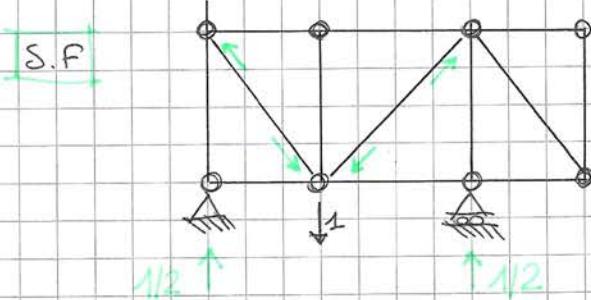


Vai?

Essendo una struttura **NODALE**

potremo trascurare momenti e taglio in fasce dello spazio

$$l_e = l_i$$



$$\int_s N^i \frac{M^i M}{EI_x} ds + \int_s N^i \frac{N^i N}{EA} ds + \int_s T^i \lambda T ds$$

$$- \int_s N^i \lambda ds$$

Essendo lo spazio in un asta di trave reticolari costante potremo

riscrivere $\int_s N^i \frac{N^i}{EA} ds$ come $\sum_{i=1,3} \frac{N^i i - N_i}{E_i A_i} \cdot l_i$

$\int_s N^i \lambda ds$ e' applicato solo sull'asta DI quindi potremo

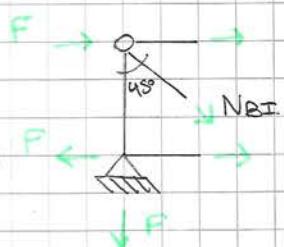
dire che in quel tratto lo spazio e' costante e potremo togliere dal

segno di integrale. = $\int_s N^i \lambda ds = \frac{N^i \cdot d \cdot \Delta t \cdot l_p}{d}$

POLO H

$$-F \cdot a + R_A \cdot 2a - Fa = 0 \quad 2R_A a = 2Fa \quad R_A = F$$

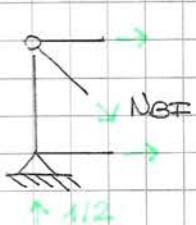
SEZIONE B-I



$$\sum F_y = 0 \quad +F + N_{BI} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$N_{BI} = \frac{-2F}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}F}{2} = -\sqrt{2}F$$

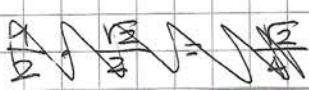
Negativo e quindi di COMPRESSIONE



$$\sum F_y = 0$$

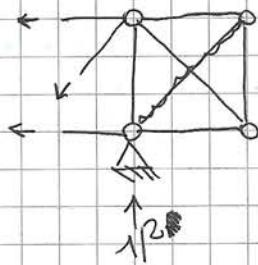
$$-1/2 + N_{BI} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_{BI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ASTA D - II.



$$N'_{DI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi

$$N' \cdot \Delta t \cdot L_i$$

$$\checkmark N' > 0$$

$\Delta t > 0$ il concio si allunga

quindi $-\int_{\text{S}} N' \lambda \, ds$ tutto il valore è positivo

$\downarrow \lambda < 0$

$\downarrow N' > 0$

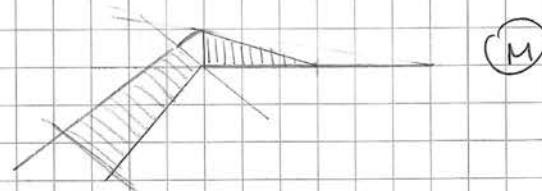
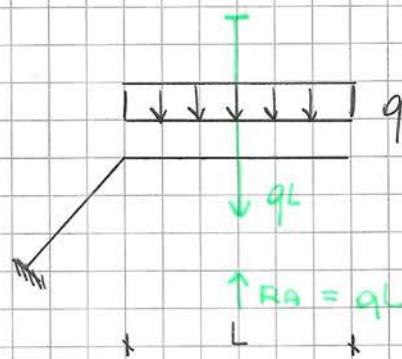
/ ~ ~ ~ ~ 0

TRACCIAMENTO

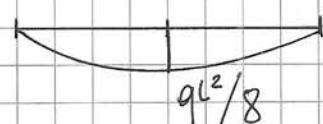
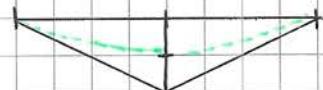
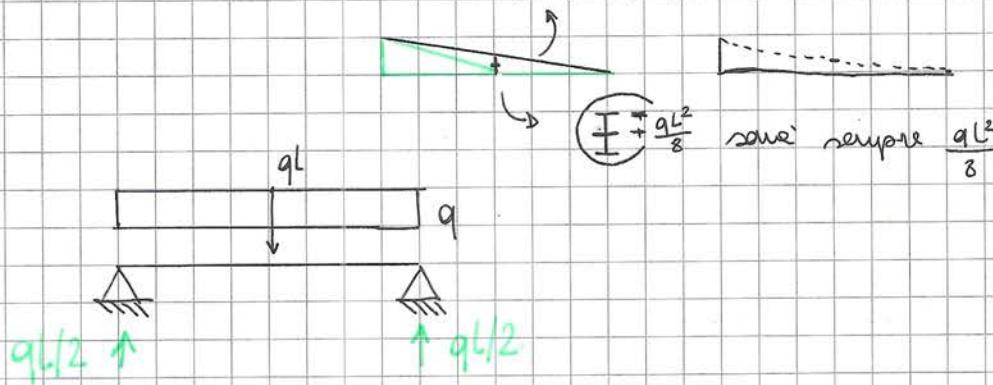
MOMENTO

CARICO

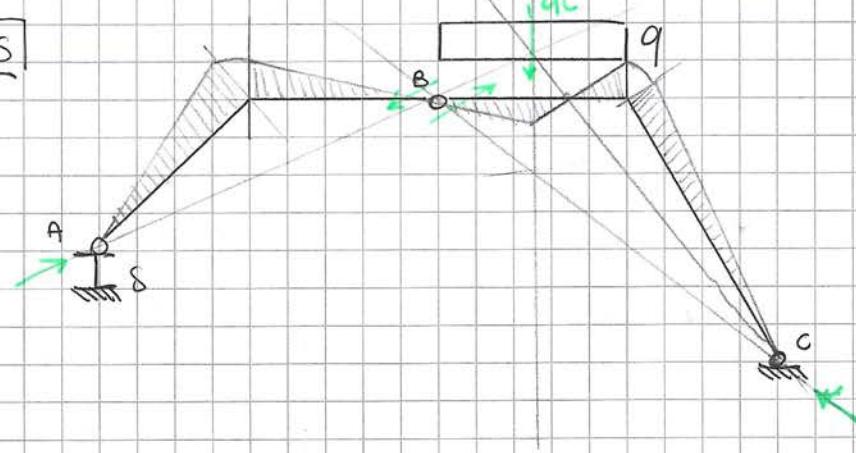
DISTRIBUITO



FONDAMENTALE



SS

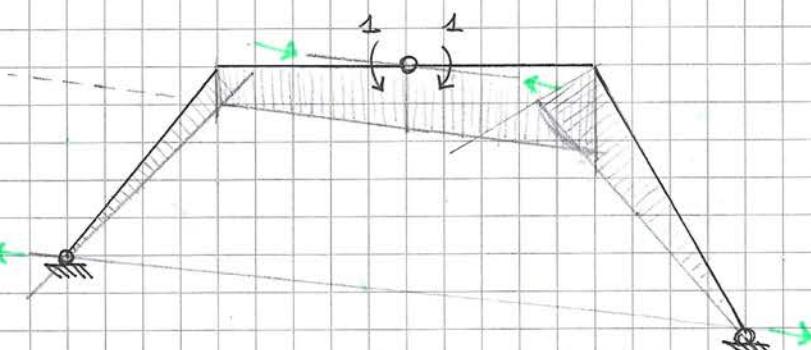


$$\Delta \varphi_B = ?$$

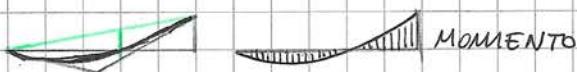
$$L_e = 1 \cdot \Delta \varphi_B + R_A' \cdot \delta$$

$$L_i = \int_S M' \frac{M}{EI} ds + \int_S N' \frac{N}{EA} ds$$

SF



FONDAMENTALE

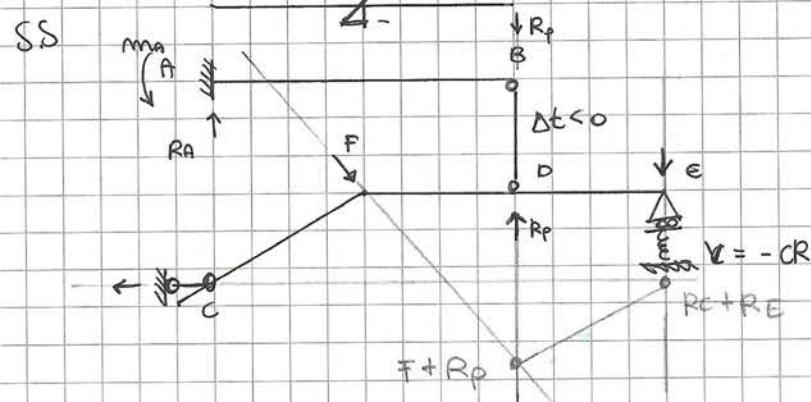


R'A NOTIAMO SIA VERSO L'ALTO . IL LAVORO PER δ CHE E' VERSO IL BASSO E' NEGATIVO

$$1 \cdot \Delta \varphi_B + R_A' \cdot \delta = \int_S M' \frac{M}{EI} ds + \int_S N' \frac{N}{EA} ds$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $<0 \quad >0$

$$1 \cdot \Delta \varphi_B - R_A' \cdot \delta = \int_S M' \frac{M}{EI} ds + \int_S N' \frac{N}{EA} ds$$



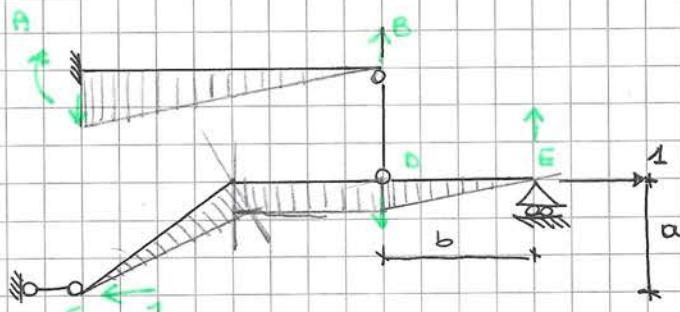
WE ?

$$1 \cdot WE - R'E \cdot (cRE)$$

$$U_i = \int_s \frac{M' M}{EI} ds + \int_s \frac{N' N}{EA} ds$$

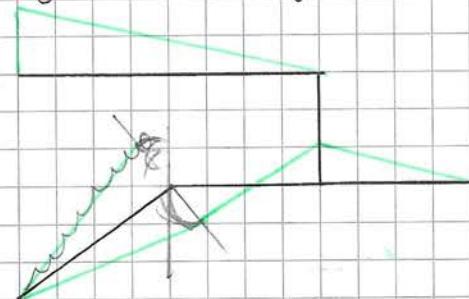
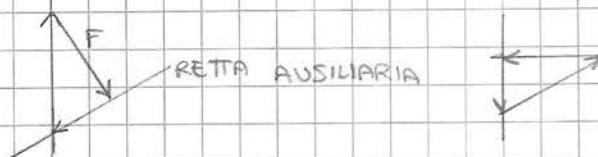
$$-\int u' \mu ds - \int N' \lambda ds$$

SS.



PENDOLO

$$(F \cdot a) = R_E \cdot b \quad a = R_E \cdot b \quad R_E = \frac{a}{b}$$

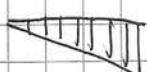


$$1 \cdot WE - \left(\frac{1}{b} \cdot a\right) (cRE) = \int_s \frac{M' u}{EI} ds + \int_s \frac{N' N}{EA} ds - \int_A^B M' \mu ds + \int_B^0 N' \lambda ds$$



Sopra si allunga e sotto si accorcia $\mu > 0$

M'



Fibre inf

$M' > 0$

$$-\int_s \frac{M' \mu}{EI} ds \quad \text{Segno -}$$

$\int \Delta t < 0$ (Raffreddata)



concio compresso d'acq freddato

N' compressione < 0

λ compress. > 0

$$-\int_s N' \lambda ds \quad \text{SEGNNO } \oplus$$



STRUTTURE IPERSTATICHE

Ovvvero quando abbiamo un numero di rincorsi superiore al necessario

Ci sono due metodi per calcolare tali strutture suddivisi in due famiglie

METODO DELLE FORZE

Qui avremo come incognite delle forze

I due metodi di studio di questa famiglia sono:

- Metodo delle Equazioni di congruenza
- P.L.V

Il metodo delle forze opera in questo modo



Troviamo l'unica soluzione congruente

tra le infinite soluzioni equilibrate

METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Qui le incognite saranno gli spostamenti

I metodi in questa famiglia sono

- Metodo dei Cedimenti
- Gross
- Grainten Poggati
- Franciosi
- P.L.V (riorganizzato) si può dire

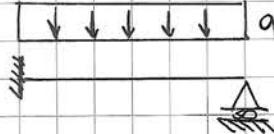
P.S.V (Principio Spostamenti Virtuali)



Troviamo l'unica soluzione equilibrata

tra le infinite soluzioni esognenti

Equazione di congruenza:

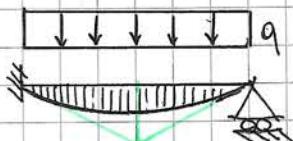


col metodo delle forze possiamo scegliere infinite soluzioni equilibrate e dobbiamo scegliere un'unica congruente



Se così fosse avremmo un

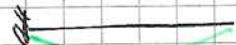
E' una soluzione equilibrata? si
E' anche congruente?
diagramma del momento di questo tipo

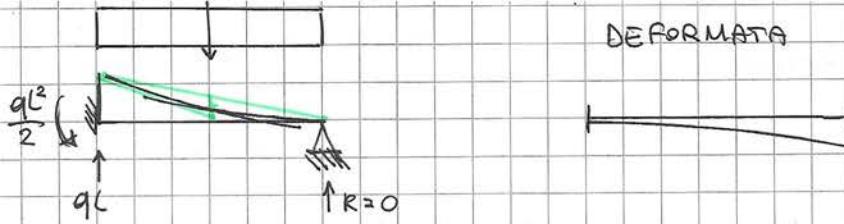


Proviamo a fare adesso una definizione della struttura.

questo tipo

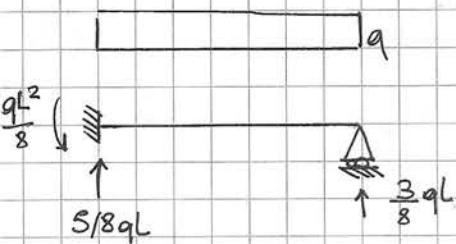
Se le fibre tese sono inferiori noi dovremo andare a immaginare una definizione di ma ciò viola il rinculo incastrato





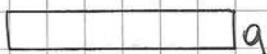
DEFORMATA

Anche questo soluzione è equilibrata ma non congruente

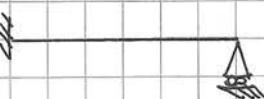


Equazioni di lunghezza:

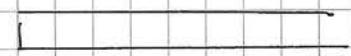
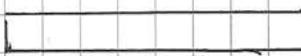
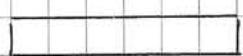
Si parte da un sistema iniziale e si sceglie un sistema isostatico eliminando i vincoli iperstatici



$$3t - s = 3 - 4 = -1$$

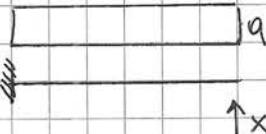


Abbiamo tantissimi modi per rendere questa struttura isostatica



∞ possibilità

Se scegliamo



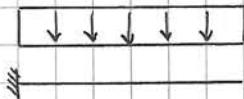
dovremo porre una incognita iperstatica

Dobbiamo cercare l'unico valore di x che rende il corpo congruente e cioè che gli spostamenti che leggiamo su questa struttura sono gli stessi che avevamo su quella iniziale.

le vincole B consentono gli spostamenti orizzontali e non quelli verticali + notazione.

