Конспект курса Р. В. Бессонова по функциональному анализу

Михаил Иванов

19 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Базовый функциональный анализ

1.1. Теорема Хана-Банаха

Определение 1.1.1. X называется *линейным пространством*, или ***ЛП*** (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$), если на нём заданы бинарные операции $+\colon X \times X \to X$ и $\cdot\colon \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}} \times X \to X$, такие что для любых $x, y, z \in X$ и $\alpha, \beta \in \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$ выполнено:

1) $(x + y) + x = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения в X);

2) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения в X);

3) $\exists 0 \in X : x + 0 = x$ (существование нейтрального элемента по сложению в X);

4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (линейность по коэффициенту);

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (линейность по вектору);

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения на коэффициент);

7) $1x = x$ (свойство единицы);

8) $0x = 0$ (свойство нуля).

Временно засядем в вещественный функциональный анализ.

Определение 1.1.2. $p\colon X \to \mathbb{R}$ — *субаддитивный* функционал, если

$$\forall x, y \in X \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Определение 1.1.3. $p\colon X \to \mathbb{R}$ — *положительно однородный* функционал на X, если

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall x \in X \quad p(tx) = tp(x).$$

Определение 1.1.4. $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — *линейный* функционал, или ***ЛФ***, если

$$\forall x, t \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Определение 1.1.5. $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — *сублинейный* функционал, если он субаддитивный и положительно однородный.

Определение 1.1.6. Для **ЛП** X будем называть $Y \subseteq X$ *линейным подмножеством* X, если $+_X|_Y$, $+_X|_Y$, $0_X \in Y$ задают на Y структуру линейного пространства.

Теорема 1.1.1 (Хан, Банах, вещественная форма)**.** *Пусть X — вещественное **ЛП**, $L \subseteq X$ — линейное подмножество X, $\varphi\colon L \to \mathbb{R}$ — **ЛФ**, $p\colon X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, такой что $\forall x \in L \quad \varphi(x) \leqslant p(x)$. Тогда существует **ЛФ** $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$, такой что $\forall x \in L \quad \Phi(x) = \phi(x)$ и $\forall x \in X \quad \Phi(x) \leqslant p(x)$.*

Доказательство. Если $L = X$, то, очевидно, $\Phi = \varphi$ подходит. В противном случае зафиксируем любой $x_0 \in X \backslash L$ и рассмотрим в нашем X линейное подмножество $L_1 = \langle x_0 \rangle + L = \{\alpha x_0 + x \mid \alpha \in \mathbb{R}, x \in L\}$. Зададим на нём **ЛФ** $\Phi_\beta\left(\alpha x_0 + x\right) = \alpha\beta + \varphi(x)$

Подберём такое β, чтобы **ЛФ**Φ_β на L_1, определяемый по формуле $\Phi_\beta\left(\alpha x_0 + x\right) = \alpha\beta + \varphi(x)$, был ограничен p сверху: $\forall z \in L_1 \quad \Phi_\beta(z) \overset{\circledast}{\leqslant} p(z)$. Нам надо, чтобы $\circledast$ было выполнено для $z = \alpha x_0 + x$. Другими словами, хотим, чтобы $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \alpha\beta + \varphi(x) \leqslant p\left(\alpha x_0 + x\right)$. Для $\alpha = 0$ мы это уже знаем. В остальных случаях можно поделить неравенство на $|\alpha|$, ведь это положительное число, на него можно делить неравенства, а положительная однородность позволяет заносить деление в аргумент: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \beta \operatorname{sgn}\alpha + \varphi\left(\frac{x}{|\alpha|}\right) \leqslant p\left(x_0 \operatorname{sgn}\alpha + \frac{x}{|\alpha|}\right)$.

$\frac{x}{|\alpha|}$ может быть любым вектором $z \in L$, поэтому условие на наше β равносильно тому, что $\forall w, z \in X \quad -p\left(-x_0 - w\right) - \varphi(w) \leqslant \beta \leqslant p\left(x_0 + z\right) - \varphi(z)$. Чтобы оно вообще нашлось, необходимо и достаточно, чтобы левая часть была всегда не больше правой: $\forall w, z \in X \quad -p\left(-x_0 - w\right) - \varphi(w) \leqslant p\left(x_0 + z\right) - \varphi(z)$. Перепишем это как $\forall w, z \in X \quad \varphi(z - w) \leqslant p\left(x_0 + z\right) + p\left(-x_0 - w\right)$ по линейности. Это верно, так как $p\left(x_0 + z\right) + p\left(-x_0 - w\right) \geqslant p(z - w)$, а $p(z - w) \geqslant \varphi(z - w)$, так что можно взять любое $\beta \in \left[\sup\limits_{w \in L}\left\{-p\left(x_0 - w\right) - \varphi(w)\right\}; \inf\limits_{z \in L}\left\{p\left(x_0 + z\right) - \varphi(z)\right\}\right]$ (этот отрезок непустой).

Для дальнейшего нам потребуется лемма Цорна.

Определение 1.1.7. Для множества $\prec \subseteq M \times M$ и $x, y \in M$ будем писать $x \prec y$ и $y \succ x$, если $(x, y) \in \prec$, и $x \not\prec y$ и $y \not\succ x$, если $(x, y) \notin \prec$.

Множество $\prec \subseteq M \times M$ называется *частичным порядком*, если для любых $x, y, z \in M$ выполнены его свойства:

1) $x \not\prec x$ (антирефлексивность);

2) $x \prec y \quad \Rightarrow \quad y \not\prec x$ (антисимметричность);

3) $(x \prec y) \wedge (y \prec z) \quad \Rightarrow \quad x \prec z$ (транзитивность).

В таком случае пара $\mathfrak{M} = \langle M, \prec \rangle$ называется *частично упорядоченным множеством*, или ***ЧУМ***.

Частичный порядок $\prec \subseteq M \times M$ называется *линейным порядком* на M, если для любых двух элементов $x, y \in M$ выполнена ровно одна из трёх возможностей: $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$.

ЧУМ называется *линейно упорядоченным множеством*, или ***ЛУМ***, или *цепью*, если порядок на нём линейный.

Для любого **ЧУМ** $\mathfrak{M} = \langle M, \prec \rangle$ любое $m \subseteq M$ индуцирует некоторый **ЧУМ** $\mathfrak{m} = \langle m, \prec|_m \rangle = \langle m, \prec \cap\, m \times m \rangle$, поэтому можно говорить о частично упорядоченных подмножествах данного **ЧУМ**.

Элемент $x \in M$ называется *максимальным* в **ЧУМ** $\mathfrak{M} = \langle M, \prec \rangle$, если нет такого $y \in M$, что $x \prec y$. Это не то же самое, что *наибольший элемент* — такой $x \in M$, что $\forall y \in M \quad (x \succ y) \vee (x = y)$. Если в **ЧУМ** есть наибольший элемент, то он же является единственным максимальным элементом в нём, однако максимальный элемент необязательно наибольший.

Элемент $x \in M$ называется *верхней гранью* для $m \subseteq M$ в **ЧУМ** $\mathfrak{M} = \langle M, \prec \rangle$, если в $m \cup \{x\}$ элемент x наибольший.

Лемма 1.1.1 (Цорн)**.** *Если в* ***ЧУМ*** $\mathfrak{M}$ *у любой подцепи есть верхняя грань, то в* $\mathfrak{M}$ *есть максимальный элемент.*

Доказательство леммы Цорна приводить не будем, зато будем ею пользоваться.

