13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

Предварителни бележки:

Нека D е дадено множество от обекти, а n е положително цяло число. Ще наричаме n-местни функции в D и n-местни предикати в D изображенията на множеството D^n съответно в множеството D и в двуелементното множество $\{0,1\}$ (с D^n означаваме множеството на наредените n-орки от елементи на D, $D^1 \equiv D$; за числата 0 и 1 като стойности на предикати ще считаме, че символизират съответно понятията „лъжа“ и „истина“). Под 0-местна операция в D ще разбираме елемент на D, а под 0-местен предикат – някое от числата 0 и 1. Множеството на n-местните функции в D ще означаваме с $F_n(D)$, а множеството на n-местните предикати в D – с $P_n(D)$.

Дадена ни е азбука, наречена базисна, която съдържа измежду своите знаци двете кръгли скоби и запетаята. Ω – множество от думи над базисната азбука, обединение на множества $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ (множества съответно на нулместните, едноместните, двуместните и пр. функционални символи), множества $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ (множества съответно на нулместните, едноместните, двуместните и пр. предикатни символи), множество Ξ (множество на променливите) и множество Λ (множество на логическите символи). Думите от обединението на множествата $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ ще наричаме с общото име функционални символи, а думите от обединението на множествата $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ – с общото име предикатни символи. Нулместните функционални символи ще наричаме още константи. Ще предполагаме, че множеството Ξ е безкрайно, а множеството Λ се състои от пет различни думи, които ще означаваме с not, and, or, for-all и for-some. Също $\Phi_0 \neq \emptyset$; $\Xi \cap \Lambda = \emptyset$; $\Xi \cap \Phi_n = \emptyset$, $\Xi \cap \Pi_n = \emptyset$, $\Lambda \cap \Phi_n = \emptyset$,

$\Delta \cap \Pi_n = \emptyset$; $\Phi_n \cap \Pi_n = \emptyset$, $\forall n$.

Двойката от редиците $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ и $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots$ ще наричаме сигнатури.

def:
Терм:
1) Всички константи и променливи са термове.
2) Когато n е цяло положително число, $f \in \Phi_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове, то думата $f(T_1, T_2, \dots, T_n)$ също е терм.

def:
Затворен терм:
1) Всяка константа е затворен терм.
2) Когато n е цяло число (положително), $f \in \Phi_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са затворени термове, то думата $f(T_1, T_2, \dots, T_n)$ също е затворен терм.

def:
Атомарна формула думите от Π_0 и думите от вида $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$, където n е цяло положително число, $p \in \Pi_n$, а $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове.

def:
Затворена атомарна формула: думите от Π_0 и думите от вида $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$, където n е цяло положително число, $p \in \Pi_n$, а $T_1, T_2, \dots, T_n$ са затворени термове.

def:
За всеки терм T ще дефинираме индуктивно едно множество $VAR(T)$, чиито елементи ще наричаме променливи на T:
1) при $c \in \Phi_0$ полагаме $VAR(c) = \emptyset$
2) при $X \in \Xi$ полагаме $VAR(X) = \{X\}$
3) когато n е положително цяло число, $f \in \Phi_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове, полагаме

$$VAR(f(T_1, T_2, \dots, T_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(T_i).$$

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

def:
За всяка атомарна формула A дефинираме множество VAR(A), чиито елементи ще наричаме променливи на A:
1) при $p \in \Pi_0$ полагаме $VAR(p) = \emptyset$
2) когато n е положително цяло число, $p \in \Pi_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са термове, полагаме

$$VAR(p(T_1, T_2, \ldots, T_2)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(T_i).$$

Когато D е дадено множество, а n е неотрицателно цяло число, ще наричаме интерпретация в D на n-местните функционални символи кое да е изображение на множеството Φ_n в множеството $F_n(D)$. С други думи, една интерпретация в D на n-местните функционални символи се определя като на всеки n-местен функционален символ се постави в съответствие някоя n-местна функция в D. Аналогично, под интерпретация в D на n-местните предикатни символи ще разбираме кое да е изображение на множеството Π_n в множеството $P_n(D)$, т.е. една интерпретация в D на n-местните предикатни символи се определя като на всеки n-местен предикатен символ се постави в съответствие някой n-местен предикат в D.

Казваме, че е дадена една структура, когато е дадено едно непразно множество D (наричано носител, универсум, област на данните) и за всяко неотрицателно цяло число n са избрани по една интерпретация в D на n-местните функционални символи и по една интерпретация в D на n-местните предикатни символи. Структурата може да се разглежда като наредена тройка с пръв член непразното множество D, втори член редицата $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ и трети член редица $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$, където за всяко неотрицателно цяло число n φ_n и π_n са съответно интерпретация в D на n-местните функционални символи и интерпретация в D на n-местните предикатни символи.

Нека ни е дадена структура S с носител D, на която вторият и третият член са двете редици от интерпретации $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ и $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$

def:

За всеки затворен терм T дефинираме елемент T^S на множеството D, който ще наричаме стойност на T в S.

1) при $c \in \Phi_0$ полагаме $c^S = \varphi_0(c)$

2) когато n е положително цяло число, $f \in \Phi_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са затворени термове, полагаме

$$f(T_1, T_2, \ldots, T_n)^S = \varphi_n(f)(T_1^S, T_2^S, \ldots, T_n^S).$$

def:

Дефинираме и стойност в S на коя да е затворена атомарна формула A, като тази стойност ще означаваме с A^S и тя ще бъде някое от числата 0 и 1.

1) ако $p \in \Pi_0$ полагаме $p^S = \pi_0(p)$

2) когато n е положително цяло число, $p \in \Pi_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са затворени термове, то полагаме

$$p(T_1, T_2, \ldots, T_n)^S = \pi_n(p)(T_1^S, T_2^S, \ldots, T_n^S).$$

def:

За една затворена атомарна формула A ще считаме, че е вярна в S, и ще пишем $S \models A$, ако $A^S = 1$ (за да изразим противното, ще пишем $S \not\models A$).

def:

Ако S е дадена структура и D е нейният носител, то ще наричаме оценка в S на променливите всяко изображение на множеството Ξ в множеството D.

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

Нека са ни дадени структура S и една оценка v в S на променливите.

def:

За всеки терм T ще дефинираме елемент $T^{S,v}$ на D, който ще наричаме стойност на T в S при оценка v:

1) при $c \in \Phi_0$ полагаме $c^{S,v} = \varphi_0(c)$

2) при $X \in \Xi$ полагаме $X^{S,v} = v(X)$

3) когато n е положително цяло число, $f \in \Phi_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове, полагаме

$$f(T_1, T_2, \dots, T_n)^{S,v} = \varphi_n(f)(T_1^{S,v}, T_2^{S,v}, \dots, T_n^{S,v}).$$

def:

За произволна атомарна формула A ще дефинираме нейната стойност в S при оценка v, като тази стойност ще означаваме с $A^{S,v}$ и тя ще бъде някое от числата 0 и 1:

1) при $p \in \Pi_0$ полагаме $p^{S,v} = \pi_0(p)$

2) когато n е положително цяло число, $f \in \Pi_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове, полагаме

$$p(T_1, T_2, \dots, T_n)^{S,v} = \pi_n(p)(T_1^{S,v}, T_2^{S,v}, \dots, T_n^{S,v}).$$

def:

За една атомарна формула A, ще считаме, че е вярна в S при оценката v, и ще пишем $S, v \models A$, ако $A^{S,v} = 1$ (за да изразим противното, ще пишем $S, v \not\models A$).

Доказва се, че за всеки затворен терм T и за всяка затворена атомарна формула A имаме: $T^{S,v} = T^S$ и $A^{S,v} = A^S$.

Лема:

Нека S е дадена структура. Тогава за произволен терм T имаме, че ако две оценки v и v' в S на променливите съвпадат върху множеството VAR(T), то е в сила равенството $T^{S,v} = T^{S,v'}$.

Лема:
Нека S е дадена структура. Тогава за произволна атомарна формула A имаме, че ако две оценки v и v' в S на променливите съвпадат върху множеството $VAR(A)$, то е в сила равенството $A^{S,v} = A^{S,v'}$.

Нека са дадени една субституция σ и една структура S. Дефинираме едно преобразование σ_S, което преобразува всяка оценка в S на променливите пак в такава оценка: ако v е произволна оценка в S на променливите, то $\sigma_S(v) = v'$, където оценката v' се дефинира с условието, че

$$v'(X) = (X\sigma)^{S,v}$$

за коя да е променлива X. Преобразованието σ_S ще наричаме оператор за присвояване в S, съответен на σ.

Теорема:
Нека са дадени една субституция σ, една структура S и една оценка v в S. Нека $\sigma_S(v) = v'$ и нека E е терм или атомарна формула. Тогава е в сила равенството $(E\sigma)^{S,v} = E^{S,v'}$.
Предварителни бележки: край.

Логически формули
def:
Логическа формула (формула на предикатното смятане или просто формула):
0) всяка атомарна формула е логическа формула
1) логическите символи and и or са логически формули. (наричат се съответно празна конюнкция и празна дизюнкция - ще означаваме още с true и false/fail).
2) при всеки избор на положително цяло число n и на логически формули $F_1, F_2, \dots, F_n$ думите and$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ и or$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ също са логически формули.

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

3) за всяка логическа формула F думата not(F) също е логическа формула.
4) за всяка променлива X и всяка логическа формула F думите for_all(X,F) и for_some(X,F) също са логически формули (наричат се съответно генерализация на F по X и екзистенциализация на F по X).

def:
Ще съпоставим на всяка формула F две множества от променливи, които ще означаваме с FVAR(F) и с BVAR(F); променливите от първото множество ще наричаме свободни променливи на F, а променливите от второто - свързани променливи на F:
1) Ако F е атомарна формула, то $FVAR(F) = VAR(F)$, $BVAR(F) = \emptyset$.
2) Ако F е някоя от формулите and и or, то $FVAR(F) = BVAR(F) = \emptyset$.
3) Ако F е някоя от формулите $and(F_1, F_2, \dots, F_n)$ и $or(F_1, F_2, \dots, F_n)$, където n е положително цяло число и $F_1, F_2, \dots, F_n$ са дадени формули, то

$$FVAR(F) = FVAR(F_1) \cup FVAR(F_2) \cup \dots \cup FVAR(F_n)$$
$$BVAR(F) = BVAR(F_1) \cup BVAR(F_2) \cup \dots \cup BVAR(F_n).$$

4) За всяка формула F полагаме $FVAR(not(F)) = FVAR(F)$, $BVAR(not(F)) = BVAR(F)$.
5) За всяка променлива X и всяка формула F полагаме

$$FVAR(for\_all(X,F)) = FVAR(for\_some(X,F)) = FVAR(F) \setminus \{X\}$$
$$BVAR(for\_all(X,F)) = BVAR(for\_some(X,F)) = BVAR(F) \cup \{X\}.$$

def:
Формула, която няма свободни променливи, се нарича затворена, а формула, която няма свързани променливи, се нарича отворена.

def:
Безкванторна формула:

0) всяка атомарна формула е безкванторна формула.
1) логическите символи and и or са безкванторни формули.
2) при всеки избор на положително цяло число n и на безкванторни формули $F_1, F_2, \dots, F_n$ думите and$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ и or$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ също са безкванторни формули.
3) за всяка безкванторна формула F думата not(F) също е безкванторна формула.

