(x_0, y_0) > 0$. Per la continuità di f_y in (x_0, y_0) esiste $\mathcal{R} = [x_0-a, x_0+a]\times[y_0-b, y_0+b] \subseteq I$ tale che:

$$f_y(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}; \tag{16.6}$$

allora, in particolare, risulta $f_y(x_0, y) > 0$, $\forall y \in [y_0-b, y_0+b]$. Quindi, posto $Y = [y_0 - b, y_0 + b]$, si ha che la funzione $f(x_0, \cdot)$ è strettamente crescente in Y; dunque, essendo $f(x_0, y_0) = 0$, si ha che:

$$f(x_0, y_0 - b) < 0 \qquad \text{e} \qquad f(x_0, y_0 + b) > 0. \tag{16.7}$$

D'altro canto, dalla continuità di f in $\mathcal{R}$ segue la continuità delle funzioni $f(\,\cdot\,, y_0 - b)$ e $f(\,\cdot\,, y_0 + b)$ in $[x_0 - a, x_0 + a]$; quindi, per la (16.7) esiste un intorno X di x_0, con $X \subseteq [x_0 - a, x_0 + a]$, tale che:

$$f(x, y_0 - b) < 0 \qquad \text{e} \qquad f(x, y_0 + b) > 0, \quad \forall x \in X.$$

Allora, qualunque sia $x \in X$, essendo $f(x, \cdot)$ continua e strettamente crescente in Y, esiste un unico $y(x) \in Y$ tale che $f(x, y(x)) = 0$. Abbiamo così provato che in $X \times Y$ la (16.4) definisce implicitamente y in funzione di x; inoltre, essendo $f(x_0, y(x_0)) = 0 = f(x_0, y_0)$, si ha $y(x_0) = y_0$.

Proviamo che la funzione $y(x)$ è continua in X. Sia x un generico punto di X e sia $\Delta x \neq 0$ tale che $x + \Delta x \in X$; posto $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, osserviamo che:

$$f(x + \Delta x, y(x) + \Delta y) = f(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) = 0. \tag{16.8}$$

A norma del teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, esiste $\theta \in]0, 1[$ tale che:

$$f(x + \Delta x, y(x) + \Delta y) - f(x + \Delta x, y(x)) = f_y(x + \Delta x, y(x) + \theta\Delta y)\Delta y;$$

allora, essendo f_y positiva in $\mathcal{R}$, dalla (16.8) segue che:

$$\Delta y = -\frac{f(x + \Delta x, y(x))}{f_y(x + \Delta x, y(x) + \theta\Delta y)}. \tag{16.9}$$

Essendo f_y continua nel compatto $\mathcal{R}$, esiste un $\overline{P} \in \mathcal{R}$ tale che:

$$m = \min f_y(\mathcal{R}) = f_y(\overline{P}) > 0;$$

quindi, dalla (16.9) si ha che:

$$|\Delta y| = \frac{|f(x+\Delta x, y(x))|}{f_y(x+\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)} \leq \frac{|f(x+\Delta x, y(x))|}{m},$$

e dalla continuità di f segue che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta y| \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f(x+\Delta x, y(x))|}{m} = \frac{|f(x, y(x))|}{m} = 0,$$

da cui si ottiene la continuità di $y(x)$ in x. Per l'arbitrarietà di $x \in X$ segue la continuità di $y(x)$ in X.

Ora, supposto che $f_x(x, y)$ sia continua in I, proviamo che $y(x)$ è derivabile in X e, inoltre, soddisfa la (16.5) per ogni $x \in X$.

Fissiamo un arbitrario $x \in X$ e consideriamo un $\Delta x \neq 0$ tale che $x + \Delta x$ appartenga ad X.

Al solito, posto $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ osserviamo che:

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \text{e} \quad f(x+\Delta x, y(x)+\Delta y) = 0$$

quindi, per il teorema di Lagrange per le funzioni reali di due variabili reali, esiste $\theta \in]0,1[$ tale che:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+\Delta x, y(x)+\Delta y) - f(x, y(x)) = \\ &= f_x(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

Allora, essendo $\Delta x \neq 0$ e f_y positiva in $\mathcal{R}$, si ha che:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)}{f_y(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)}.$$

Conseguentemente, per la continuità di $y(x)$ in x e di f_x e f_y in $(x, y(x))$ si ha che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{f_x(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)}{f_y(x+\theta\Delta x, y(x)+\theta\Delta y)} = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))},$$

da cui segue la (16.5).

Per concludere la dimostrazione osserviamo che, essendo $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ continue in $X \times Y$, dalla (16.5) segue la continuità della funzione $y'(x)$ in X.

Il teorema è così dimostrato. $\square$

Osservazione 2. Se nel teorema del Dini si suppone $f \in C^k(I, \mathbb{R})$ allora anche $y(x) \in C^k(X, Y)$. L'asserto discende immediatamente dalla (16.5).

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = xy + log(xy) - 1$. Usufruendo del teorema del Dini, proviamo che l'equazione:

$$xy + log(xy) - 1 = 0, \tag{16.10}$$

definisce implicitamente, in un intorno del punto $(1, 1)$, la y in funzione di x; inoltre, determiniamo la funzione $y(x)$ in un intorno del punto 1.

Si osservi, innanzitutto, che $f(x, y)$ è definita nell'insieme:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \cdot y > 0\},$$

ed è ivi di classe C^1; inoltre, $f(1, 1) = 0$.

Iniziamo a calcolare le derivate parziali di f:

$$f_x(x, y) = y + \frac{1}{xy} y = y + \frac{1}{x}, \qquad f_y(x, y) = x + \frac{1}{xy} x = x + \frac{1}{y}.$$

Essendo $f_y(1, 1) = 2$, a norma del teorema del Dini, esistono un intorno X del punto 1 e un intorno Y del punto 1 tali che in $X \times Y$ l'equazione (16.10) definisce implicitamente y in funzione di x e risulta $y(1) = 1$.

Dalla (16.5) sappiamo che:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} = -\frac{y(x) + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y(x)}} = -\frac{\frac{xy(x)+1}{x}}{\frac{xy(x)+1}{y(x)}} = -\frac{y(x)}{x}. \tag{16.11}$$

Dalla (16.11) si ricava la seguente equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x}; \tag{16.12}$$

integrando la (16.12) e tenendo presente che $y(x) > 0$ e $y(1) = 1$, si ottiene:

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_1^x -\frac{1}{t} dt,$$

quindi:

$$log(y(x)) - log(y(1)) = -logx + log1,$$

cioè:

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$

Si verifichi che la funzione $y(x) = \frac{1}{x}$ è soluzione dell'equazione (16.10).

Osservazione 3. Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^1(A, \mathbb{R})$. Consideriamo l'insieme Z degli zeri della funzione f:

$$Z = \{(x, y) \in A \ : \ f(x, y) = 0\}.$$

Supposto che esista un punto (x_0, y_0) di Z tale che $Df(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, proviamo che esiste un intorno di (x_0, y_0) nel quale l'insieme Z coincide con il sostegno Γ di una curva semplice regolare la cui tangente in (x_0, y_0) ha equazione:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{16.13}$$

Essendo $Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \neq \mathbf{0}$ supponiamo, tanto per fissare le idee, che sia $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora, per il teorema del Dini, in un intorno del punto (x_0, y_0) l'insieme Z coincide con il grafico di una funzione $y(x) \in C^1$ soddisfacente la condizione $y(x_0) = y_0$; inoltre, la derivata prima di $y(x)$ in x_0 è data da:

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}. \tag{16.14}$$

D'altro canto, sappiamo che l'equazione della retta tangente al diagramma di $y(x)$ nel punto $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ è data da:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

quindi, dalla (16.14) si ha:

$$y = y_0 - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

da cui segue la (16.13).

Si verifichi che alla (16.13) si perviene anche quando è verificata la condizione $f_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Definizione 16.1.3. *Un punto* (x_0, y_0) *di* Z *si dice punto regolare* (risp. *punto singolare*) *se* $Df(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ (risp. $Df(x_0, y_0) = \mathbf{0}$).

16.2 Massimi e minimi relativi delle funzioni implicite.

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di A e $f \in C^1(A, \mathbb{R})$. Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, a norma del teorema del Dini, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente y in funzione di x e, più precisamente, esistono un intorno X del punto x_0, un intorno Y del punto y_0 e una funzione $y(x) \in C^1(X, Y)$ tale che $f(x, y(x)) = 0$, $\forall x \in X$; inoltre:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}, \quad \forall x \in X. \tag{16.15}$$

Se si suppone $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, dall'Osservazione 2, segue che la funzione $y(x) \in C^2(X, Y)$ e quindi, derivando entrambi i membri della (16.15), si ottiene:

$$y''(x) = -\frac{\big(f_{xx} + f_{xy}y'(x)\big)f_y - f_x\big(f_{yx} + f_{yy}y'(x)\big)}{f_y^2}, \quad \forall x \in X, \tag{16.16}$$

le derivate parziali di f sono calcolate nel punto $(x, y(x))$.

Sostituendo nella (16.16) l'espressione di $y'(x)$ data dalla (16.15), per ogni $x \in X$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{\left(f_{xx} + f_{xy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right)f_y - f_x\left(f_{yx} + f_{yy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\right)}{f_y^2} = \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - f_{xy}f_xf_y - f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} = \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}, \end{aligned} \tag{16.17}$$

al solito, le derivate parziali di f sono calcolate nel punto $(x, y(x))$.

Ricordiamo che il punto x_0 è un punto di massimo relativo di $y(x)$ se risulta $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) < 0$. Per la (16.15), la condizione $y'(x_0) = 0$ implica che $f_x(x_0, y_0) = 0$; conseguentemente, dalla condizione $y''(x_0) < 0$ e dalla (16.17) si ottiene

$$\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} > 0. \tag{16.18}$$

Concludendo, possiamo dire che:

Il punto x_0 è un punto di massimo relativo per $y(x)$ se (x_0, y_0) soddisfa il sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \\ f_x(x, y) = 0, \end{cases} \tag{16.19}$$

e la vale la disuguaglianza:

$$\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} > 0. \tag{16.20}$$

In modo analogo, si prova che:

Il punto x_0 è un punto di minimo relativo per $y(x)$ se (x_0, y_0) soddisfa il sistema (16.19) *e la vale la disuguaglianza:*

$$\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} < 0. \tag{16.21}$$

16.3 Teorema del Dini per funzioni reali di $k + 1$ variabili reali.

Definizione 16.3.1. *Sia $f(x_1, \cdots, x_k, y)$ una funzione reale definita nel sottoinsieme A di $\mathbb{R}^{k+1}$. Considerata l'equazione:*

$$f(x_1, \cdots, x_k, y) = 0, \tag{16.22}$$

se esistono $X \subseteq \mathbb{R}^k$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$, con $X \times Y \subseteq A$, tali che:

$$\forall (x_1, \cdots, x_k) \in X \quad \exists!\, y(x_1, \cdots, x_k) \in Y \ : \ f(x_1, \cdots, x_k, y(x_1, \cdots, x_k)) = 0,$$

allora si dice che nell'insieme $X \times Y$ l'equazione (16.22) *definisce implicitamente y come funzione di $(x_1, \cdots, x_k)$ e la funzione:*

$$y : (x_1, \cdots, x_k) \in X \longrightarrow y(x_1, \cdots, x_k) \in Y,$$

si chiama funzione delle variabili $x_1, \cdots, x_k$ definita implicitamente dall'equazione (16.22) *nell'insieme $X \times Y$.*

Esempio. Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Consideriamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0; \tag{16.23}$$

esplicitando la z in funzione di (x, y) si ottiene $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ e, quindi:

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

dovendo essere $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, si ha che l'equazione (16.23) definisce implicitamente, nel cerchio C di $\mathbb{R}^2$ di centro $(0, 0)$ e raggio 1 le seguenti due funzioni:

$$z_1 : (x, y) \in C \to \sqrt{1 - x^2 - y^2} \in [0, 1],$$

e

$$z_2 : (x, y) \in C \to -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \in [-1, 0].$$

Enunciamo, ora, il seguente:

Teorema 16.3.2. (Teorema del Dini per le funzioni reali di $k+1$ variabili reali)
Siano $f(x_1, \cdots, x_k, y)$ una funzione reale derivabile nell'aperto A di $\mathbb{R}^{k+1}$ e $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0, y_0)$ un punto di A tale che $f(P_0) = 0$.

Se le funzioni f e f_y sono continue in un intorno I di P_0, incluso in A, e se $f_y(P_0) \neq 0$, allora esistono un intorno X di $(x_1^0, \cdots, x_k^0)$ e un intorno Y di y_0, con $X \times Y \subseteq I$, tali che in $X \times Y$ l'equazione (16.22) definisce y in funzione di $(x_1, \cdots, x_k)$; la funzione $y(x_1, \cdots, x_k)$ definita implicitamente dall'equazione (16.22) soddisfa la condizione $y(x_1^0, \cdots, x_k^0) = y_0$ ed è continua in X.

Inoltre, se $f(x_1, \cdots, x_k, y) \in C^1(I, \mathbb{R})$ allora $y(x_1, \cdots, x_k) \in C^1(X, Y)$ e, per ogni $i \in \{1, \cdots, k\}$, risulta:

$$\frac{\partial y(x_1, \cdots, x_k)}{\partial x_i} = -\frac{f_{x_i}(x_1, \cdots, x_k, y(x_1, \cdots, x_k))}{f_y(x_1, \cdots, x_k, y(x_1, \cdots, x_k))} , \tag{16.24}$$

per ogni $(x_1, \cdots, x_k) \in X$.

Osservazione 4. Siano A un aperto di $\mathbb{R}^3$, $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ e Z l'insieme degli zeri della funzione f, cioè:

$$Z = \{(x, y, z) \in A \ : \ f(x, y, z) = 0\}.$$

Supposto che esista un punto (x_0, y_0, z_0) di Z tale che $Df(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, proviamo che in un intorno di (x_0, y_0, z_0) l'insieme Z coincide con il sostegno S di una superficie regolare il cui piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) ha equazione:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{16.25}$$

Essendo $Df(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)) \neq \mathbf{0}$ supponiamo, tanto per fissare le idee, che sia $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Allora, per il teorema del Dini, in un intorno del punto (x_0, y_0, z_0) l'insieme Z coincide con il grafico di una funzione $z(x, y) \in C^1$ e tale che $z(x_0, y_0) = z_0$; inoltre, le derivate parziali di $z(x,y)$ sono date da:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}\,,\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-\frac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}. \qquad (16.26)$$

D'altro canto, sappiamo che l'equazione del piano tangente al diagramma di $z(x,y)$ nel punto (x_0,y_0,z_0) è data da:

$$z-z_0=z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

quindi, dalla (16.26) si ha:

$$z-z_0=-\frac{f_x(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}{f_z(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}(x-x_0)-\frac{f_y(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}{f_z(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}(y-y_0),$$

da cui segue la (16.25).