Рассмотрим M — множество всех **ЛФ** ψ, заданных на линейном подмножестве X, содержащих L, таких что $\forall x \in \operatorname{dom}\psi \quad \psi(x) \leqslant p(x)$ и $\forall x \in L \quad \psi(x) = \varphi(x)$. Зададим порядок $\prec$ на этих **ЛФ**: $\psi_1 \prec \psi_2$, если ψ_2 является доопределением ψ_1: $\operatorname{dom}\psi_1 \subsetneq \operatorname{dom}\psi_2$ и $\forall x \in \operatorname{dom}\psi_1 \quad \psi_1(x) = \psi_2(x)$. Это частичный порядок. Проверим условие леммы Цорна в $\mathfrak{M} = \langle M, \prec \rangle$: любая цепь — это набор **ЛФ**, которые попарно друг друга доопределяют. Объединим их, понятно, что вновь получился **ЛФ** из M, и он больше либо равен любого **ЛФ**из цепи. Значит, применима лемма Цорна, и в $\mathfrak{M}$ есть максимальный **ЛФ** Φ. Он удовлетворяет всем требованиям теоремы Хана-Банаха, кроме $\operatorname{dom}\Phi = X$. Но и ему он тоже удовлетворяет, так как иначе (согласно первой половине рассуждения) в $\mathfrak{M}$ есть $\Phi_\beta \succ \Phi$, что невозможно по максимальности. □

Определение 1.1.8. Для **ЛП** X над $\substack{\mathbb{R}\\\mathbb{C}}$ будем называть $p\colon X \to \mathbb{R}$ *полунормой*, если $\forall x, y \in X$ и $\alpha \in \substack{\mathbb{R}\\\mathbb{C}}$ выполнены условия:

1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (однородность);

2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника).

Предложение 1.1.1. *Любая полунорма* $p\colon X \to \mathbb{R}$ *сохраняет ноль, чётна и неотрицательна: для любого* $x \in X$ *выполнено* $p(0) = 0$, $p(x) = p(-x)$, $p(x) \geqslant 0$.

Доказательство. $p\left(\vec{0}\right) = p\left(0 \cdot \vec{0}\right) = |0|\left(\vec{0}\right) = 0$; $p(-x) = p(-1 \cdot x) = |-1| p(x) = p(x)$; $p(x) = \frac{p(x)+p(-x)}{2} \geqslant \frac{p(x-x)}{2} = 0$. □

Определение 1.1.9. В комплексном **ЛП** X функционал $u\colon X \to \mathbb{R}$ называется *вещественно линейным*, если он является вещественным **ЛФ**на X как на вещественном **ЛП**.

Лемма 1.1.2. *В комплексном* ***ЛП*** *для любого* ***ЛФ*** $\psi\colon X \to \mathbb{C}$ *существует вещественно линейный функционал* $u\colon X \to \mathbb{R}$, *такой что* $\forall x \in X \quad \psi(x) \overset{\circledast}{=} u(x) - iu(ix)$. *Обратно, по формуле* $\circledast$ *любой вещественно линейный функционал и задаёт* ***ЛФ*** ψ.

Доказательство. Нетрудно понять, что $u(x) = \Re\psi(x)$ представить в виде $u(x) + iv(x)$, где $u, v\colon X \to \mathbb{R}$, то u и v будут вещественно линейными функционалами. Покажем, что u удовлетворяет $\circledast$: . □

Теорема 1.1.2 (Хан, Банах, комплексная форма)**.** *Пусть* X *— комплексное* ***ЛП***, $L \subseteq X$ *— линейное подмножество* X, $\varphi\colon L \to \mathbb{C}$ *—* ***ЛФ***, $p\colon X \to \mathbb{R}$ *— полунорма, такая что* $\forall x \in L \quad |\varphi(x)| \leqslant p(x)$. *Тогда существует* ***ЛФ*** $\Phi\colon X \to \mathbb{C}$, *такой что* $\forall x \in L \quad \Phi(x) = \phi(x)$ *и* $\forall x \in X \quad \Phi(x) \leqslant p(x)$.

Предметный указатель