Всяка безкванторна формула е отворена логическа формула и обратното.

def:
Формула без променливи:
0) всяка затворена атомарна формула е формула без променливи.
1) логическите символи and и or са формули без променливи.
2) при всеки избор на положително цяло число n и на формули без променливи $F_1, F_2, \dots, F_n$ думите and$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ и or$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ също са формули без променливи.
3) за всяка формула без променливи F думата not(F) също е формула без променливи.

Множеството на затворените безкванторни формули съвпада с множеството на формулите без променливи.

Семантика на логическите формули
def:
Нека носителят на S е дадено множество D. Тогава за коя да е оценка v в S на променливите, коя да е променлива X и кой да е елемент d на D ще означаваме с $[X:d]v$ онази оценка в S на променливите, която съпоставя на X елемента d и за всички други променливи съвпада с v-оценката $[X:d]v$ ще наричаме модификация на v върху X чрез

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

def:
Дефинираме стойност на логическа формула F в S при оценката v, която стойност ще бъде някое от числата 0 и 1 и ще бъде означавана с $F^{S,v}$:

1) полагаме $and^{S,v} = 1$, $or^{S,v} = 0$.

2) при всеки избор на положително цяло число n и n на формули $F_1, F_2, \dots, F_n$ полагаме

$$and(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v} = \min\{F_1^{S,v}, F_2^{S,v}, \dots, F_n^{S,v}\},$$

$$or(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v} = \max\{F_1^{S,v}, F_2^{S,v}, \dots, F_n^{S,v}\}.$$

3) за всяка формула F полагаме $not(F)^{S,v} = 1 - F^{S,v}$

4) за всяка променлива X и всяка формула F полагаме

$$for\_all(X, F)^{S,v} = \min\{F^{S,[X:d]v} \mid d \in D\},$$

$$for\_some(X, F)^{S,v} = \max\{F^{S,[X:d]v} \mid d \in D\}.$$

def:
Дадена формула е вярна в S при дадена оценка в S на променливите, ако стойността на формулата в S при тази оценка е 1 - пишем $S, v \models F$ или $S, v \not\models F$.

Лема: ([illegible])
За произволна формула F имаме, че ако две оценки v и v' съвпадат върху множеството на променливите в структурата S във FVAR(F), то е в сила равенството $F^{S,v} = F^{S,v'}$.

Доказателство:
Ще използваме индукция, съобразена с дефиницията на понятието формула.
Твърдението е вярно, когато F е атомарна формула. Вярно е и в случая, когато F е празната конюнкция или празната дизюнкция, защото тогава стойността на F изобщо не зависи от избора на оценката.

Нека свойството е в сила за всяка една от дадени формули $F_1, F_2, \dots, F_n$, където n е положително цяло число. Ако две оценки v и v' в S на променливите съвпадат върху $FVAR(and(F_1, F_2, \dots, F_n))$, тези оценки ще съвпадат и върху всяко от множествата $FVAR(F_i)$, $i=\overline{1,n}$, следователно ще имаме равенствата $F_i^{S,v} = F_i^{S,v'}$, $i=\overline{1,n}$, откъдето:

$$and(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v} = \min\{F_1^{S,v}, F_2^{S,v}, \dots, F_n^{S,v}\} = \min\{F_1^{S,v'}, F_2^{S,v'}, \dots, F_n^{S,v'}\} =$$

$$= and(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v'}.$$

Аналогично се доказва за $or(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v} = or(F_1, F_2, \dots, F_n)^{S,v'}$ и $not(F)^{S,v} = not(F)^{S,v'}$.

Нека твърдението е в сила за формулата F.

Да предположим, че две оценки v и v' в S на променливите съвпадат върху множеството $FVAR(for\_all(X,F))$. Това означава, че те съвпадат за всички променливи, които принадлежат на множеството $FVAR(F)$ и са различни от X. Оттук следва, че при всеки избор на елемент d от D оценките $[X:d]v$ и $[X:d]v'$ съвпадат навсякъде в множеството $FVAR(F)$ и получаваме $F^{S,[X:d]v} = F^{S,[X:d]v'}$:

$$for\_all(X,F)^{S,v} = \min\{F^{S,[X:d]v} \mid d \in D\} = \min\{F^{S,[X:d]v'} \mid d \in D\} =$$

$$= for\_all(X,F)^{S,v'}.$$

Аналогично за $for\_some(X,F)^{S,v} = for\_some(X,F)^{S,v'}$. □

Следствие:
Ако F е затворена формула, то $F^{S,v} = F^{S,v'}$ за всеки две оценки v и v' в S на променливите.

Следствието показва, че когато F е затворена формула, стойността $F^{S,v}$ не зависи от избора на оценката v. Тази независеща от v стойност ще наричаме стойност на F в S и ще я означаваме с F^S.

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

def:
За една формула казваме, че е тъждествено вярна в дадена структура, ако е вярна в нея при всяка оценка на променливите. Означаваме с $S \models F$ ($S \not\models F$) факта, че F (не) е тъждествено вярна в структурата S.

def:
Формулите, които са тъждествено верни във всяка структура, се наричат тъждествено верни. Ще пишем $\models F$ ($\not\models F$), за да изразим, че F (не) е тъждествено вярна.

Твърдение:
За произволна структура S, произволна формула F, произволна променлива X условията $S \models F$ и $S \models \forall X F$ са равносилни.

Доказателство:
Ако $S \models F$ и v е произволна оценка в S на променливите, то $(\forall X F)^{S,v} = \min\{F^{S,[X:d]v} \mid d \in D\} = 1 \Rightarrow S, v \models \forall X F \Rightarrow S \models \forall X F$.
Обратно, ако $S \models \forall X F$ и v е произволна оценка в S на променливите, то $S \models \forall X F \Rightarrow S, v \models \forall X F \Rightarrow F^{S,[X:d]v} = 1, \forall d \in D$,
но $v = [X : v(X)]v \Rightarrow F^{S,v} = 1 \Rightarrow S, v \models F \Rightarrow S \models F$. □

Следствие:
$\models F$ и $\models \forall X F$ са равносилни.

def:
Ако една формула F има точно m свободни променливи и те са $X_1, X_2, \dots, X_m$, то формулата $\forall X_1 \forall X_2 \dots \forall X_m F$ се нарича универсално затваряне на F и очевидно е затворена формула.

Твърдение:
Нека F е произволна формула, а G е нейно универсално

затваряне. За да бъде формулата F тъждествено вярна в дадена структура, необходимо и достатъчно е формулата G да бъде вярна в същата структура.

Доказателство:

Ако $FVAR(F) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$; $X_i \neq X_j$, $i \neq j$, прилагаме m пъти предишната твърдение:

$S \models F \Leftrightarrow S \models \forall X_m F \Leftrightarrow S \models \forall X_{m-1} \forall X_m F \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow S \models \forall X_1 \forall X_2 \dots \forall X_m F.$ □

Следствие:

F е тъждествено вярна, точно когато G е тъждествено вярна.

def:

За една формула ще казваме, че е изпълнима в дадена структура S, ако тази формула е вярна в S поне при една оценка в S на променливите.

def:

Една формула ще нарича изпълнима, ако е изпълнима в поне една структура.

Твърдение: [illegible]

За произволна структура S, произволна формула F и произволна променлива X условието формулата F да е изпълнима в S е равносилно с условието формулата $\exists XF$ да е изпълнима в S.

Доказателство:

Ако формулата $\exists XF$ е изпълнима в дадена структура S, то тази формула е вярна в S при някоя оценка v на променливите и тогава формулата F ще е вярна в S при оценката $[X:d]v$ за някой елемент d на носителя на S. Обратно, ако формулата F е изпълнима в S, то F е вярна в S при някоя оценка v в S на променливите и е достатъчно да използваме, че тази оценка съвпада с оценката $[X:v(X)]v$. □

Следствие:

F е изпълнима, ако и тогава когато $\exists XF$ е изпълнима.

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

def:
Ако една формула F има точно m свободни променливи и те са $X_1, X_2, \dots, X_m$, то формулата $\exists X_1 \exists X_2 \dots \exists X_m F$ се нарича екзистенциално затваряне на F и очевидно е затворена формула.

Твърдение:
Нека F е произволна формула, а G е нейно екзистенциално затваряне. За да бъде формулата F изпълнима в дадена структура, необходимо и достатъчно е формулата G да бъде ~~вярна~~ изпълнима в същата структура.

Твърдение:
F е изпълнима тогава и само тогава, когато G е изпълнима.

Твърдение:
F е тъждествено вярна в $S \Leftrightarrow \neg F$ не е изпълнима в S

Твърдение:
F е изпълнима в $S \Leftrightarrow \neg F$ не е тъждествено вярна в S.

Твърдение:
F е тъждествено вярна $\Leftrightarrow \neg F$ не е изпълнима.

Твърдение:
F е изпълнима $\Leftrightarrow \neg F$ не е тъждествено вярна.

Ербранови структури

def:
Множеството на всички затворени термове ще означаваме с H и ще наричаме Ербранов универсум.

Очевидно $H \neq \emptyset$, когато $\Phi_0 \neq \emptyset$.

def:

За всяко неотрицателно цяло число n дефинираме изображението φ_n^{H} на множеството Φ_n в $F_n(H)$, което изображение ще наричаме Ербранова интерпретация на n-местните функционални символи. Дефинираме:

1) $c \in \Phi_0$ полагаме $\varphi_0^{H}(c) = c$

2) ако n е положително цяло число, $f \in \Phi_n$, то означаваме с $\varphi_n^{H}(f)$ онази n-местна операция в H, която преобразува произволна n-орка $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ от затворени термове в затворения терм $f(T_1, T_2, \dots, T_n)$.

def:

Ербранова структура ще наричаме всяка структура с носител Ербрановият универсум H, в която за всяко неотрицателно цяло число n интерпретация на n-местните функционални символи е тяхната Ербранова интерпретация φ_n^{H} (разбира се, такива структури съществуват при $H \neq \emptyset$, т.е. при $\Phi_0 \neq \emptyset$).

