14. Операционна семантика на логическите програми.

def:

Под субституция ще разбираме такава функция σ с дефиниционна област множеството Ξ на всички променливи и със стойности в множеството на термовете, че равенството $\sigma(X)=X$ да е нарушено най-много за краен брой променливи X. Ако $X_1,\dots,X_m$ $(m>0)$ са различни помежду си променливи, а $U_1,\dots,U_m$ са термове, то ще означаваме $[X_1/U_1,\dots,X_m/U_m]$ субституцията σ, определена по следния начин: $\sigma(X_i)=U_i$ при $i=\overline{1,m}$ и $\sigma(X)=X$ за всяка променлива X, различна от $X_1,\dots,X_m$ (тази субституция ще наричаме заместване на $X_1,\dots,X_m$ съответно с $U_1,\dots,U_m$). Субституцията, която изобразява всяка променлива в самата нея, ще наричаме тъждествена субституция и ще я означаваме с i (тя съвпада със субституцията $[X_0/X_0]$ при произволно избрана променлива X_0).

def:

Дефинираме за всеки терм T един терм $T\sigma$, който ще наричаме резултат от прилагането на σ към T:

1) $X\sigma=\sigma(X)$ за всяка променлива X

2) $c\sigma=c$ за всяка константа c

3) $f(T_1,T_2,\dots,T_n)\sigma=f(T_1\sigma,T_2\sigma,\dots,T_n\sigma)$ всеки път, когато $n>0$, $f\in\Phi_n$ и $T_1,T_2,\dots,T_n$ са термове.

def:

Дефинираме за произволна атомарна формула A една атомарна формула $A\sigma$, която ще наричаме резултат от прилагането на σ към A:

1) $p\in\Pi_0$, то $p\sigma=p$

2) $n>0$, $p\in\Pi_n$ и $T_1,T_2,\dots,T_n$ са термове, то $p(T_1,T_2,\dots,T_n)\sigma=$ $=p(T_1\sigma,T_2\sigma,\dots,T_n\sigma)$.

Твърдение:
Ако E е терм или атомарна формула и две субституции съвпадат върху множеството на променливите на E, то резултатите от прилагането на тези субституции към E също съвпадат.

Твърдение:
Ако E е терм или атомарна формула, то е в сила равенството $E\iota = E$.

Следствие:
Ако E е затворен терм или затворена атомарна формула, то за всяка субституция σ е в сила равенството $E\sigma = E$.

Твърдение:
Ако E е терм или атомарна формула, то за всяка субституция σ е изпълнено равенството

$$VAR(E\sigma) = \bigcup_{X \in VAR(E)} VAR(X\sigma).$$

Доказателство: (за случая на термове)
Ако $E \in \Phi_0$, то равенството е вярно, защото двете му страни са празни.
Ако E е дадена променлива X_0, то $VAR(E) = \{X_0\}$, той се дясната страна на равенството се равнява на $VAR(X_0\sigma)$, което е и лявата страна.
Нека E е терм от вида $f(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, където $n > 0$, $f \in \Phi_n$ и $E_1, E_2, \ldots, E_n$ са такива термове, че са верни равенствата –

$$VAR(E_i\sigma) = \bigcup_{X \in VAR(E_i)} VAR(X\sigma) \quad , i = \overline{1,n}.$$

Тогава имаме

$$VAR(E\sigma) = VAR(f(E_1\sigma, E_2\sigma, \ldots, E_n\sigma)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(E_i\sigma) = \bigcup_{i=1}^{n}\Big(\bigcup_{X \in VAR(E_i)} VAR(X\sigma)\Big) =$$

$$= \bigcup_{X \in VAR(E)} VAR(X\sigma),$$ защото множеството на променливите на E е обединение на множествата на променливите на $E_1, E_2, \ldots, E_n$. □

14. Операционна семантика на логическите програми.

Следствие:

Ако E е терм или атомарна формула, а σ е субституция, то резултатът $E\sigma$ е затворен точно тогава, когато термът $X\sigma$ е затворен за всяка променлива X на E.

Умножение на субституции

def:

Дефинираме си субституцията σ, която наричаме произведение на субституциите σ_1 и σ_2 и която ще означаваме със $\sigma_1\sigma_2$, като едно изображение на множеството на променливите в множеството на термовете, като положим

$$\sigma(X) = (X\sigma_1)\sigma_2.$$

За всяка променлива X е в сила равенството $X(\sigma_1\sigma_2) = (X\sigma_1)\sigma_2$.

Твърдение:

Нека E е терм или атомарна формула. Тогава за всеки две субституции σ_1 и σ_2 е в сила равенството $E(\sigma_1\sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$.

Доказателство:

Ако E е константа, равенството е вярно, защото и двете му страни са равни на E.

Ако E е променлива, то равенството следва от равенството $X(\sigma_1\sigma_2) = (X\sigma_1)\sigma_2$.

