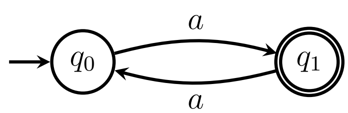
Формальные языки

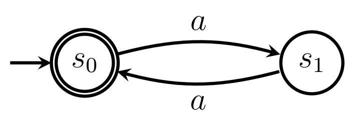
домашнее задание до 23:59 05.03

1. Доказать или опровергнуть утверждение: произведение двух минимальных автоматов всегда дает минимальный автомат (рассмотреть случаи для пересечения, объединения и разности языков).

   Solution.
   `Ответ:` утверждение неверно.
   Рассмотрим автоматы:

   (a)

   (b)

   В их произведении без недостижимых вершин будет всего две вершины: (q_0, s_0) и (q_1, s_1), но в случае их пересечения минимальный автомат будет состоять из одной ничего не допускающей вершины, а в случае объединения – из одной вершины, допускающей все. (В обоих случаях из вершины в себя есть петля). Для опровержения утверждения в случае разности рассмотрим 2 автомата типа (a): их произведение – автомат типа (a), а минимальный автомат, как и в случае с пересечением будет состоять из одной вершины, которая все не допускает. ■

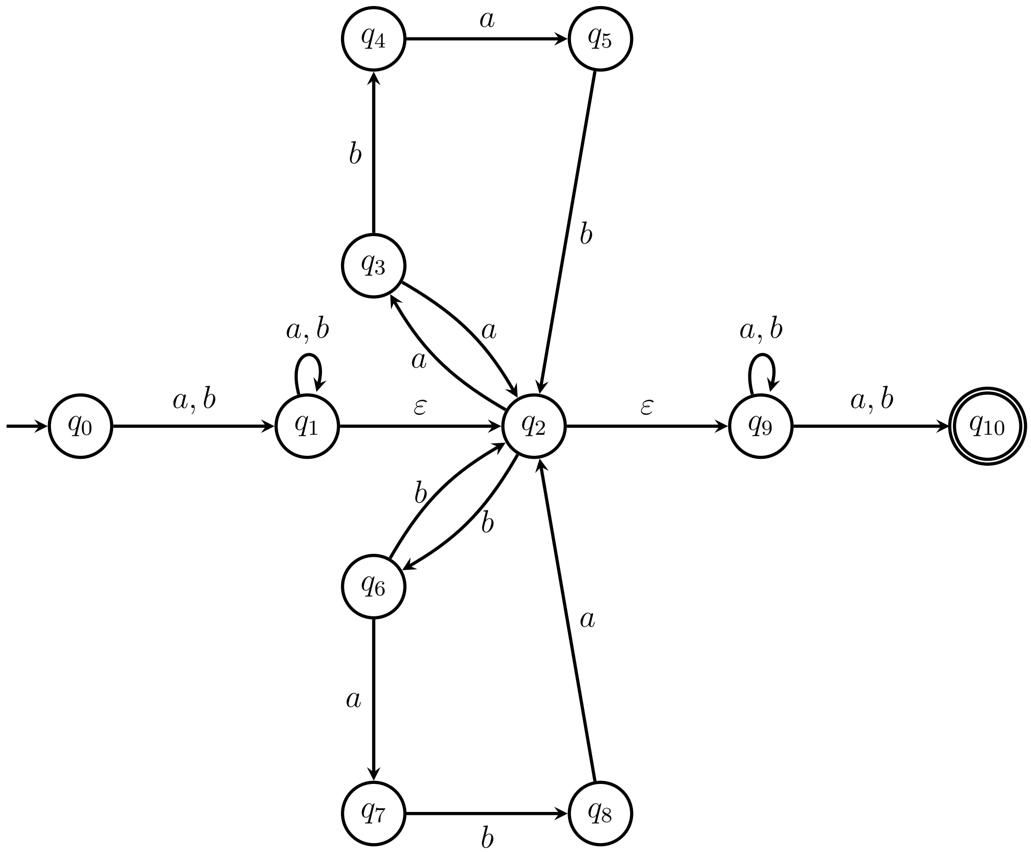
2. Для регулярного выражения:

$$(a \mid b)^+(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*(a \mid b)^+$$

   Построить эквивалентные:

   (a) Недетерминированный конечный автомат

Solution.