Твърдение:

Нека $\Phi_0 \neq \emptyset$ и нека S е произволна ербранова структура. Тогава за всеки затворен терм T е в сила равенството $T^S = T$.

Доказателство:

Доказва се с индукция по построението на затворен терм.

Ако $c \in \Phi_0$, то $c^S = \varphi_0^{H}(c) = c$.

Нека $f \in \Phi_n$, където $n > 0$ - цяло число и имаме $T_1, T_2, \dots, T_n$ - затворени термове, за които $T_i^S = T_i$; $i = \overline{1,n}$. Тогава:

$$f(T_1, T_2, \dots, T_n)^S = \varphi_n^{H}(f)(T_1^S, T_2^S, \dots, T_n^S) = \varphi_n^{H}(f)(T_1, T_2, \dots, T_n) = f(T_1, T_2, \dots, T_n)$$

Твърдение:

Нека S е ербранова структура, а v е оценка в S на променливите. Тогава за всеки терм T е в сила равенството $T^{S,v} = T\sigma$, където σ е коя да е субституция, съвпадаща с v върху множеството $VAR(T)$.

Доказателство:

Индукция по построението на терма T.

Ако $T = c$, то $c^{S,v} = \varphi_0^{|H|}(c) = c = c\sigma$ за всяка субституция σ.

Ако $T = X$, то $X^{S,v} = v(X) = \sigma(X) = X\sigma$, стига σ да съвпада с v върху $VAR(X)$.

Нека $T = f(T_1, \dots, T_n)$ и $T_i^{S,v} = T_i\sigma$, $i = \overline{1,n}$, където σ е субституция, съвпадаща с v върху $VAR(T_i)$, $i = \overline{1,n}$.

$T^{S,v} = \varphi_n^{|H|}(f)(T_1^{S,v}, \dots, T_n^{S,v})$.

Нека σ е субституция, която съвпада с v върху $VAR(T)$, следователно σ съвпада с v върху $VAR(T_i)$, $i = \overline{1,n}$. Тогава $T_i^{S,v} = T_i\sigma$, $i = \overline{1,n}$ и следва

$T^{S,v} = \varphi_n^{|H|}(f)(T_1^{S,v}, \dots, T_n^{S,v}) = \varphi_n^{|H|}(f)(T_1\sigma, \dots, T_n\sigma) = f(T_1\sigma, \dots, T_n\sigma) = T\sigma$. $\square$

Твърдение:

Нека M е произволно множество от затворени атомарни формули. Тогава съществува такава Ербранова структура S, такава че в S са верни онези и само онези атомарни формули, които принадлежат на M.

Доказателство:

За произволно n - неотрицателно цяло число да означим с π_n интерпретацията на n-местните предикатни символи в Ербрановата структура S.

Полагаме $\pi_n(p)(T_1, \dots, T_n) = \begin{cases} 1, & \text{ако } p(T_1, \dots, T_n) \in M \\ 0, & \text{ако } p(T_1, \dots, T_n) \notin M \end{cases}$

където $p \in \Pi_n$, а $T_1, T_2, \dots, T_n \in |H|$.

Ако p е нулместен предикатен символ, полагаме $\pi_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{ако } p \in \\ 0, & \text{ако } p \notin M \end{cases}$

Ако A е затворена атомарна формула, то тогава A е вярна в S, тогава и само тогава, когато $A \in M$ (т.е. $S \models A \Leftrightarrow A \in M$).

Нека $A = p(T_1, T_2, \dots, T_n)$ е произволна затворена формула (атомарна), където $T_i, i=\overline{1,n}$ са затворени термове:

$$A^S = \pi_n(p)(T_1^S, T_2^S, \dots, T_n^S) = \pi_n(p)(T_1, T_2, \dots, T_n) = \begin{cases} 1, \text{ако } A \in M \\ 0, \text{ако } A \notin M \end{cases}$$

Нека $A = p \in \Pi_0$:

$$A^S = \pi_0(p) = \begin{cases} 1, \text{ако } A \in M \\ 0, \text{ако } A \notin M. \end{cases} \square$$

Ербранови модели

def:
Нека М е множество от затворени формули. Модел за М се нарича такава структура, в която всички формули от М са верни.

def:
Нека М е произволно множество от формули. Модел за М се нарича такава структура, в която всички формули от М са тъждествено верни.

def:
Едно множество от затворени формули се нарича изпълнимо, ако съществува модел за това множество.

def:
Едно множество от формули ще наричаме изпълнимо, ако съществува структура S и такава оценка v в S на променливите, че всички формули от М да са верни в S при оценката v.

def:
За едно множество от формули ще казваме, че е силно изпълнимо, ако съществува модел за това множество.

13. Семантична характеризация на логическите формули и програми.

Теорема:
Нека M е изпълнимо множество от затворени безкванторни формули. Тогава съществува ербранова структура, която е модел за M.
Доказателство:
Нека S е структура, която е модел за M.
Нека M_0 е множеството на всички затворени атомарни формули, които са верни в структурата S.
Нека S' е ербранова структура, такава че в S' са верни онези и само онези затворени атомарни формули, които принадлежат на M_0.
Ще покажем, че S' също е модел за M.
Нека $F \in M$:
За всички атомарни компоненти A на F имаме: $A^S = A^{S'} \Rightarrow$ $F^S = F^{S'}$ и ако $F^S = 1$, следва че $F^{S'} = 1$. □

Теорема:
Нека M е произволно множество от безкванторни формули. Тогава следните условия са еквивалентни:
1) M е силно изпълнимо
2) множеството, състоящо се от всички затворени частни случаи на формулите от M, е изпълнимо
3) съществува ербранова структура, която е модел за M.
Доказателство:
1) => 2)
Нека S е модел за M. Тогава всички формули от M са тъждествено верни в S. Следователно всички затворени частни случаи на формулите от M са верни в S.
2) => 3)
Прилагаме предишната теорема към множеството на частните случаи на формули от M. S е ербранова структура, която е модел за това множество.

Ще покажем, че S е модел за M.
Нека $F \in M$.
Всички затворени частни случаи на F са верни в S.
Следователно F е тъждествено вярна в S.
3) => 1)
Очевидно. □

Теорема: (на Ербран)
Ако едно множество от безкванторни формули не е силно изпълнимо, то съществува крайно множество от техни затворени частни случаи, което не е изпълнимо.

Допълнителни бележки:
Def:
Атомарна компонента на безкванторна формула A:
1) ако A е атомарна формула, то A има единствена атомарна компонента A.
2) true и false нямат атомарни компоненти.
3) ако $A = and(F_1, F_2, \dots, F_n)$ или $A = or(F_1, F_2, \dots, F_n)$, то атомарни компоненти на A са онези атомарни формули, които са атомарни компоненти поне на една от формулите $F_1, F_2, \dots, F_n$.
4) $\neg A$ има същите атомарни компоненти, както A.

XIII Семантична характеризация на логическите формули и програми

Деф. Атомарна формула
дума от вида $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$, където p е n-арен предикатен символ и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове
Ако в $\mathcal{L}$ има формално равенство то $\in \mathcal{I}(\tau_1 \equiv \tau_2)$ също е ат. ф.

Деф Формула над $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ е език)
1) атомарните ф-ли са ф-ли
2) ако φ и ψ са ф-ли, то и
$\neg\varphi$, $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ и $\varphi \Leftrightarrow \psi$ също са предикатни ф-ли
3) ако φ е предик. ф-ла, а x е индивидна променлива то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ са също ф-ли
4) ~~...~~

Деф. Нека $\mathcal{L}$ е език структура за $\mathcal{L}$ наричаме $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$
където $A \neq \emptyset$ е универсум на структурата
а I интерпретация на нелогическите символи от $\mathcal{L}$ в A

$I(c) \in A$ ако $c \in Const$

$I(c) = c^A$

$I(f) : A^n \longrightarrow A$ ако $f \in Funct$ и $\rho(f) = n$ арността на f

$I(f) = f^A$?

$I(p) \subseteq \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-пъти}}$ ако $p \in Pred$ и $\rho(p) = n$

$I(p) = p^A$

Деф: Оценка на индивидните променливи в $\mathcal{A}$
нар. $v : Var \longrightarrow A$, $A = |\mathcal{A}|$ - A е носител на $\mathcal{A}$

Деф. Стойност на терм τ в структура $\mathcal{A}$ при оценка v
1) $\|c\|^{\mathcal{A}}[v] = c^{\mathcal{A}}$
2) $\|x\|^{\mathcal{A}}[v] = v(x)$
3) $\|f(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v] = f^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v])$

Деф. Стойност на ф-ла в структура $\mathcal{A}$ при оценка v
1) $\varphi \leftrightharpoons p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - атом. формула, $p \in Pred$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_v = и \Leftrightarrow p^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}_v, \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}_v) = и$

Друг запис: $\quad$ зап. ($\mathcal{A} \models_v \varphi$: φ е вярна в $\mathcal{A}$ при оценка v)

$\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

2) $\|\neg\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = H_\neg(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v])$

$H_\neg : \{и, л\} \longrightarrow \{и, л\}$

булева ф-я, която отговаря на отрицанието

$\mathcal{A} \models_v \neg\varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \not\models_v \varphi$

3) $\varphi \equiv (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$ $\qquad \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$\|\varphi_1\sigma\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v] = H_\sigma(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v])$

~~[illegible]~~ $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \& \varphi_2 \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi_1$ и $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \vee \varphi_2 \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi_1$ или $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \longleftrightarrow \mathcal{A} \not\models_v \varphi_1$ или $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \longleftrightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \& \varphi_2$ или $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_1 \& \neg\varphi_2$

4) $\psi \equiv \exists x \varphi$

$\|\exists x \varphi\|^{\mathcal{A}}[v] \longleftrightarrow$ има елемент $a \in A$, такъв че

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_a] = и$

$\mathcal{A} \models_v \exists x \varphi \longleftrightarrow$ има ел. $a \in A$: $\mathcal{A} \models_{v^x_a} \varphi$

5) $\psi \equiv \forall x \varphi$

$\|\forall x \varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = и \longleftrightarrow$ за произволен ел. $a \in A$

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_a] = и$

$\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi \longleftrightarrow$ за произв. ел. $a \in A$ $\mathcal{A} \models_{v^x_a} \varphi$

6) $\varphi \equiv (\tau_1 \equiv \tau_2)$

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = и \longleftrightarrow \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\tau_2\|^{\mathcal{A}}[v]$

Факт: Всяка формула има еднозначно определена стойност във всяка структура при всяка оценка

Деф. Оценка v_a^x

$$v_a^x(y) = \begin{cases} v(y) & \text{ако } x \neq y \\ a & \text{ако } x = y \end{cases}$$

v_a^x модифицира v в x с a

Деф. Изпълнимост на ф-ла

Нека $\mathcal{L}$ е език, φ е ф-ла от $\mathcal{L}$.