Нека $E = f(E_1, E_2, \dots, E_n)$, където $n>0$, $f \in \Phi_n$ и $E_1, E_2, \dots, E_n$ са термове, при които равенството е в сила, т.е. $E_i(\sigma_1\sigma_2) = (E_i\sigma_1)\sigma_2$, $i = \overline{1,n}$. Тогава

$$E(\sigma_1\sigma_2) = f(E_1, E_2, \dots, E_n)(\sigma_1\sigma_2) = f(E_1(\sigma_1\sigma_2), E_2(\sigma_1\sigma_2), \dots, E_n(\sigma_1\sigma_2)) =$$
$$= f((E_1\sigma_1)\sigma_2, (E_2\sigma_1)\sigma_2, \dots, (E_n\sigma_1)\sigma_2) = f(E_1\sigma_1, E_2\sigma_1, \dots, E_n\sigma_1)\sigma_2 =$$
$$= (f(E_1, E_2, \dots, E_n)\sigma_1)\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2.$$

Аналогично и за атомарни формули. □

Следствие:
За всеки три субституции σ_0, σ_1 и σ_2 е в сила равенството $\sigma_0(\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_0\sigma_1)\sigma_2$.

Доказателство:
За всяка променлива X имаме
$$X(\sigma_0(\sigma_1\sigma_2)) = (X\sigma_0)(\sigma_1\sigma_2) = ((X\sigma_0)\sigma_1)\sigma_2 = (X(\sigma_0\sigma_1)\sigma_2) = X((\sigma_0\sigma_1)\sigma_2). \square$$

def:
Дефинираме произведение на k субституции $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, която ще означаваме с $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k$, като:
$$\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{k-1}\sigma_k = (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{k-1})\sigma_k.$$

За всеки две естествени числа k и l и за $k+l$-членната редица от субституции $\sigma_1\dots\sigma_k\sigma_{k+1}\dots\sigma_l$ е в сила равенството
$$\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k\sigma_{k+1}\dots\sigma_l = (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k)(\sigma_{k+1}\dots\sigma_l).$$

Ако E е терм или атомарна формула, приемаме също, че
$$E\sigma_1\dots\sigma_k\sigma_{k+1} = (E\sigma_1\dots\sigma_k)\sigma_{k+1}.$$
Чрез индукция по l се доказва, че
$$E\sigma_1\dots\sigma_k\sigma_{k+1}\dots\sigma_{k+l} = (E\sigma_1\dots\sigma_k)(\sigma_{k+1}\dots\sigma_l).$$

def:
Ще дефинираме преобразование σ_S, което преобразува произволната оценка v в структура S на променливите в друга оценка $v' = \sigma_S(v)$, където оценката v' се дефинира с условието $v'(X) = (X\sigma)^{S,v}$, за коя да е променлива X. Преобразованието σ_S наричаме оператор за присвояване в S, съответен на σ.

Теорема:
Нека са дадени една субституция σ, една структура S и една оценка v в S. Нека $\sigma_S(v) = v'$ и нека E е терм или атомар

14. Операционна семантика на логическите програми.

на формула. Тогава е в сила равенството $(E\sigma)^{S,v} = E^{S,v'}$.
(Теорема за стойността на резултата от прилагане на субституция към терм или атомарна формула.)

Доказателство:
Ще използваме индукция по построението на терма.
Ако E е някоя променлива X, то равенството, което имаме да докажем, добива вида $(X\sigma)^{S,v} = v'(X)$ и е вярно заради равенството $\sigma_S(v) = v'$ и дефиницията на преобразованието σ_S.
Ако E е константа, то равенството е вярно, защото и двете му страни са равни на интерпретацията тази константа елемент на носителя на S.
Нека $E = f(E_1, E_2, \dots, E_n)$, където $n>0$, $f \in \Phi_n$, $E_1, E_2, \dots, E_n$ са термове и са изпълнени равенствата $(E_i\sigma)^{S,v} = E_i^{S,v'}$, $i=\overline{1,n}$. Тогава, означавайки с f^S функцията, чрез която се интерпретира f в S, получаваме

$$(E\sigma)^{S,v} = f(E_1\sigma, E_2\sigma, \dots, E_n\sigma)^{S,v} = f^S((E_1\sigma)^{S,v}, (E_2\sigma)^{S,v}, \dots, (E_n\sigma)^{S,v}) =$$
$$= f^S(E_1^{S,v'}, E_2^{S,v'}, \dots, E_n^{S,v'}) = E^{S,v'}.$$

Аналогично за атомарни формули. □

def:
Дефинираме резултатът от прилагането $F\sigma$ на една субституция σ към една неатомарна безкванторна формула F (като този резултат е отново безкванторна формула):
1) ако F е празната конюнкция или празната дизюнкция, полагаме $F\sigma = F$.
2) при всеки избор на положително цяло число n и n на безкванторни формули $F_1, F_2, \dots, F_n$ полагаме

$$\mathrm{and}(F_1, F_2, \dots, F_n)\sigma = \mathrm{and}(F_1\sigma, F_2\sigma, \dots, F_n\sigma),$$
$$\mathrm{or}(F_1, F_2, \dots, F_n)\sigma = \mathrm{or}(F_1\sigma, F_2\sigma, \dots, F_n\sigma).$$

3) за всяка безкванторна формула полагаме $\mathrm{not}(F)\sigma = \mathrm{not}(F\sigma)$.