Se associamo una equazione che mi ripristina gli spostamenti questa struttura diventa un sistema isostatico equivalente

In questo caso $V_B = 0$ che è data da $V_G = V_B^0 + V_B^X$



Facciamo le Auxiliarie dell'equazione $V_B = V_B^0 + V_B^X$

Se chiamiamo il corpo a sx

Incognita unitaria ipostatica

come S_0 (sistema iniziale reso isostatico con i carichi esterni) e quello a dx S' (sistema auxiliare) possiamo dire che lo spostamento $V_B =$

$$V_B = V_B^0 + X V_B^X$$

$V_B^0 = V_B$ letto sul sistema 0

$X V_B^X = X$ volte lo spostamento sul sistema S'

$$V_B^0 = \frac{9L^4}{8EI}$$

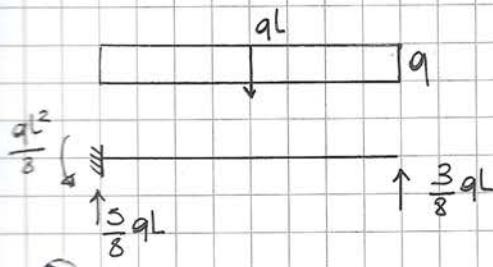
$$V_B^X = -\frac{FL^3}{3EI}$$

$$\text{quindi } V_B = \frac{9L^4}{8EI} + X \left(-\frac{L^3}{3EI} \right) = 0$$

Nel calcolo prese dalla tabella note.

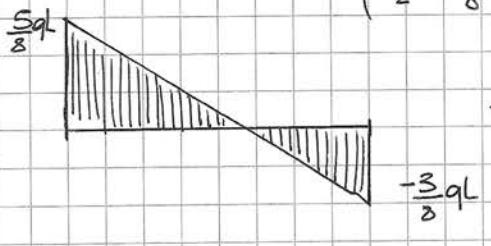
↳ F è supposta unitaria $F=1$

Ricaviamo $X = \frac{9L^4}{8EI} \cdot \frac{3EI}{L^3} \rightarrow X = \frac{3}{8}ql$



$$M(A) = \frac{3}{8}ql^2 - ql \cdot \frac{L}{2} + m = 0$$

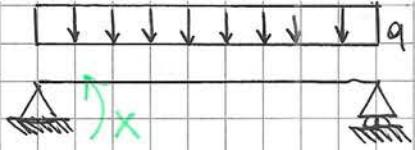
$$m = ql^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) = \frac{qL^2}{8}$$



TAGLIO

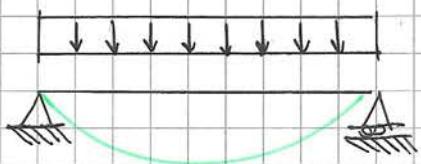
Se il taglio ha un punto nullo il momento in quel punto sarà massimo

Al posto di sagliere la trave incorniciata avremmo potuto scegliere la trave appoggiata-appoggiata come sistema isostatico



$$Q_A = 0$$

Sistema isostatico equivalente



s_0



s'

$$Q_A = Q_A^0 + X Q_A^i$$

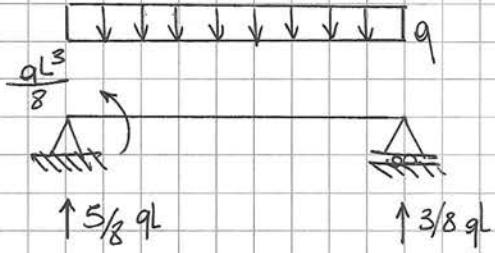
$$Q_A^0 = -\frac{qL^3}{24EI}$$

$$Q_A^i = \frac{qL}{3EI}$$

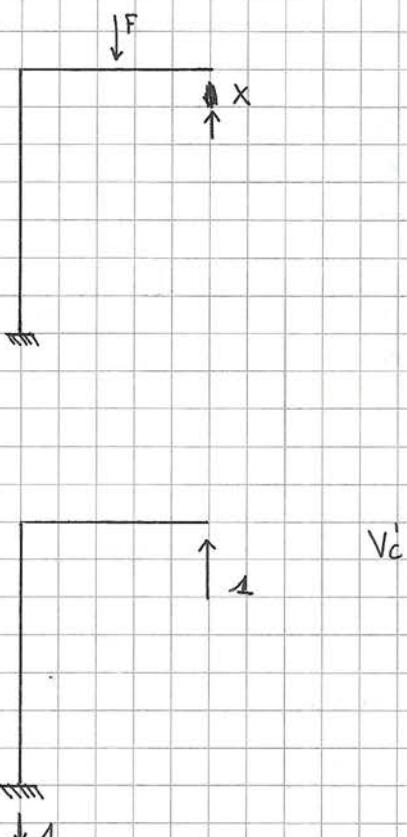
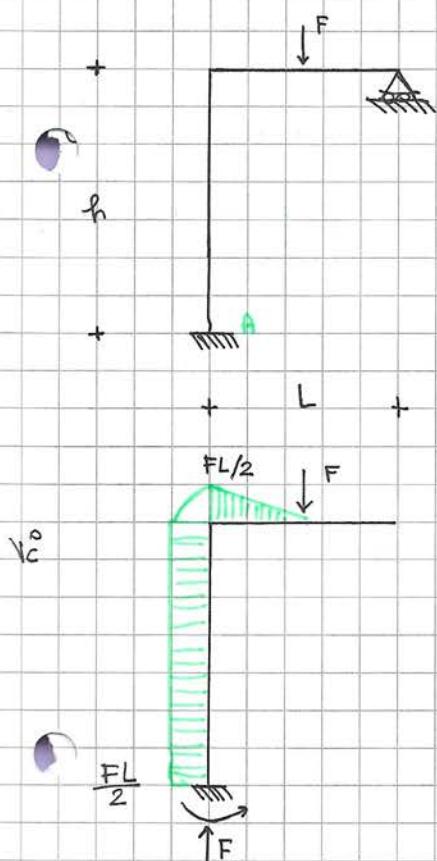
$$Q_A = -\frac{qL^3}{24EI} + X \left(\frac{L}{3EI} \right)$$

$$X = \frac{qL^3}{24EI} \cdot 3EI = \frac{qL^2}{8}$$

qui molti avranno:



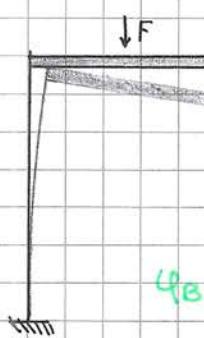
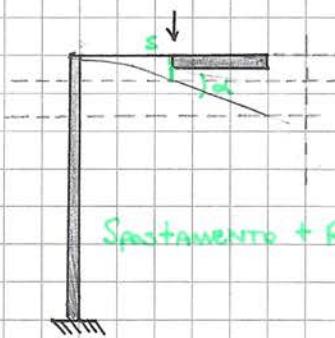
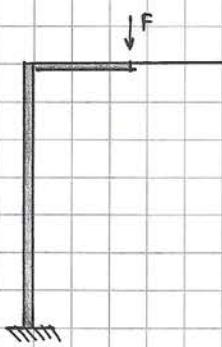
Notiamo che il sistema risultante e' uguale sia nel caso di trave appoggio incastro (mensola) che incastellata (mensola)



$$V_C = 0$$

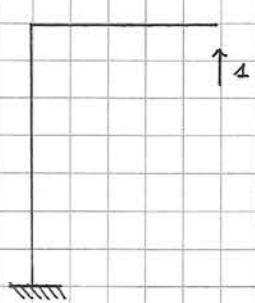
$$V_C = V_C^0 + X \cdot V_C'$$

Composizione cinematica



$$V_B = \frac{F(L/2)^3}{3EI} + \frac{F(L/2)^2}{2EI} \cdot \frac{L}{2}$$

$$V_B = \frac{(F \cdot L/2)h}{EI} \cdot \frac{L}{2}$$



$$V_C' = - \left(\frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL^2h}{EI} \right) \quad N_C'$$

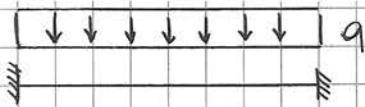
$$V_C^0$$

$$V_C'$$

Eq. elongazione

$$\left[\frac{F}{EI} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{F}{EI} \left(\frac{L}{2} \right)^2 h \right] + X \left[\frac{-1L^3}{3EI} - \frac{1L^2h}{EI} \right]$$

Nota la X possiamo poi calcolare il diagramma del momento e taglio e calcolare.



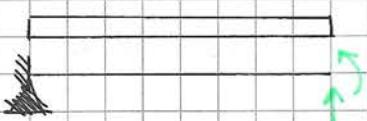
$$i = 2 \text{ volte}$$



$$\text{Eq. congruenza: } \varphi_A = 0$$

$$\varphi_A^0 + X_1 \varphi_A + X_2 \varphi_A'' = 0$$

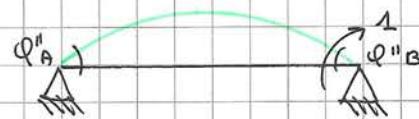
$$\varphi_B = 0 \quad \varphi_B^0 + X_1 \varphi_B + X_2 \varphi_B'' = 0$$



$$\text{Eq. congruenza: } V_B = 0$$

$$\varphi_B = 0$$

φ'_A, φ''_A e φ'_B, φ''_B sono rispettivamente la notazione im A dovuta all'incognita iperstatica 1 di valore unitario e la notazione im A dovuta alla seconda incognita iperstatica unitaria. φ'_B è la notazione im B dovuta alla prima incognita iperstatica dovuta di valore unitario e φ''_B " "



RELAZIONI ELASTICHE (Recap)

Come visto in precedenza dovevamo trovare una connessione tra σ e E (causa e effetti) e per farlo si passa da prove di laboratorio (primo sopposto a prova di trazione). Molte riducono un diagramma forza spostamento che dimostrano in F /Area e S /Altezza per togliere le variazioni dovute alle dimensioni del primo e ci si mette un puro diagramma σ/ϵ . Questo diagramma caratterizza qualsiasi tipo di materiale.

Presentiamo un organo elastico-lineare (il primo torna allo stato iniziale tolto lo sforzo).

La pendenza lineare del diagramma dà il valore del Modulo di YOUNG

[QUESTO SOLO IN CASO DI DIAGRAMMA σ_z/ϵ_z]

Se invece abbiamo un materiale isotropo il diagramma $\sigma_z/\epsilon_z = \sigma_x/\epsilon_x = \sigma_y/\epsilon_y$

LE DIMENSIONI DI E (MODULO DI YOUNG) SONO $\text{FORZA} \cdot \text{LUNGHEZZA}^{-2}$

Dalle esequazioni dette troviamo le relazioni di Navier che ci semplificano le relazioni di 36 costanti tra σ, ϵ e E

RELAZIONI INVERSE DI NAVIER

RELAZIONI DIRETTE :

$$E \rightarrow \sigma$$

DEFORMAZIONI IN FUNZIONE DELLE TENSIONI

$$\gamma \rightarrow \epsilon$$

RELAZIONI INDIRETTE :

TENSIONI IN FUNZIONE DELLE DEFORMAZIONI

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{m} \right)$$

Se sommiamo membro a membro abbiamo :

$$(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{Em}$$

$\hookrightarrow \Theta$ (invariante lineare di deformazione)

Invarianti che conoscono
dalla teoria su CAUCHY.

\hookrightarrow Invariante lineare di tensione (T)

$$\Theta = \frac{I}{E} - \frac{2T}{Em} \quad \rightarrow \quad \Theta = \frac{T}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$$

Dalla prima espressione possiamo ricavare σ_x

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \quad \text{sommiamo ad ambo i lati} \quad \frac{\sigma_x}{m}$$

$$\frac{\sigma_x}{m} + \sigma_x = E\epsilon_x + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} + \frac{\sigma_x}{m}$$

$$\sigma_x \left(1 + \frac{1}{m} \right) = E\epsilon_x + \frac{T}{m}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1+(1/m)} \epsilon_x + \frac{T}{m(1+1/m)}$$

\hookrightarrow questa quantità somiglia a $G = \frac{E}{2(1+1/m)}$

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \frac{\Theta/E}{m(1+\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})}$$

$$T = \frac{\Theta E}{(1-2/m)}$$

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \lambda\Theta$$

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \lambda\theta$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\epsilon_y + \lambda\theta$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

RELAZIONI INVERSE DI NAVIER

$$\sigma_z = 2G\epsilon_z + \lambda\theta$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

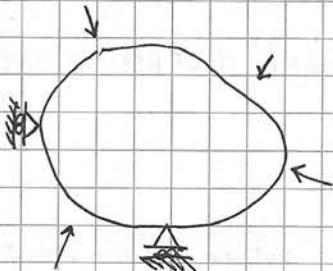
Tutto cio' sempre in ipotesi di materiali linearmente elastico, isotropo e conservativo
Quindi la pendenza tra σ e ϵ e' rappresentata dal modulo di young (E)
mentre la pendenza tra τ e γ e' data dal modulo di elasticita'
tangenziale (G) (Prima costante di LAMET)

Più la trave è elastica ($E <$) più elevato è lo spostamento ($E >$)

che dimensioni ha G ?

