Решение листочка 2 по теории вероятностей

Михаил Иванов

Декабрь 2019

Задача 1

Попробуем посмотреть на распределения. Нас просят доказать, что есть некоторая случайная величина M, к которой M_n сходится по распределению — то есть во всех точках, где F_M непрерывна, F_{M_n} сходится к F_M.

Взглянем на F_{M_n} (в одном месте мы пользуемся независимостью и одинаковой распределённостью величин):

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left\{M_n \leqslant x\right\} = \mathbb{P}\Big\{n \min_{j \leqslant n} W_j \leqslant x\Big\} = 1 - \mathbb{P}\Big\{n \min_{j \leqslant n} W_j > x\Big\} =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big\{\bigwedge_{j \leqslant n} nW_j > x\Big\} = 1 - \mathbb{P}\left\{nW_1 > x\right\}^n = 1 - \mathbb{P}\left\{W_1 > \frac{x}{n}\right\}^n =$$

$$= 1 - \left(\int\limits_{\max\left(\frac{x}{n}, 0\right)}^{+\infty} e^{-t}\, dt\right)^n =$$

$$= 1 - \left(e^{-\max\left(\frac{x}{n}, 0\right)}\right)^n = 1 - e^{-\max(x, 0)}.$$

Получилась функция стандартного показательного распределения. Поэтому M_n сходится по распределению.

Но вот сходимостью почти наверное и не пахнет. Действительно, рассмотрим событие $A_n = \left\{W_n \leqslant \frac{1}{n}\right\}$. Все события A_n независимы; кроме того, $\mathbb{P}A_n = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{e-1}{e}$ (при $n \geqslant 1$), поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}A_n$ расходится. Тогда по лемме Бореля-Кантелли вероятность того, что множество n, для которых выполнено событие A_n, бесконечно, равна единице. То есть почти наверное $nW_n \leqslant 1$ для бесконечно многих n. Это значит, что почти наверное $\underline{\lim}_{n \to +\infty} nW_n \leqslant 1$. Следовательно, почти наверное $\underline{\lim}_{n \to +\infty} M_n \leqslant 1$ (так как $M_n \leqslant nW_n$). С другой стороны, если бы M_n сходилась почти наверное, то мы знаем, к какой величине — к стандартной показательной. У неё почти наверняка был бы предел, и с вероятностью $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^{-1}$ предел был бы больше 1. Значит, нижний предел тоже с вероятностью не менее e^{-1} был бы больше 1, а мы только что выяснили, что он почти наверное не больше 1.

Задача 2

Обозначим
$$\mathcal{N}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$
Пусть F_X — функция распределения случайной величины X:
$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leqslant x\}.$$
И $\mathcal{N}$, и F_X действуют из $\mathbb{R}$ в $[0;1]$. Но $\mathcal{N}$ — это гладкая функция с положительной производной, поэтому дифференциал по F_X переписывается через дифференциал по $\mathcal{N}$: существует вероятностная мера μ на отрезке $[0;1]$, что $F_X = \mu \circ \mathcal{N}$. Мы хотим доказать равносильность условия про функцию g и того, что X имеет распределение $\mathcal{N}$, то есть что $F_X = \mathcal{N}$, то есть что μ — это обычная мера Лебега.

Условие равносильно тому, что $\mathbb{E}\left(Xg(X) - g'(X)\right) = 0$, или
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xg(x) - g'(x)\, dF_X = 0,$$
или
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\left(g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' e^{\frac{x^2}{2}}\, dF_X = 0.$$
Потрудимся это красиво расписать, пользуясь тем, что $\mathcal{N}' = \frac{d\mathcal{N}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{dg\mathcal{N}'}{dx} : \frac{d\mathcal{N}}{dx}\, d\mu \circ \mathcal{N} = 0.$$
$g(x)\mathcal{N}'(x)$ — это любая непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем (так как $\mathcal{N}$ гладкая с положительной производной). Но это функция переменной x. Подставим в качестве x функцию, обратную к $\mathcal{N}$, получим некоторую функцию h, которая принимает значение $\mathcal{N}$ и восстанавливает, чему при этом значении должно быть равно $g\mathcal{N}'$. Функция h — это любая непрерывно дифференцируемая функция с носителем в интервале $(0;1)$ (так как она является композицией хорошей функции $g(x)\mathcal{N}'(x)$ и гладкой $\mathcal{N}^{-1}$, в обратную сторону это соответствие тоже работает). Итак, у нас получается такое условие:
$$\int\limits_{0}^{1} -\frac{dh}{d\mathcal{N}}\, d\mu = 0.$$
Заметим, что мы уже полностью забыли о том, что $\mathcal{N}$ была функцией; теперь это переменная, по которой мы интегрируем и дифференцируем.

Докажем, что $\mu = \lambda$ равносильно тому, что для любой непрерывно дифференцируемой h с носителем в $(0;1)$ выполнено неравенство выше. В одну сторону очевидно: если μ — мера Лебега, то интеграл производной функции с компактным носителем нулевой (равен разности значений функции в единице и нуле, которые оба нулевые).

В другую сторону менее очевидно. Как известно из математического анализа, для любых двух различных мер с компактным носителем существует гладкая функция с компактным носителем, у которой по ним разные интегралы (это следует из теоремы Стоуна-Вейерштрасса). Вот для любого отрезка $[a;b]$ строго внутри $(0;1)$ можно ограничить μ и λ только на отрезок $[a;b]$, и если эти меры там разные, то найдётся гладкая функция с носителем в $[a;b]$, у которой в этом отрезке разные интегралы. Если найдётся непрерывная функция с компактным носителем с другим отношением интегралов по этим двум мерам, то найдётся их непрерывная линейная комбинация $\varphi(\mathcal{N})$, у которой лебегов интеграл нулевой, а интеграл по μ ненулевой. Тогда $\Phi(\mathcal{N}) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$ подойдёт в качестве h, для которой $\int\limits_0^1 -\frac{dh}{d\mathcal{N}}\,d\mu \neq 0$: она непрерывно дифференцируема, так как её производная — φ, она имеет компактный носитель, так как интеграл φ по Лебегу нулевой, ну и неравенство выполнено, так как интеграл φ по μ ненулевой.

Таким образом, мы доказали, что отношение лебегова интеграла и интеграла по μ у любых непрерывных функций с компактным носителем в $(0;1)$ фиксировано. При этом, если в качестве последовательности функций рассмотреть такие гладкие функции со значениями от 0 до 1, у которых значения в $\left[0;\frac{1}{n}\right]$ и $\left[1-\frac{1}{n};1\right]$ нулевые, а в $\left[\frac{2}{n}';1-\frac{2}{n}\right]$ единичные, то эти функции имеют компактные носители в $(0;1)$, и при этом по обеим мерам их интеграл стремится к мере единичного отрезка, то есть к единице. ($\mu[0;1]=1$, так как $\mu[0;1] = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1-0 = 1$.) Значит, отношение равно единице. Таким образом, на отрезках в $(0;1)$ меры μ и λ совпадают. Значит, они вообще совпадают, так как меры точек 0 и 1, очевидно, нулевые, а любой отрезок в $[0;1]$ представим в виде объединения счётного числа отрезков из $(0;1)$ и, возможно, точек 0 и 1.

1. Задача 3

Понятно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из $\frac{\|X_n\|^2}{n} \in [1-\delta;1+\delta]$ следует $\frac{X_n}{\sqrt{n}} \in B(1+\varepsilon) \setminus B(1-\varepsilon)$. Так что мы докажем, что вероятность условия с дельтой стремится к единице.

Рассмотрим последовательность N_n из независимых стандартно нормально распределённых величин. Тогда $\|X_n\|$ распределено так же, как $N_1^2+\ldots+N_n^2$. Поскольку $\mathbb{P}\left\{\frac{\|X_n\|^2}{n} \in [1-\delta;1+\delta]\right\}$ зависит лишь от распределения $\|X_n\|$, можно считать, что $\|X_n\|^2 = N_1^2 + \ldots + N_n^2$. Теперь применим центральную предельную теорему. N_n^2 одинаково распределены и независимы, их матожидания равны $\mu = \sigma^2(2-1)!! = 1$, их дисперсии равны $\sigma^4(4-1)!! - mu^2 = 2$, то есть они конечны, значит, $\frac{\|X_n\|^2 - 1\cdot n}{\sqrt{2n}}$ сходится по распределению к $\mathcal{N}$. Вероятность того, что $\frac{\|X_n\|^2}{n} \in [1-\delta;1+\delta]$, равна вероятности того, что $\frac{\|X_n\|^2}{\sqrt{2n}} \in \left[\sqrt{\frac{n}{2}} - \delta\sqrt{\frac{n}{2}}; \sqrt{\frac{n}{2}} + \delta\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$, то есть вероятности того, что $\frac{\|X_n\|^2 - 1\cdot n}{\sqrt{2n}} \in \left[-\delta\sqrt{\frac{n}{2}}; \delta\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$. Так как эта штука сходится к нормальному распределению, то эта вероятность стремится к единице: она будет больше $1-2k$, поскольку можно рассмотреть достаточно большой отрезок, на котором интеграл нормального распределения больше $1-k$, и дождаться, пока на нём нормальное и наше распределения будут отличаться менее чем на k по распределению.