В сила са всички твърдения, които доказахме за прилагането на субституция към терм и към атомарна формула.

def:
Формулите $F\sigma$, където σ е произволна субституция, а F е формула, наричаме частни случаи.

Твърдение:
Ако една безкванторна формула е тъждествено вярна в дадена структура, то всички частни случаи на формулата също са тъждествено верни в тази структура, а ако някой частен случай на една безкванторна формула е изпълним в дадена структура, то и самата формула е изпълнима в тази структура.

Доказателство:
Нека F е една безкванторна формула, σ е една субституция и S е една структура. Ако F е тъждествено вярна в S, то за произволна оценка v в S при $v' = \sigma_S(v)$ ще имаме $(F\sigma)^{S,v} = F^{S,v'} = 1$. Ако пък $F\sigma$ е изпълнима в S, можем да вземем оценка v в S, за която $(F\sigma)^{S,v} = 1$, и, дефинирайки оценката v' както по-горе, получаваме, че $F^{S,v'} = (F\sigma)^{S,v} = 1$. $\square$

Следствие:
Ако една безкванторна формула е тъждествено вярна, то всички частни случаи на формулата също са тъждествено верни, а ако някой частен случай на една безкванторна формула е изпълним, то и самата формула е изпълнима.

def:
Нека A е терм или атомарна формула. Вариант на A ще наричаме такъв частен случай A' на A, че и A да бъде частен случай на A'.

Унификатори и унифицируемост

def:
Две атомарни формули се наричат унифицируеми, ако съществува субституция σ, която ги преобразува в една и

14. Операционна семантика на логическите програми.

def:
Ще наричаме две атомарни формули почти унифицируеми, ако съществува атомарна формула, която е частен случай и на двете.

def:
Унификатор на две атомарни формули се нарича такава субституция, която ги преобразува в една и съща формула.

Твърдение:
Нека A и B са такива атомарни формули, че $VAR(A) \cap VAR(B) = \emptyset$. Тогава изискването A и B да са унифицируеми е равносилно на изискването те да са почти унифицируеми.
Доказателство:
$\Rightarrow$)
Очевидно.
$\Leftarrow$)
Нека A и B са почти унифицируеми. Има субституции σ_1 и σ_2, такива че $A\sigma_1 = B\sigma_2$.
Дефинираме и субституцията σ, така:

$$\sigma(X) = \begin{cases} \sigma_1(X), & \text{ако } X \in VAR(A) \\ \sigma_2(X), & \text{ако } X \in VAR(B) \end{cases}$$

Тъй като $\sigma_1(X)$ и $\sigma_2(X)$ са дефинирани при краен брой променливи X: $\sigma_1(X) = X$ или $\sigma_2(X) = X$ са нарушени при краен брой променливи $\Rightarrow$ $\sigma(X) = X$ е нарушено при краен брой променливи.
$A\sigma = A\sigma_1$ и $B\sigma = B\sigma_2$, но $A\sigma_1 = B\sigma_2 \Rightarrow A\sigma = B\sigma$. $\square$

Твърдение:
Нека A и B са произволни атомарни формули, B' е вариант на B, такъв че $VAR(B') \cap VAR(A) = \emptyset$. Тогава условието A и B да са почти унифицируеми е равносилно на условието A и B' да са унифицируеми.

Доказателство:

$\Rightarrow$)

Нека A и B са почти унифицируеми.
Съществува атомарна формула C на частен случай на A и B, тогава C е частен случай на A и B'.
Следва A и B' също са почти унифицируеми, следва A и B са унифицируеми.

$\Leftarrow$)

Нека A и B' са унифицируеми.
Има атомарна формула C - частен случай на A и B'.
C е частен случай на A и B, следва A и B са почти унифицируеми. □

def:
Две атомарни формули T и U, които не са променливи, се наричат еднотипни, ако имат един и същ функтор и един и същ брой аргументи.

Нека са ни дадени две атомарни формули A и B. Унифицируеми ли са?
Ако имат различни предикатни символи или са с различен брой аргументи.
Ако $A = p(T_1, \dots, T_n)$, $B = p(U_1, \dots, U_n)$
Следва A и B са унифицируеми т.е. съществува субституция σ, такава че $A\sigma = B\sigma$ или $A\sigma = p(T_1\sigma, \dots, T_n\sigma) = p(U_1\sigma, \dots, U_n\sigma) = B\sigma$.
Тоест $T_1\sigma = U_1\sigma, \dots, T_n\sigma = U_n\sigma$.

Нека е дадена системата
(1) $T_i = U_i$ $i = \overline{1,n}$, където T_i, U_i, $i = \overline{1,n}$ са термове.

def:
Решение на тази система е субституция σ, за която $T_i\sigma = U_i\sigma$ за всяко $i = \overline{1,n}$.

def:
Субституцията σ е унификатор на A и B точно когато е решение на системата (1).

14. Операционна семантика на логическите програми.

def:
Казваме, че системата (1) е в решен вид, ако $T_1, \ldots, T_n$ са различни променливи, които не са променливи на нито един от термовете $U_1, \ldots, U_n$.

Теорема:
Нека (1) е в решен вид. Да положим $\sigma = [T_1/U_1, \ldots, T_n/U_n]$. Тогава σ е решение на системата, а произволно решение на системата има вида $\sigma\delta$, където δ е произволна субституция.

def:
$\sigma\delta$ е частен случай на σ, а σ наричаме най-общо решение.

Твърдение:
Ако никой от термовете T и U не е променлива и тези термове не са еднотипни, то уравнението $T=U$ няма решение.

Твърдение:
Ако T е променлива, а U не е променлива и $T \in VAR(U)$, то уравнението $T=U$ няма решение.
Доказателство:
Допускаме, че σ е решение на уравнението $T=U$.
Тогава $T\sigma = U\sigma$ и $|U\sigma| > |T\sigma|$. Противоречие! □

def:
Ще казваме, че уравнението $T=U$ е явно нерешимо, ако са изпълнени предположенията на горните две предложения.

def:
Системата (1) ще наричаме явно нерешима, ако някое от нейните уравнения е явно нерешимо.

def:
Две системи уравнения ще наричаме еквивалентни, ако те имат едни и същи решения.

Преобразуване на система в еквивалентна на нея:
1) чрез премахване на тъждество
2) чрез разпадане:
$f(T_1', \ldots, T_k') = f(U_1', \ldots, U_k')$ се заменя с уравненията:
$T_1' = U_1', \ldots, U_k' = T_k'$
3) чрез обръщане:
ако $T_1 = U_1$, $T_1 \notin \Xi$, $U_1 \in \Xi$, то заменяме го с уравнението $U_1 = T_1$
4) чрез заместване:
ако $T_1 = U_1$, $T_1 \in \Xi$, $T_1 \notin VAR(U_1)$ и $T_1 \in VAR(T_j) \cup VAR(U_j)$, $j \neq 1$, то:
$T_1 = U_1$ се запазва при $i \neq j$
$T_j = U_j$ се замества с $T_j[T_1/U_1] = U_j[T_1/U_1]$

След краен брой стъпки системата (1) става или в решен вид, или е явно нерешима.

def:
Най-общ унификатор на две атомарни формули, наричаме такъв техен унификатор, че всеки унификатор на двете формули е негов частен случай.

Твърдение:
Ако две формули са унифицируеми, то те имат най-общ унификатор.
Доказателство:
Нека A и B са унифицируеми атомарни формули.
1) A=B. Тогава тъждествената субституция i е най-общ унификатор на A и B.
2) A≠B. Щом A и B са унифицируеми и различни, значи са еднотипни и имат еднакъв брой аргументи, т.е. $A = p(T_1, \ldots, T_m)$ и $B = p(U_1, \ldots, U_m)$. Тогава субституцията, която е решение на системата $T_1 = U_1, \ldots, T_m = U_m$ е най-общия унификатор на A и B. □

XIV Операционна семантика на логическите програми

Деф. Субституция

крайно множество от вида $\{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$ където x_i са различни индивидни променливи, а $\tau_1, \ldots, \tau_n$ са термове такива че $x_1 \neq \tau_1, \ldots, x_n \neq \tau_n$

Деф. Действие на субституция θ над терм τ $(\tau\theta)$ – Едновременната замяна на всички срещания на променливи от θ в τ със съответните термове от θ

Индуктивно (нека $\theta = \{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$)

1) $\tau \equiv c \Rightarrow \tau\theta = \tau$

2) $\tau \equiv x \Rightarrow x\theta = \begin{cases} \tau_i & \text{ако } x \equiv x_i \\ x & \text{ако } x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$

с $\equiv$ означаваме побуквено равенство

3) $\tau \equiv f(x_1, \ldots, x_k) \rightarrow \tau\theta = f(x_1\theta, \ldots, x_k\theta)$

С всеки език $\mathcal{L}$ на предикатното смятане от I ред свързваме множества Var – на индивидните пром., Const – на индивидните константи, Func – на функционалните символи и Pred на предикатните символи

(т.е. $\mathcal{L} = (\text{Var}, \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred})$

с $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ означаваме множеството от термове в езика $\mathcal{L}$

Деф. Свободна алгебра на термовете

$\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{\mathcal{L}}, \text{Const}, \text{Func})$, където на всеки функционален символ f с арност n свързваме следната ф-я

$f^\circ : \mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{\,n} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$:

$$f^\circ(\tau_1, \ldots, \tau_n) = f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

а с всяка константа c свързваме ф-ята c° (считаме че константите са нуламестни ф.с.)

$c^\circ = c$

Тогава с всяка субституция $\theta = \{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$ свързваме изображение $\hat\theta : \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ дефинирано така: $\hat\theta(\tau) = \tau\theta$

По-подробно:

$\hat{\theta}(c) = c\theta = c$

1) $\hat{\theta}(x) = \begin{cases} \tau_i & \text{ако } x = x_i \text{ за някое } i = 1, \ldots, n \\ x & \text{ако } x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$

$Dom(\theta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$Var(\theta) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup Var(\tau_1) \cup \ldots \cup Var(\tau_n)$

Твърдение: $\hat{\theta}$ е хомоморфизъм в алгебрата на термовете, който оставя неподвижни индивидните константи и само краен брой индивидни променливи не са неподвижни точки.

Док-во:

От 1 $\hat{\theta}$ оставя неподвижни константите и променя само краен брой инд. променливи

$\hat{\theta}$ е хомоморфизъм:

$$\hat{\theta}(f^{\circ}(x_1, \ldots, x_k)) \overset{\text{от деф. на } f^{\circ}}{=} \hat{\theta}(f(x_1, \ldots, x_k)) =$$

$$= [f(x_1, \ldots, x_k)]\theta \overset{\text{от деф. на } \theta}{=} f(x_1\theta, \ldots, x_k\theta) =$$

$$= f^{\circ}(x_1\theta, \ldots, x_k\theta) \underset{\text{от деф. на } \hat{\theta}}{=} f^{\circ}(\hat{\theta}(x_1), \ldots, \hat{\theta}(x_k))$$

Твърдение: За всеки хомоморфизъм h в свободната алгебра на термовете, който оставя неподвижни инд. константи и е крайнопороден (т.е. само краен брой инд. пром. не са неподвижни точки) съществува субституция θ, такава че $\hat{\theta} = h$

Док-во:

Нека $x_1, \ldots, x_n$ са онези променливи, за които $h(x) \neq x$

Дефинираме $\theta \leftrightharpoons \{x_1/h(x_1), \ldots, x_n/h(x_n)\}$

Тогава $\hat{\theta} = h$:

1) $\hat{\theta}(c) = c\theta = c$ но $h(c) = c$ (по деф. на h)

2) $\hat{\theta}(x_i) = h(x_i)$

$\hat{\theta}(x) = x\theta = x$ (за $x \notin \{x_1, \ldots x_n\}$) и $h(x) = x$

$\hat{\theta}(f^{\circ}(\tau_1, \ldots, \tau_n)) =$

$= f(\hat{\theta}(\tau_1), \ldots, \hat{\theta}(\tau_n))$ (от $\hat{\theta}$ - хомом.)

по индукция $\hat{\theta}(\tau_1) = h(\tau_1), \ldots, \hat{\theta}(\tau_n) = h(\tau_n)$

$\Rightarrow \quad = f(h(\tau_1), \ldots, h(\tau_n)) = h(f^{\circ}(\tau_1, \ldots, \tau_n))$

(от h - хомоморфизъм.)

Деф. Композиция на изображения

θ_1, θ_2 - субституции $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ - изображения

$h(\tau) = \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(\tau))$

Твърдение: Съществува единствена субституция θ така че $\hat{\theta} = h$. Тя се нарича композиция на θ_1 и θ_2

т.е. $\theta = \theta_1 \circ \theta_2$

Док-во:

Ще докажем, че h е хомоморфизъм с необходимите св-ва от горното твърдение:

$h(c) = \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(c)) = \hat{\theta}_2(c) = c$

нека $Dom(\theta_1) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $Dom(\theta_2) = \{y_1, \ldots, y_k\}$

Ако $z \notin Dom(\theta_1) \cup Dom(\theta_2)$

то $h(z) = \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(z)) = z$ $\Rightarrow$ само краен брой инд. пром. не са неподвижни точки

и $Dom(\theta_1) \cup Dom(\theta_2)$ е крайно множ.

композиция на хомоморфизми е хомоморфизъм:

$h(f(\tau_1, \ldots, \tau_e)) = \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(f(\tau_1, \ldots, \tau_e))) =$

$= \hat{\theta}_2(f(\hat{\theta}_1(\tau_1), \ldots, \hat{\theta}_1(\tau_e))) =$

$= f(\hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(\tau_1)), \ldots, \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(\tau_e))) = f(h(\tau_1), \ldots, h(\tau_e))$

$\Rightarrow$ съществува субституция θ така че $\hat{\theta} = h$

Дали съществува друга?

нека θ' и θ'' са такива че $\hat{\theta}' = h$ и $\hat{\theta}'' = h$

$\Rightarrow \hat{\theta}' = \hat{\theta}''$

С индукция по деф. на субституция ще покажем, че
$\theta_1' = \theta''$

1) ~~...~~ $c\theta' = c = c\theta''$

2) $x\theta' = \hat{\theta}'(x) = \hat{\theta}''(x) = x\theta''$

3) $f(\tau_1, .., \tau_e)\theta' = \hat{\theta}'(f(\tau_1 .., \tau_e)) = \hat{\theta}''(f(\tau_1 .., \tau_e)) =$

$= f(\tau_1 .., \tau_e)\theta''$

$\Rightarrow$ $\theta' = \theta''$

$\Rightarrow$ θ е единствена така че $\hat{\theta} = h$

<u>Следствие:</u>
Нека $\theta_1 = \{x_1/\tau_1 .., x_n/\tau_n\}$ $\theta_2 = \{y_1/x_1, .., y_k/x_k\}$

Тогава $\theta = \theta_1 \circ \theta_2 = (\{x_1/\tau_1\theta_2, .., x_n/\tau_n\theta_2\} \setminus A_1) \cup$

$\cup(\{y_{i_1}/x_{i_1}, .., y_{i_s}/x_{i_s}\} \setminus A_2)$

където A_1 е множ. от вида $\{x_i/\tau_i\theta_2 \mid x_i = \tau_i\theta_2\}$

$A_2 = \{y_i/x_i \mid y_i = x_j$ за някое $j = 1, .., n\}$

<u>Деф.</u> Унификатор на множество от термове
Нека E е множ. от термове, а θ - субституция
θ е унификатор за E ако множеството
$E\theta = \{\tau\theta \mid \tau \in E\}$ е едноелементно, т.е. за
произволни $\tau_1, \tau_2 \in E$ $\tau_1\theta = \tau_2\theta$

<u>Деф.</u> Унификатор на редици от термове
Нека $\tau_1 .., \tau_n$ и $x_1, .., x_k$ са редици от термове
казваме че θ е унификатор за тези редици ако
$n = k$ и $\tau_1\theta = x_1\theta, .., \tau_n\theta = x_n\theta$

<u>Твърдение</u> – Разпознаването на унифицируемост на редици от термове и унифицируемост на множества от термове са еквивалентни задачи:

Док-во:

1) Нека можем да разпознаваме унифиц. на редици
и нека $E = \{\tau_1 .., \tau_n\}$ е множ. от термове
Разпоз. редиците $\tau_1 \tau_2 .. \tau_n$ и $\tau_2, .., \tau_n, \tau_1$

Ако двете редици са унифиц. => същ. субст. θ:
т. $\tau_1\theta = \tau_2\theta$ $\tau_2\theta = \tau_3\theta$, ..., $\tau_n\theta = \tau_1\theta$
=> множ. E е унифицируемо =>
можем да решим зад. за унифиц. на E

2) нека можем да разпознаваме унифиц. на 2 редици от термове
~~множества~~ и $\tau_1 ..., \tau_n$ $x_1 ..., x_k$ са

a) ако $n \neq k$ — не са унифо.
б) ако $n = k$ добавяме нов ф.с. f извън едина $\mathcal{L}$
и $\rho(f) = n$ и образуваме множес.

$\{f(\tau_1 ..., \tau_n), f(x_1 ..., x_n)\}$

Ако това множ. е унифиц. =>
същ. θ: $f(\tau_1 .., \tau_n)\theta = f(x_1 .., x_n)\theta$
$\Leftrightarrow$ $f(\tau_1\theta, .., \tau_n\theta) = f(x_1\theta .., x_n\theta)$
$\Leftrightarrow$ $\tau_1\theta = x_1\theta, .., \tau_n\theta = x_n\theta$

<u>Деф.</u> Нека E е множ. от термове
казваме, че θ е НОУ за E ако
1) θ е унифици. за E
2) за вс. униф. θ' на E същ. субст. θ''
така че, $\theta' = \theta \circ \theta''$

Свойства на субституциите:
ε - празната субституция
1) $\varepsilon \circ \theta = \theta \circ \varepsilon$
2) $\theta_1 \circ (\theta_2 \circ \theta_3) = (\theta_1 \circ \theta_2) \circ \theta_3$
//
~~$\hat{\theta}_1(\hat{\theta_2\theta_3}(\hat{\theta}_1 ... \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_3(\theta_1))))$~~
идва от $\widehat{\theta_1 \circ \theta_2}(\tau) = \hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1(\tau))$

<u>Лема</u>: Нека x е индивидна променлива, τ - терм $x \neq \tau$
и θ - субст. Тогава $\{x/\tau\} \circ \theta = \theta \Leftrightarrow x\theta = \tau\theta$.

Док-во:
($\Rightarrow$) нека $\{x/\tau\} \circ \theta = \theta$
~~$\tau[x[x/\tau], \theta]] = \tau\theta$~~ $[x[x/\tau]]\theta = x\theta \Leftrightarrow \tau\theta = x\theta$

($\Leftarrow$) Нека $x\theta = \tau\theta$

Нека y е произволна пром.

дали $y[\{x/\tau\}\circ\theta] = y\theta$?

