Bernstainovi baznih polinomov treh spremenljivk

Lina Ivanova, Tia Krofel

13. januar 2023

Prostor $\mathbb{P}_n^3$

S $\mathbb{P}_n^3$ označimo prostor polinomov treh spremenljivk stopnje n, torej prostor končnih dimenzij z vsemi funkcijami oblike

$$p(x, y, z) := \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k,$$

kjer $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$

Prostor $\mathbb{P}_n^3$

S $\mathbb{P}_n^3$ označimo prostor polinomov treh spremenljivk stopnje n, torej prostor končnih dimenzij z vsemi funkcijami oblike

$$p(x,y,z) := \sum_{0\leq i+j+k\leq n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k,$$

kjer $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$

Dimenzija prostora $\mathbb{P}_n^3$ je enaka $\binom{n+3}{3}$, medtem ko monomi $\{x^i y^j z^k\}_{0\leq i+j+k\leq n}$ tvorijo bazo.

Baricentrične koordinate

Naj bo T tetraeder z oglišči $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$, kjer $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, označen s $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$.

Baricentrične koordinate

Naj bo T tetraeder z oglišči $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$, kjer $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, označen s $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$.

Vsako točko $\mathbf{V} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lahko na enoličen način zapišemo kot kombinacijo oblike

$$\mathbf{V} = u_1\mathbf{V}_1 + u_2\mathbf{V}_2 + u_3\mathbf{V}_3 + u_4\mathbf{V}_4,$$

kjer je

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1.$$

Baricentrične koordinate

Naj bo T tetraeder z oglišči $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$, kjer $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, označen s $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$.

Vsako točko $\mathbf{V} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lahko na enoličen način zapišemo kot kombinacijo oblike

$$\mathbf{V} = u_1\mathbf{V}_1 + u_2\mathbf{V}_2 + u_3\mathbf{V}_3 + u_4\mathbf{V}_4,$$

kjer je

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1.$$

Točke (u_1, u_2, u_3, u_4) tvorijo baricentrične koordinate neke poljubne točke $\mathbf{V} = (x, y, z)$ glede na tetraeder T.

Baricentrične koordinate

Naj bo T tetraeder z oglišči $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$, kjer $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, označen s $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$.

Vsako točko $\mathbf{V} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lahko na enoličen način zapišemo kot kombinacijo oblike

$$\mathbf{V} = u_1\mathbf{V}_1 + u_2\mathbf{V}_2 + u_3\mathbf{V}_3 + u_4\mathbf{V}_4,$$

kjer je

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1.$$

Točke (u_1, u_2, u_3, u_4) tvorijo baricentrične koordinate neke poljubne točke $\mathbf{V} = (x, y, z)$ glede na tetraeder T.

V nadaljevanje bomo označevali $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

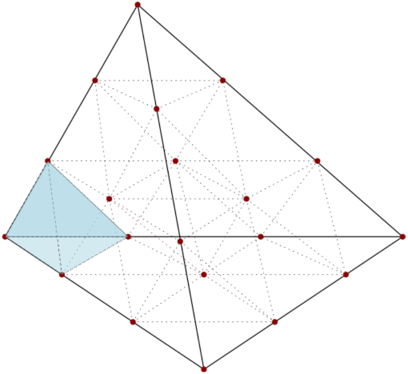
Domenske točke

Naj bodo **u** baricentrične koordinate poljubne točke (x, y, z) glede na izbran tetraeder $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$. Domenske

točke Bézierjevega polinoma lahko definiramo kot

$$\mathbf{X_i} = \frac{i}{n}\mathbf{V}_1 + \frac{j}{n}\mathbf{V}_2 + \frac{k}{n}\mathbf{V}_3 + \frac{l}{n}\mathbf{V}_4$$

za vsak $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$, kjer $|\mathbf{i}| = n$.



Domenske točke

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Naj bo T tetraeder in u_1, u_2, u_3, u_4 baricentrične koordinatne funkcije. Potem definiramo Bernsteinov bazni polinom treh spremenljivk stopnje n glede na T kot

$$B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) := \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l, \ \ i + j + k + l = n.$$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Naj bo T tetraeder in u_1, u_2, u_3, u_4 baricentrične koordinatne funkcije. Potem definiramo Bernsteinov bazni polinom treh spremenljivk stopnje n glede na T kot

$$B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) := \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l,\ \ i + j + k + l = n.$$

Množica $\mathcal{B}^n := \{B^n_{ijkl}\}_{i+j+k+l=n}$ Bernsteinovih baznih polinomov predstavlja bazo prostora polinomov treh spremenljivk $\mathbb{P}^3_n$.

