Задача 4

Нека L да не е празен (ако е празен $\Rightarrow L_{p/s}$ е празен $\Rightarrow$ OK).

а) Нека вземем детерминиран автомат $M = (S, s_0, \delta, F)$, които няма недостижими състояния, както и такива които не водят до финално, разпознаващ L.

Ще докажем че като направим всички състояния на M финални ще получим автомат $M_p = (S, s_0, \delta, S)$ за езика $L_p = \{x \in \Sigma^* | (\exists y \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$

1. $\forall x \in L_p \Rightarrow \delta(s_0, x) \in S$
   Нека $x \in L_p \Rightarrow \exists y \in \Sigma^*\ xy \in L \Rightarrow \delta(s_0, xy) \in F \Rightarrow \delta(\delta(s_0, x), y) \in F \Rightarrow \delta(s_0, x) \in S \Rightarrow x$ се разпознава от M_p

2. $\delta(s_0, x) \in S \Rightarrow \in L_p$
   Нека допуснем че $x \notin L_p \Rightarrow \nexists$ път от позиция $\delta(s_0, x)$ до финално състояние, което е противоречие с избора на автомата.

$\Rightarrow L_p = \{x \in \Sigma^* | (\exists y \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$ е регулярен.

б) Нека вземем детерминиран автомат $M = (S, s_0, \delta, F)$, които няма недостижими състояния, както и такива които не водят до финално, разпознаващ L.

Ще докажем че като направим ε преходи от $s \notin S$ до всяко състояние на M ще получим автомат $M_s = (S \cup \{s\}, s, \delta_s, F)$ за езика $L_s = \{y \in \Sigma^* | (\exists x \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$

1. $\forall y \in L_s \Rightarrow \delta_s(s, y) \in F$
   Нека $y \in L_s \Rightarrow \exists x \in \Sigma^*\ xy \in L \Rightarrow \delta(s_0, xy) \in F \Rightarrow \delta(delta(s_0, x), y) \in F$
   $\Rightarrow delta(s_0, x) \in S \Rightarrow$
   $\delta_s(s, y) = \delta_s(\delta(s_0, x), y) = \delta(\delta(s_0, x), y) = \delta(s_0, xy) \in F \Rightarrow$
   $\delta_s(s, y) \in F$

2. $\delta_s(s, y) \in F \Rightarrow y \in L_s$
   Нека допуснем че $y \notin L_s \Rightarrow \nexists$ път от s_0 до някакво състояние $\in S$, което е противоречие с избора на автомата.

$\Rightarrow L_s = \{y \in \Sigma^* | (\exists x \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$ е регулярен.