Sia E il modulo di Young che il modulo di elasticita' tangenziale
sono uguali a $[\text{FORZA} \cdot \text{LUNGHEZZA}^{-2}]$

EQUILIBRIO ELASTICO



Dai un corpo soggetto a forze superficiali e vincoli e forze di massa, dalle forze applicate dovranno essere in grado di calcolare qualsiasi spostamento.

$F \rightarrow$ Spostamenti

u, v, w

Le equazioni che ci aiutano sono quelle dell'equilibrio elastico di CAUCHY

Note le forze passano alle tensioni $F \rightarrow (T, \sigma) \rightarrow (\gamma, \epsilon) \rightarrow u, v, w$
le tensioni alle deformazioni e le deformazioni agli spostamenti



$$\frac{dt}{dz} = -q \quad \frac{dM}{dz} = T \quad \frac{du}{dz} = \frac{M}{EI_x} \quad \frac{dv}{dz} = -u$$

All'inizio partivamo con un'equazione indefinita e legavamo le
caiche al taglio, ie taglio al momento ecc.. con le 4 integrazioni

EQUAZIONI EQUILIBRIO ELASTICO DI CAUCHY.

Si parte dalle equazioni indeterminate dell'equilibrio (Tensioni e Forza di massa)

$$X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{perché valgono in qualsiasi punto.}$$

Ci servono le relazioni inverse di Navier perché mettono in relazione
le σ con le E

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + \lambda\theta \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

Ipotesi: piccole deformazioni

Piccoli Spostamenti

Materiale elastico, omogeneo, conservativo e isotropo

Sistema di forze in equilibrio

Se risiamo in piccoli spostamenti: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ quindi le σ_x possiamo scriverla come $\sigma_x = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\epsilon_x \quad \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z$$

$$\gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_{xz}$$

Possiamo a questo punto eliminare σ_x rispetto a x , γ_{xy} rispetto a y e γ_{xz} rispetto a z .

$$x + \left[2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right] + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

dividiamo ora tutto per $2G$

essendo σ_x avremo

$$\frac{\sigma_x}{2G} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{2G} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

$$\text{ma } \frac{\lambda}{2G} = \frac{\mu(1+1/\mu)(1-2/\mu)}{2 \cdot E}$$

$$\text{quindi } \frac{\lambda}{2G} = \frac{1}{\mu-2}$$

$$\frac{2G}{G} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{G}{G} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{G}{G} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \frac{x}{G} = 0$$

$\frac{x}{G}$ perché? perché dividendo poi tutto ancora per G avremo

$$+ x \rightarrow + x/G$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{\mu-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{x}{G} = 0$$

$$\Delta_2 u + \frac{2}{\mu-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{x}{G} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

1^a EQ. JAZ.

$$\Delta_2 u + \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{2}{\mu-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{x}{G} = 0 \rightarrow \Delta_2 u + \frac{\mu}{\mu-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{x}{G} = 0$$

$$\Delta_2 u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{x}{G} = 0$$

$$\Delta_2 v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{y}{G} = 0$$

Le 3 Equazioni di equilibrio elastico di CAUCHY.

$$\Delta_2 w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{z}{G} = 0$$

Nota una configurazione di spostamenti: c'è solo un sistema di forze in grado di determinarla.

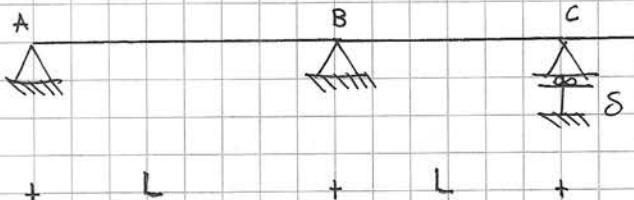
PRINCIPIO DI KIRKOF

o

TEOREMA DI UNICITA'

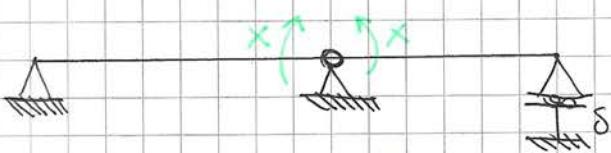
vanno anche le PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

EQUAZIONI DI CONGRUENZA (DISTORSIONI) (CEDIMENTI VINCOLARI)



Possiamo dichiarare un vincolo per la scomposizione interna e per rendere il sistema isostatico.

Se consideriamo una struttura **IPERSTATICA** con cedimenti rincalzi massimi alle sollecitazioni.



$$Q_B^S = -X \cdot \frac{1L}{3EI} \quad \text{ROTAZIONE ORARIA SEGNO -}$$

$$Q_B^D = X \cdot \frac{1L}{3EI} \quad \text{POSSANO CONSIDERARLE TRAVI APP. APP.}$$

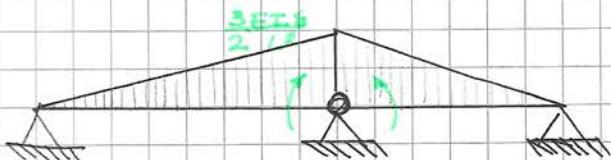
C'è poi la notazione del cedimento in C che sarebbe δ_C .
questa δ_C è data dal cedimento / lunghezza.

$$Q_B^D = \frac{XL}{3EI_x} - \frac{\delta}{L}$$

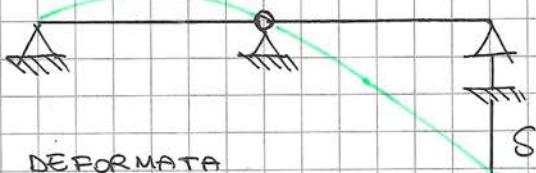
Se motiamo, δ va verso il basso, quindi avremo un angolo orario **ROTATO**
SEGNO -

EQ: $Q_B^S = Q_B^D \rightarrow -\frac{XL}{3EI} = \frac{XL}{3EI_x} - \frac{\delta}{L}$ da cui

$$\frac{2XL}{3EI} = \frac{\delta}{L} \quad \text{e ancora} \quad X = \frac{3}{2} \frac{EI\delta}{L^2} \quad X \text{ positivo}$$



MOMENTO FLETTENTE



DEFORMATA



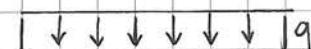
$$V = -CR$$

Dato che non abbiamo carichi sulla struttura avremo tutto uguale a 0.

le cedimenti elastiche ha bisogno di carichi perché nasce in quel modo.

le cedimenti anaelastici nascono anche da solo.

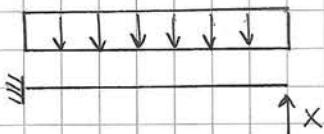
$\sim \circ \sim \circ \sim \circ \sim \circ \sim \circ$



$$V = -CR$$

SVINCOLIAMO LA STRUTTURA IN A 0

TOGLIAMO IL VINCOLO IN B.



x = incognita ipostatica

$$\text{Eq. equazione: } V_B = V_{B_0} + X V'_{B_0}$$

$$V_B = + \frac{qL^4}{8EI} - \frac{XL^3}{3EI} = +Cx$$

($\uparrow x$ VERSO ALTO SEGNO -)

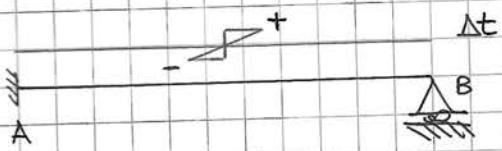
$$\frac{qL^4}{8EI} = X \left(\frac{L^3}{3EI} + c \right) \rightarrow X = \frac{qL^4}{8EI} \cdot \left(\frac{3EI}{L^3} + \frac{1}{c} \right)$$

Se il vincolo avesse cedevolezza pari a 0 avremo $\frac{L^3}{3EI} + 0$

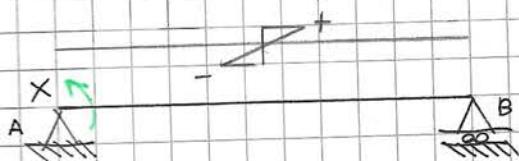
$$\text{che ci darebbe } \frac{3}{8}qL = X$$

Se la cedevolezza ad esempio vale 1 la X diminuisce perché avremo un numero maggiore al denominatore.

Supponiamo il vincolo infinitamente elastico, avremo una situazione in cui al denominatore c'è grandissimo e quindi tutto tende a 0



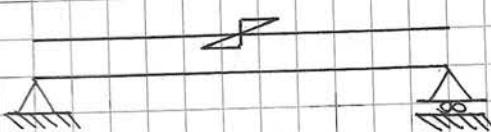
Stiamo riscaldando la parte superiore e raffreddando quella inferiore



$$Q_A = 0 \text{ da ripristinare}$$

La sara' dato da due schemi.

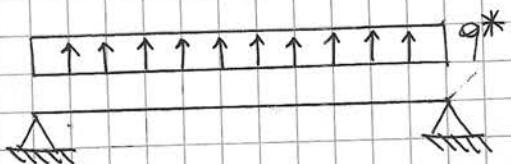
(a)



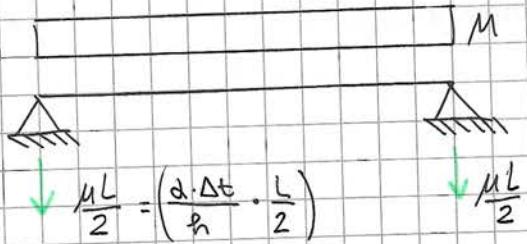
TRAVE REALE

$$q^* = \frac{M}{EI} - \mu$$

In questo caso $\frac{M}{EI} = 0$



TRAVE DI MOHR



$$\mu = (2 \cdot \Delta t) / h$$

$$\downarrow \frac{\mu L}{2} = \left(\frac{2 \cdot \Delta t}{h} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

$$\downarrow \frac{\mu L}{2}$$

$$Q_A = -\tau_A^* \Rightarrow \left[+ \frac{2 \cdot \Delta t}{h} \frac{L}{2} \right]$$

Segno positivo perché le tanghi in A è

$$\downarrow \boxed{A} \uparrow - \left(- \frac{2 \cdot \Delta t}{h} \frac{L}{2} \right)$$

~ ~ ~ ~ ~



$$Q'_A = \frac{1L}{3EI}$$

Eq. congruità: $Q_A + X Q'_A = 0$

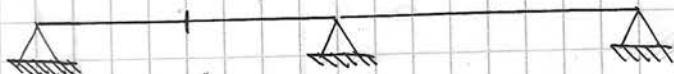
$$\frac{2 \Delta t}{h} \frac{L}{2} + \frac{X L}{3EI} = 0$$

$$X = - \frac{2 \Delta t}{h} \frac{L}{2} \cdot \frac{3EI}{L}$$

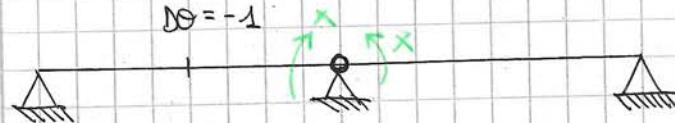
Segno negativo vuol dire che

l'abbiamo ipotizzata in modo errato. Nelle a dire che tende le fibre inferiori

$\Delta\theta = -1$



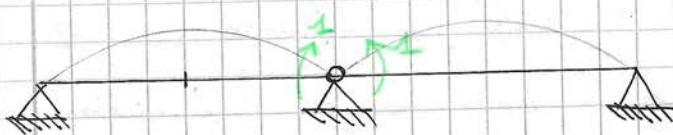
$\Delta\theta = -1$



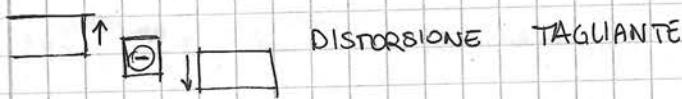
$$\psi_B^s = \psi_B^p$$

$$\psi_B^{so} + \psi_B^s X = \psi_B^{po} + X \psi_B^p$$

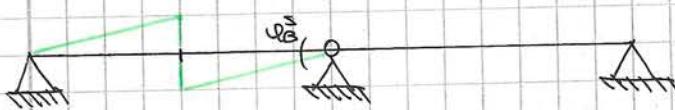
ψ_B^s



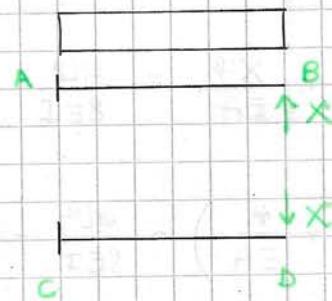
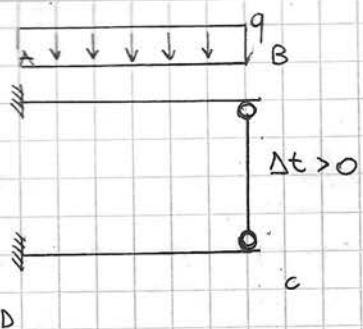
Cosa significa $\Delta\theta = -1$? che la parte di altra scende



$$\psi_B^s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{8} \frac{1}{L}$$



$$\frac{1}{L} - \frac{XL}{3EI} = + \frac{XL}{3EI} \rightarrow \frac{2XL}{3EI} = \frac{1}{L} \rightarrow X = \frac{3}{2} \frac{EI}{L^2}$$



Cosa direbbe l'equazione di congruenza?

Se non avessimo distorsione termica e il pendolo fosse estremamente rigido dovremmo ripristinare la variazione di spostamento tra i punti B-D. $\Delta V_{BD} = 0$

$\Delta_{\text{STRUTTURA}} = \Delta_{\text{PENDOLO}}$ ie che significa andare a ripartire il pendolo vicino la struttura isostatica.



