Формальные языки

домашнее задание до 23:59 26.03

2. Приведите грамматику в нормальную форму Хомского:
   `S` $\to$ `R S | R`
   `R` $\to$ `a S b | c R d | a b | c d |` ε
   Терминалы: `a, b, c, d`, нетерминалы: `R, S`, стартовый нетерминал: `S`, пустая строка: ε.

   Solution.

   (a) Избавимся от неодиночных терминалов и длинных правил
   $$\begin{cases} \mathtt{S} \to \mathtt{R\ S\ |\ R} \\ \mathtt{R} \to \mathtt{A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{A} \to \mathtt{a,\ B} \to \mathtt{b,\ C} \to \mathtt{c,\ D} \to \mathtt{d} \\ \mathtt{U} \to \mathtt{S\ B,\ V} \to \mathtt{R\ D} \end{cases}$$

   (b) Добавим правила для ε-порождающих терминалов `S` и `R`
   $$\begin{cases} \mathtt{S} \to \mathtt{R\ S\ |\ R\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{R} \to \mathtt{A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{A} \to \mathtt{a,\ B} \to \mathtt{b,\ C} \to \mathtt{c,\ D} \to \mathtt{d} \\ \mathtt{U} \to \mathtt{S\ B\ |\ B,\ V} \to \mathtt{R\ D\ |\ D} \end{cases}$$

   (c) Уберём ε-правила
   $$\begin{cases} \mathtt{S} \to \mathtt{R\ S\ |\ R\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{R} \to \mathtt{A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D} \\ \mathtt{A} \to \mathtt{a,\ B} \to \mathtt{b,\ C} \to \mathtt{c,\ D} \to \mathtt{d} \\ \mathtt{U} \to \mathtt{S\ B\ |\ B,\ V} \to \mathtt{R\ D\ |\ D} \end{cases}$$

   (d) Введём новый стартовый терминал
   $$\begin{cases} \mathrm{S_0} \to \mathtt{S\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{S} \to \mathtt{R\ S\ |\ R} \\ \mathtt{R} \to \mathtt{A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D} \\ \mathtt{A} \to \mathtt{a,\ B} \to \mathtt{b,\ C} \to \mathtt{c,\ D} \to \mathtt{d} \\ \mathtt{U} \to \mathtt{S\ B\ |\ B,\ V} \to \mathtt{R\ D\ |\ D} \end{cases}$$

   (e) Замкнём цепочки
   $$\begin{cases} \mathrm{S_0} \to \mathtt{R\ S\ |\ A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D\ |}\ \varepsilon \\ \mathtt{S} \to \mathtt{R\ S\ |\ A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D} \\ \mathtt{R} \to \mathtt{A\ U\ |\ C\ V\ |\ A\ B\ |\ C\ D} \\ \mathtt{A} \to \mathtt{a,\ B} \to \mathtt{b,\ C} \to \mathtt{c,\ D} \to \mathtt{d} \\ \mathtt{U} \to \mathtt{S\ B\ |\ b,\ V} \to \mathtt{R\ D\ |\ d} \end{cases}$$

   Получили нормальную форму Хомского. ■

3. Является ли следующий язык контекстно-свободным? Если является, привести КС грамматику, иначе – доказать.

$$\{a^m b^n \mid m+n>0,\, (m+n) \text{ делится на } 2\}$$

Solution. Этот язык является контекстно-свободным и задаётся КС грамматикой

```
S → a a S | S b b | a S b | a a | b b | a b
```

Докажем по индукции по длине слова k, что все строки, которые описывает эта грамматика содержатся в языке. База: k = 2. строки `a a`, `b b` и `a b` лежат в языке. Переход: $k = m+n \to k = m+n+2$. У нас есть слово из языка $a^m b^n$, такое что $k = m+n > 0$ и $k = (m+n)$ делится на 2. Мы можем приписать к нему слева `a a`, справа `b b`, или слева `a`, а справа `b`, то есть мы можем получить либо $a^{m+2}b^n$, либо $a^m b^{n+2}$, либо $a^{m+1}b^{n+1}$, но все эти слова лежат в нашем языке, так как $k+2 = m+n+2 > 0$ и делится на 2.

Теперь докажем, что грамматика содержит все слова языка. Допустим мы хотим получить слово $a^m b^n$, такое что $m+n > 0$ и $(m+n)$ делится на 2. Если $m = 0$, тогда n чётное и мы можем взять и добавить нужное число раз `b b` справа и заменим `S` на `b b`. Если же $n = 0$, то m чётное и мы возьмём и добавим нужное число раз `a a` слева и заменим `S` на `a a`. Если $m > 0, n > 0$ и m чётное, тогда так как $m+n$ чётное, n тоже чётное, тогда мы возьмём и добавим нужное число раз `a a` слева и `b b` справа заменим `S` на `a a`, например (в зависимости от того сколько каких букв добавили). И наконец, если $m > 0, n > 0$ и m нечётное, тогда так как $m+n$ чётное, n тоже нечётное, тогда мы возьмём `a b` и добавим нужное число раз `a a` слева и `b b` справа (так чтобы букв каждого типа было на одну меньше, чем нужно), а потом добавим `a` слева и `b` справа и заменим `S`.

Таким образом, грамматика содержит все слова языка и язык содержит все слова, которые описывает грамматика, значит, эта грамматика описывает язык. ■