φ е изпълнима ако същ. структура A за $\mathcal{L}$ и оценка v, такива че $A \models_v \varphi$

Деф. Нека Γ е множ. от ф-ли от $\mathcal{L}$

Γ е изпълнимо ако същ. структура A и оценка v, такива, че $A \models_v \varphi$ за вс. ф-ла φ от Γ

(A и v са едни и същи за вс. ф-ла) -> Деф?

Деф. Структура A е модел за φ, (φ е тъждествено вярна в A), ако при всяка оценка v в A $A \models_v \varphi$

Деф. Нека Γ е множ. от ф-ли.

Γ има модел, ако същ. структура A, такава че всяка ф-ла от Γ да е тъждествено вярна в A

~~Твърдение~~ Деф. Свободно участие на променлива x във ф-ла φ ако не попада в област на действие на квантор по x

Свързано участие - ако попада в област на действие на квантор по променливата

Свободна променлива - ако има поне едно свободно участие

Свързана променлива, ако всичките ѝ участия са свързани

Деф. Затворена формула - няма свободни променливи

Твърдение. Нека τ е терм и v_1 и v_2 са оценки на инд. пром. в структура A, такива че за вс. пром. $x \in Var[\tau]$ $v_1(x) = v_2(x)$. Тогава

$$\|\tau\|^A[v_1] = \|\tau\|^A[v_2]$$

Док-во:

индукция по дефо. на терм

1) $\tau = c \in Const$ $\|\tau\|_{v_1}^A = \|\tau\|_{v_2}^A = c^A$

•) $\tau \equiv x$

$\rightarrow$ по усл. $v_1(x) = v_2(x)$ защото $x \in Var[\tau]$

$\Rightarrow \|x\|^A[v_1] = v_1(x) = v_2(x) = \|x\|^A[v_2]$

•) $\tau \equiv f(\tau_1, .., \tau_n)$ и за $\tau_1, .., \tau_n$ твърдението е вярно

$\|\tau\|^A[v_1] = f^A(\|\tau_1\|^A[v_1], ..., \|\tau_n\|^A[v_2])$

$\|\tau\|^A[v_2] = f^A(\|\tau_1\|^A[v_2], ..., \|\tau_n\|^A[v_2])$

$Var[\tau_i] \subset Var[\tau]$? $\Rightarrow \|\tau_i\|^A[v_1] = \|\tau_i\|^A[v_2]$

за вс. $i = 1, .., n$

$\rightarrow \|\tau\|^A[v_1] = \|\tau\|^A[v_2]$

Твърдение: Нека A е структура и φ е пред. ~~ф-ла~~ имайна ф-ла на инд. пром. $\in A$

Нека v_1 и v_2 са оценки

такива че $(*)$ $v_1(x) = v_2(x)$ за вс. $x \in Var^{free}[\varphi]$

(множеството от свободните променливи на φ)

Тогава $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

Док-во:

Индукция по деф. на ф-ла

•) $\varphi \equiv p(\tau_1, .., \tau_n)$

$A \models_{v_1} \varphi \longleftrightarrow \langle \|\tau_1\|^A[v_1], .., \|\tau_n\|^A[v_1] \rangle \in p^A$

но $Var^{free}[\varphi] = Var[\tau_1] \cup .. \cup Var[\tau_n]$

$\rightarrow Var[\tau_i] \subseteq Var^{free}[\varphi]$ за вс. $i = 1, .., n$

$\rightarrow$ за вс. $x \in Var[\tau_i]$ $v_1(x) = v_2(x)$

$\rightarrow \|\tau_i\|^A[v_1] = \|\tau_i\|^A[v_2]$ $i = 1, .., n$

$\rightarrow \langle \|\tau_1\|^A[v_1], .., \|\tau_n\|^A[v_1] \rangle \in p^A \longleftrightarrow$

$\langle \|\tau_1\|^A[v_2], .., \|\tau_n\|^A[v_2] \rangle \in p^A \longleftrightarrow$

$A \models_{v_2} \varphi \rightarrow \|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$?

•) $\varphi \equiv \neg\psi$? и за ψ е вярно ?

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi] \Rightarrow A \models_{v_1} \psi \longleftrightarrow A \models_{v_2} \psi$

$\rightarrow A \not\models_{v_1} \psi \longleftrightarrow A \not\models_{v_2} \psi \rightarrow A \models_{v_1} \neg\psi \longleftrightarrow A \models_{v_2} \neg\psi$

•) $\varphi \equiv (\psi_1 \sigma \psi_2)$ и за ψ_1 и ψ_2 т.е. е вярно

: $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi_1] \cup Var^{free}[\psi_2]$

$\rightarrow$ ако $x \in Var^{free}[\psi_i]$ то $x \in Var^{free}[\varphi]$ $i=1,2$

$\rightarrow$ за вс. $x \in Var^{free}[\psi_i]$ е вярно $v_1(x) = v_2(x)$ $i=1,$

$\rightarrow$ $\|\psi_i\|^A[v_1] = \|\psi_i\|^A[v_2]$ $i=1,2$

$\rightarrow$ $H_\sigma(\|\psi_1\|^A[v_1], \|\psi_2\|^A[v_2]) = H_\sigma(\|\psi_1\|^A[v_2], \|\psi_2\|^A[v_2$

$\Rightarrow$ $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

?

•) $\varphi \equiv \forall x \psi$ и за ψ т.е. е вярно

нека v_1 и v_2 са оценки, удовлетворяващи (*)

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi] \setminus \{x\}$

нека a е произволен ел. от $|A|$:

$v_1{}^x_a(y) = v_2{}^x_a(y)$ за вс. $y \in Var^{free}[\psi]$:

$v_1{}^x_a(y) = v_1(y)$ ако $y \in Var^{free}[\varphi]$

и $v_2{}^x_a(y) = v_2(y)$ ако $y \in Var^{free}[\varphi]$

и от (*) $v_1(y) = v_2(y)$ $\rightarrow$ $v_1{}^x_a(y) = v_2{}^x_a(y)$

ако $y \equiv x$ то $v_1{}^x_a(y) = v_2{}^x_a(y) = a$

$\rightarrow$ от инд. пр. $\|\psi\|^A[v_1{}^x_a] = \|\psi\|^A[v_2{}^x_a]$
за произволно a от $|A|$

Нека $A \models_{v_1} \varphi$,
тогава за вс. $a \in |A|$ $\|\psi\|^A[v_1{}^x_a] = и$

$\rightarrow$ $\|\psi\|^A[v_2{}^x_a] = и$ за вс. $a \in |A|$

$\rightarrow$ $\|\varphi\|^A[v_2] = и$

Аналогично ако $\|\varphi\|^A[v_2] = и$. то $\|\varphi\|^A[v_1] = и$

$\rightarrow$ $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

•) $\varphi \equiv \exists x \psi$ аналогични разсъждения показват, че
$\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

<u>Следствие</u>: Ако φ е затворена ф-ла то стойността на φ в A е постоянна за всяка оценка

Деф. Булева интерпретация на предикатна ф-ла
изображение $I : For_{\mathcal{L}} \longrightarrow \{и, л\}$
за което са изпълнени:

-) $I(\neg\varphi) = H_{\neg}(I(\varphi))$

-) $I(\varphi\sigma\psi) = H_{\sigma}(I(\varphi), I(\psi))$

$For_{\mathcal{L}}$ е множеството на предик. ф-ли над $\mathcal{L}$

Твърдение: Ако $\mathcal{A}$ е стр. и v е оценка в $\mathcal{A}$ и
$I^{\mathcal{A},v}$ е изображението:
$I^{\mathcal{A},v}[\varphi] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v]$
Тогава $I^{\mathcal{A},v}$ е булева интерпретация

Деф. ~~Елементарна~~ ф-ла – Една ф-ла е елементарна ако е атомарна или е от вида $\exists x\psi$ или $\forall x\varphi$

Твърдение: Една дума е предик. ф-ла ако може да се получи от елементарни ф-ли с операциите $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Док-во

Строим дърво – в корена предик. ф-ла, по ~~ребрата~~ възлите операциите, по листата елементарните ф-ли.

Деф. Една предик. ф-ла φ е съждително изпълнима ако има съжд. булева интерпретация I такава че $I(\varphi) = и$ (пише се съжд. $I \models^{s} \varphi$)

Деф. Ербранова структура – структура, на която универсум е множеството от затворените термове и

$I(c) = c$ за вс. константа c

$I(f(\tau_1, .., \tau_n)) = f(\tau_1, .., \tau_n)$ за вс. $f \in Funct$ и $\tau_1, .., \tau_n$ – затворени термове

Твърдение: Нека $\mathcal{H}$ е ербранова структура. Тогава за вс. затворен терм τ е в сила $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$

без ~~ДК~~

Деф. Логическо (глобално) следване – Нека Γ е множ. от ф-ли и φ е ф-ла. От Γ логически следва φ ($\Gamma \models \varphi$) ако всеки модел на Γ е модел на φ

Деф. Булево следване: φ, ψ – предик. ~~таб~~ ф-ли булева интерпретация I от $I(\varphi) = и$ да следва $I(\psi) = и$

Твърдение: Нека $\Gamma \cup \{\varphi\}$ е множ. от предик. ф-ли

Тогава ако $\Gamma \models^{б} \varphi$ то $\Gamma \models^{(e)} \varphi$ (логично)

~~Доказ.~~

~~Нека ...~~

Деф. Логично следване $\Gamma \models^{e} \varphi$ ако за вс. стр. A и оценка v от $A \models_v \Gamma$ да следва $A \models_v \varphi$

Док-во:

Нека A е стр. и v е оценка и

$A \models_v \Gamma$

Образуваме изобр. $I^{A,v}$ – то е булева интерпр.