Si verifichi che alla (16.25) si perviene anche quando è verificata la condizione $f_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ oppure la condizione $f_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Esempio. Considerata la superficie S definita implicitamente dall' equazione:

$$2x^2+4y^2-z^2-6xy+4x=0,$$

proviamo che l'equazione del piano tangente alla superficie S nel punto $(1,1,-2)$ è data da:

$$x+y+2z=-2.$$

Posto $f(x,y,z)=2x^2+4y^2-z^2-6xy+4x$, ed osservato che $f(1,1,-2)=0$, calcoliamo le derivate parziali della f:

$$f_x(x,y,z)=4x-6y+4,\ \ f_y(x,y,z)=8y-6x,\ \ f_z(x,y,z)=-2z. \qquad (16.27)$$

Essendo $f_z(1,1,-2)=4\neq 0$, per quanto detto nell'Osservazione 4, in un intorno del punto $(1,1,-2)$ l'insieme:

$$Z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ f(x,y,z)=0\}$$

coincide con il grafico di una funzione $z(x,y) \in C^1$. Inoltre, la funzione $z(x,y)$ soddisfa la condizione $z(1,1) = -2$ e, nel punto $(1,1,-2)$, il suo grafico è dotato di piano tangente avente equazione:

$$f_x(1,1,-2)(x-1) + f_y(1,1,-2)(y-1) + f_z(1,1,-2)(z+2) = 0;$$

conseguentemente, per le (16.27) si ha:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 4(z+2) = 0,$$

da cui segue l'asserto.

16.4 Sistemi di funzioni implicite.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ e $f = (f_1, \cdots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$. Consideriamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ f_m(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{16.28}$$

Osserviamo che, posto:

$$x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_m), (x,y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m),$$

il sistema (16.28) si può scrivere in forma vettoriale:

$$f(x,y) = \mathbf{0}. \tag{16.29}$$

Definizione 16.4.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ e $f = (f_1, \cdots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$. Se esistono $X \subseteq \mathbb{R}^k$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, con $X \times Y \subseteq A$, tali che:*

$$\forall x \in X \quad \exists!\ y(x) \in Y \ : \ f(x, y(x)) = \mathbf{0},$$

allora si dice che nell'insieme $X \times Y$ *il sistema* (16.29) *definisce implicitamente* y *come funzione di* x *e la funzione:*

$$y : x \in X \longrightarrow y(x) \in Y,$$

si chiama funzione della variabile x *definita implicitamente dal sistema* (16.29) *nell'insieme* $X \times Y$.

Teorema 16.4.2. Teorema del Dini per i sistemi.
Siano A *un aperto di* $\mathbb{R}^{k+m}$ *e* $f = (f_1, \cdots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ *derivabile in* A. *Sia* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ *un punto di* A *tale che* $f(P_0) = \mathbf{0}$. *Se le funzioni* $f, f_{y_1}, \ldots, f_{y_m}$ *sono continue in un intorno* I *del punto* P_0 *e risulta:*

$$J(P_0) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora esistono un intorno X *del punto* $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0)$ *e un intorno* Y *del punto* $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$, *con* $X \times Y \subseteq I$, *tali che in* $X \times Y$ *il sistema* (16.29) *definisce* $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *in funzione di* $x = (x_1, \ldots, x_k)$; *la funzione vettoriale* $y(x)$ *definita implicitamente dal sistema (16.29) soddisfa la condizione* $y(x_0) = y_0$ *ed è continua in* X.

Inoltre, se $f = (f_1, \ldots, f_m) \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ *allora* $y(x) \in C^1(X, Y)$ *e, per ogni* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *e* $h \in \{1, \ldots, k\}$, *risulta:*

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_h}(x) = -\frac{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},x_h,y_{i+1},\ldots,y_m)}(x, y(x))}{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(x, y(x))} \ , \ \forall x \in X. \tag{16.30}$$

Si noti che:

$$f_{y_i} = (\frac{\partial f_1}{\partial y_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial y_i}), \ \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

e

$$(x, y(x)) = (x_1, \ldots, x_k, y_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_k)), \ \forall x \in X.$$

Esempio. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz - 1 = 0 \\ \\ g(x,y,z) = x^2 + z^2 + 2xy - 4 = 0, \end{cases} \tag{16.31}$$

ed osserviamo che il punto $(0, 1, 2)$ è soluzione di tale sistema.

Le funzioni f e g appartengono a $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, inoltre:

$$f_x = 2x - 2z, \ f_y = 2y, \ f_z = -2x, \ g_x = 2x + 2y, \ g_y = 2x, \ g_z = 2z,$$

e, quindi:

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 2y \cdot 2z + 2x \cdot 2x = 4yz + 4x^2,$$

da cui segue che $J(0, 1, 2) = 8$. Allora, per il teorema del Dini per i sistemi, esistono un intorno X di 0 e un intorno Y di $(1, 2)$ tali che in $X \times Y$ il sistema (16.31) definisce implicitamente la funzione vettoriale:

$$(y, z) : x \in X \to (y(x), z(x)) \in Y,$$

soddisfacente le condizioni $y(0) = 1, z(0) = 2$.