Pendolo PUNTO

soggetto a compressione

$\Delta_{\text{VBD}}^{\text{PENDOLO}} = \frac{Xh}{EA}$ in questo caso accorciamento. o se vogliamo, avvicinamento a B-D

$\Delta_{\text{VBD}}^{\text{DISTORSIONE}} = \alpha \Delta t \cdot L$ in questo caso la lunghezza è l'altezza del pendolo. $\Delta_{\text{VBD}}^{\text{DISTOR.}} = \alpha \Delta t \cdot h$

Per questo tipo di esercizi si genera una convenzione del tipo che l'allontanamento dei punti BD lo consideriamo maggiore di 0 (> 0) e l'avvicinamento (< 0)

In questo caso:

ALLONTANAMENTO $BD > 0$

$$-\frac{qL^4}{8EI} + \frac{XL^3}{3EI} + \frac{XL^3}{3EI} = -\frac{Xh}{EA} + \alpha \Delta t h$$

(V_B) (V_B) (V_D) $(\Delta_{\text{VBD}})^*$ $(\Delta_{\text{VBD}})^{\Delta t}$
 AVVICINAMENTO CARICO $\downarrow q$ ALLONTANAM. ALLONTANAM.
 $B \uparrow X$ $D \downarrow X$ AVVICINAM. SPOSTAME. PENDOLO
 DONATO A DISTORSIONE TERMICA

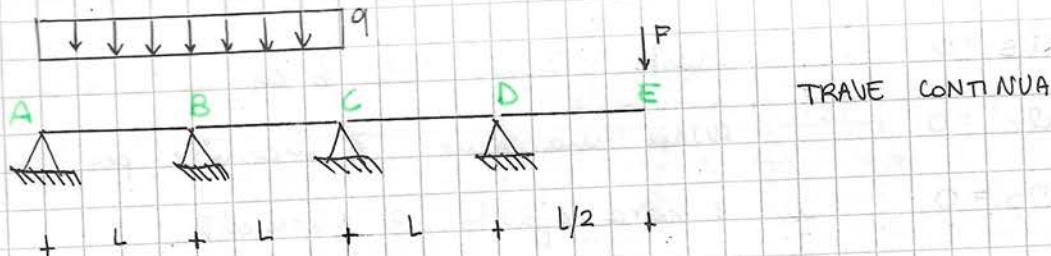
$$\frac{2}{3} \frac{X L^3}{EI} + \frac{X h}{EA} = \frac{q L^4}{8EI} + \Delta t h$$

$$X \left(\frac{2}{3} \frac{L^3}{EI} + \frac{h}{EA} \right) = \frac{q L^4}{8EI} + \Delta t h$$

$$X = \left(\frac{q L^4}{8EI} + \Delta t h \right) \left(\frac{3EI}{2L^3} + \frac{EA}{h} \right)$$

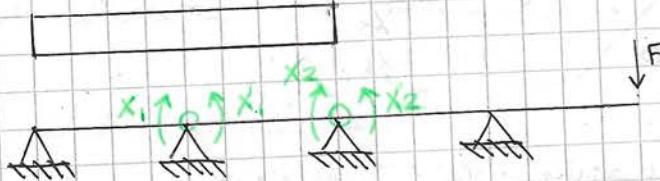
$$X = \frac{3}{16} \frac{q L}{8Ih} + \frac{q L^4 A}{8Ih} + \frac{3EI}{2L^3} \Delta t h + EA \Delta t$$

$$qL \left(\frac{3}{16} + \frac{L^3 A}{8Ih} \right) + EI \Delta t \left(\frac{3}{2} \frac{I}{L^3} h + A \right)$$



Quante volte è iperstatica? 2 volte.

$$2 \cdot \text{TRAV - VINCOLI} = 2 - 4 = -2$$



Eq. congruenza:

$$\Delta Q_B = 0 \quad Q_B^S = Q_B^D$$

$$\Delta Q_C = 0 \quad Q_C^S = Q_C^D$$

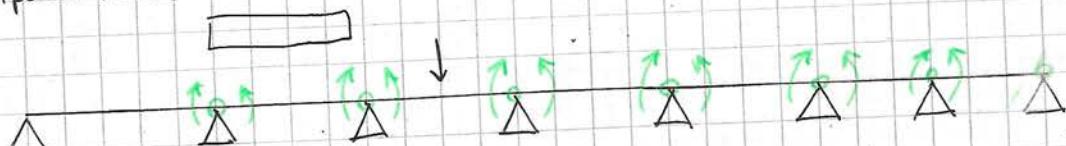
Una strada fondamentale
conigliache è scegliere come
equazioni di congruenza
i momenti sugli appoggi
intermedi

Avremo partendo da sinistra una trave appoggiata-appoggiata
soggetta a un carico distribuito e poi soggetta a coppia
su un appoggio.
Altro lato trave app. app. con carico distribuito e coppia su
un appoggio e coppia sull'altro appoggio.

Poi avremo un'altra trave app. app. con una coppia nell'appoggio
e poi con una semplice decomposizione si metterà un appoggio fermo.

Questo metodo risolutivo si chiama Equazione dei 3 momenti.

3 momenti perché? Consideriamo una trave con ancora più
iperstaticità:



6 VOLTE ISOSTATICO

Sistema di 6 eq. in 6 incognite.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_B = 0 \\ \Delta Q_C = 0 \\ \Delta Q_D = 0 \\ \Delta Q_E = 0 \\ \Delta Q_H = 0 \\ \Delta Q_L = 0 \end{array} \right.$$

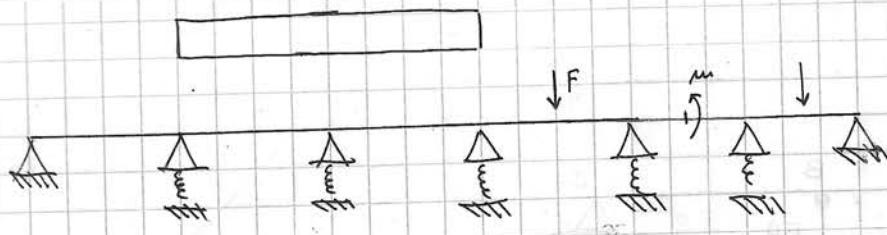
Questo sistema di 6 eq in 6 incognite avrà massimo 3 incognite per eq e sono appunto 3 momenti

$$\left| \begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ & & & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & & & & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & x_6 \end{array} \right| \cdot = b$$

Niene fuori che la matrice dei coefficienti, moltiplicata per le vettore delle incognite, questa matrice si svilupperà lungo la diagonale e gli altri termini saranno 0.

(Q_B^s)

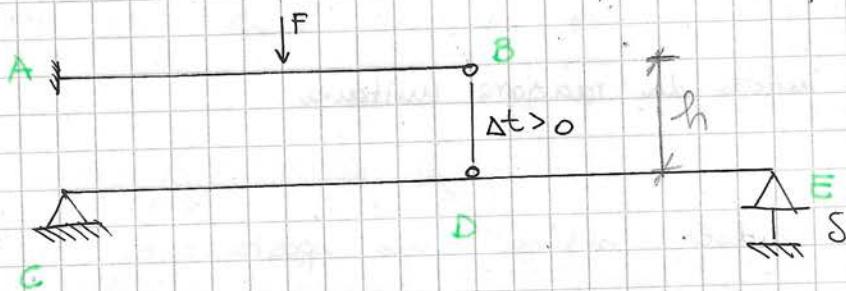
$$Q_D^s = Q_P^s \quad \frac{X_{2L}}{6EI} \quad \frac{FL^3}{48EI} \quad \frac{X_{3L}}{3EI} = \frac{X_{3L}}{3EI} \quad \frac{X_{4L}}{6EI}$$

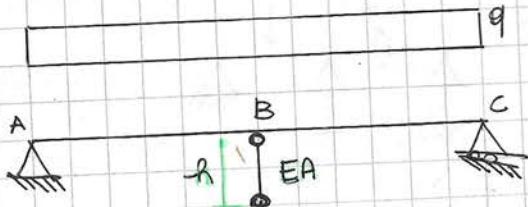


Anche in questo caso useremo l'equazione di momento:

Non più dei 3 momenti ma dei 5 momenti perché avremo la velocità del nastro.

Torniamo all'esercizio





Questo pendolo ha una sua area della sezione trasversale e momento elastico quindi c'è aderenza



$V = -cR$ quindi la costante è il rapporto tra spostamento e reazione.

c = Spostamento indotto da reazione unitaria.



questo pendolo subisce uno spostamento

$$\Delta L = \frac{R \cdot L_{\text{Pendolo}}}{EA}$$

R per un pendolo rappresenta lo spazio normale

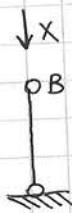
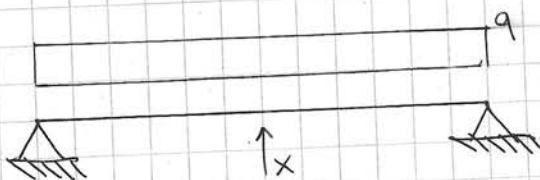
L_p lunghezza del pendolo.

Quindi se vogliamo questo spostamento: $c = \frac{1 \cdot L_p}{EA}$

Nel caso specifico se il pendolo è uguale a h

$$\text{avremo } c = \frac{1 \cdot h}{EA}$$

Eq. Longuenza:



Lo spostamento del punto B letto sulla struttura deve essere uguale allo spostamento del punto B sul pendolo

$$V_B^{\text{st}} = V_B^{\circ}$$

$$V_B^{\circ} = \frac{x \cdot h}{EA}$$

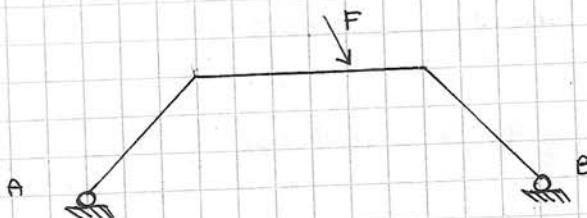
$$V_B^{\text{st}} = V_B^{\circ} + x V_B'$$

$$V_B^{\circ} = \frac{5}{384} \frac{(2L)^4}{EI}$$

$$V_B' = - \frac{(2L)^3}{48EI}$$

1 volta

ipostatica



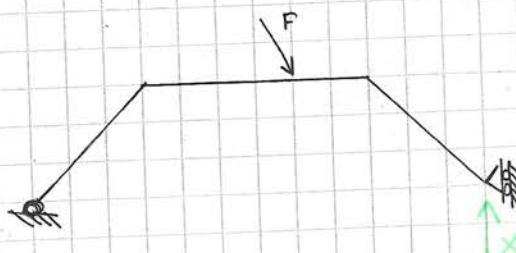
Eq. congruenza:

$$V_B = 0$$

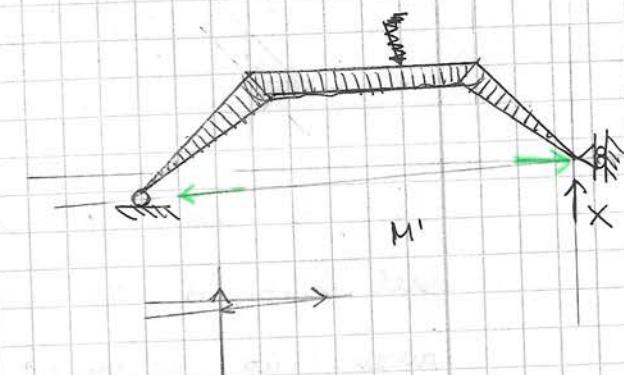
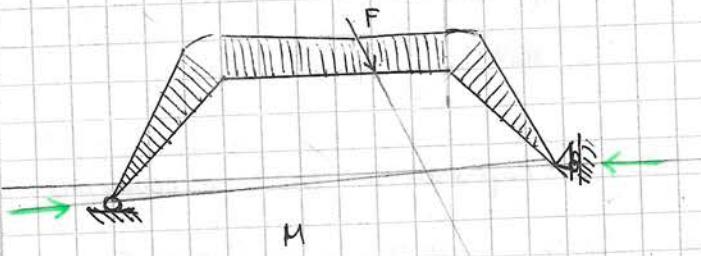
$$V_B = V_B^o + X V'_B$$

come eseguire

V_B^o e $X V'_B$? PLV



V_B^o



$$1 \cdot V_B = \int_s \frac{M' M}{EI} ds + \dots$$

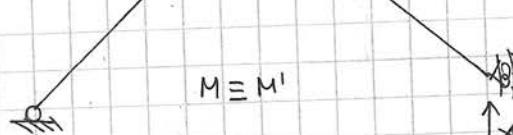
Poniamo $M = M^o$ avremo

$$1 \cdot V_B = \int_s \frac{M' M^o}{EI} ds$$

[S.S.]

Calcoliamo $V'_B =$

$$1 \cdot V'_B = \int_s \frac{M' M}{EI} ds$$



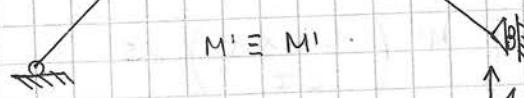
$$1 \cdot V'_B = \int_s \frac{M' M'}{EI} ds$$

[S.F.]

Quindi l'Eq di congruenza:

$$V_B = \int_s \frac{M' M^o}{EI} ds + X \int_s \frac{M' M'}{EI} ds = 0$$

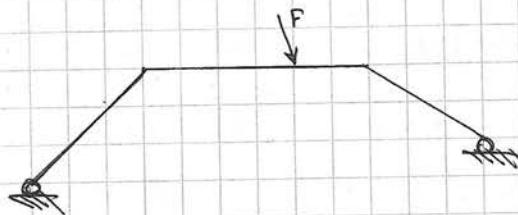
$$X = - \int_s \frac{M' M^o}{EI} ds \cdot \left(\int_s \frac{M' M'}{EI} ds \right)^{-1}$$



P.C.V per strutture perpendicolari

Immaginiamo di avere questa struttura:

S.S.



S.F.



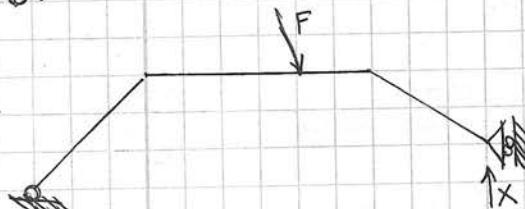
$l_e = 1 \cdot V_{ss}$. ma V_{ss} se rappresenta lo spostamento del punto B nel nostro sistema instanziale equivalente avremo tutti spostamenti = 0

$$L_i = L_e = 1 \cdot V_B = 0 = \int_S M' \frac{M}{EI} ds$$

$$0 = \int_S M' \frac{M}{EI} ds \quad \text{di e' } M' ? \quad l_e$$

S.I.E o

S.S.



per calcolare M potremo usare la suddivisione degli effetti.

(DIAGRAMMA MOM. DOWNT A F E DOWNT A X)

M^0 $X M'$

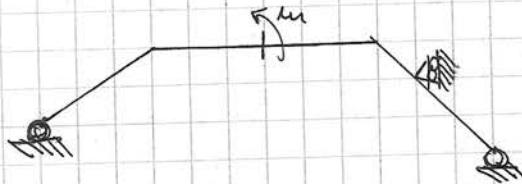
$$M = M^0 + X M'$$

$$0 = \int_S M' \left(\frac{M^0 + X M'}{EI} \right) ds$$

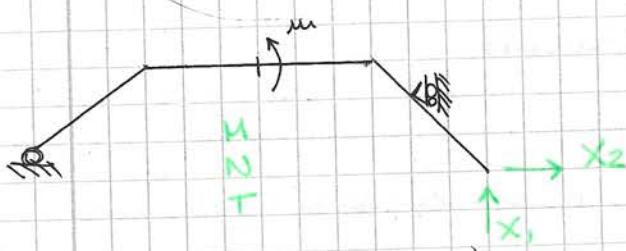
$$\int_S \frac{M^0 M'}{EI} ds + \int_S \frac{X M'^2}{EI} ds = 0$$

$$X = - \int_S \frac{M^0 M'}{EI} ds \cdot \left(\int_S \frac{M'^2}{EI} ds \right)^{-1}$$

D.L.V



SS.



$$M = M^o + X_1 M' + X_2 M''$$

$$N = N^o + X_1 N' + X_2 N''$$

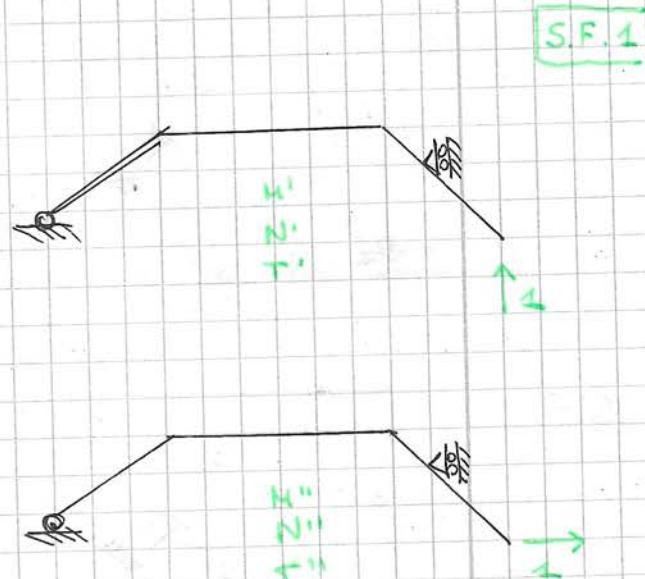
$$T = T^o + X_1 T' + X_2 T''$$

$$\text{le} = u \rightarrow \int_s N' \frac{M}{EI} ds = 0$$

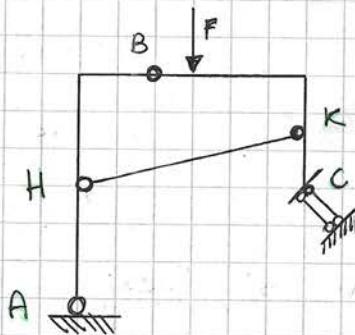
$$\int_s M'' \frac{M'}{EI} ds = 0$$

$$\int_s M' (M^o + X_1 M' + X_2 M'') ds = 0$$

$$\int_s M'' (M^o + X_1 M' + X_2 M'') ds = 0$$

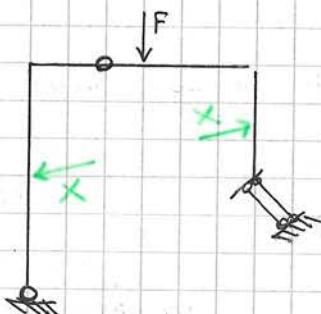


S.F.2



$$i = 1 \quad (1 \text{ volta i peristatici})$$

S.S

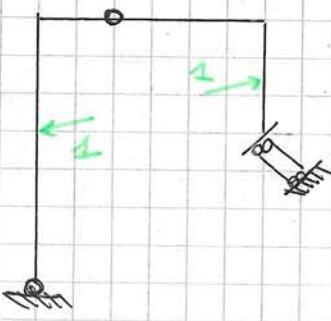


Se il pendolo fosse inestensibile e rigido. i punti H e K non subirebbero spostamento.

In ipotesi di forze inestensibili quindi potremo scrivere che

$$1 \cdot 0 = L_e$$

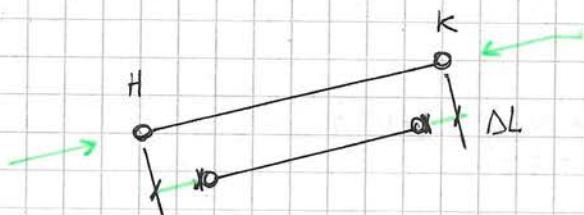
S.F



Ma un pendolo non è inestensibile.

Se il pendolo è puro e compresso e quindi

Se il pendolo è compresso si accorta.



ΔL sarà anche lo spostamento relativo dei punti H e K

$$\Delta_{\text{Pendolo}} = \frac{X_{LP}}{EA} \rightarrow L_e = -1 \cdot \left(\frac{X_{LP}}{EA} \right)$$

I 2 punti H e K essendo legati al pendolo che è compresso tendono ad avvicinarsi e quindi avremo il segno (-)

$$M = \int_S M' \frac{M}{EI} ds + \int_S N' \frac{N}{EA} ds + \dots$$

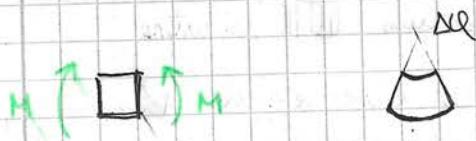
$$M = M^0 + X M'$$



Se il materiale è conservativo
l'energia che abbiamo speso per

permettere questa deformazione dove è finito?

Si trova immagazzinata nella trave sotto forma di energie di deformazione.

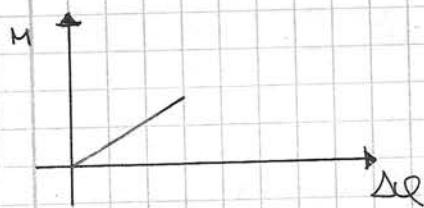


Il momento flettente nel concio compie

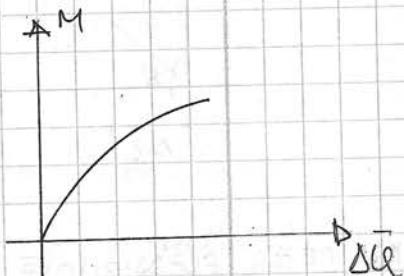
lavoro per la deformata del concio.

Quindi il momento flettente non si trova su travi già deformate ma è essa stessa che dà lavoro per deformare

In ipotesi di materiale linearmente elastico:

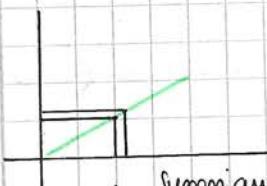


(ELASTICO-LINEARE)



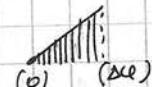
(NON ELASTICO-LINEARE)

Come calcoliamo l'energia di deformazione spesa?



* Supponiamo di avere un piccolo spostamento $d(\Delta l)$ avremo:

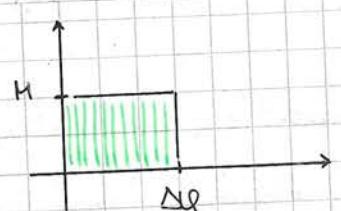
$$M \cdot \Delta l \rightarrow M \cdot d(\Delta l) \rightarrow \int_0^{\Delta l} M \cdot d(\Delta l)$$



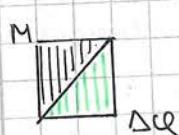
LAVORO SU TUTTO IL CORPO
DAL PUNTO INIZIALE O A
QUELLO FINALE Δl

Allora se ci troviamo in campo di

materiale con ELASTICITÀ LINEARE possiamo dire
che l'energia immagazzinata da un concio di trave sottoposto a
momento flettente è pari a metà del lavoro che compierebbe il momento
flettente se agisse dall'inizio col suo lavoro finale



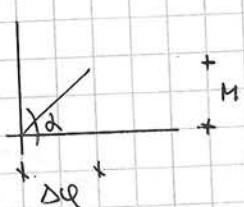
|||| = AREA



Cosa ci fa capire?

Se ci mettessimo con M già al suo valore finale rispetto a $\Delta\epsilon$ avremo |||| mentre l'energia prodotta da materiale elastico lineare che ha momento partendo da 0 è la metà $\Delta L = (\square + \triangle)/2$

$$L = \frac{1}{2} M \Delta\epsilon$$



$$t_8(\Delta) = \frac{M}{\Delta\epsilon} = \text{Rigidezza flessionale}$$

RIGIDEZZA FLESSIONALE: Valore del momento che genera una unit. angolare unitaria.

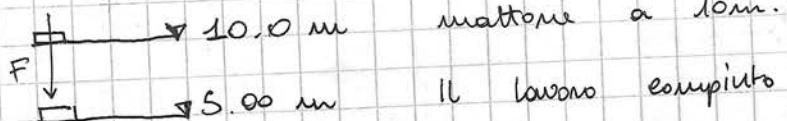
N.B = "Ricordiamo che il cedimento è lo spostamento indotto da reazione unitaria"

↗ momento.

$$L = \frac{1}{2} (k \Delta\epsilon) \Delta\epsilon$$

Definiamo P (Energia potenziale) = - LAVORO

perché lavora in negativo? Facciamo caso che avere una forza peso.



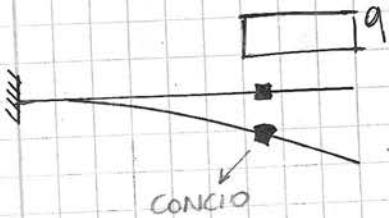
Il lavoro compiuto è positivo dalla forza ma dato che ci troviamo 5m più in basso avremo meno energia potenziale.

$$\text{Energia totale: } E_T = L + P$$

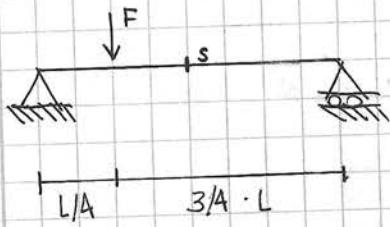
↓
Energia elastica

↓
Energia potenziale

Questo nuovo metodo ci dice che per una struttura, queste saranno in equilibrio quando avremo l'energia totale del sistema in un punto di stazionarietà (MAX o MIN)

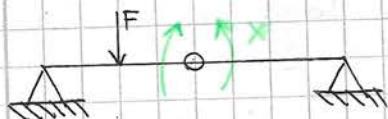


Succede che il carico ha fatto lavorare deformando la struttura e quindi una variazione di energia potenziale



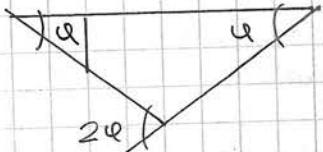
Calcolare momento flettente in S

P.L.V



$L = 0$ se la struttura è rigida

CATENA
CINEMATICA



$$F \cdot \frac{L}{4} \cdot \varphi + X \cdot 2\varphi = 0$$

Tutto ciò però è vero solo nel caso in cui le forze siano in equilibrio

$$F \cdot \frac{L}{4} + 2X = 0$$

$$X = - \frac{FL}{4} \cdot \frac{1}{2} = - \frac{FL}{8}$$

~ ~ ~ ~ ~

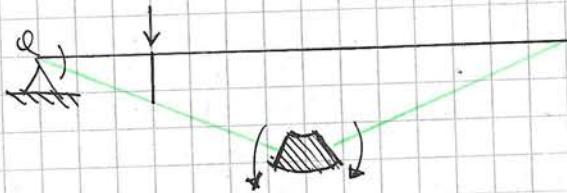
Carico elastico



Rigidità EI = ∞

Elasticità infinita

DEFORMATA



I due momenti nel carico del carico tendono a ripristinare la forma iniziale

LAVORI

$$F \cdot \varphi \cdot \frac{L}{4} - M \Delta \varphi = 0$$

↓
kΔφ

$$F \cdot \frac{L \cdot \Delta \varphi}{4} - \frac{k(\Delta \varphi)^2}{2} = 0$$

$$F \cdot \frac{L}{4} \Delta \varphi - \frac{k \Delta \varphi^2}{2} = 0$$

distribuzione per φ

$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\quad \right] = 0 \rightarrow -\frac{FL}{4} + 4k\varphi$