и $I^{A,v}(\psi) = и$ за вс. $\psi \in \Gamma$

~~тогава~~ ~~$I^{A,v} \models^{б}$~~ но по усл. $\Gamma \models^{б} \varphi$

$\rightarrow I^{A,v}(\varphi) = и \rightarrow A \models_v \varphi$

$\Gamma \models^{e} \varphi$

$\rightarrow$ без

Деф. Свободна ербранова структура – структура, която универсум е множеството от вс. термове от езика и

$c^{H} = c$ за вс. инд. константа

$f^{H}(\tau_1, .., \tau_n) = f(\tau_1, .., \tau_n)$ за вс. терм

Лема Нека Δ е множ. от безкванторни ф-ли.

Следните са еквив.:

1) Δ е изпълнимо

2) Δ е изпълнимо в ербранова стр. при оценката id

3) Δ е съжд. изпълнимо

Док-во:

2) $\rightarrow$ 1) – очевидно

1) $\rightarrow$ 3)

Нека Δ е изпълнимо и $A \models_v \Delta$

Дефинираме $I^{A,v}$:

$$I^{A,v}[p(\tau_1, .., \tau_n)] = \begin{cases} и, & A \models_v p(\tau_1, .., \tau_n) \\ л, & A \not\models_v p(\tau_1, .., \tau_n) \end{cases}$$

$I^{A,v} \models^{б} \Delta$

3) → 2) Нека Δ е обхдително изпълнима и
I е булев ~~интерпретация~~ модел за Δ
деф. ербранова структура $\mathcal{H}^I$ така:
$p^{\mathcal{H}^I}$: $\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in p^{\mathcal{H}^I} \longleftrightarrow I(p(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = и$
тогава за вс. безкванторна ф-ла φ е в сила
$I(\varphi) = и \longleftrightarrow \mathcal{H}^I \models_{id} \varphi$
индукция по деф. на ф-ла
·) $\varphi \equiv p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$
$\mathcal{H}^I \models_{id} \varphi \xleftrightarrow{def} \langle \|\tau_1\|^{\mathcal{H}^I}[id], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{H}^I}[id] \rangle \in p^{\mathcal{H}^I}$
но $\|\tau_i\|^{\mathcal{H}^I}[id] = \tau_i$ (доказано отдолу) за вс. i
$\rightarrow \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in p^{\mathcal{H}^I} \xleftrightarrow{def} I(p(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = и$
·) $\varphi \equiv \neg \varphi_1$ и за φ_1 тв. е вярно
$\mathcal{H}^I \models_{id} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{H}^I \not\models_{id} \psi \longleftrightarrow I(\varphi_1) = л$
$\longleftrightarrow I(\varphi) = и$
·) $\varphi \equiv (\varphi_1 \& \varphi_2)$ и за тях тв. е вярно
$\mathcal{H}^I \models_{id} \varphi_1 \& \varphi_2 \longleftrightarrow \mathcal{H}^I \models_{id} \varphi_1$ и $\mathcal{H} \models_{id} \varphi_2 \longleftrightarrow$
$I(\varphi_1) = и$ и $I(\varphi_2) = и \longleftrightarrow I(\varphi_1 \& \varphi_2) = и$
от зададената вярност на ¬ и & следват и другите
(те а изразяват чрез ¬ и &)

<u>Твърдение</u>: Нека $\mathcal{H}$ е свободна ербранова структура.
Тогава за всеки терм τ имаме:
$\|\tau\|^{\mathcal{H}}[id] = \tau$ където $id(x) = x$ за вс. x
Док-во:
индукция по τ
1) $\tau \equiv c \rightarrow \|\tau\|^{\mathcal{H}}[id] = c^{\mathcal{H}} = c$
2) $\tau \equiv x \rightarrow \|\tau\|^{\mathcal{H}}[id] = id(x) = x$
3) $\tau \equiv f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и за тях е вярно

Следствие 1:
Нека Δ е множ. от затворени безкванторни ф-ли.
(искаме в езика да има поне една инд. константа)
Следните са еквивалентни:

(i) Δ има модел $\Longleftrightarrow$ Δ е изпълнимо

(ii) Δ има ербранов модел $\Longleftrightarrow$ Δ е изпълнимо в ербр. структура при оценка id

(iii) Δ е съждително изпълнимо

Следва директно от Т

Следствие 2: Нека Δ е множ. от безкванторни ф-ли, което е затворено относно субституция
(т.е. от $\varphi \in \Delta$ и θ-субст. $\Rightarrow$ $\varphi\theta \in \Delta$)
Следните са еквив:

(i) Δ има модел

(ii) Δ има Ербранов модел

(iii) Δ е съждително изпълнимо

Доказ-во.

(ii) $\to$ (i) - очевидно

(i) $\to$ (iii) от ~~теоремата~~ лемата

(iii) $\to$ (ii)

Нека Δ е съждително изпълнимо
Тогава от ~~теорем~~ лемата същ. Ербранова стр. $\mathcal{H}$
така че $\mathcal{H} \models_{id} \Delta$

нека φ е ф-ла от Δ и v е оценка в $\mathcal{H}$

$\{x_1, .., x_k\} = Var^{free}[\varphi]$

$\theta = \{x_1/v(x_1), \ldots, x_n/v(x_n)\}$

$\mathcal{H} \models_v \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{H} \models_{id} \varphi\theta$ Това следва оттук:

$v(x_i) = \|x_i\theta\|^{\mathcal{H}}[id]$ за вс. $i = 1, .., k$

$\to$ за всеки терм τ за който $Var[\tau] \subseteq \{x_1, .., x_k\}$

$\|\tau\|^{\mathcal{H}}[v] = \|\tau\theta\|^{\mathcal{H}}[id]$

·) Ако $\varphi = p(\tau_1, .., \tau_n)$

то $\mathcal{H} \models_v \varphi \Longleftrightarrow \langle \|\tau_1\|^{\mathcal{H}}[v], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{H}}[v] \rangle \in p^{\mathcal{H}}$

$\Longleftrightarrow \langle \|\tau_1\theta\|^{\mathcal{H}}[id], \ldots, \|\tau_n\theta\|^{\mathcal{H}}[v] \rangle \in p^{\mathcal{H}}$

$\Longleftrightarrow \mathcal{H} \models \varphi\theta$

•) $\varphi \equiv \neg\psi$ и за ψ то е вярно

$H \models_v \varphi \Longleftrightarrow H \not\models_v \psi \Longleftrightarrow H \not\models_{icl} \psi\theta \Longleftrightarrow H \models_{icl} \neg(\psi\theta) \Longleftrightarrow H \models_{icl} \underbrace{(\neg\psi)\theta}_{\varphi\theta}$.

•) $\varphi \equiv \varphi_1 \& \varphi_2$

$H \models_v \varphi \Longleftrightarrow H \models_v \varphi_1$ и $H \models_v \varphi_2 \Longleftrightarrow H \models_{icl} \varphi_1\theta$ и $\varphi_2\theta \Longleftrightarrow$

$H \models_{icl} \varphi_1\theta$ и $H \models_{icl} \varphi_2\theta \Longleftrightarrow H \models_{icl} \varphi_1\theta$ и $\varphi_2\theta$

$\Longleftrightarrow H \models_{icl} (\varphi_1 \& \varphi_2)\theta$

т.е. $H \models_v \varphi \Longleftrightarrow H \models_{icl} \varphi\theta$

но $\varphi\theta \in \Delta \longrightarrow I(\varphi\theta) = И$

$\longrightarrow H \models_{icl} \varphi\theta \longrightarrow H \models_v \varphi$

но v е произв. $\longrightarrow \Delta$ има Ербранов модел

<u>Деф.</u> Частен случай на формула ???

Нека $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ е универсална затворена ф-ла.

Частен случай на φ е всяка ф-ла от вида $\psi\theta$

където $Dom\,\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$ т.е. $\theta = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$

Затворен частен случай – ако τ_i са затворени термове

<u>Деф.</u> Една субституция θ е допустима за φ ако ~~промен.~~ свободните участия на x_i във φ (където $\theta = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$) не са в област на действие на квантор по някоя от променливите на τ_i

<u>Твърдение!</u> Нека τ е терм и θ е субст. v, w са оценки в A така че за вс. $x \in Var[\tau]$ ~~терм~~

$v(x) = \|x\theta\|^A[w]$

Тогава $\|\tau\|^A[v] = \|\tau\theta\|^A[w]$

Док-во.

•) $\tau \equiv c \rightarrow \|c\|^A[v] = \|c\theta\|^A[w] = c^A$

•) $\tau \equiv x \longrightarrow \|x\|^A[v] = v(x) = \|x\theta\|^A[w]$

•) $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ и за $\tau_1, \dots, \tau_n$ то е вярно

$\|f(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^A[v] = f(\|\tau_1\|^A[v], \dots, \|\tau_n\|^A[v]) =$

$= f(\|\tau_1\theta\|^A[w], \dots, \|\tau_n\theta\|^A[w]) = \|f(\tau_1\theta, \dots, \tau_n\theta)\|^A[w]$

ако $x_j \in Var[\tau_1]$ то $x_j \in Var\,\tau$ А, ...

Твърдение: Нека A е стр. и φ е ф-ла. Нека θ е допустима субституция за φ. Нека v, w са оценки в A такива че за вс. $x \in Var^{free}[\varphi]$

$$v(x) = \|x\theta\|^A[w].$$

Тогава $\|\varphi\|^A[v] = \|\varphi\theta\|^A[w]$

Док-во:

индукция по постр. на φ

·) $\varphi \equiv p(\tau_1, .., \tau_n)$ и v, w удовл. усл.

нека $x \in Var[\tau_j]$ $\rightarrow$ $x \in Var^{free}[\varphi]$

$\Longrightarrow$ $v(x) = \|x\theta\|^A[w]$

$\longrightarrow$ за вс. $i=1,..,n$ $\|\tau_i\|^A[v] = \|\tau\theta\|^A[w]$.

Нр $A \models_v \varphi \longleftrightarrow \langle \|\tau_1\|^A[w], .., \|\tau_n\|^A[v] \rangle \in p^A \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \langle \|\tau_1\theta\|^A[w], .., \|\tau_n\theta\|^A[w] \rangle \in p^A \longleftrightarrow A \models_w \varphi\theta$

·) $\varphi \equiv \neg\psi$ и за ψ тв. е вярно то $x \in Var^{free}[\varphi]$

ако $x \in Var^{free}[\psi]$

$\Rightarrow$ $v(x) = \|x\theta\|^A[w]$

$\Rightarrow$ $\|\psi\|^A[v] = \|\psi\theta\|^A[w]$

θ е допустима за ψ защото θ е допустима за φ

$\Rightarrow$ $\|\neg\psi\|^A[v] = \|\neg\psi\theta\|^A[w]$

·) $\varphi \equiv (\psi_1 \sigma \psi_2)$

Ако $x \in Var^{free}[\psi_1]$ ~~или~~ $y \in Var^{free}[\psi_2]$ то

$x, y \in Var^{free}[\varphi]$

и θ е допустима субституция за ψ_1 и ψ_2

$\rightarrow$ от инд. пр. и деф. за оценка $\|\varphi\|^A[v] = \|\varphi\theta\|^A[w]$

·) $\varphi \equiv \forall x\psi$ и нека за ψ тв. е вярно и

θ е допустима субституция за φ

Нека разгл. едно участие на x_i в ψ, което е свободно за ψ

Ако $\forall$ $x_i \neq x$ тогава x_i е свободно и за φ и тогава

ако τ_i е допустима за φ то той е допустим и за ψ

Ако $x_i = x$ то x_i е свързана промл. във φ и не я

заместваме

Нека $x \in Dom\theta$ и $x = x_i$

образ $\theta' = \theta \setminus \{x_i/\tau_i\}$

тогава $[\forall x \psi]\theta = [\forall x \psi]v = \forall x [\psi\theta']$

θ' е допустима за ψ защото $x \notin Dom\,\theta'$

Нека $A \models_v \forall x \psi$

нека a е произв. ел от $|A|$

разгл. v^x_a и w^x_a

$A \models_{v^x_a} \psi$ Твърдим че за ψ, θ', v^x_a и w^x_a е приложимо инд. хип.

$$v^x_a(x) = \|\underbrace{x\theta'}_{= x}\|^A[w^x_a] = a$$

нека $y \in Var^{free}[\psi]$ и $y \neq x$

$$v^x_a(y) = v(y) = \|y\theta\|^A[w] = \|y\theta'\|^A[w] =$$

защото $y \neq x$ $= \|y\theta'\|^A[w^x_a]$

$\Rightarrow v^x_a(y) = \|y\theta'\|^A[w^x_a]$ за вс. $y \in Var^{free}[\psi]$

$\to A \models_{w^x_a} \psi\theta' \to A \models_w \forall x[\psi\theta']$ ✱

Нека $x \notin Dom\,\theta$

Тогава $[\forall x\psi]\theta = \forall x[\psi\theta]$ така че

нека a е произв. ел. от $|A|$

$A \models_{v^x_a} \psi$ θ е допустима за ψ

~~за вс. $x \in Var^{free}[\psi]$ имаме~~ се заменят с термове, в коит.

външни променливи на ψ иначе θ нямаше да е допустима за φ

x не участва, защото $v^x_a(y) = \|y\theta\|^A[w^x_a]$

за вс. $y \in Var^{free}[\psi]$

ако $y = x$ то $a = a$

ако $y \neq x$ то $v^x_a(y) = v(y) = \|y\theta\|^A[w] = \|y\theta\|^A[w^x_a]$

$\to A \models_{v^x_a} \psi \iff A \models_{w^x_a} \psi\theta$

$\to A \models_v \forall x \psi \iff A \models_w \forall x[\psi\theta]$

Приложение:

$\models \forall x \varphi \Rightarrow \varphi[x/\tau]$ където $\theta = \{x/\tau\}$ е допустима за φ

нека $A \models_v \forall x \varphi$ и нека $a = \|\tau\|^A[v]$

тогава $A \models_{v^x_a} \varphi$ и е вярно че $v^x_a(x) = \|\underbrace{x\theta}_{= \tau}\|^A[v]$

***

Теорема: Нека Γ е множ. от затворени универсални ф-ли. Следните са еквив.

(i) Γ има модел

(ii) Γ има Ербранов модел

(iii) $CS_i(\Gamma)$ е съждително изпълнимо

Деф. Нека φ е универсална ф-ла

$CS_i(\varphi)$ – множеството от вс. затворени частни случаи на φ

Док-во на Теоремата:

(ii) $\to$ (i) – очевидно

(i) $\to$ (iii)

Нека Γ има модел

$\to$ същ. стр. A ~~и оценка~~ така се $A \models \Gamma$

нека $\varphi \in \Gamma$

$\to$ $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$

$\to$ $A \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$

$\to$ за произв. оценка v $A \models_v \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$

$\to$ за вс. $a_1, \ldots, a_n \in |A|$

$A \models_{v^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}} \psi$ $\qquad$ τ_i – произв. затворени термове

но ако $\theta = \{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$ където $\|\tau_i\|^A[v] = a_i$

то за вс. $y \in Var^{free}[\psi]$

$v^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}[y] = \|y\theta\|^A[v]$

$\to$ ~~$A \models_{v^{x_1 \ldots}_{a_1 \ldots a_n}}$~~ $A \models_v \psi[x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n]$

това е за произволни a_i от $|A|$ (т.е. за произволни затворени термове от езика)

$\to$ $A \models_v CS_i(\varphi)$

$\to$ $A \models_v CS_i(\Gamma)$

$\to$ $CS_i(\Gamma)$ има модел $\to$ от следствие 1) $CS_i(\Gamma)$ е съждително изпълнимо

(iii) $\to$ (ii)

$CS_i(\Gamma)$ е съждително изпълнимо

Знаем, че всеки елемент от универсума $|\mathcal{H}|$ е затворен терм от езика т.е. $\tau^{\mathcal{H}} = \tau \in |\mathcal{H}|$.

Тогава $\mathcal{H} \models_{id} \forall x \varphi \longleftrightarrow$

за вс. $a \in |\mathcal{H}|$. $\mathcal{H} \models_{id^x_a} \varphi$

но $a = \tau^{\mathcal{H}} = \|\tau\|^{\mathcal{H}}[id]$ за някой затворен терм τ

$\rightarrow id^x_a[x] = \|x[x/\tau]\|^{A}[id]$

и за вс. $y \in Var^{free}[\varphi]$

$id^x_a(y) = id(y) = \|y[x/\tau]\|^{A}[id]$ #

$\rightarrow \mathcal{H} \models_{id^x_a} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{H} \models_{id} \varphi[x/\tau]$

но $\varphi[x/\tau]$ ~~е частен~~ $\in CS_i(\Gamma)$ и $\mathcal{H}$ е модел за $CS_i($

$\rightarrow \mathcal{H} \models_{id} \varphi[x/\tau]$

$\rightarrow \mathcal{H} \models_{id^x_a} \varphi$ и това е вярно за произволно ~~а~~ a

$\rightarrow \mathcal{H} \models_{id} \forall x \varphi$

$\rightarrow$ ~~$\mathcal{H}$~~ Γ е изпълнимо в $\mathcal{H}$, id

но Γ е множ. от затворени ф-ли $\rightarrow \Gamma$ има Ербранов модел

$\rightarrow \mathcal{H}$ е модел за Γ

Според пълната формулировка на тази теорема не съм сигурна, че е необходимо да се ~~доказ~~ пише тя, мисля че кратката стига (но не съм сигурна).

• Деф. Нека φ е ~~ф-ла~~ универсална ф-ла

$S_i(\varphi)$ е множеството от всички частни случаи на φ

$CS_i(\varphi)$ е множ. от вс. затворени частни случаи на φ

Теорема. Нека Γ е множество от затворени универсални ф-ли в език без формално равенство. Следните са еквивалентни

i) Γ има модел

ii) Γ има (свободен) Ербранов модел

iii) $S_i(\Gamma)$ има модел

iv) $CS_i(\Gamma)$ има модел (в езика трябва да има поне 1 конст.)

(v) $S_i(\Gamma)$ е свидетелно изпълнимо

(vi) $CS_i(\Gamma)$ е свидетелно изпълнимо

Док-во:

(ii) → (i) – очевидно

~~(i) → (v) – от предното твърдение ([illegible])~~

~~(i) → (vi) същo~~

(iii) ⟷ (v) от следствие 2 понеже $S_i(\Gamma)$ е затворено относно субституция

(iv) ⟷ (vi) от следствие 1 ~~твърдението за безкванторни ф-ли~~

(iii) → (ii) Нека $S_i(\Gamma)$ има модел

От следствие 2 $S_i(\Gamma)$ има Ербранов модел $\mathcal{H}$

Знаем, че всеки ел. от универсума $|\mathcal{H}|$ е терм от езика

т.е. $\|\tau\|^{\mathcal{H}}[id] = \tau \in |\mathcal{H}|$

~~Нека~~ Тогава $\mathcal{H} \models_{id} \forall x\varphi \longleftrightarrow \mathcal{H} \models_{id^x_a} \varphi$

за вс. $a \in |\mathcal{H}|$

но $\exists a = \|\tau\|^{\mathcal{H}}[id]$ за някой терм τ $\rightarrow id^x_a(x) = \|x[x/\tau]\|^{A}[id]$

$\rightarrow \mathcal{H} \models_{id^x_a} \varphi \longleftrightarrow \mathcal{H} \models_{id} \varphi[x/\tau]$

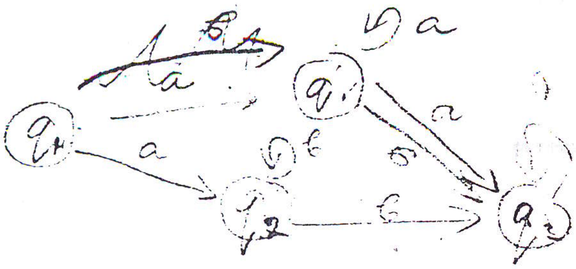
но $\varphi[x/\tau]$ е частен случай на $\forall x\varphi$; обхождаме вс. елементи на $|\mathcal{H}|$ и обхождайки вс. частни случаи на $\forall x\varphi$