■

(b) Недетерминированный конечный автомат без ε-переходов

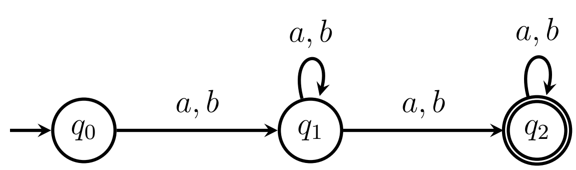
Solution. Заметим, что

$$(a \mid b)^+(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*(a \mid b)^+$$

это в точности

$$(a \mid b)^+(a \mid b)^+,$$

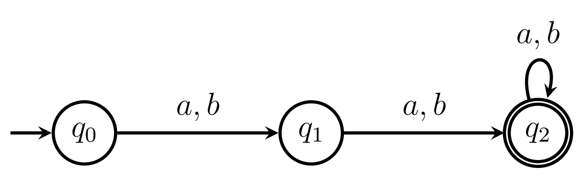
поэтому недетерминированный конечный автомат без ε-переходов выглядит так:



■

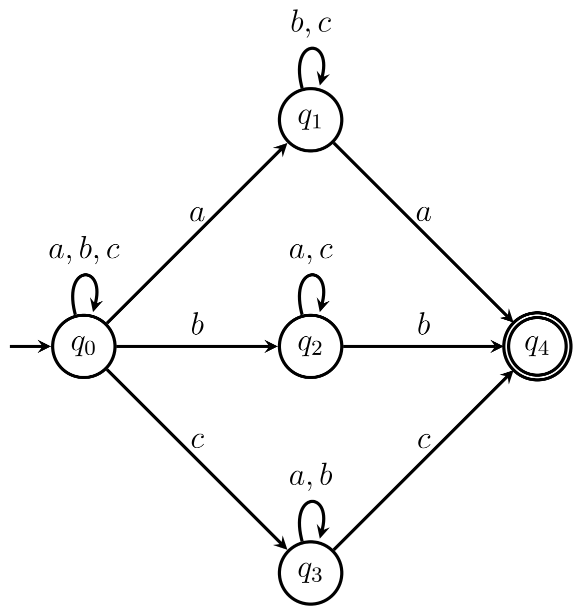
(c) Минимальный полный детерминированный конечный автомат

Solution.



■

3. Построить регулярное выражение, распознающее тот же язык, что и автомат:



Solution.

$$(a \mid b \mid c)^*((a(b \mid c)^*a) \mid (b(a \mid c)^*b) \mid (c(a \mid b)^*c)) \qquad \blacksquare$$

Lemm *(обратная формулировка леммы о накачке).*
Если для языка L над алфавитом V имеет место:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha \in L\colon |\alpha| \geqslant n,\ \forall u, v, w \in V^*\colon (\alpha = uvw) \wedge (|v| \geqslant 1) \wedge (|uv| \leqslant n)\ \exists i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon$ $uv^iw \notin L$, то язык L – неавтоматный. $\square$

4. Определить, является ли автоматным язык $\{\omega\omega^r \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.