1) ако $y = x$ то $x[[x/\tau]\circ\theta] =$

$= [x[x/\tau]]\theta = \tau\theta \underset{\text{по усл.}}{=} x\theta$

2) ако $y \neq x$

$y[\{x/\tau\}\circ\theta] = \{y[x/\tau]\}\theta = y\theta$

$\Rightarrow$ двете субституции действат по един и същи начин

$\Rightarrow$ те са равни

Свойство: (използва се в горната лема)

$\tau(\theta\circ\eta) = (\tau\theta)\eta$

Док-во:

1) ако $\tau \equiv c$ то $\tau(\theta\circ\eta) = c = (\tau\theta)\eta$

2) ако $\tau \equiv x$ и $x \notin Dom(\theta) \cup Dom(\eta)$

$\Rightarrow (\tau\theta)\eta = x\eta = x$

от $x \notin Dom(\theta) \cup Dom(\eta) \rightarrow x \notin Dom(\theta\circ\eta)$

$\Rightarrow x(\theta\circ\eta) = x$

ако $x \in Dom(\theta)$ то

$(\tau\theta)\eta = \tau_i\eta$

$x(\theta\circ\eta) = \begin{cases} x & \text{ако } \tau_i\eta = x \\ \tau_i\eta & \text{иначе} \end{cases} = \tau_i\eta$

ако $x \notin Dom(\theta)$ и $x \in Dom(\eta)$

$(x\theta)\eta = x\eta$

$x(\theta\circ\eta) = x\eta$ (от деф. на композиция)

3) ако $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_e)$

то $(\tau\theta)\eta = (f(\tau_1\theta, \dots, \tau_e\theta))\eta =$

$= f((\tau_1\theta)\eta, \dots, (\tau_e\theta)\eta) = f(\tau_1\theta\circ\eta, \dots, \tau_e\theta\circ\eta) =$

$= \tau(\theta\circ\eta)$

Деф. множество на най-левите различия:

$E = \{\tau_1, .., \tau_n\}$ крайно множ. от термове $(n \geq 2)$

$DS(E)$ – множ. на най-левите различия:

Нека $\tau_i = a_i^1 a_i^2 \dots a_i^{k_i}$ $\quad 1 \leq i \leq n \quad a_i^j$ – букви

нека с s означим най-малкото естествено ч-ло за

което
$$a_1^1 = a_2^1 = \dots = a_n^1$$
$$a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_n^2$$
$$\vdots$$
$$a_1^{s-1} = a_2^{s-1} = \dots = a_n^{s-1}$$

и в списъка $a_1^s, a_2^s, \dots, a_n^s$ има поне 2 различни букв.

От еднозначния синтактичен анализ $\rightarrow$ че в този списък има само инд. пром., инд. константи и функц. символи термовете $\varkappa_1, .., \varkappa_n$ такива че и са еднозначно определени

$\tau_i = a_i^1 \dots a_i^{s-1} \varkappa_i \alpha_i \quad \alpha_i$ – дума

Тогава $DS(E) = \{\varkappa_1, .., \varkappa_n\}$

Алгоритъм за унификация

Нека E е крайно $\neq \emptyset$ множе. от термове

Полагаме $\ell = 0$ $\quad E_0 = E$ и $\theta_0 = \varepsilon$

Докато в $E_\ell\theta_\ell$ има поне 2 елементa то

а) ако има инд. пром. x и терм. τ

$x, \tau \in DS(E_\ell\theta_\ell)$, такива че $x \notin Var[\tau]$

то полагаме $\theta_{\ell+1} = \{x/\tau\}$

$E_{\ell+1} = E_\ell\theta_\ell \quad \ell{+}{+}$

б) иначе казваме множеството E не е унифицируемо край

полагаме $\theta = \theta_0 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_\ell$.

θ е НОУ за E край

Теорема

~~1) Алгоритъмът~~ винаги завършва работа за краен брой стъпки

2) Ако резултатът от работата е $\theta = \theta_0 \circ \dots \circ \theta_\ell$ то

θ е унификатор за E

3) и за всеки друг унификатор ξ на E е в сила $\xi = \theta \circ \xi$, т.е θ е НОУ за E.

Док-во:

1) Нека m_e е броят на променливите в $E_e \theta_e$

твърдим че $m_{e+1} < m_e$

$E_{e+1} = E_e \theta_e$ и $E_{e+1}\theta_{e+1} = E_{e+1}\{x/\tau\}$

като τ е терм, който участва в $DS(E_e\theta_e)$

$\rightarrow$ в $E_{e+1}\theta_{e+1}$ не се появяват нови променливи

и x вече не се среща в $E_{e+1}\theta_{e+1}$

$\rightarrow m_{e+1} < m_e$

$\rightarrow$ броят на пром. намалява на вс. стъпка

(но той е краен) $\rightarrow$ цикълът ще свърши за краен брой стъпки

2) Нека $E_e\theta_e$ е едноелементно

Тогава $E(\theta_0 \circ \dots \circ \theta_e) = (E_0\theta_0)(\theta_1 \circ \dots \circ \theta_e) =$

$= E_1(\theta_1 \circ \dots \circ \theta_e) = (E_1\theta_1)(\theta_2 \circ \dots \circ \theta_e) =$

$= E_2(\theta_2 \circ \dots \circ \theta_e) = \dots = E_e\theta_e$

$\Rightarrow E\theta$ $(\theta = \theta_0 \dots \theta_e)$ е едноелементно

$\rightarrow \theta$ е унификатор за E

3) Нека E е унифицируемо

и нека ξ е унификатор за E

Нека i е стъпка в итерацията

твърдим че:

-) $\xi = (\theta_0 \circ \dots \circ \theta_i) \circ \xi$

•) няма съобщение на тази стъпка

" E не е унифицируемо)