Задача 4

В прямую сторону верно. Для любого $\varepsilon > 0$ из сходимости по вероятности следует, что $\mathbb{P}\left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \to 0$. Значит, для достаточно больших $n > N$ эта вероятность меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Значит, для достаточно больших $m > N$ и $n > N$ вероятность того, что хоть кто-то из X_n и X_m отстоит от X более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, меньше $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Но это событие следует из того, что $|X_n - X_m| > \varepsilon$. Следовательно, вероятность того, что $|X_n - X_m| > \varepsilon$, меньше ε, с того же самого места N.

В обратную сторону мы сделаем так: мы найдём подпоследовательность, сходящуюся по вероятности. Чтобы найти место, начиная с которого, любой член последовательности отличается более чем на ε от предела с вероятностью менее, чем ε, мы возьмём максимум из места, с которого подпоследовательность отличается от предела более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$ с вероятностью менее, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, и места, с которого любые два члена последовательности отличаются более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$ с вероятностью менее, чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

Искать подпоследовательность будем так: рассмотрим любой строго положительный сходящийся ряд a_n, найдём места N_n, начиная с которых, любые два члена последовательности отличаются более чем на a_n с вероятностью менее, чем a_n, и рассмотрим любую подпоследовательность, в которой n-й член правее всех N_i, $i \leqslant n$. Теперь X определим так: если у подпоследовательности есть предел, то X_n ему и равняется, а иначе X_n равно любой константе. Если мы докажем, что случай, что предела нет, имеет нулевую вероятность, то мы выиграем: подпоследовательность будет сходиться даже не по вероятности, а почти наверное.

Для доказательства рассмотрим такие события: A_n означает, что X_n отличается от X_{n+1} более чем на a_n. Тогда $\mathbb{P}A_n < a_n$. Ряд из вероятностей A_n, таким образом, сходится. По лемме Бореля-Кантелли вероятность того, что бесконечное количество разных A_n выполнится, нулевая. Значит, почти наверное с некоторого места A_n не выполняются. Значит, почти наверное с этого места последовательность сходится по Коши (n-й и m-й члены отличаются меньше, чем на $\min(n, m)$-й остаток ряда), а тогда она просто почти наверное сходится, что и требовалось.

Задача 5

Пусть X и $\mathcal{M}$ независимы. Тогда действуем ровно по определению. Что такое $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\}$? Это некоторая случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{M}$. Давайте предположим, что она не равна почти наверное числу $\mathbb{E}f(X)$. Не умаляя общности, положительна вероятность, что $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\} > \mathbb{E}f(X)$. Рассмотрим борелевский луч $x > \mathbb{E}f(X)$ и его прообраз M при действии $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\}$. Так как $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\}$ измеримая, $M \in \mathcal{M}$. Применим к множеству M определение условного математического ожидания:

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\}\chi_M\right) = \mathbb{E}f(X)\chi_M = \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}\chi_M = \mathbb{E}f(X)\mathbb{P}M.$$

Второе равенство выполнено, так как M и X независимы. Таким образом, на множестве M величина $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\}$ в среднем равна $\frac{\mathbb{E}f(X)\mathbb{P}M}{\mathbb{P}M} = \mathbb{E}f(X)$; с другой стороны, на M она строго больше $\mathbb{E}f(X)$; это невозможно. Аналогично рассматривается случай, если положительна вероятность, что $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\} < \mathbb{E}f(X)$. Остаётся лишь единственная возможность, что $\mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\} = \mathbb{E}f(X)$ почти наверное, а это мы и хотели.

Обратно, пусть есть условие про борелевскую функцию. То, что случайная величина X не зависит от $\mathcal{M}$, равносильно тому, что для каждого борелевского множества A событие $X \in A$ не зависит от $\mathcal{M}$. Рассмотрим $f(x) = \chi_A$, у $f(X)$ конечное матожидание, так как f ограниченная, поэтому $\mathbb{P}\{X \in A \mid \mathcal{M}\} = \mathbb{E}\{f(X) \mid \mathcal{M}\} = \mathbb{E}f(X) = \mathbb{P}\{X \in A\}$.

Задача 6