$$\varphi = \frac{FL}{16k}$$

↑

$$M = k \Delta e$$

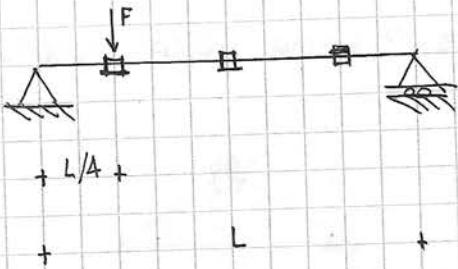
$$\Delta e = 2l$$

$$\Delta e = 2 \cdot \frac{FL}{16k}$$

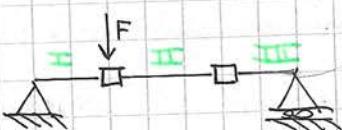
$$M = k \cdot \frac{FL}{8k}$$

$$M = \frac{FL}{8}$$

~~~~~

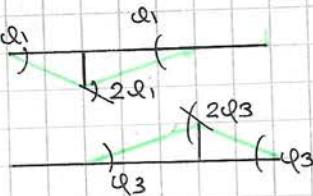


Consideriamo:



la configurazione di deformata in questo caso dipende da 2 parametri lagrangiani

$$\varphi_1 \neq 0, \varphi_3 = 0$$



$$\varphi_1 = 0, \varphi_3 \neq 0$$



Due configurazioni deformate

$$E_t = p + L \rightarrow \text{ENERGIA ELASTICA NEI CONCI}$$

LAVORO FORTE ESTERNO CAMBIATO DI SEGNO

$L_1$  = Energia nata per il primo parametro lagrangiano ( $\varphi_1 \neq 0, \varphi_3 = 0$ )

$L_2$

$$E_D = L_1 + L_2$$

ma quando abbiamo attivato al primo parametro

Energia di deformazione



nel concio si genera momento



Se diamo un'ulteriore deformazione e

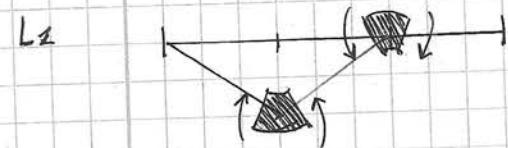
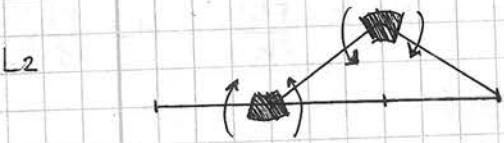
quindi attivando il punto  $\varphi_3$



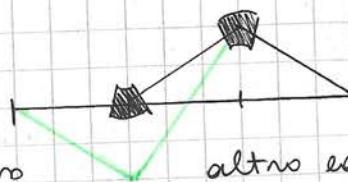
per effetto della nuova configurazione attiva

avremo altri momenti elasticci nei conci e quindi aggiungeremo energia elastica. Anzitutto allora:  $L_1 + L_2 + L_{12}$

$L_{12} =$  Energia elastica generata dai momenti nati dal primo parametro per gli sostegni del secondo parametro lagrangiano



Se attiviamo il secondo parametro al primo avremo uno spostamento iniziale e poi dato che su  $L_2$  il secondo carico stava a 0 torna nella config. del primo



Succede che questi due carichi compiono attivazione di  $L_1$  su  $L_2$ :

altro carico dato dall'

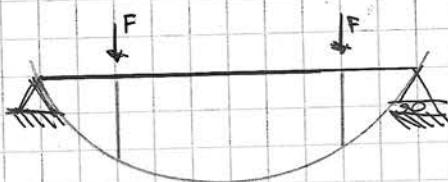
$L_2 + L_1 + L_{21}$  = Energie elistica generata dai momenti sul carico innescato dal primo parametro di libertà per gli spostamenti indotti dal secondo parametro di libertà.

## TEOREMA DI BETTI

$$E_t = P + L$$

Abbiamo visto che se abbiamo un sistema su 2 gradi di libertà e calcoliamo l'energia di deformazione per il primo grado di libertà e poi per il secondo diremo che l'energia totale è data da  $L_1 + L_2$

Ma se al primo grado di libertà sommiamo il secondo segniamo che il momento che varca sui coni fa un lavoro di traslazione nello stesso verso.



Sicuramente la configurazione fondata in due combinazioni

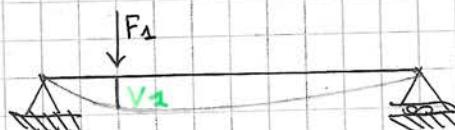
Attenzione: Il lavoro ( $L$ ) che

calcoleremo da ora in poi

non sarà più quello di

Franza  $\times$  Spostamento ma il lavoro

elastico o energia di deformazione

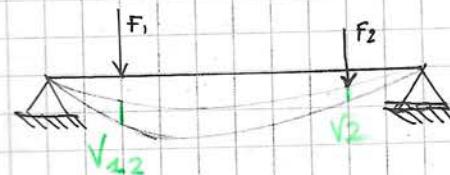


$$\frac{1}{2} (F_1 \cdot V_1) = L_1$$



Se applichiamo  $F_2$  nel punto già deformato nella I<sup>a</sup> configura.

avremo un ulteriore spostamento.

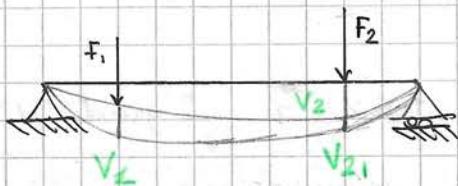


$$\frac{1}{2} (F_2 \cdot V_2) = L_2$$

Nel frattempo però, la forza  $F_1$  è stata trasmessa giù generando un spostamento  $V_{12}$  generato dalla  $F_2$  sul primo carico.

$$F_1 \cdot V_{12} = L_{12}$$

Ora applichiamo prima  $F_2$ .



$$\frac{1}{2} (F_2 \cdot V_2) = L_2$$

$$\frac{1}{2} (F_1 \cdot V_1) = L_1$$

$$F_2 \cdot V_{21} = L_{21}$$

Per applicare il teorema di Betti avremo queste ipotesi:

- Materiale elastico lineare
- Forze conservative. (perché nel caso contrario non potremmo dire che  $F \times S$  genera tutto momento elastico. Avremo dispersioni di rotta)
- Larghi trasversali ( $\rightarrow \emptyset \leftarrow$ )
- Noduli lisci e bilaterali

Se valgono queste ipotesi potremo dire che vale il principio della sovrapposizione degli effetti (P.S.E) e soprattutto che vale il teorema di BETTI  $\Rightarrow (L_{12} = L_{21})$

①

②

$$\cancel{L_1 + L_2 + L_{12}} = \cancel{L_2 + L_1 + L_{21}}$$

Se poniamo che  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$  (Forze unitarie) potremo

dire che ie termini  $V_{12} = V_{21}$

(1)



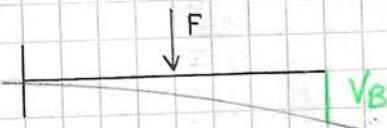
(2)



$$L_{12} = F \cdot V_B^{(2)}$$

$$L_{21} = m \cdot Q_B^{(2)}$$

Se vale il teorema di BETTI  $L_{21} = L_{12}$   
e per forze unidimensionali  $Q_B^{(1)} = V_B^{(2)}$



$$L_{12} = F^{(1)} \cdot V_B^{(2)}$$

$$L_{21} = F^{(2)} \cdot V_S^{(2)}$$

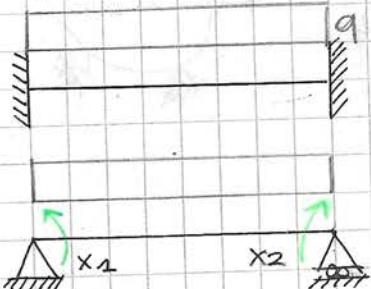
$$F_1 = F_2 = 1 \rightarrow V_S^{(1)} = V_B^{(2)}$$

Cioè ci determina la simmetria  
della matrice delle cedevolezze

~ ~ ~ ~ ~

Immaginiamo di avere una struttura iperstatica

(Almeno 2 volte per generare una matrice)

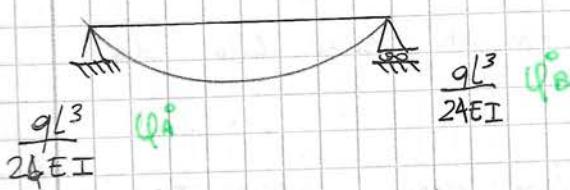


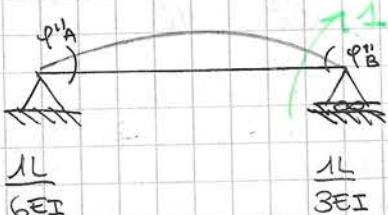
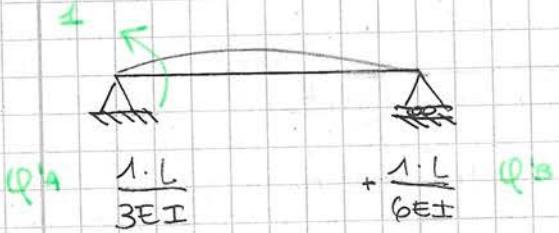
$$\text{Eq. congruenze: } Q_A = 0$$

$$Q_B = 0$$

$$Q_A^0 + x_1 Q_A^1 + x_2 Q_A^2 = 0$$

$$Q_B^0 + x_1 Q_B^1 + x_2 Q_B^2 = 0$$





Notiamo che  $Q''A = Q''B$  quindi si dà  
una matrice simmetrica.

~ ~ ~ ~ ~

### POTENZIALE ELASTICO

$$\mathcal{U} = \frac{\partial L}{\partial v}$$

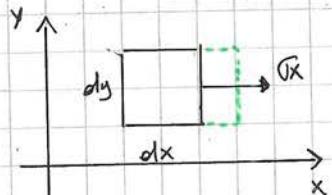
Potenziale = Energia elastica in un punto  
Volume piccolo in un punto.

Se ci riferiamo a un punto in un volume  
avremo come forze quelle interne puntuali  
e con spostamenti interni puntuali.

Ovvero tensioni e deformazioni

$\sigma_x, \sigma_y, \dots$

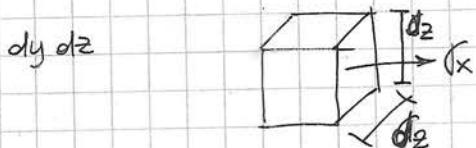
$\epsilon_x, \epsilon_y, \dots$



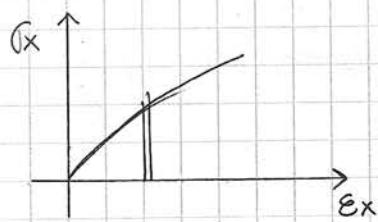
Le cubette si deforma a causa di  $\epsilon_x$

Questo spostamento sarà dato da  
 $[\epsilon_x \cdot dx]$

Per diventare una forza, la  $\epsilon_x$  deve essere moltiplicata per



per piccoli incrementi avremo però



che l'energia di deformazione sarà data da

$$\int_0^{\epsilon_x} (\sigma_x d\epsilon_x) d\sigma_x d\epsilon_x$$

Quindi  $(\sigma_x d\epsilon_x) d\sigma_x d\epsilon_x$  ci fornisce i.e. lavoro e dato che ci troviamo a calcolare un valore elasticoabbiamo escludere le variazioni di  $\sigma$  rispetto a  $\epsilon$  e dunque l'integrale da

0 a  $\epsilon_x$



Il prodotto  $d\sigma_x d\epsilon_x$  costituisce un volume che possiamo portare fuori dal segno di integrale.

LAVORO ELEMENTARE  $dL = dv \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x$  dividiamo tutto per  $dv$

$$Q = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x \quad (\text{Lo stesso va fatto per le altre } \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$$

quindi:

POTENZIALE ELASTICO

$$Q = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x + \int_0^{\epsilon_y} \sigma_y d\epsilon_y + \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\epsilon_z + \int_0^{\tau_{xy}} \tau_{xy} d\tau_{xy} + \int_0^{\tau_{yz}} \tau_{yz} d\tau_{yz} + \int_0^{\tau_{xz}} \tau_{xz} d\tau_{xz}$$

Se avessimo che le leggi  $\sigma$ - $\epsilon$  fosse di tipo lineare

✓ potremmo dire che questi integrali sono pari  
a metà di  $\sigma_x \cdot \epsilon_x$  ecc...

POTENZIALE  $\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \gamma_{xy} \gamma_{xy} + \gamma_{yz} \gamma_{yz} + \gamma_{xz} \gamma_{xz})$

ELASTICO LINEARE  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right)$  e  $\gamma_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G}$

per tutti gli altri valori otteniamo:

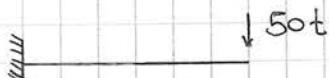
POTENZIALE  $\varphi = \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) \right] + \frac{1}{2G} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)$

ELASTICO IN FUNZIONE DI  $\tau, \sigma$

Se lo scriviamo in funzione delle tensioni principali le  $\gamma$  sono uguali a 0

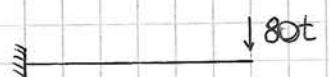
$$\varphi = \frac{1}{2G} \left[ \left( \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \right) - \frac{2}{m} \left( \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z \right) \right]$$

## CRITERI DI RESISTENZA



questa trave puo' portare 100t  
quindi siamo in sicurezza.

Ma di quanto?



capacità di resistenza / capacità che  
stiamo impiegando.

Allora se facciamo  $100/50$  siamo in un caso in cui la  
forza puo' addirittura raddoppiare

$S$  = coefficiente di sicurezza.

$$S \cdot q_{\text{ESERCIZIO}} = q_{\text{LIMITE}}$$

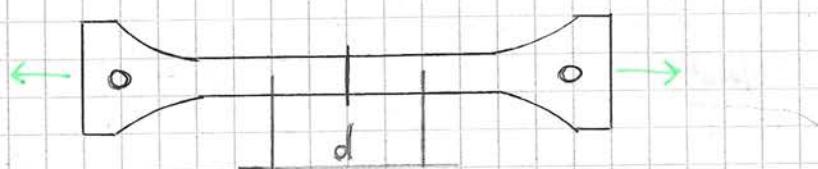
Nel primo caso quando  $S$  vale 2

$$100/50 = 2. \quad \text{Nel secondo caso } 100/80 = 5/4$$

Questo coefficiente possiamo applicarlo insieme agli statti tensionali  
e momento flettente, taglio e sfiorzo.

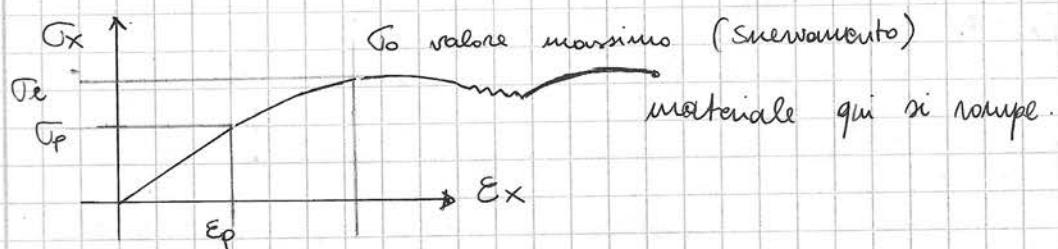
le piu' delle volte ci troviamo a lavorare con materiali  
sottoposti a forze monodimensionali

Ad esempio l'acciaio e le prove di trazione.

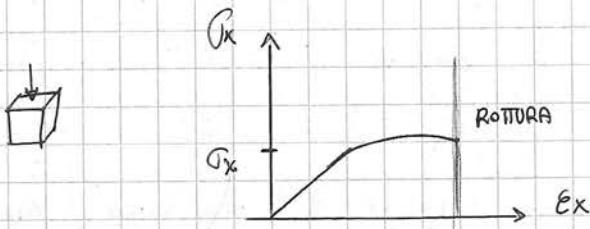


DARRA DI ACCIAIO  
CON FORI DOVE  
AGGANCIARE UNA  
MACCHINA DI TRAZIONE

Se questa distanza  $d$  la andiamo a calcolare ogni  
qual volta si allunga il provino potremo generare un diagramma  
nel piano  $\sigma_x - E$  (Riferito al materiale e non al provino)



Cosa facciamo per il calcestruzzo? Di solito prova monosassiale su un cubetto di spigoli standard.



Per l'acciaio ci aggiornano intorno a una % che è intorno al 8%, mentre il calcestruzzo si rompe già con 1%. E

Da queste prove possiamo ottenere il modulo elastico.

$$E_{ACCIAIO} = 210\ 000 \text{ kg/mm}^2 \quad o \quad 210\ 000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{CALCESTRUZZO} = 30\ 000 \text{ kg/mm}^2 \quad o \quad 30\ 000 \text{ N/mm}^2$$

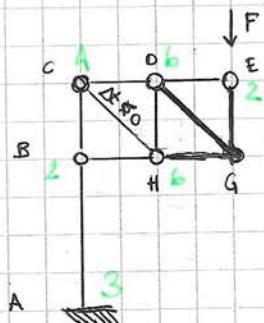
Scopriamo che l'acciaio è 7 volte più rigido del calcestruzzo.

Ma tutto ciò accade in condizioni di laboratorio.

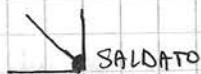
In condizioni reali avremo rovi stati tensionali per ogni punto della struttura che non è facile da intendere alle prove in condizioni standard.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = 30 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y = 10 \\ \sigma_z = -20 \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_{AMMISCIBILE} = 40 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xy} = 12 \\ \tau_{yz} = 5 \\ \tau_{xz} = 4 \end{array} \right\}$$

P.L.V. su struttura reticolare iperstatica



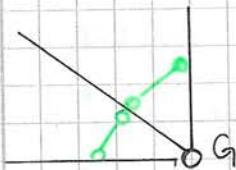
3t - s



Nel punto G non abbiamo una cerniera ma un mozzo incastro (DISEGNO ERRATO, CORRETTO )

Cio' significa che l'asta HG non puo' avere rotazioni relative rispetto a DG che a sua volta non muova rispetto a EG

Facciamo finta di mettere una cerniera in G, avremo:



ma dovremo ripristinare la condizione di rotazione iniziale tra asta.

GRADO DI  
IPERSTATICITÀ:  
PARI A 2.  
 $i=2$ .

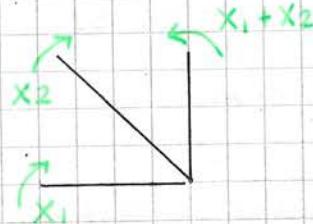
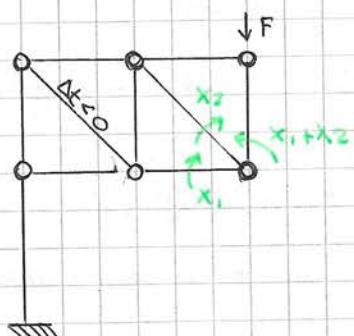
Cio' possiamo farlo attraverso due pendeli che ci bloccano le rotaz. tra asta.

Facciamo ie 3t-s. Avremo 7 Aste

$$21 - (3+2+4+6+6+2) = 2.$$

↓  
23

SISTEMA  
EQUIVALENTE



Con  $X_1$  e  $X_2$  abbiamo finito le incognite iperstatiche (2)  
quindi sul terzo tronco mettiamo un momento opposto ( $X_1 + X_2$ )

Perche dei momenti? In G avevamo un incastro che ora e' diventato una cerniera  $\rightarrow$  quindi avevamo liberato la possibilita' di ruotare e quindi il momento.

Eq di congruenza?

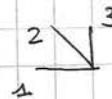
ROTAZIONE  $\boxed{\varphi_{GH} = \varphi_{GD}}$   $\rightarrow \Delta\varphi_{12} = 0$

$\boxed{\varphi_{GD} = \varphi_{GE}}$

$\downarrow$   
 $\Delta\varphi_{23} = 0$

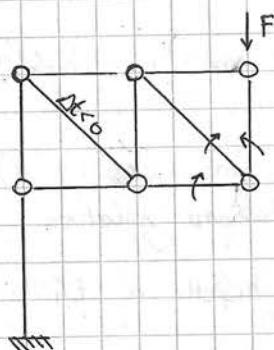
$\boxed{\varphi_{GH} = \varphi_{GE}}$

ponendo le astre come



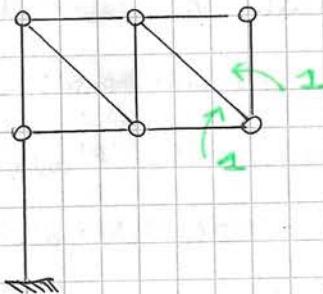
S.S.

M, N, T



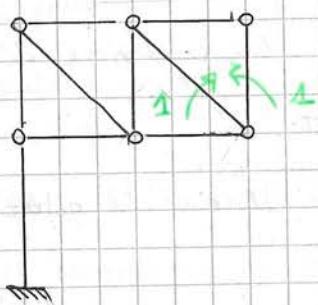
S.F. (1)

M', N', T'



S.F. (2)

M'', N'', T''



Queste 2 forze non compiono

lavoro per le rotazioni assolute, ma

per la rotazione relativa fra queste

due astre ( $\text{---}$ ) ma  $\varphi_{GH} = \varphi_{GE}$  quindi  
la rotazione relativa è nulla.

PRIMA

EQ. LAVORI VIRTUALI:

$$1 \cdot \Delta\varphi_{13} = \int_S M' \frac{M}{EI} ds + \int_S N' \frac{N}{EA} ds - \int_{CH} N' \lambda ds$$

SECONDA EQUAZIONE:

$$1 \cdot \Delta\varphi_{23} = \int_S M'' \frac{M}{EI} ds + \int_S N'' \frac{N}{EA} ds - \int_{CH} N'' \lambda ds$$

Dobbiamo imporre la congruenza tra le due astre e quindi

$\Delta\varphi_{13} = \Delta\varphi_{23} = 0$  e avremo 2 equazioni in 2 incognite.

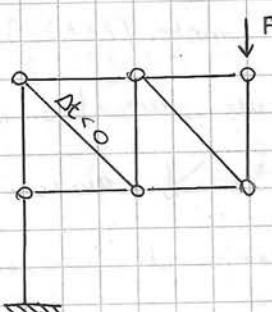
Dove sono le incognite?

Abbiamo dimenticato un sistema, ovvero

quello delle sole FORZE ESTERNE che ci danno momenti

S0

$M_0, N_0, T_0$



$$M = M_0 + X_1 M' + X_2 M''$$

$$T = T_0 + X_1 T' + X_2 T''$$

$$N = N_0 + X_1 N' + X_2 N''$$

e sfazza da insieme

nelle due equazioni

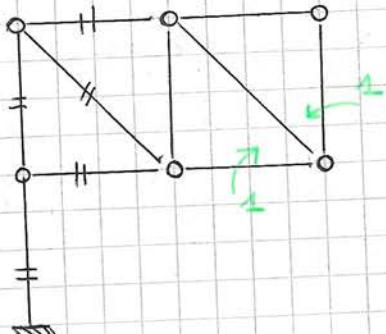
sopra

Averemo quindi un sistema di 2 eq. in due incognite che ci danno la matrice delle vederolette.

STEP. 1

CALCOLIAMO LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE.

SF 1



Le reazioni sono già bilanciate fra loro quindi  $R_A = 0$  e  $M_A = 0$

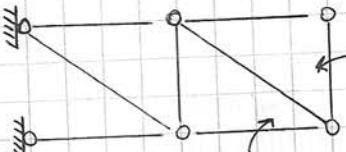
Quindi la prima asta è