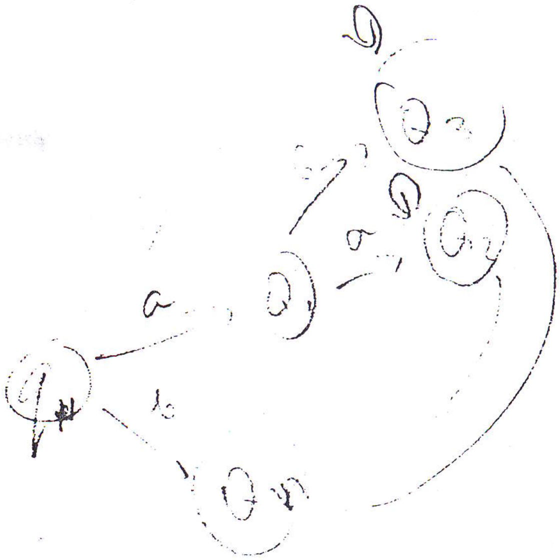
$\mathcal{H} \models_{id} S_i(\Gamma)$

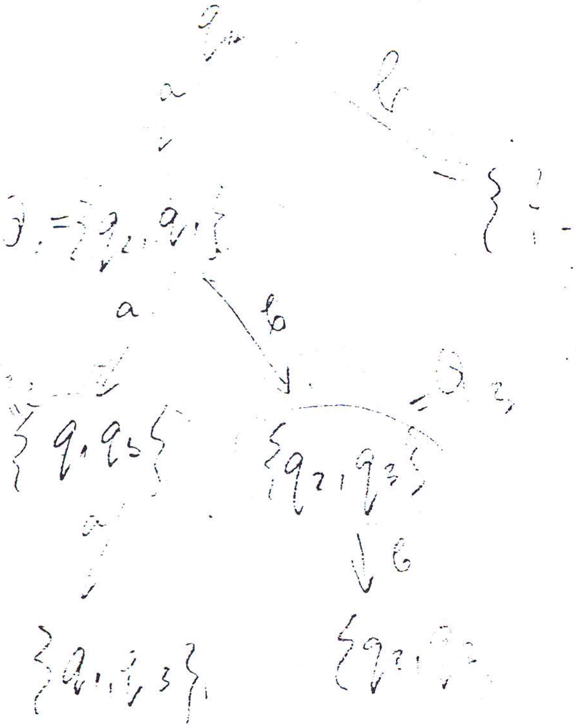
т.е. $\mathcal{H} \models_{id} \Gamma \longleftrightarrow$ ... от затв. ф-ли $\longrightarrow \mathcal{H} \models \Gamma$

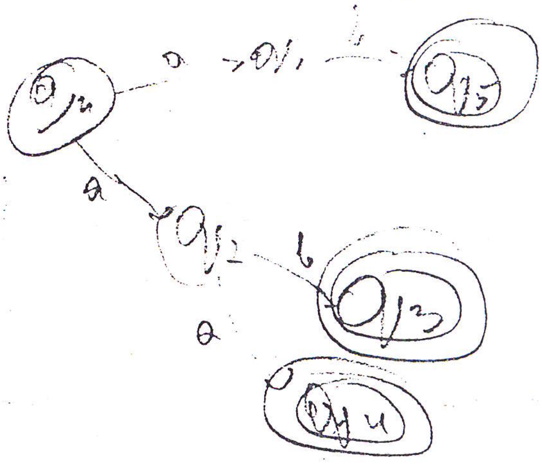
но Γ е множ.

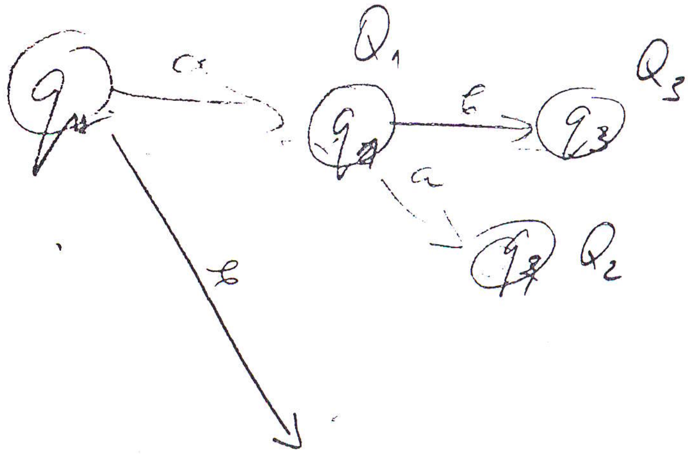
$\Rightarrow$ Γ има Ербранов модел

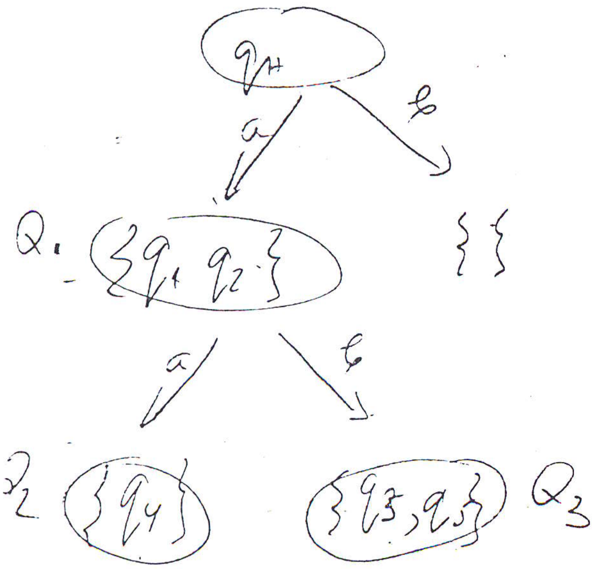

a
a
b
a
b

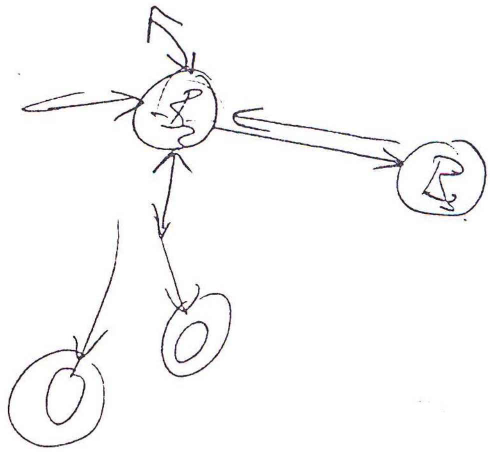

a
a
b


a
b
a
b
a
b


a
a
b


Q_1
Q_3
Q_2
a
b
a
b


q_H
a
b
Q_1
$\{q_1, q_2\}$
$\{\}$
a
b
$\{q_4\}$
$\{q_3, q_5\}$
Q_3



XIII Семантична характеризация на логическите формули и програми

Деф: **Атомарна формула:**
дума от вида $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ където p е n-арен предикатен символ, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове

Деф Формула над езика $\mathcal{L}$
1. Атомарните формули са формули.
2. Ако φ и ψ са формули, то и $\neg\varphi$, $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ също са предикатни формули.
3. Ако φ е предикатна формула и X е индивидна променлива, то $\forall X \varphi$ и $\exists X \varphi$ също са формули.

Деф Нека $\mathcal{L}$ е език. Структура за $\mathcal{L}$ наричаме $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$, където $A \neq \emptyset$ е универсум на структурата, а I е интерпретация на нелогическите символи от $\mathcal{L}$ в A

$I(c) \in A$, ако $c \in Const$, $I(c) = c^{\mathcal{A}}$

$I(f) : A^n \to A$, $f \in Func$, $\rho(f) = n$, $I(f) = f^{\mathcal{A}}$

$I(p) \subseteq \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ пъти}}$, ако $p \in Pred$, $\rho(p) = n$) $I(p) = p^{\mathcal{A}}$

Деф Оценка на индивидните променливи в $\mathcal{A}$ е функцията $v : Var \to A$

Деф: Стойност на терм τ в структура $\mathcal{A}$ при оценка v.
1) $\|c\|^{\mathcal{A}}[v] = c^{\mathcal{A}}$
2) $\|X\|^{\mathcal{A}}[v] = v(X)$
3) $\|f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v] = f^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v])$

Деф: Стойност на формула в структурата $\mathcal{A}$ при оценка v
1. $\varphi \leftrightharpoons p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - атом. формула, $p \in Pred$ $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}_v = и \Leftrightarrow p^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}_v, \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}_v) = и$
$\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

2) $\|\neg\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = H_{\neg}(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v])$,

$H_{\neg}: \{и, л\} \to \{и, л\}$ - булева ф-я, която отговаря на отрицанието

$\mathcal{A} \models_v \neg\varphi \iff \mathcal{A} \not\models_v \varphi$

3) $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$\|\varphi_1 \sigma \varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v] = H_{\sigma}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v])$

- $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \& \varphi_2 \iff \mathcal{A} \models_v \varphi_1$ & $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$
- $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff \mathcal{A} \models_v \varphi_1$ или $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$
- $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \iff \mathcal{A} \not\models_v \varphi_1$ или $\mathcal{A} \models_v \varphi_2$
- $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \iff \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \& \varphi_2$ или $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_1 \& \neg\varphi_2$

4) $\psi = \exists x \varphi$

$\|\exists x \varphi\|^{\mathcal{A}}[v] \iff$ има елемент $a \in A$, такъв че $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = и$

$\mathcal{A} \models_v \exists x \varphi \iff$ има елемент $a \in A$: $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$

5) $\psi = \forall x \varphi$

$\|\forall x \varphi\|^{\mathcal{A}}[v] \iff$ за произволен елемент $a \in A$ $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = и$

$\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi \iff$ за произволен елемент $a \in A$ $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$

6) $\varphi = (\tau_1 \equiv \tau_2)$ $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = и \iff \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\tau_2\|^{\mathcal{A}}[v]$

<u>Факт</u> Всяка формула има еднозначно определена стойност във всяка структура и при всяка оценка.

<u>Деф</u> Оценка v_a^x: $v_a^x(y) = \begin{cases} v(y), & ако\ x \neq y \\ a, & ако\ x = y \end{cases}$

v_a^x модифицира v в x с a.

<u>Деф Изпълнимост на формула</u>

Нека $\mathcal{L}$ е език, φ е формула от $\mathcal{L}$. φ е изпълнима, ако съществува структура $\mathcal{A}$ за $\mathcal{L}$ и оценка v, такива, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$

<u>Деф</u>. Нека Γ е множество от формули от $\mathcal{L}$. Γ е изпълнимо, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка v, такива, че $\mathcal{A} \models_v \varphi$ за всяка формула φ от Γ. ($\mathcal{A}$ и v са едни и същи за $\forall$ ф-ла)

Деф: Структурата A е модел за φ (φ е тъждествено вярна в A) ако при всяка оценка v в A $A \models_v \varphi$

Деф: Нека Γ е множество от формули. Γ има модел, ако съществува структура A, такава че всяка формула от Γ е тъждествено вярна в A.

Деф: Свободно участие на променлива x във формула е ако не попада в област на действие на квантор по x.
Свързано участие - ако попада в област на действие на квантор по променливата.
Свободна променлива - ако има поне едно свободно участие
Свързана променлива - ако всичките ѝ участия са свързани.

Деф: Затворена формула - няма свободни променливи

Твърдение: Нека τ е терм и v_1 и v_2 са оценки на инд. променливи в структура A, такива, че за $\forall x \in Var[\tau]$, $v_1(x) = v_2(x)$
Тогава $\|\tau\|^A[v_1] = \|\tau\|^A[v_2]$.

