UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Lina Ivanova, Tia Krofel

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Seminar pri predmetu Računalniško podprto (geometrijsko) oblikovanje

Ljubljana, 2023

1 Uvod

V tem delu seminarja predstavimo Bernsteinove bazne polinome treh spremenljivk. Pri predmetu Računalniško podprto (geometrijsko) oblikovanje smo spoznali Bernsteinove bazne polinome ene spremenljivke ter njihovo razširitev na dve spremenljivki.

Razlog za tako obširno obravnavo Bernsteinovih baznih polinomov leži v dejstvu, da lahko, v primerjavi z drugimi načini aproksimacije, z njihovo pomočjo pridemo do zelo dobrih približkov, pri čemer potrebujemo relativno majhno število kontrolnih točk. To je še posebej pomembno, če so naši računalniški viri omejeni ali pa želimo minimizirati število podatkov.

V nadaljevanju tako najprej predstavimo prostor polinomov, kjer lahko operiramo s polinomi treh spremenljivk. Nato si ogledamo baricentrične koordinate za poljubno točko $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in kako izgleda kontrolna mreža, ki je v obliki strukture iz tetraedrov. Zatem definiramo naslovni pojem, Bernsteinove bazne polinome treh spremenljivk. Za konec izpišemo še de Casteljaujev algoritem in si ogledamo smerne odvode vektorjev, ki so elementi prostora $\mathbb{R}^3$.

2 Prostor $\mathbb{P}_n$

Za začetek s $\mathbb{P}_n^3$ označimo prostor polinomov treh spremenljivk stopnje n, torej prostor končnih dimenzij z vsemi funkcijami oblike

$$p(x, y, z) := \sum_{0 \le i+j+k \le n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k,$$

kjer $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. *Dimenzija prostora $\mathbb{P}_n^3$ je enaka $\binom{n+3}{3}$, monomi $\{x^i y^j z^k\}_{0 \le i+j+k \le n}$ pa tvorijo njegovo bazo.*

Dokaz. Da monomi $\{x^i y^j z^k\}_{0 \le i+j+k \le n}$ razpenjajo prostor $\mathbb{P}_n^3$ sledi neposredno iz definicije. Dovolj je preveriti le še linearna neodvisnost. Le-ta sledi, če enačimo $p(x, y, z) = \sum_{0 \le i+j+k \le n} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ in vidimo, da to velja natanko tedaj, ko je α_{ijk} za vse $0 \le i + j + k \le n$ enak 0. $\square$

Ker pa nas zanima geometrijsko oblikovanje, bomo ta prostor v nadaljevanju predstavili še z Bernsteinovimi baznimi polinomi treh spremenljivk. Pri njihovi definiciji si bomo pomagali z baricentričnimi koordinatami.

3 Baricentrične koordinate

Naj bo T tetraeder z oglišči $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$ za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ označen s $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$.

Potem vsako točko v ravnini lahko izrazimo s pomočjo teh štiri oglišč.

Lema 3.1. *Vsako točko $\boldsymbol{V} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lahko na enoličen način zapišemo kot kombinacijo oblike*

$$\boldsymbol{V} = u_1 \boldsymbol{V}_1 + u_2 \boldsymbol{V}_2 + u_3 \boldsymbol{V}_3 + u_4 \boldsymbol{V}_4, \tag{1}$$

kjer je

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1.$$

Dokaz. Enačbe $(x, y, z) = u_1(x_1, y_1, z_1) + u_2(x_2, y_2, z_2) + u_3(x_3, y_3, z_3) + u_4(x_4, y_4, z_4)$ in $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$ lahko zapišemo v matrični obliki kot

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Označimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema je enolična natanko tedaj ko je $det(A) \neq 0$. Velja, da je $det(A) = 6V_T$, kjer je V_T volumen tetraedra T. Torej mora veljati

$$det(A) = 6V_T \neq 0.$$

Cramerjevo pravilo nam da nasljedno

$$u_1 = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{V(\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}$$

In podobno dobimo

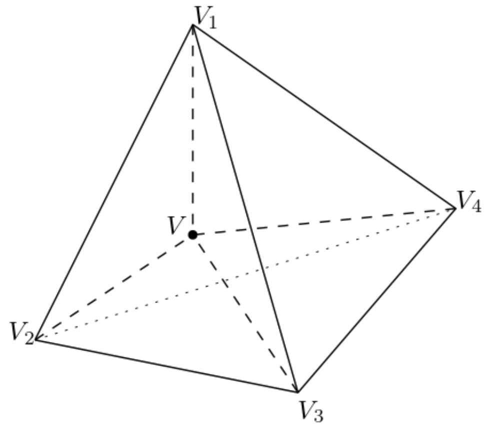
$$u_2 = \frac{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}$$

$$u_3 = \frac{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}, \mathbf{V}_4 \rangle)}{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}$$

$$u_4 = \frac{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V} \rangle)}{V(\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle)}$$

□

Točke (u_1, u_2, u_3, u_4) tvorijo baricentrične koordinate poljubne točke $\mathbf{V} = (x, y, z)$ glede na tetraeder T. Imajo zelo podobne lastnosti kot pri Bernstainovih baznih polinomih dveh spremenljivk obravnavane baricentrične koordinate, povezane s trikotniki. Predhodna lema nam v resnici pove, da u_1 lahko gledamo kot razmerje med volumnom tetraedra $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$ in volumnom T in podobno za ostale tri točke u_2, u_3 in u_4.
V nadaljevanje bomo označevali $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.



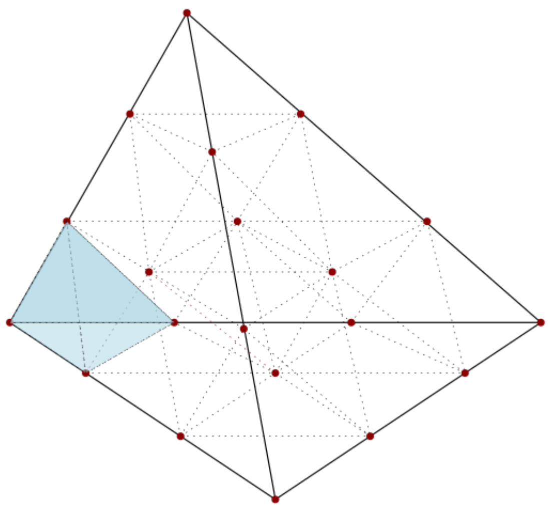
Slika 1: Točka $\mathbf{V}$ definirana z baricentričnimi koordinatami glede na T

3.1 Domenske točke

Naj bodo $\mathbf{u}$ baricentrične koordinate poljubne točke (x, y, z) glede na izbran tetraeder $T = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4 \rangle$. Domenske točke Bezierjevega polinoma lahko definiramo kot sledi:

$$\mathbf{X}_\mathbf{i} = \frac{i}{n}\mathbf{V}_1 + \frac{j}{n}\mathbf{V}_2 + \frac{k}{n}\mathbf{V}_3 + \frac{l}{n}\mathbf{V}_4,$$

za vsak $\mathbf{i} = (i, j, k, l)$ z $|\mathbf{i}| = n$. Baricentrične koordinate domenske točke $\mathbf{X}$ označimo kot $Bar(\mathbf{X}_\mathbf{i}; T) = \xi_\mathbf{i}^T$. Za lažjo predstavo si domenske točke oglejmo na sliki 2.



Slika 2: Domenske točke

4 Bernstainovi baznih polinomov treh spremenljivk

Z notacijo, vpeljano v prejšnjih poglavjih, sedaj definirajmo naslovni pojem Bernsteinovih baznih polinomov treh spremenljivk.

Izrek 4.1. *Naj bo T tetraeder in u_1, u_2, u_3, u_4 baricentrične koordinatne funkcije. Potem definiramo Bernsteinov bazni polinom treh spremenljivk stopnje n glede na T kot*

$$B^n_{ijkl} := \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l,\ \ i+j+k+l = n.$$

Ob pojavu negativnih indeksov ali indeksov, večjih od n, je B^n_{ijkl} enak 0. Ker so u_1, u_2, u_3, u_4 linearni polinomi, sledi, da je vsak B^n_{ijkl} polinom stopnje n.

Izrek 4.2. *Množica $\mathcal{B}^n := \{B^n_{ijkl}\}_{i+j+k+l=n}$ Bernsteinovih baznih polinomov predstavlja bazo prostora polinomov treh spremenljivk $\mathbb{P}^3_n$. Še več,*

$$\sum_{i+j+k+l=n} B^n_{ijkl}(\boldsymbol{u}) = 1 \ \textit{in}\ 0 \le B^n_{ijkl}(\boldsymbol{u}) \le 1\ \forall \boldsymbol{u} = Bar((x,y,z);T), (x,y,z) \in T.$$

Dokaz. Da Bernsteinovi bazni polinomi res tvorijo razčlenitev enote, sledi neposredno iz sledečega izračuna:

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \frac{n!}{i!\ j!\ k!\ l!} u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l = (u_1+u_2+u_3+u_4)^n = 1.$$

Vrednosti $B^n_{ijkl}(\mathbf{u})$ se res nahajajo med 0 in 1, saj Bernsteinovi polinomi po definiciji zavzamejo nenegativne vrednosti po eni strani, po drugi pa iz dejstva, da je (kot smo prikazali na začetku tega dokaza) seštevek $B^n_{ijkl}(\mathbf{u})$ po vseh $i+j+k+l=n$ enak 1, posamezen Bernsteinov bazni polinom $B^n_{ijkl}(\mathbf{u})$ vrednosti 1 gotovo ne bo presegel.

Dokažimo sedaj, da množica $\mathcal{B}^n$ res predstavlja bazo prostora $\mathbb{P}^3_n$.

Polinomov v množici $\mathcal{B}^n$ je $\binom{n+3}{3}$, kar je enako vrednosti $\dim \mathbb{P}^3_n$. Preostane nam le še, da z indukcijo pokažemo, da vse monome $\{x^\alpha y^\beta z^\gamma\}_{0\le \alpha+\beta+\gamma\le n}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Bernstainovih baznih polinomov treh spremenljivk.

Dokazali smo že, da $\sum_{i+j+k+l=n} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) = 1$. Če sedaj x najprej razpišemo kot $x = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4$, nato pa obe strani pomnožimo z $1 = \sum_{i+j+k+l=n-1} B^{n-1}_{ijk}$, dobimo:

$$x = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(ix_1+jx_2+kx_3+lx_4)}{n} B^n_{ijkl}(x,y,z).$$

Enak postopek ponovimo še za y in z:

$$y = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iy_1+jy_2+ky_3+ly_4)}{n} B^n_{ijkl}(x,y,z),$$

$$z = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{(iz_1+jz_2+kz_3+lz_4)}{n} B^n_{ijkl}(x,y,z).$$

Ker je število baznih funkcij v $\mathcal{B}^n$ enako dimenziji $\mathbb{P}_n$, tj. $\binom{n+3}{2}$, sledi, da $\mathcal{B}^n$ predstavlja bazo $\mathbb{P}_n$. Sledi

$$(x,y,z) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Big(\frac{i}{n}\mathbf{V}_1 + \frac{j}{n}\mathbf{V}_2 + \frac{k}{n}\mathbf{V}_3 + \frac{l}{n}\mathbf{V}_4\Big) B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}),$$

kjer $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Predpostavimo sedaj, da trditev velja vse stopnje, manjše ali enake $n-1$. Izberemo monom $x^\alpha y^\beta z^\gamma, \alpha+\beta+\gamma=n$, $c_{\mathbf{i}}$ pa predstavlja nek koeficient. Potem:

$$\begin{aligned}
&x^\alpha y^\beta z^\gamma = x(x^{\alpha-1}y^\beta z^\gamma) \overset{\text{I.P.}}{=} x \sum_{|\mathbf{i}|=n} c_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \\
&= (u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4)\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{j+k+l=n-1-i} c_{\mathbf{i}}\frac{(n-1)!}{i!j!k!l!}u_1^i u_2^j u_3^k u_4^l\Big) \\
&= \cdots = \sum_{|\mathbf{i}|=n}\Big(\frac{i}{n}x_1 c_{i-1,j,k,l} + x_2 c_{i,j,k-1,l} + x_3 c_{i,j,k-1,l} + x_4 c_{i,j,k,l-1}\Big)B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

□

S tem smo dokazali, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}^3_n$ zapišemo kot linearno kombinacijo Bernstainovih baznih polinomov treh spremenljivk, torej

$$p(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} c_{\mathbf{i}} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}).$$

5 De Casteljaujev algoritam

Podobno kot pri Bézierjevih krpah lahko točke na Bézierjevih polinomov izračunamo s pomočjo de Casteljaujevega algoritma, ki je posplošitev standardnega de Casteljauovega algoritma za Bézierjeve krivulje. Torej lahko izračunamo vrednost Bézierjevega polinoma pri parametar u s ponavljanje linearnih interpolacij. Tako kot algoritem za trikotne krpe, imamo tudi tukaj kontrolno mrežo v obliki strukture iz tetraedrov namesto kontrolnega poligona. Kontrolno mrežo določa $\dim \mathbb{P}^3_n = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$.

Vhodni podatki algoritma so kontrolnih točk $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$, $|\mathbf{i}|=n$, $i,j,k,l \in \mathbb{N}_0$ ter točka (x,y,z) z baricentričnimi koordinatam $\mathbf{u} = Bar((x,y,z);T)$. Izhodni podatek tega algoritma je natančno točka $\mathbf{b}^n_{\mathbf{0}}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^n_{0,0,0,0}$, ki se nahaja na Bezierjevega polinoma. Psevdokoda tega algoritma lahko izpišemo kot sledi:

Algoritem 1 de Casteljaujev algoritem

Vhod: $b_{\mathbf{i}}$ z $|\mathbf{i}|=n$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$
  for $r=1,2,\ldots,n$ **do**
    for $|\mathbf{i}|=n-r$ **do**
      $\mathbf{b}^r_{\mathbf{i}} = u_1\mathbf{b}^{r-1}_{i+1,j,k,l} + u_2\mathbf{b}^{r-1}_{i,j+1,k,l} + u_3\mathbf{b}^{r-1}_{i,j,k+1,l} + u_4\mathbf{b}^{r-1}_{i,j,k,l+1}$
    end for
  end for
Izhod: $\mathbf{b}^n_{0,0,0,0}(\mathbf{u})$

6 Odvodi

Če imamo podan vektor $\mathbf{d} := (d_x, d_y, d_z) \in \mathbb{R}^3$ in točko $\mathbf{v} = (x, y, z)$, lahko definiramo smerne odvode funkcije treh spremenljivk f v smeri vektorja $\mathbf{d}$ v točki $\mathbf{v}$ kot

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{d}} f(x,y,z) &:= \frac{d}{dt} f(\mathbf{v} + t\mathbf{d})\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(x + td_x, y + td_y, z + td_z)\Big|_{t=0} \\ &= f_x(x,y,z)d_x + f_y(x,y,z)d_y + f_z(x,y,z)d_z. \end{aligned}$$

Ker pa nas zanimajo odvodi polinomov $p \in \mathbb{P}_n^3$, ki jih izrazimo s pomočjo Bernsteinovih baznih polinomov, si oglejmo naslednjo lemo.

Lema 6.1. *Naj bo $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$, $Bar(\boldsymbol{d}; T) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ pa naj predstavljajo njegove baricentrične koordinate. Ker gre za vektor in ne točko, tako velja $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0$. Potem za poljubne $i + j + k + l = n$ velja:*

$$D_{\boldsymbol{d}} B^n_{ijkl}(\boldsymbol{u}) = n\Big(\mu_1 B^{n-1}_{i-1,j,k,l}(\boldsymbol{u}) + \mu_2 B^{n-1}_{i,j-1,k,l}(\boldsymbol{u}) + \mu_3 B^{n-1}_{i,j,k-1,l}(\boldsymbol{u}) + \mu_4 B^{n-1}_{i,j,k,l-1}(\boldsymbol{u})\Big).$$

Dokaz. Sledimo postopku odvajanja, ki smo ga predstavili na začetku dotičnega poglavja.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{d}} B^n_{ijkl}(\mathbf{u}) &= \frac{d}{dt} B^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{u} + t\boldsymbol{\mu})\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{n!}{i!j!k!l!}(u_1 + t\mu_1)^i (u_2 + t\mu_2)^j (u_3 + t\mu_3)^k (u_4 + t\mu_4)^l\Big)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{n!}{i!j!k!l!}\Big(iu_1^{i-1}u_2^j u_3^k u_4^l \mu_1 + ju_1^i u_2^{j-1} u_3^k u_4^l \mu_2 + ku_1^i u_2^j u_3^{k-1} u_4^l \mu_3 + lu_1^i u_2^j u_3^k u_4^{l-1} \mu_4\Big) \\ &= n\Big(\mu_1 B^{n-1}_{i-1,j,k,l}(\mathbf{u}) + \mu_2 B^{n-1}_{i,j-1,k,l}(\mathbf{u}) + \mu_3 B^{n-1}_{i,j,k-1,l}(\mathbf{u}) + \mu_4 B^{n-1}_{i,j,k,l-1}(\mathbf{u})\Big). \end{aligned}$$

□

Z uporabo zgornje leme pridemo do naslednjega rezultata:

$$D_{\mathbf{d}} p(\mathbf{u}) = n \sum_{|\mathbf{i}|=n-1} \Big(\mu_1 \mathbf{b}_{i+1,j,k,l} + \mu_2 \mathbf{b}_{i,j+1,k,l} + \mu_3 \mathbf{b}_{i,j,k+1,l} + \mu_4 \mathbf{b}_{i,j,k,l+1}\Big) B^{n-1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u})$$

Definirajmo še višje odvode.

$$\begin{aligned} D^r_{\mathbf{d}} p(\mathbf{u}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{i}|=n-r} \mathbf{b}^r_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^{n-r}_{\mathbf{i}} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|\mathbf{i}|=r} \mathbf{b}^{n-r}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) B^r_{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Za konec omenimo še, da je zaradi neskončne odvedljivosti polinomov v primeru mešanih odvodov (na primer $D_{d_z} D_{d_y} D_{d_x} p(\mathbf{u})$) vseeno, v kakšnem zaporedju izvajamo posamezne odvode.

Literatura

[1] M. J. Lai, L. Schumaker: Spline functions on triangulations, Cambridge University Press, 2007, str. 434-443.