Še več, $\sum_{i+j+k+l=n} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) = 1$ in

$0 \leq B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) \leq 1\ \forall \mathbf{u} = \mathrm{Bar}((x, y, z); T), (x, y, z) \in T.$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

- Teh polinomov je $\binom{n+3}{3} = \dim \mathbb{P}_n^3$;

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

- Teh polinomov je $\binom{n+3}{3} = \dim \mathbb{P}_n^3$;
- Tvorijo razčlenitev enote:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^n = 1;$$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

- Teh polinomov je $\binom{n+3}{3} = \dim \mathbb{P}_n^3$;
- Tvorijo razčlenitev enote:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^n = 1;$$

- $0 \le B_{ijkl}^n(\mathbf{u}) \le 1\ \forall \mathbf{u} = \mathrm{Bar}((x, y, z); T), (x, y, z) \in T;$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

- Teh polinomov je $\binom{n+3}{3} = \dim \mathbb{P}_n^3$;
- Tvorijo razčlenitev enote:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^n = 1;$$

- $0 \leq B_{ijkl}^n(\mathbf{u}) \leq 1\ \forall \mathbf{u} = \mathrm{Bar}((x, y, z); T), (x, y, z) \in T$;
- Z indukcijo pokažemo še, da lahko vse monome $\{x^\alpha y^\beta z^\gamma\}_{0 \leq \alpha+\beta+\gamma \leq n}$ zapišemo kot linearno kombinacijo Bernstainovih baznih polinomov.

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 1$.

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 1$.Če sedaj pomnožimo $x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B_{ijk}^{n-1}(\mathbf{u})$ in enako naredimo za y in z, dobimo:

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 1$.Če sedaj pomnožimo $x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B_{ijk}^{n-1}(\mathbf{u})$ in enako naredimo za y in z, dobimo:

$$x = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4)}{n} B_{ijkl}^n(\mathbf{u}),$$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = 1$.Če sedaj pomnožimo $x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B_{ijk}^{n-1}(\mathbf{u})$ in enako naredimo za y in z, dobimo:

$$x = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4)}{n} B_{ijkl}^n(\mathbf{u}),$$

$$y = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iy_1 + jy_2 + ky_3 + ly_4)}{n} B_{ijkl}^n(\mathbf{u}),$$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = 1$.Če sedaj pomnožimo $x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B^{n-1}_{ijk}(\mathbf{u})$ in enako naredimo za y in z, dobimo:

$$x = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4)}{n} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}),$$

$$y = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iy_1 + jy_2 + ky_3 + ly_4)}{n} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}),$$

$$z = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iz_1 + jz_2 + kz_3 + lz_4)}{n} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}).$$

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Pokazali smo, da $\sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u}) = 1$.Če sedaj pomnožimo $x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B_{ijk}^{n-1}(\mathbf{u})$ in enako naredimo za y in z, dobimo:

$$x = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4)}{n} B_{ijkl}^{n}(\mathbf{u}),$$

$$y = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iy_1 + jy_2 + ky_3 + ly_4)}{n} B_{ijkl}^{n}(\mathbf{u}),$$

$$z = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iz_1 + jz_2 + kz_3 + lz_4)}{n} B_{ijkl}^{n}(\mathbf{u}).$$

Sledi

$$(x, y, z) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \big(\frac{i}{n}\mathbf{V}_1 + \frac{j}{n}\mathbf{V}_2 + \frac{k}{n}\mathbf{V}_3 + \frac{l}{n}\mathbf{V}_4\big) B_{\mathbf{i}}^{n}(\mathbf{u})$$

De Casteljaujev algoritem

$$p(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} c_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$$

Vhod: $b_{\mathbf{i}}$ z $|\mathbf{i}| = n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$
for $r = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  for $|\boldsymbol{i}| = n - r$ **do**
    $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}^r = u_1 \mathbf{b}_{i+1,j,k,l}^{r-1} + u_2 \mathbf{b}_{i,j+1,k,l}^{r-1} + u_3 \mathbf{b}_{i,j,k+1,l}^{r-1} + u_4 \mathbf{b}_{i,j,k,l+1}^{r-1}$
  end
end
Izhod: $\mathbf{b}_{0,0,0,0}^n(\mathbf{u})$

Algoritem 1: de Casteljaujev algoritem

Odvodi

Če imamo podan vektor $\mathbf{d} := (d_x, d_y, d_z) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{v} = (x, y, z)$, lahko definiramo smerne odvode funkcije treh spremenljivk f kot

$$D_{\mathbf{d}} f(x, y, z) := \frac{d}{dt} f(x + td_x, y + td_y, z + td_z)\Big|_{t=0} .$$

Odvodi

Če imamo podan vektor $\mathbf{d} := (d_x, d_y, d_z) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{v} = (x, y, z)$, lahko definiramo smerne odvode funkcije treh spremenljivk f kot

$$D_{\mathbf{d}} f(x, y, z) := \frac{d}{dt} f(x + td_x, y + td_y, z + td_z)\Big|_{t=0}.$$

Naj bo $d \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Bar}(\mathbf{d};\ \mathrm{T}) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Potem za poljubne $i + j + k + l = n$ velja:

$$D_{\mathbf{d}} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{n!}{i!j!k!l!}(u_1 + t\mu_1)^i (u_2 + t\mu_2)^j (u_3 + t\mu_3)^k (u_4 + t\mu_4)^l\Big)\Big|_{t=0} =$$

$$= n[\mu_1 B^{n-1}_{i-1,j,k,l}(\mathbf{u}) + \mu_2 B^{n-1}_{i,j-1,k,l}(\mathbf{u}) + \mu_3 B^{n-1}_{i,j,k-1,l}(\mathbf{u}) + \mu_4 B^{n-1}_{i,j,k,l-1}(\mathbf{u})].$$