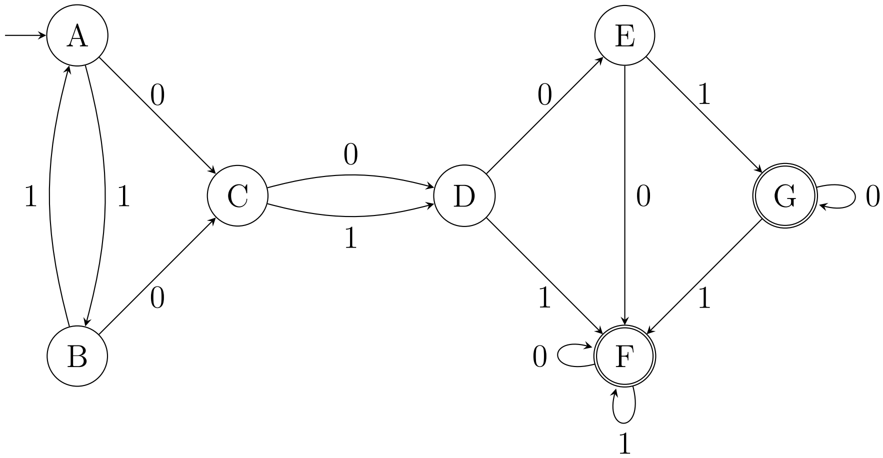
   Solution. Пусть L – язык из условия. Докажем с помощью леммы, что L неавтоматный. По данному n возьмем слово $\alpha = (10^n1)^2 \in L$. $(\alpha = uvw) \wedge (|v| \geqslant 1) \wedge (|uv| \leqslant n)$. Если $u = \varepsilon$, то $v = 10^{<n}$, т.е. в v одна единица, тогда при $i = 2$: $|uv^iw|_1 = |vvw|_1 = 1+1+3 = 5$ – нечетное $\Rightarrow uv^2w \notin L$. А если $u \neq \varepsilon$, то $v = 0^k$, где $1 \leqslant k < n$, тогда при $i = 3$ размер первой половины uv^iw равен $\frac{|uv^3w|}{2} = \frac{|uvw|+2|v|}{2} = \frac{|\alpha|}{2} + |v|$. То есть после того как мы вставили 2 копии v в α, середина слова сдвинулась вправо на $|v| \geqslant 1$. Значит, вторая слева единица в α после этой операции оказалась в правой половине слова, тогда полученное слово $uv^3w \notin L$, потому что в его левой и правой половинах не поровну единиц. $\blacksquare$

5. Определить, является ли автоматным язык $\{uaav \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.

   Solution. Пусть L – язык из условия. Докажем с помощью леммы, что L неавтоматный. По данному n возьмем слово $\alpha = b^naa(ba)^n \in L$. $(\alpha = uvw) \wedge (|v| \geqslant 1) \wedge (|uv| \leqslant n) \Rightarrow v = b^k$, где $k > 0$. При $i = 0$: $uv^iw = uw = b^{n-k}aa(ba)^n \notin L$, так как $n - k < n$. $\blacksquare$

Пример применения алгоритма минимизации

Минимизируем данный автомат:



Автомат полный, в нем нет недостижимых вершин — продолжаем.

Строим обратное δ отображение.

δ^{-1}	0	1
A	—	B
B	—	A
C	A B	—
D	C	C
E	D	—
F	E F	D F G
G	G	E

Отмечаем в таблице и добавляем в очередь пары состояний, различаемых словом ε: все пары, один элемент которых — терминальное состояние, а второй — не терминальное состояние. Для данного автомата это пары

$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G)$

Дальше итерируем процесс определения неэквивалентных состояний, пока очередь не оказывается пуста.

(A, F) не дает нам новых неэквивалентных пар. Для (B, F) находится 2 пары: $(A, D), (A, G)$. Первая пара не отмечена в таблице — отмечаем и добавляем в очередь. Вторая пара уже отмечена в таблице, значит, ничего делать не надо. Переходим к следующей паре из очереди. Итерируем дальше, пока очередь не опустошится.

Результирующая таблица (заполнен только треугольник, потому что остальное симметрично) и порядок добавления пар в очередь.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C	✓	✓					
D	✓	✓	✓				
E	✓	✓	✓	✓			
F	✓	✓	✓	✓	✓		
G	✓	✓	✓	✓	✓		

Очередь:
$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G),$
$(B, D), (A, D), (A, E), (B, E), (C, E), (C, D), (D, E), (A, C), (B, C))$

В таблице выделились классы эквивалентных вершин: $\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{F, G\}$. Остается только нарисовать результирующий автомат с вершинами-классами. Переходы добавляются тогда, когда из какого-нибудь состояния первого класса есть переход в какое-нибудь состояние второго класса. Минимизированный автомат: