Optimization, HW11

Иванов Вячеслав, группа 699

26 ноября 2018 г.

Оглавление

1 Task 1

Записать задачи ЛП в каноническом виде:

1.
$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 + 3\,|x_2 - 10| \\ &\text{s.t. } |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \end{aligned}$$

2. Поиск максимально разреженного решения СЛАУ.
$$\begin{aligned} &\min\ \|x\|_1 \\ &\text{s.t. } Ax = b \end{aligned}$$

3. Поиск Чебышевского центра полиэдрального множества $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$.
$$\begin{aligned} &\max_{x_c}\ R \\ &\text{s.t. } B_R(x_c) \subset P \end{aligned}$$

Решение.

1. При данных ограничениях $|x_2| \leqslant 5$, потому $|x_2 - 10| = 10 - x_2$.
Далее произведём разбор случаев и разобьём условие на 4:
   - $x_1 > -2,\ x_2 > 0 :\ |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \quad \to \quad x_1 + x_2 \leqslant 3$
   - $x_1 < -2,\ x_2 > 0 :\ |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \quad \to \quad x_2 - x_1 \leqslant 7$
   - $x_1 > -2,\ x_2 < 0 :\ |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \quad \to \quad x_1 - x_2 \leqslant 3$
   - $x_1 < -2,\ x_2 < 0 :\ |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \quad \to \quad -x_1 - x_2 \leqslant 7$

   Я проверил в Wolfram Mathematica: получаются одинаковые множества. Получаем:
$$\min_{x_1,x_2}\ 2x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\ x_2 - x_1 &\leqslant 7 \\ x_1 - x_2 &\leqslant 3 \\ -x_1 - x_2 &\leqslant 7 \end{aligned}$$

   Введём вспомогательные переменные, чтобы избавиться от неравенств:
$$\min_{x_1,x_2}\ 2x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 3 \\ x_2 - x_1 + s_2 &= 7 \\ x_1 - x_2 + s_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + s_4 &= 7 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   И ещё по паре переменных на каждую неизвестную, чтобы все -были $\geqslant 0$:
$$\min_{u_i,v_j}\ 2u_1 - 2v_1 - 3u_2 + 3v_2 \quad (x_i = u_i - v_i)$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + s_1 &= 3 \\ u_2 - v_2 - u_1 + v_1 + s_2 &= 7 \\ u_1 - v_1 - u_2 + v_2 + s_3 &= 3 \\ -u_1 + v_1 - u_2 + v_2 + s_4 &= 7 \\ \forall i, j, k : u_i, v_j, s_k &\geqslant 0 \end{aligned}$$

2. Раскроем модули стандартным способом:

$$\begin{array}{l|l|l}
\begin{aligned} &\min_{x,t} \ \sum_{i=1}^{n} t_i \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} \forall i: -t_i \leqslant x_i \leqslant t_i \\ Ax = b \\ \forall i: t_i \geqslant 0 \end{array} \end{aligned} &
\begin{aligned} &\min_{x,t} \ \sum_{i=1}^{n} t_i \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} \forall i: x_i = c_i - t_i \\ \forall i: x_i = d_i + t_i \\ Ax = b \\ \forall i: t_i, c_i, d_i \geqslant 0 \end{array} \end{aligned} &
\begin{aligned} &\min_{x,t} \ \sum_{i=1}^{n} t_i \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} \forall i: u_i - v_i = c_i - t_i \\ \forall i: u_i - v_i = d_i + t_i \\ Ax = b \\ \forall i: t_i, c_i, d_i, u_i, v_i \geqslant 0 \end{array} \end{aligned}
\end{array}$$

3. Концептуально: всякая гиперплоскость задаётся вектором нормали. Каждая строка неравенства $Ax \leqslant b$ задаёт свою гиперплоскость, их пересечением является P. Если потребовать, чтобы они имели единичную норму, то, в силу того, что эти вектора заранее известны из постановки задачи, можно отложить каждый из них от точки x_c, отмасштабировать, умножив на R, и проверить, что полученный вектор всё ещё лежит в полиэдральном множестве. Все эти операции линейны, потому задача сводится к ЛП, а дальнейшее сведение к каноническому виду осуществляется по стандартному алгоритму.

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x_c}} \ R \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} \mathbf{A x_c} \leqslant \mathbf{b}, \\ \forall i: \left(\mathbf{x_c} + R\frac{\mathbf{a_i}}{\|\mathbf{a_i}\|_2},\ \frac{\mathbf{a_i}}{\|\mathbf{a_i}\|_2} \right) \leqslant \frac{b_i}{\|\mathbf{a_i}\|_2}, \\ R \geqslant 0 \end{array} \end{aligned}$$

где $\mathbf{a_i}$ — вектор-столбец, соответствующий i-ой строке матрицы $\mathbf{A}$ (после нормировки он становится искомым вектором нормали).