индукция по i:

*) $i = 0$ $\theta_0 = \varepsilon \rightarrow \xi = \theta_0 \circ \xi$

да допуснем че има пром. x и терм τ в $DS(E_0\theta_0)$ така че $x \notin Var[\tau]$

това означава че в $DS(E_0\theta_0)$ няма индивидни променливи или

∴ Предполагаме, че е изпълнено 1

⇒ $x_1 = a_1 \alpha_1$ и a_i ~~са различни~~ не са индивидни
$x_2 = a_2 \alpha_2$ пром. → a_i са или константи
⋮ или функц. символи
$x_n = a_n \alpha_n$

Нека $\tau_i = \beta_i a_i \alpha_i$ → $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n$

→ $\tau_i = \beta a_i \alpha_i$

$\tau_i \xi = [\beta a_i \alpha_i]\xi = [\beta\xi][a_i\xi][\alpha_i\xi] = \beta\xi\, a_i\, [\alpha_i \xi]$

тъй като ξ е унификатор → $\tau_i \xi = \tau_j \xi$ за вс. $i \neq j$

→ $a_i = a_j$ → всички а-та са равни → $\overset{\circ}{\times}$

защото това е позицията на най-ляво различие

Нека сега предполагаме, че е изпълнено 2

взимаме $x \neq \tau$ тогава е τ не е инд. ~~пром.~~ константи и инд. пром

(защото за вс. $\tau \in Ds(E\circ\theta_0)$ $x \in Var[\tau]$)

→ ~~xxxx~~ $\tau = \alpha x \beta$ като $d(\alpha\beta) \geq 1$

α не може да е празна

→ $\alpha = a\alpha'$ → $\tau = a\alpha' x \beta$

$x\xi = \tau\xi$ защото ξ е унификатор

но $\tau\xi$ е по-дълго от $x\xi$ защото в τ има

буква a различна от x

→ не е възможно $x\xi = \tau\xi$

→ $\overset{\circ}{\times}$ → допускането е грешно

*) нека е изпълнено $\xi = (\theta_0 \ldots \circ \theta_i)\circ\xi$

и $\theta_{i+1} = \{x/\tau\}$

разгл. $(\theta_0 \ldots \circ \theta_i \circ \theta_{i+1})\circ\xi =$

$= (\theta_0 \circ \ldots \circ \theta_i)\circ(\theta_{i+1}\circ\xi)$

ще док. че $\theta_{i+1}\circ\xi = \xi$

Щом ξ е унификатор → $x\xi = \tau\xi$

→ от лемата $\{x/\tau\}\circ\xi = \xi$ → $\theta_{i+1}\circ\xi = \xi$

Следствие: $\theta = \theta_0 \theta$ (т.е. θ е идемпотентен унификат.

Алгоритъм за унифициране на редици от термове

$\tau_1, \dots, \tau_n$ $\varkappa_1, \dots, \varkappa_k$ 2 редици

Образуване с-ма от формални равенства

- ако $k \neq n$ то редиците не са унифицируеми
- ако $k = n$

$\{\tau_1 \equiv \varkappa_1, \dots, \tau_n \equiv \varkappa_n\}$

Една такава с-ма е решена ако има вида

$\{x_1 \equiv \tau_1, \dots, x_m \equiv \tau_m\}$

x_i – различни инд. пром. и $x_i \notin Var[\tau_i]$

Ако една с-ма е решена, то ще има НОУ $\theta = \{x_1/\tau_1, \dots, x_m/\tau_m\}$.

Правила за преобразуване на системи

1) $S \cup \{f(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv g(\varkappa_1, \dots, \varkappa_k)\}$

- ако $f \neq g$ то с-мата няма решение
- ако $f = g$ то $S \cup \{f(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv g(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)\}$ е еквивалентна на $S \cup \{\tau_1 \equiv \varkappa_1, \dots, \tau_n \equiv \varkappa_n\}$

Две системи са еквивалентни, когато имат едни и същи решения

решение – вс. субст. ξ така че $\tau_1\xi = \varkappa_1\xi, \dots, \tau_n\xi = \varkappa_n\xi$

2) $S \cup \{\tau \equiv \tau\}$ е еквивалентна на S

3) $S \cup \{c \equiv d\}$

ако $c = d$ – правило 2

ако $c \neq d$ – с-мата няма реш.

5) $S \cup \{c \equiv f(\dots)\}$ – няма реш.

6) $S \cup \{\tau \equiv x\} \longleftrightarrow S \cup \{x \equiv \tau\}$

7) $S \cup \{x \equiv \tau\} \longleftrightarrow (S\{x/\tau\}) \cup \{x \equiv \tau\}$

4) $S \cup \{x \equiv \tau\}$ и $x \in Var[\tau]$, $x \neq \tau$ $\rightarrow$ с-мата няма реш.

Всеки път, когато можем да приложим някое правило го прилагаме. След краен брой стъпки се достига или до решена с-ма или до с-ма, за която някое от правилата казва че няма реш.