Д-во:

Индукция по дефиницията на терм.

1) $\tau = c \in Const$ $\quad \|\tau\|^A_{v_1} = \|\tau\|^A_{v_2} = c^A$

2) $\tau = x$, по усл. $v_1(x) = v_2(x)$ защото $x \in Var(\tau) \Rightarrow$
$\|x\|^A[v_1] = v_1(x) = v_2(x) = \|x\|^A[v_2] = \|\tau\|^A[v_2]$

3) $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ и за $\tau_1, \dots, \tau_n$ твърдението е вярно
$\|\tau\|^A[v_1] = f^A(\|\tau_1\|^A[v_1], \dots, \|\tau_n\|^A[v_1])$
$\|\tau\|^A[v_2] = f^A(\|\tau_1\|^A[v_2], \dots, \|\tau_n\|^A[v_2])$
и за $i = 1, \dots, n$ $\quad \|\tau_i\|^A[v_1] = \|\tau_i\|^A[v_2] \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\tau\|^A[v_1] = \|\tau\|^A[v_2]$

Тв. Нека A е структура, φ е предикатна формула. Нека v_1 и v_2 са оценки на индивидуалните променливи в A, такива, че (*) $v_1(x) = v_2(x)$ за $\forall x \in Var^{free}[\varphi]$ (множеството от свободните променливи на φ). Тогава $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

Д-во!

Индукция по дефиницията на формула.

1) $\varphi \equiv p(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $A \models_{v_1} \varphi \Leftrightarrow \langle \|\tau_1\|^A[v_1], \dots, \|\tau_n\|^A[v_1] \rangle \in p^A$, но $Var^f[\varphi] = Var[\tau_1] \cup \dots \cup Var[\tau_n] \Rightarrow Var[\tau_i] \subseteq Var^{free}[\varphi]$ за $\forall i$

$\Rightarrow \forall x \in Var[\tau_i]: v_1(x) = v_2(x) \Rightarrow \|\tau_i\|^A[v_1] = \|\tau_i\|^A[v_2]$, $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \langle \|\tau_1\|^A[v_1], \dots, \|\tau_n\|^A[v_1] \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle \|\tau_1\|^A[v_2], \dots, \|\tau_n\|^A[v_2] \rangle \in p^A \Leftrightarrow$

$A \models_{v_2} \varphi \Rightarrow \|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi^A\|[v_2]$

2) $\varphi \equiv \neg\psi$ и за ψ е вярно: $\|\psi\|^A[v_1] = \|\psi\|^A[v_2]$

$Var^{free}(\varphi) = Var^{free}(\psi] \rightarrow A \models_{v_1} \psi \Leftrightarrow A \models_{v_2} \psi \rightarrow A \not\models_{v_1} \psi \Leftrightarrow A \not\models_{v_2} \psi \Rightarrow$

$A \models_{v_1} \neg\psi \Leftrightarrow A \models_{v_2} \neg\psi \rightarrow A \models_{v_1} \varphi \Leftrightarrow A \models_{v_2} \varphi$

3) $\varphi \equiv (\psi_1 \sigma \psi_2)$ и за ψ_1, ψ_2 твърдението е вярно.

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi_1] \cup Var^f[\psi_2] \rightarrow x \in Var^{free}[\psi_i]$ ако $x \in Var^{free}(\varphi)$ за $i = 1, 2$. $\rightarrow \forall x \in Var^{free}[\psi_i]$ е вярно $v_1(x) = v_2(x)$ $i = 1, 2$

$\|\psi_i\|^A[v_1] = \|\psi_i\|^A[v_2]$ $i = 1, 2$

$\rightarrow H_\sigma(\|\psi_1\|^A[v_1], \|\psi_2\|^A[v_1]) = H_\sigma(\|\psi_1\|^A[v_2], \|\psi_2\|^A[v_2])$

следователно $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

4) $\varphi = \forall x \psi$ и за ψ твърдението е вярно

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi] \setminus \{x\}$

Нека a е произволен елемент от $|A|$.

$v_{1a}^{\ x}(y) = v_{2a}^{\ x}(y)$ за всяко $y \in Var^{free}[\psi]$ защото:

$v_{1a}^{\ x}(y) = v_1(y)$ ако $y \in Var^{free}[\varphi]$ и аналогично $v_{2a}^{\ x}(y) = v_2(y)$, $y \in Var^f$

от (*) $v_1(y) = v_2(y) \rightarrow v_{1a}^{\ x}(y) = v_{2a}^{\ x}(y)$, ако $y = x$, то

$v_{1a}^{\ x}(y) = v_{2a}^{\ x}(y) = a$, $\rightarrow$ от индукционното предположение

$\|\psi\|^A[v_{1a}^{\ x}] = \|\psi\|^A[v_{2a}^{\ x}]$ за произволно a от A

Нека $A \models_{v_1} \varphi$. тогава за всяко $a \in |A|$ $\|\psi\|^A[v_{1a}^{\ x}] = u \rightarrow$

$\|\psi\|^A[v_{2a}^{\ x}] = u$ за всяко $a \in |A| \rightarrow \|\varphi\|^A[v_2] = u$.

Аналогично ако $\|\varphi\|^A[v_2] = u$, то $\|\varphi\|^A[v_1] = u \Rightarrow \|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

5) $\varphi \equiv \exists x \psi$. аналогични на 4) разсъждения показват че $\|\varphi\|^A[v_1] = \|\varphi\|^A[v_2]$

Следствие: Ако φ е затворена формула, то стойността на φ в A е постоянна за $\forall$ оценка

Деф. Булева интерпретация на предикатна формула
Изображение $I : For_{\Sigma} \to \{и, л\}$, за което са изпълнени
1) $I(\neg\varphi) = H_{\neg}(I(\varphi))$
2) $I(\varphi \sigma \psi) = H_{\sigma}(I(\varphi), I(\psi))$
For_{Σ} е множеството от предикатни формули над Σ

Тв: Ако A е структура и v е оценка в A и $I^{A,v}$ е изображението $I^{A,v}[\varphi] = \|\varphi\|^{A}[v]$. Тогава $I^{A,v}$ е булева интерпретация

Деф: Елементарна формула - една формула е елементарна ако е атомарна или е от вида $\exists x \varphi$ или $\forall x \varphi$.

Тв: Една дума е предикатна формула, ако може да се получи от елементарни формули с операциите $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

Д-во:
Строим дърво - в корена предикатна формула, по възлите операциите, по листата елементарните функции.

Деф: Една предикатна формула е съждително изпълнима, ако съществува булева интерпретация I, така че $I(\varphi) = и$, пише се още $I \models^{б} \varphi$

Деф: Ербранова структура - структура на която универсума е множеството от затворените термове и
• $I(c) = c$ за всяка константа c
• $I(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$
за всяка функция $f \in Func$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ - затворени термове.

Тв Нека $\mathcal{H}$ е ербранова структура. Тогава за всеки затворен терм τ е в сила: $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.

Деф: Логическо (глобално) следване: Нека Γ е множество и φ е формула. От Γ логически следва φ ($\Gamma \models \varphi$), ако всеки модел на Γ е модел на φ.

Деф Булево следване...

булева интерпретация I от $I(\varphi) = и$ да следва $I(\psi) = и$

Деф: Локално следване: $\Gamma \models^{\ell} \varphi$, ако за вс. стр. A и оценка v от $A \models_v \Gamma$ да следва, че $A \models_v \varphi$.

Деф Свободна Ербранова структура: структура, чийто универсум е множеството от всички термове от езика и
- $c^{\mathcal{H}} = c$ за всяка инд. константа
- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ за всеки терм.

Деф: Частен случай на формула:
Нека $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ е универсална затворена формула. Частен случай на φ е всяка формула от вида ~~φ~~ $\psi\theta$, където $Dom\,\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$, т.е. $\theta = \{{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}\}$.
Казваме, че $\psi\theta$ е затворен частен случай ако τ_i са затворени терми

Деф Една субституция θ е допустима за φ, ако свободните участия на x_i в φ (където $\theta = \{{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}\}$) не са в област на действие на квантор по някоя от променливите на τ_i.

Деф: $CSI(\varphi)$ - множеството от вс. затворени частни случаи на φ.

Лема 1: Нека H е свободна Ербранова структура. Тогава за всеки терм τ имаме $\|\tau\|^H = \tau$.

Лема 2: Ако τ е терм, θ - субституция, v, w - оценки в A така, че за всеки ~~терм~~ $x \in Var[\tau]$ $v(x) = \|x\theta\|^A[w]$. Тогава $\|\tau\|^A[v] = \|\tau\theta\|^A[w]$

Лема 3: Ако φ е формула, A - структура, θ - допустима субституция за φ. Нека v и w са оценки в A, такива че за всяко $x \in Var^{free}[\varphi]$ $v(x) = \|x\theta\|^A[w]$. Тогава $\|\varphi\|^A[v] = \|\varphi\theta\|^A[w]$

Th: Нека φ е безкванторна формула в $\mathcal{L}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

а) φ има модел

б) $CS_i(\varphi)$ е изпълнимо

в) φ има Ербранов модел.

Д-во:

а) $\Rightarrow$ б): Нека $A \models \varphi$. Тогава за всеки частен случай $A \models \varphi\theta$, следователно $A \models CS_i(\varphi)$

б) $\Rightarrow$ в): Нека $A \models CS_i(\varphi)$. Тогава разглеждаме $M = \{\alpha$ - затворена атомарна формула, $A \models \alpha\}$. Нека H_M^A е ербранова структура породена от M, т.е за всяка затворена формула α: $H_M \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in M$.

Тогава от горните леми $H_M \models \varphi\theta$ - затворен частен случай, защото за всяка затворена подформула α на $\varphi\theta$: $\|\alpha\|^{H_M^A} = \|\alpha\|^A$ и $A \models \varphi\theta$, то $H_M \models \varphi\theta$. Следователно $H_M \models CS_i(\varphi)$

в) $\Rightarrow$ а) - очевидно

Следствие 1: Ако Γ е множество от безкванторни формули, то следните твърдения са еквивалентни:

а) Γ има модел;

б) $CS_i(\Gamma)$ е изпълнимо;

в) Γ има ербранов модел.

Следствие 2: Ако Γ е множество от универсални затворени формули, то следните твърдения са еквивалентни:

а) Γ има модел;

б) $CS_i(\Gamma)$ е изпълнимо;

в) Γ има ербранов модел.