Utilizzando ancora il teorema del Dini, calcoliamo le derivate prime di $y(x)$ e di $z(x)$:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{J} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x - 2z & -2x \\ 2x + 2y & 2z \end{vmatrix}}{J} = \frac{-4xz + 4z^2 - 4x^2 - 4xy}{4yz + 4x^2},$$

quindi:

$$y'(x) = \frac{-x^2 + z^2 - xz - xy}{x^2 + yz}, \tag{16.32}$$

e:

$$z'(x) = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}}{J} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x-2z \\ 2x & 2x+2y \end{vmatrix}}{J} = -\frac{4xy + 4y^2 - 4x^2 + 4xz}{4yz + 4x^2},$$

quindi:

$$z'(x) = \frac{x^2 - y^2 - xy - xz}{yz + x^2}. \tag{16.33}$$

Considerata la curva:

$$\gamma(x) = (x, y(x), z(x)), \quad x \in X,$$

ricordiamo che il vettore $\gamma'(0) = (1, y'(0), z'(0))$ fornisce i numeri direttori della retta tangente alla curva $\gamma(x)$ nel punto $\gamma(0) = (0,1,2) = (0, y(0), z(0))$. Dalle (16.32) e (16.33) si ricava che:

$$y'(0) = \left[\frac{-x^2 + z^2 - xz - xy}{x^2 + yz}\right]_{(0,1,2)} = 2, \quad z'(0) = \left[\frac{x^2 - y^2 - xy - xz}{yz + x^2}\right]_{(0,1,2)} = -\frac{1}{2}.$$

Allora, la retta tangente a $\gamma(x)$ nel punto $(0,1,2)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 0 + t, \\ \\ y = 1 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ \\ z = 2 - \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Si noti che, nell'intorno $X \times Y$ del punto $(0,1,2)$, il sostegno della curva $\gamma(x), x \in X$, coincide con l'intersezione delle superfici di equazioni:

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = 0.$$

16.5 Invertibilità di una funzione di un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^k$.

Siano $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^k$. Ricordiamo che la funzione φ è invertibile in Ω se e solo se:

$$\forall y \in \varphi(\Omega) \ \ \exists!\ x \in \Omega \ : \ \varphi(x) = y. \tag{16.34}$$

Se $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$ e $y = (y_1, \ldots, y_k)$, la (16.34) equivale a dire che, $\forall y = (y_1, \ldots, y_k) \in \varphi(\Omega)$, il sistema

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_k) = y_1, \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \varphi_k(x_1, \ldots, x_k) = y_k, \end{cases} \tag{16.35}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_k$, ammette un'unica soluzione appartenente ad Ω.

Considerate le funzioni $f_i(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_k) - y_i$, $i = 1, \ldots, k$, osserviamo che il sistema (16.35) equivale al sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) = 0, \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ f_k(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k) = 0. \end{cases} \tag{16.36}$$

Posto $A = \Omega \times \mathbb{R}^k$ le funzioni $f_i(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k), i = 1, \ldots, k$, sono funzioni reali definite in A e ivi derivabili rispetto alle variabili $y_1, \ldots, y_k$ e, $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$, risulta:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = \begin{cases} -1, & \text{se } \ i = j \\ \\ 0, & \text{se } \ i \neq j. \end{cases} \tag{16.37}$$

Se le funzioni $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sono derivabili in Ω rispetto a $x_1, \ldots, x_k$ allora, anche le $f_1, \ldots, f_k$ sono derivabili in A rispetto a $x_1, \ldots, x_k$ e,$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$, risulta:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x). \tag{16.38}$$

Conseguentemente:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(x, y) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(x). \tag{16.39}$$

Posto:

$$J(x) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(x),$$

proviamo il seguente:

Teorema 16.5.1. (**Teorema di invertibilità locale**)
Siano $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^k$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = \varphi(x_0)$. Se risulta:

$$J(x_0) \neq 0, \tag{16.40}$$

allora esiste un intorno X di x_0, $X \subseteq \Omega$, tale che φ è invertibile in X e l'inversa (*locale*) *$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, definita in $Y = \varphi(X) \subseteq \varphi(\Omega)$, soddisfa la condizione $\psi(y_0) = x_0$; inoltre, in $X \times Y$ il sistema* (16.35) *è equivalente al sistema seguente:*

$$\begin{cases} \psi_1(y_1, \ldots, y_k) = x_1, \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \psi_k(y_1, \ldots, y_k) = x_k. \end{cases} \tag{16.41}$$

Infine, la funzione $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ appartiene a $C^1(Y, X)$ e risulta:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}(y_1, \ldots, y_k) = \frac{(-1)^{h+i} M_{h,i}(\psi_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, \psi_k(y_1, \ldots, y_k))}{J(\psi_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, \psi_k(y_1, \ldots, y_k))},$$

dove $M_{h,i}$ è il minore complementare di J ottenuto eliminando la riga $h-$ esima e la colonna $i-$ esima .

Dimostrazione. Per le (16.39) e (16.40):

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}(x_0,y_0)=\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}(x_0)\neq 0,$$

quindi, a norma del teorema del Dini per i sistemi, esistono un intorno X di x_0 e un intorno Y di y_0, con $X\times Y\subseteq\Omega\times\varphi(\Omega)$, tali che in $X\times Y$ il sistema (16.36) definisce implicitamente x in funzione di y, cioè definisce la funzione $\psi: y\in Y\to\psi(y)=x\in X$ che appartiene a $C^1(Y,X)$ e $\forall i,h\in\{1,\ldots,k\}$ soddisfa la condizione:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y_h}(y_1,\ldots,y_k)=-\frac{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},y_h,x_{i+1},\ldots,x_k)}}{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}},\tag{16.42}$$

i determinanti che compaiono nella (16.42) sono calcolati nel punto:

$$(\psi_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,\psi_k(y_1,\ldots,y_k),y_1,\ldots,y_k).$$

Dalle (16.37) e (16.38) si ha che:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},y_h,x_{i+1},\ldots,x_k)}=\\&=(-1)^{h+i}(-1)\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{h-1},f_{h+1}\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k)}=\\&=-(-1)^{h+i}\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{h-1},\varphi_{h+1}\ldots,\varphi_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k)}(\psi_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,\psi_k(y_1,\ldots,y_k)),\end{aligned}\tag{16.43}$$

i primi due determinanti che compaiono nella (16.43) sono calcolati nel punto:

$$(\psi_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,\psi_k(y_1,\ldots,y_k),y_1,\ldots,y_k).$$

Conseguentemente, dalla (16.42) si ha che:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_i}{\partial y_h}(y_1,\ldots,y_k)=\\&=\frac{(-1)^{h+i}\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_{h-1},\varphi_{h+1}\ldots,\varphi_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k)}(\psi_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,\psi_k(y_1,\ldots,y_k))}{\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}(\psi_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,\psi_k(y_1,\ldots,y_k))},\end{aligned}$$

da cui segue l'asserto. □

Osserviamo esplicitamente che, se $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e risulta:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

allora, a norma del teorema sull'invertibilità locale, qualunque sia $x \in \Omega$, la funzione φ è localmente invertibile in un intorno di x. E' bene osservare che ciò non comporta l'invertibilità della φ in tutto Ω.

A tale scopo consideriamo la funzione seguente:

$$\varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 \end{vmatrix} = (e^{x_1} \cos x_2)^2 + (e^{x_1} \sin x_2)^2,$$

allora:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_1, x_2)}(x_1, x_2) = e^{2x_1} > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

conseguentemente, la funzione φ è localmente invertibile in tutto $\mathbb{R}^2$. Però, notiamo che la φ non è globalmente invertibile in tutto $\mathbb{R}^2$; a tale scopo basta considerare i punti (x_1, x_2) e $(x_1, x_2 + 2\pi)$ ed osservare che:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2 + 2\pi) \quad &= (e^{x_1} \cos(x_2 + 2\pi), e^{x_1} \sin(x_2 + 2\pi)) = \\ &= (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2) = \varphi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente affinché una funzione f sia globalmente invertibile:

Teorema 16.5.2. (**Teorema di invertibilità globale**)
Siano $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^k$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *e* $D \subseteq \Omega$ *un dominio limitato e connesso. Se:*

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(x) \neq 0, \quad \forall x \in D,$$

e, inoltre, φ *determina una corrispondenza biunivoca tra i punti della* ∂D *e i punti della* $\partial\varphi(D)$*, allora l'insieme* $\varphi(D)$ *è un dominio limitato e connesso di* $\mathbb{R}^k$ *e* φ *è globalmente invertibile in* D.

16.6 Massimi e minimi vincolati.

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f, F \in C^1(A, \mathbb{R})$. Supponiamo che l'insieme:

$$Z = \{(x, y) \in A \ : \ F(x, y) = 0 \text{ e } DF(x, y) \neq \mathbf{0}\},$$

sia non vuoto.

Il problema che consiste nel ricercare gli eventuali punti di massimo o di minimo della funzione f nell'insieme Z, prende il nome di problema di estremo condizionato o vincolato e l'equazione:

$$F(x, y) = 0$$

si chiama vincolo.

Si possono presentare due casi:

Caso 1. *Z è il sostegno di una curva semplice regolare:*

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Caso 2. *Z non è il sostegno di una curva semplice regolare.*

Nel **Caso 1**, il problema di estremo condizionato relativo alla funzione $f(x, y)$ e al vincolo $F(x, y) = 0$ consiste nel ricercare i punti di massimo o di minimo della funzione composta tra la $f(x, y)$ e la $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, cioè della funzione:

$$G(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Prima di considerare un esempio osserviamo che, se il punto $t_0 \in]a, b[$ è un punto di massimo o di minimo relativo per $G(t)$, allora deve risultare $G'(t_0) = 0$ e quindi, posto $P_0 = (x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, si avrà:

$$f_x(P_0)x'(t_0) + f_y(P_0)y'(t_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (Df(P_0), \gamma'(t_0)) = 0,$$

cioè il vettore $Df(P_0)$ è ortogonale alla curva γ nel punto P_0.

Esempio 1. Consideriamo le funzioni:

$$f(x,y) = xy, \ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

e ricerchiamo i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x,y)$ sotto il vincolo:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{16.44}$$

Osserviamo che i punti $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$ soddisfacenti la (16.44) sono tutti e soli i punti dell'arco Γ, della circonferenza goniometrica, che ha gli estremi sull'asse x e che si trova al di sopra di tale asse; inoltre, notiamo che Γ è il sostegno della seguente curva semplice regolare:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0,\pi]. \tag{16.45}$$

Quindi, il nostro problema consiste nel ricercare il massimo e il minimo della funzione seguente:

$$G(t) = \sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}, \quad t \in [0,\pi].$$

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda di $G(t)$:

$$G'(t) = \cos 2t \ \text{ e } \ G''(t) = -2\sin 2t.$$

Essendo:

$$\begin{aligned} G'(t) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \cos 2t = 0 \Longleftrightarrow 2t = \pm\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ &\Longleftrightarrow t = \pm\tfrac{\pi}{4} + k\pi, \end{aligned}$$

le uniche soluzioni dell'equazione $G'(t) = 0$ appartenenti a $[0,\pi]$ sono:

$$\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{3}{4}\pi.$$

Da cui si ricava che:

$$G''(\frac{\pi}{4}) = -2 < 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ massimo relativo per } G(t),$$

e:

$$G''(\frac{3}{4}\pi) = 2 > 0 \Longrightarrow \frac{3}{4}\pi \text{ minimo relativo per } G(t).$$

Sostituendo $\frac{\pi}{4}$ nella (16.45) si ha che:

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

e sostituendo $\frac{3}{4}\pi$ nella (16.45) si ha che:

$$\left(\cos\frac{3}{4}\pi, \sin\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Conseguentemente, il punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di massimo di $f(x, y)$ vincolato alla condizione (16.44) e il punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di minimo di $f(x, y)$ vincolato alla condizione (16.44), si noti che $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Passiamo al **Caso 2**, cioè al caso in cui Z *non è il sostegno di una curva semplice regolare.*

Considerato un punto (x_0, y_0) di Z, essendo $DF(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, si può supporre, tanto per fissare le idee, che $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. A norma del Teorema del Dini, l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno $I(x_0)$ del punto x_0, una funzione $h(x) \in C^1(I(x_0), \mathbb{R})$ soddisfacente la condizione $h(x_0) = y_0$.

Dunque, in un opportuno intorno di (x_0, y_0), i punti di Z sono tutti e soli i punti del grafico della funzione $h(x)$.

Considerata la funzione:

$$G : x \in I(x_0) \to f(x, h(x)),$$

se x_0 è un estremo relativo di $G(x)$ allora:

$$G'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)h'(x_0) = 0. \qquad (16.46)$$

D'altro canto, per il teorema del Dini, sappiamo che:

$$h'(x) = -\frac{F_x(x, h(x))}{F_y(x, h(x))}, \quad x \in I(x_0),$$

quindi la (16.46) diventa:

$$f_x(P_0) + f_y(P_0)\left(-\frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)}\right) = 0,$$

da cui:

$$f_x(P_0) = \frac{F_x(P_0)}{F_y(P_0)} f_y(P_0). \tag{16.47}$$

Se $F_x(P_0) \neq 0$, dalla (16.47) si ottiene:

$$\frac{f_x(P_0)}{F_x(P_0)} = \frac{f_y(P_0)}{F_y(P_0)},$$

quindi:

$$f_x(P_0) = -\lambda_0 F_x(P_0), \quad f_y(P_0) = -\lambda_0 F_y(P_0),$$

cioè:

$$\begin{cases} f_x(P_0) + \lambda_0 F_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) + \lambda_0 F_y(P_0) = 0. \end{cases}$$

In definitiva si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} f_x(P_0) + \lambda_0 F_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) + \lambda_0 F_y(P_0) = 0 \\ F(P_0) = 0. \end{cases} \tag{16.48}$$

In altre parole, i punti di massimo o di minimo di f, con il vincolo $F(x, y) = 0$, sono i punti critici (i.e. i punti che fanno annullare il gradiente) della funzione seguente:

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y), \tag{16.49}$$

infatti:

$$H_x = f_x + \lambda F_x, \quad H_y = f_y + \lambda F_y, \quad H_\lambda = F.$$

Il metodo sopra descritto si chiama *metodo di Lagrange* e consiste nel risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x(P) + \lambda F_x(P) = 0 \\ f_y(P) + \lambda F_y(P) = 0 \\ F(P) = 0, \end{cases} \tag{16.50}$$

per la ricerca di eventuali estremi relativi di $f(x, y)$ sotto la condizione $F(x, y) = 0$.

Definizione 16.6.1. *La variabile λ, che compare nella (16.50), prende il nome di moltiplicatore di Lagrange e le soluzioni del sistema (16.48) prendono il nome di punti stazionari vincolati per f.*

Vale il seguente:

Teorema 16.6.2. *Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f, F \in C^1(A, \mathbb{R})$, Γ il sostegno di una curva piana definita implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di regolarità di Γ* (i.e. $DF(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$).

Se P_0 è un estremo relativo per la restrizione di f a Γ, allora esiste un unico $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$Df(P_0) + \lambda_0 DF(P_0) = \mathbf{0}.$$

Dal Teorema 16.6.2 si deduce che, gli eventuali punti P_0 di estremo relativo per la restrizione di f a Γ (che sono di regolarità per Γ) si ottengono risolvendo il sistema (16.50).

Esempio 2. Determinare il rettangolo di area massima avente estremi $(0, 0)$ e (x, y), dove (x, y) è vincolato a stare sull'arco di ellisse Γ rappresentato in figura.
Ricordiamo che l'equazione dell'ellisse è data da:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right),$$

quindi il nostro vincolo è:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad (x, y) \in [0, +\infty[^2.$$

Dunque, dobbiamo determinare il massimo di $f(x, y) = x \cdot y$ sotto il vincolo:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0, \quad (x, y) \in [0, +\infty[^2.$$

Iniziamo con l'osservare che, per ottenere il massimo di $f(x, y) = xy$, deve risultare $x > 0$ e $y > 0$. Ora, considerata la funzione $H(x, y, \lambda) = xy + \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1)$, dobbiamo risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} H_x(x, y, \lambda) = y + \lambda\frac{x}{2} = 0 \\ H_y(x, y, \lambda) = x + \lambda 2y = 0 \\ H_\lambda(x, y, \lambda) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{16.51}$$

Dalla prima equazione del sistema (16.51) si ricava $y = -\frac{\lambda}{2}x$ e sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$x(1 - \lambda^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Se $\lambda = -1$ allora $y = \frac{x}{2}$ da cui, sostituendo nella terza equazione, si ricava $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 1$ dunque $x = \sqrt{2}$. Abbiamo, quindi, trovato che $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ è soluzione del sistema (16.51) e il punto $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartiene a Γ.
Se $\lambda = 1$ allora $y = -\frac{x}{2}$ da cui, sostituendo nella terza equazione del sistema (16.51), si ottiene $x = \sqrt{2}$ quindi $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Abbiamo, quindi, trovato che $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ è un'altra soluzione del sistema (16.51). Ma $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ non appartiene a Γ dunque tale soluzione è da escludere.
Concludendo, visto che Γ è un compatto e che f è continua, la $f/_\Gamma$ è dotata di massimo (assoluto) allora il punto $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è l'unica soluzione del problema posto. Quindi, il rettangolo di area massima ha vertici $(0, 0)$ e $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ed ha area 1.

Passiamo, ora, al caso in cui la funzione f è definita in un aperto di $\mathbb{R}^3$ e il vincolo è una superficie.

Vale il seguente:

Teorema 16.6.3. *Siano X un aperto di $\mathbb{R}^3$, $f, F \in C^1(X, \mathbb{R})$, S il sostegno di una superficie definita implicitamente dall'equazione $F(x, y, z) = 0$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di regolarità di S.*

Se P_0 è un estremo relativo per la restrizione di f ad S, allora esiste un unico $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$Df(P_0) + \lambda_0 DF(P_0) = \mathbf{0}.$$

Dal Teorema 16.6.3 si deduce che, gli eventuali punti P_0 di estremo relativo per la restrizione di f ad S (che sono punti di regolarità per S) si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(P) + \lambda F_x(P) = 0 \\ f_y(P) + \lambda F_y(P) = 0 \\ f_z(P) + \lambda F_z(P) = 0 \\ F(P) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. Dato il punto $P' = (1, 1, 0)$ e il paraboloide di rotazione S di equazione $z = x^2 + y^2$, si determini il punto P di S avente distanza minima da P'.

Iniziamo con l'osservare che la distanza di P' da P è data da:

$$|P - P'| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

Considerata la funzione $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$, che rappresenta il quadrato della distanza di P da P', il problema sarà risolto se calcoliamo il minimo di f sotto il vincolo:

$$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0.$$

Consideriamo, dunque, la funzione:

$$\begin{aligned} H(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = \\ &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

e risolviamo il sistema:

$$DH(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} H_x(x,y,z,\lambda) = 0 \\ H_y(x,y,z,\lambda) = 0 \\ H_z(x,y,z,\lambda) = 0 \\ H_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0. \end{cases}$$

e cioè:

$$\begin{cases} 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y-1) - 2\lambda y = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 1 = 0 \\ (1-\lambda)y - 1 = 0 \\ z = -\frac{\lambda}{2} \\ z - x^2 - y^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \\ z = -\frac{\lambda}{2} \\ z - x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

da cui, sostituendo nella quarta equazione si ha:

$$-\frac{\lambda}{2} - \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{(1-\lambda)^2} - \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda(1-\lambda)^2 - 2 - 2}{2(1-\lambda)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda(1-2\lambda+\lambda^2) - 4}{2(1-\lambda)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 4}{2(1-\lambda)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 4 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda \neq 1;$$

si noti che $\lambda = -1$ è soluzione di quest'ultima equazione, quindi:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 3\lambda + 4) = 0$$

conseguentemente $\lambda = -1$ è l'unica soluzione reale di tale equazione; sostituendo $\lambda = -1$ nel sistema si ha che:

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}.$$

Quindi il punto di S avente distanza minima da $P' = (1,1,0)$ è il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Bibliografia

[1] F. Cafiero, *Lezioni di Analisi Matematica*, Parte seconda; Liguori Editore, (1968).

[2] N. Fedele, *Corso di Analisi Matematica*, Vol.II, Parte prima; Liguori Editore, (1995).

[3] N. Fedele, *Corso di Analisi Matematica*, Vol.II, Parte seconda; Liguori Editore, (2002).

[4] R. Fiorenza e D. Greco, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol.II; Liguori Editore, (1999).

[5] N. Fusco, P. Marcellini e C. Sbordone, *Analisi Matematica due*; Liguori Editore, (1998).