scartata. Ma cosa ci dice ciò?

Mettiamo conto quindi che le due cerniere siano messe a fissa. Il sistema sarà così:

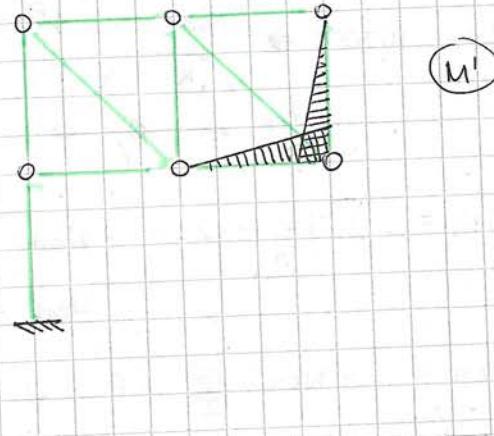
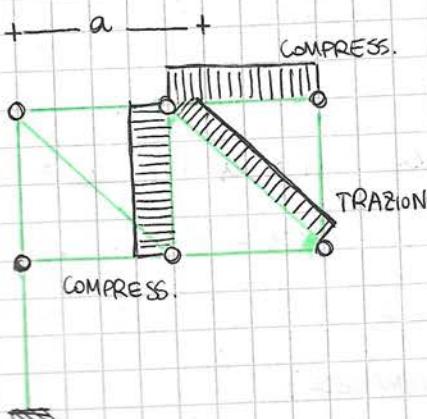
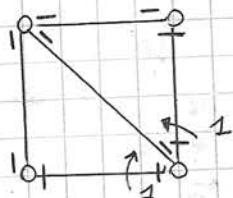
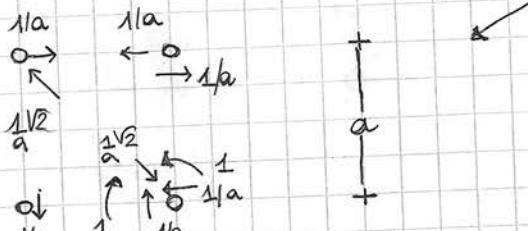
Una poniamo una forza sulla cerniera

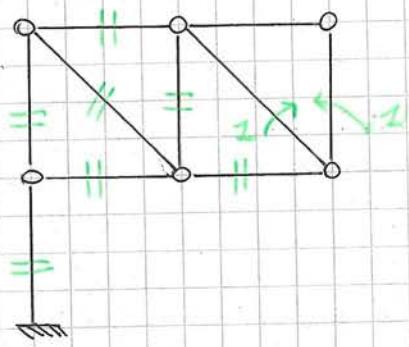
Io se l'altra andrà a bilanciare questa forza avremo un momento ma ciò non è possibile perché il sistema in tale senso è già equilibrato quindi avremo altre aste scartate. Rimane:



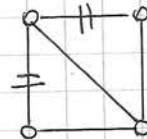
$\rightarrow F$   
 $\uparrow F$   
 $\leftarrow F$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

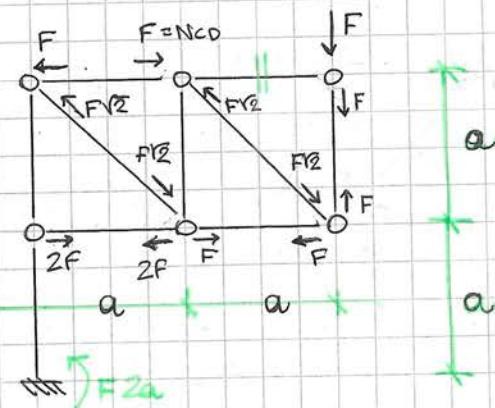
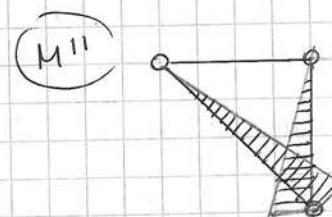
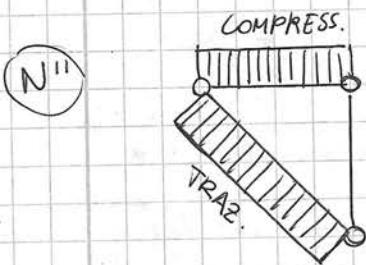
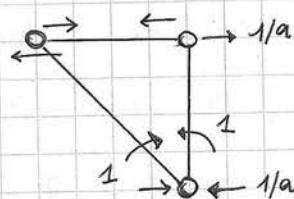
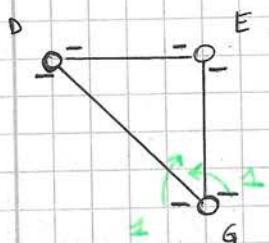




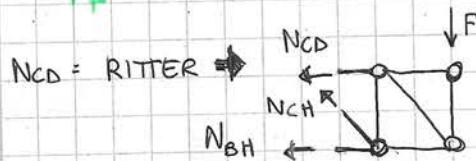
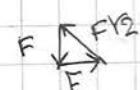
REGOLA:



Se abbiamo 2 aste che convergono in una cerniera e nella cerniera non avremo vinchi le due aste sono sciolte



Eq CERNIERA G



$$\sum M_H = 0 \quad N_{CD} \cdot a - F \cdot a = 0$$

$$N_{CD} = F$$

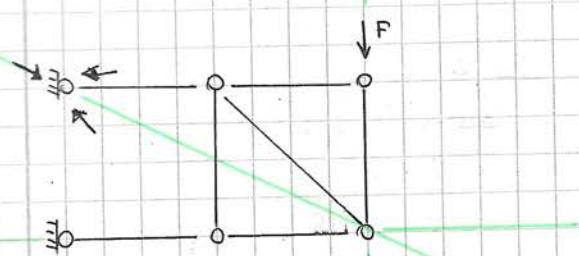
$$N_{BH} = \sum M_C = 0 \quad -N_{BH} \cdot a - F \cdot 2a = 0$$

$$N_{BH} = -2F \quad (\text{COMPRESS})$$

$$N_{CH} = -N_{CH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0$$

$$N_{CH} = \frac{2F}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}F}{2} = P\sqrt{2}$$

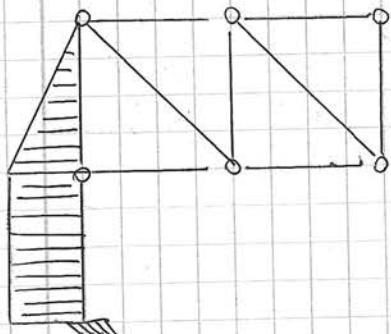
REAZIONE IN C IN BASSO



FACCIA FINTA CHE LE 2 CERNIERE

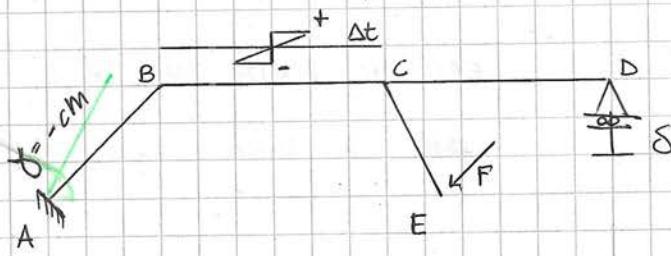
SIANO A TERRA

$R_C$  (TRATTO C-H)  $R_C$  (TRATTO C-A)  $R_C$  (TRATTO C-D)



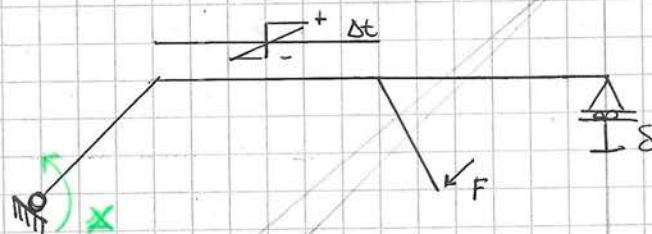
ULTIMO STEP: DISTORSIONE TERMICA

Notiamo che sia  $N'$  che  $N''$  si trovano su tratti sconichi e quindi sono = 0.



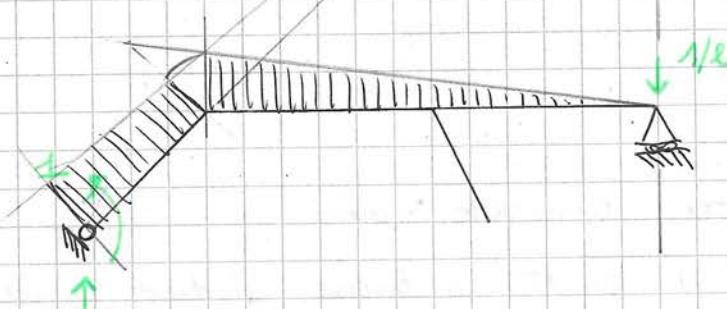
SISTEMA  
ISOSTANCO  
EQUIVALENTE

$(M, N, T)$



SISTEMA  
FORZE  
[SF]

$(M', N', T')$



Non inseriamo le distorsioni perché appunto sul sistema forze guardiamo solo le forze.

EQ. LAVORI  
VIRTUALI

1 cm

ma il momento e' proprio la nostra  $\times$  quindi:

$$1 \cdot (-cx) + (R'_D \cdot \delta) = \int_S \frac{M' M}{EI} ds - \int_{B0}^C M' M ds$$

La  $R'$  vediamo che e' rivolta verso il basso

$\delta$  e' verso il basso. Possiamo essere sicuri che

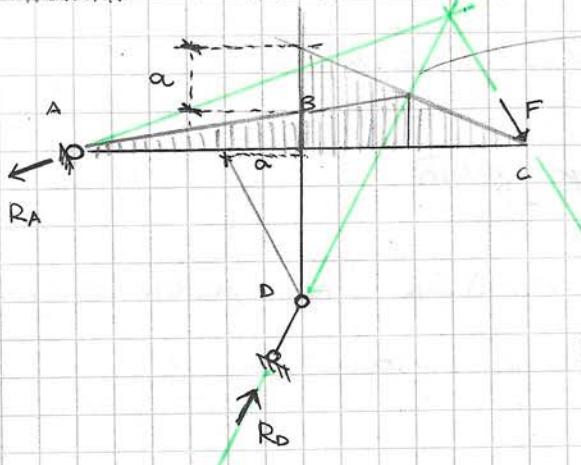
$R'$  s'anche positivo (+) e varrà  $+ \frac{1}{l} \delta$

Il momento nel tratto BC e' ~~negativo~~ (FIBRE VERSO L'ALTO)  
negativo  $< 0$

La distorsione in BC ha segno

positivo. Quindi avremo  $+ \int_B^C M' (\frac{d\Delta t}{h}) ds$

DIAGRAMMA MOMENTO NODO TRIPLO



$\Rightarrow$  ORDINATA DOVE  $R_D$  NON

HA VALORE E QUINDI

NON INFUENZA IL MOMENTO

$$M_s \quad M_d$$

$$M_d - \alpha M_s$$

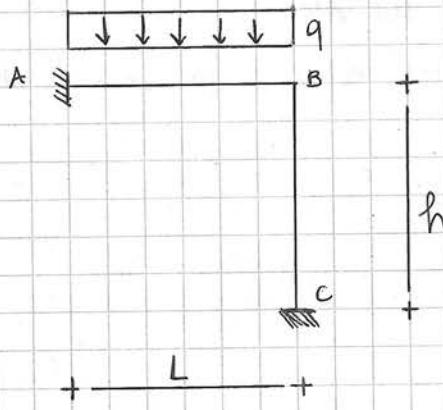
Sono tese ex fibra a  $\alpha x$  del Nodo

## METODO DEI SEDIMENTI

(per strutture iperstatiche)

Parleremo del mетодо degli spostamenti.

Tutto ciò è utile quando la struttura ha molte incognite iperstatiche e quando è riconducibile a schemi notevoli.

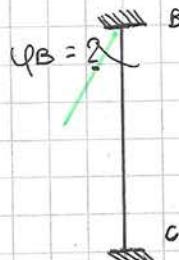
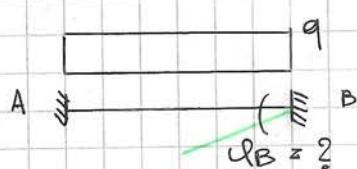


3 ruote iperstatico

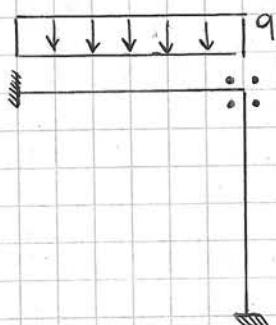
Attiviamo l'ipotesi di inestensibilità assiale (le travi non si accorciano e non si allungano)

le punto B quindi non può muoversi né orizzontalmente né verticalmente. B è un punto fisso.

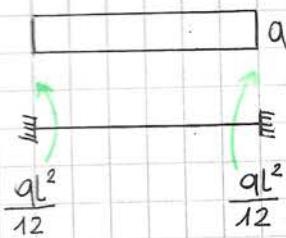
~ o ~ o ~ o ~ o



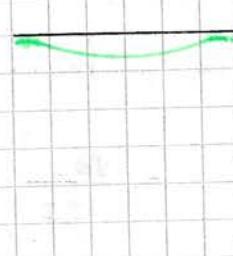
~ o ~ o ~ o ~ o



(MORSETTO, 4 CHIODI DI INCASTRO)

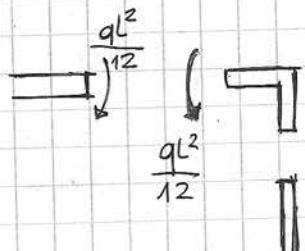


TRAVE NOTA



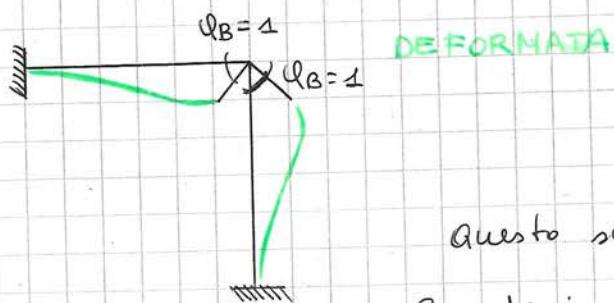
DEFORMATA

ma se togliamo il morsetto ::



Notiamo che il nodo B non è equilibrato

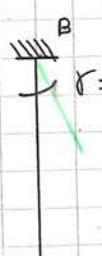
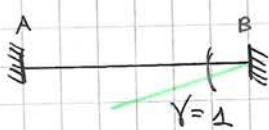
~ o ~ o ~ o ~ o ~ o



DEFORMATA

Abbiamo supposto una rotazione angolare in B.

Questo sistema può essere esodotto a 2 schemi materiali



collegamento angolare unitario.

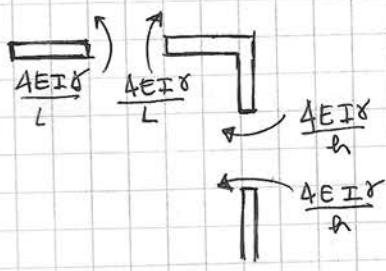
$$q_B = \frac{4EI}{L} \gamma$$

$$q_B = \frac{4EI}{h} \gamma$$

che saranno due coppie applicate al punto B

$$\frac{AEI\gamma}{L}$$

$$\frac{AEI\gamma}{h}$$



$$\text{Poniamo } \frac{AEI\gamma}{h} = \frac{AEI\gamma}{L}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\frac{qL^2}{12} + \left( -\frac{AEI}{L} - \frac{AEI}{L} \right) = 0$$

$$qL^2/12 - q_B(-8E/L) = 0$$

Se moltiplichiamo tutto di q\_B avremo

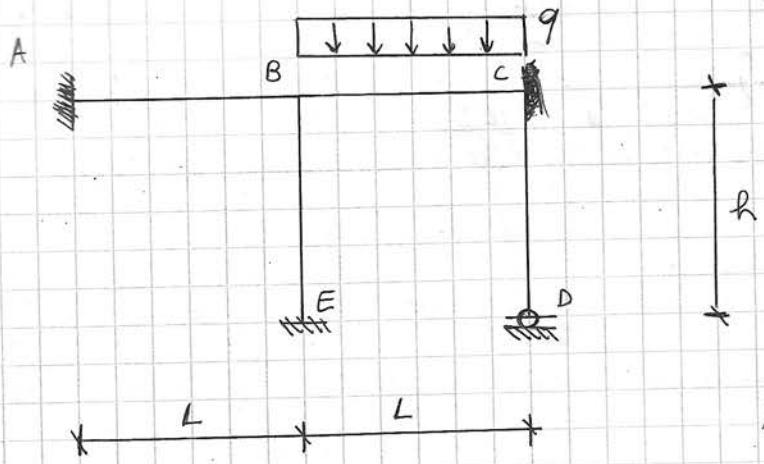
Così otteniamo una rotazione per B che ci dà una soluzione congruente ed equilibrata

$$\varphi_B = -\frac{qL^2}{12} - \frac{\cancel{qL}}{8EI} = \frac{qL^3}{96EI}$$

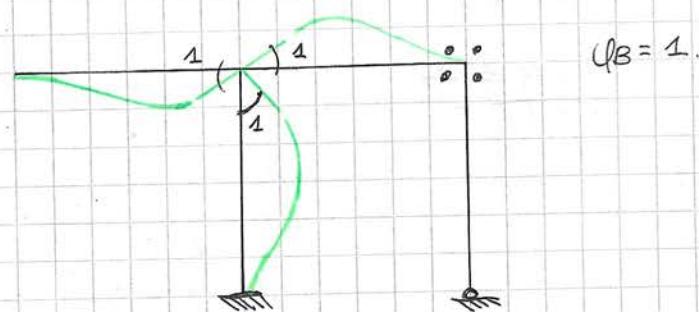
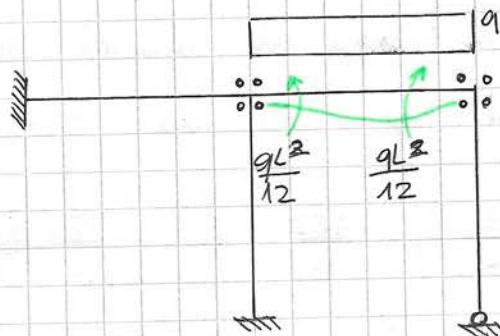
A questo valore lo useremo per calcolare le altre forze.

Reazione verticale in A? Reazione in A dell'ultimo sistema amplificato

$$\frac{qL^3}{96EI} + \text{Reazione secondo amplificato } \frac{qL^3}{96EI}$$



B e C sono punti fermi, quindi calcoleremo gli equilibri nei modi



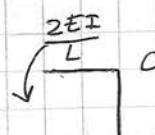
Grazie agli schemi noi avremo

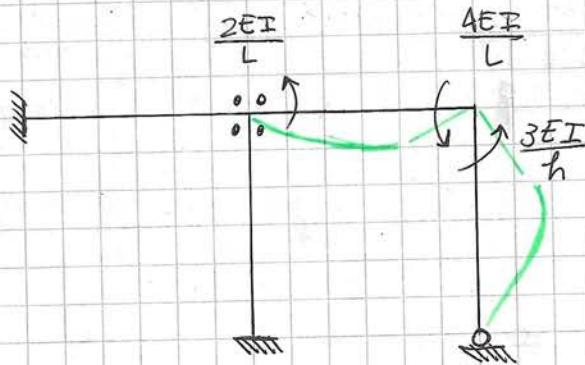
$$\frac{4EI}{L} \quad \frac{4EI}{h}$$

Per effetto di una rotazione

nel punto B avremo una coppia che tenere le fibre

inferiori pari a  $\frac{2EI}{L}$





$$\frac{XL}{3EI} = 1$$

$$X = \frac{3EI}{L}$$

TRAVE  
EQUIVALENTE

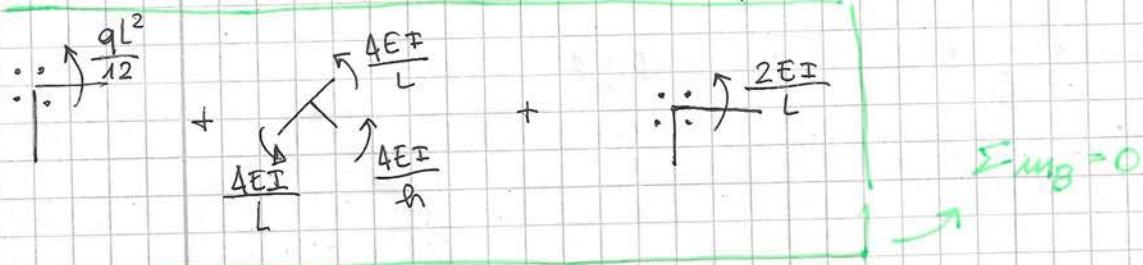


Ottieniamo che la trave incastro-app.  
ha una coppia di incastro che funge  
le fibre sup. che vale  $\frac{3EI}{L} \cdot 1$

Eq Equilibrio:

$$\sum M_B = 0 \quad \frac{qL^2}{12} + \left( \frac{8EI}{L} + \frac{4EI}{h} \right) \varphi_B + \left( \frac{2EI}{L} \right) \varphi_C = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad -\frac{qL^2}{12} + \left( \frac{2EI}{L} \right) \varphi_B + \left( \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{h} \right) \varphi_C = 0$$



pontano in forma matriciale (MATRICE DELLE COEFFICIENTI)

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{8EI}{L} + \frac{4EI}{h} \right) & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{h} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ +\frac{qL^2}{12} \end{vmatrix}$$

$\frac{2EI}{L}$  ad esempio rappresenta una coppia