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x_c} = \mathbf{u_c} - \mathbf{v_c}} \ -R \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{u_c} - \mathbf{v_c}) + \mathbf{d} = \mathbf{b}, \\ \forall i: \left(\mathbf{u_c} - \mathbf{v_c} + R\frac{\mathbf{a_i}}{\|\mathbf{a_i}\|_2},\ \frac{\mathbf{a_i}}{\|\mathbf{a_i}\|_2} \right) + e_i = \frac{b_i}{\|\mathbf{a_i}\|_2}, \\ R \geqslant 0 \\ \mathbf{u_c}, \mathbf{v_c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \geqslant \mathbf{0} \end{array} \end{aligned}$$

□

2 Task 2

Решить задачу табличным симплекс-методом, нарисовать допустимое множество и отметить траекторию сходимости (желательно с помощью TikZ).

$$\begin{aligned} &\min \ -5x_1 - x_2 \\ &\text{s.t.} \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leqslant 8 \\ x_{1,2} \geqslant 0 \end{array} \end{aligned}$$

Решение. Распишем ещё раз алгоритм табличного симплекс-метода, чтобы не ошибиться. Ему предшествует приведение задачи ЛП к каноническому виду, про это важно не забыть.

1. Вначале нужно в матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m < n$, задающей ограничения, выбрать m ЛНЗ столбцов. Обозначим её как B_0, а соответствующее множество индексов столбцов — $\mathcal{B}_0$.

2. Вычислить *оценки замещения*: $\forall j \notin \mathcal{B} :\ \bar{c}_j := c_j - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_j}$

   - Если $\forall j \notin \mathcal{B} :\ \bar{c}_j \geqslant 0$, то текущее значение является оптимальным.
   - Иначе следует выбрать минимальный индекс j^*, т.ч. $\bar{c}_{j^*} < 0$.

3. Вычислить $\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{j^*}$.

   - Если $\mathbf{u} \leqslant 0$, то задача неограничена и оптимальным будет значение $-\infty$.
   - Иначе рассчитать $\theta^* := \min\limits_{\{i|u_i>0\}} \dfrac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i}$.

4. Пусть $l := \arg\min\limits_{\{i|u_i>0\}} \dfrac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i}$. Сформировать новую базисную матрицу $\widehat{\mathbf{B}}$ заменой столбца $a_{\mathcal{B}(l)}$ на a_{j^*}. Угловая точка $\widehat{\mathbf{x}}$, соответствующая $\widehat{\mathbf{B}}$, запишется так:

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_{j^*} := \theta^*,\\
&\widehat{x}_{\mathcal{B}(k)} := x_{\mathcal{B}(k)} - \theta^* u_k,\ k \neq l
\end{aligned}$$

Теперь приведём задачу к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
\min\ & -5x_1 - x_2\\
& x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
\text{s.t. } & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 = 8\\
& x_{1,2,3,4} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ системы ограничений имеет вид: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Очевидно, что $\mathcal{B}_0 = \{3, 4\},\ \mathbf{x}_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}^{\top},\ \mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_2$.

Таблица 1: Первоначальная таблица симплекс-метода

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_0}^T\mathbf{x}_{\mathcal{B}_0} = 0$	-5	-1	0	0
$x_3 = 5$	1	1	1	0
$x_4 = 8$	**2**	$\frac{1}{2}$	0	1

Выберем $j^* := \arg\min\{i \notin \mathcal{B}_0 \mid c_i < 0\} = 1$. В силу выбора $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{u}_1 := \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{a}_{j^*} = \mathbf{a}_{j^*} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\top}$.
Все компоненты $\mathbf{u}_1$ положительны, потому продолжаем итерации.
Рассчитаем $\theta^* := \min\limits_{\{i|u_i>0\}} \dfrac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i} = \min\left\{\dfrac{5}{1}, \dfrac{8}{2}\right\} = 4$. Отсюда $l := \arg\min\limits_{\{i|u_i>0\}} \dfrac{x_{\mathcal{B}(i)}}{u_i} = 2$.
Тогда $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, а $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 - \theta^*\mathbf{u}_1^1 & 4 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^{\top}$.
Ведущий элемент в таблице 1 выделен жирным.
Элементарными преобразованиями занулим оценку замещения, соответствующую x_1.

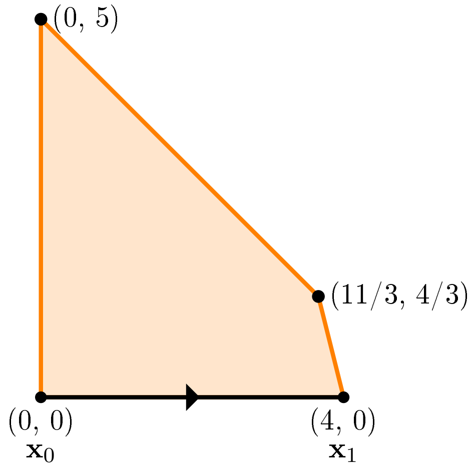
Таблица 2: Таблица симплекс-метода после первой итерации

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}^T \mathbf{x}_{\mathcal{B}_1} = 20$	0	1/4	0	5/2
$x_3 = 1$	0	3/4	1	−1/2
$x_1 = 4$	1	1/4	0	1/2

Все оценки замещения неотрицательны, следовательно, достигнут оптимум:

$$\mathbf{x}^* = \left[40\right]^\top, \ -5\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^* = -20$$

Отрисуем теперь траекторию метода (точку (11/3, 4/3) я нашёл численно):



$\square$