Решение листочка 2 по теории вероятностей

Михаил Иванов

Декабрь 2019

Задача 1

Попробуем посмотреть на распределения. Нас просят доказать, что есть некоторая случайная величина M, к которой M_n сходится по распределению — то есть во всех точках, где F_M непрерывна, F_{M_n} сходится к F_M.

Взглянем на F_{M_n} (в одном месте мы пользуемся независимостью и одинаковой распределённостью величин):

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left\{M_n \leqslant x\right\} = \mathbb{P}\Big\{n \min_{j \leqslant n} W_j \leqslant x\Big\} = 1 - \mathbb{P}\Big\{n \min_{j \leqslant n} W_j > x\Big\} =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\Big\{\bigwedge_{j \leqslant n} nW_j > x\Big\} = 1 - \mathbb{P}\left\{nW_1 > x\right\}^n = 1 - \mathbb{P}\left\{W_1 > \frac{x}{n}\right\}^n =$$

$$= 1 - \left(\int\limits_{\max\left(\frac{x}{n},0\right)}^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)^n =$$

$$= 1 - \left(e^{-\max\left(\frac{x}{n},0\right)}\right)^n = 1 - e^{-\max(x,0)}.$$

Получилась функция стандартного показательного распределения. Поэтому M_n сходится по распределению.

Но вот сходимостью почти наверное и не пахнет. Действительно, рассмотрим событие $A_n = \left\{W_n \leqslant \frac{1}{n}\right\}$. Все события A_n независимы; кроме того, $\mathbb{P}A_n = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \geqslant \geqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{e-1}{e}$ (при $n \geqslant 1$), поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}A_n$ расходится. Тогда по лемме Бореля-Кантелли вероятность того, что множество n, для которых выполнено событие A_n, бесконечно, равна единице. То есть почти наверное $nW_n \leqslant 1$ для бесконечно многих n. Это значит, что почти наверное $\underline{\lim}_{n\to+\infty} nW_n \leqslant 1$. Следовательно, почти наверное $\underline{\lim}_{n\to+\infty} M_n \leqslant 1$ (так как $M_n \leqslant nW_n$). С другой стороны, если бы M_n сходилась почти наверное, то мы знаем, к какой величине — к стандартной показательной. У неё почти наверняка был бы предел, и с вероятностью $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-1}$ предел был бы больше 1. Значит, нижний предел тоже с вероятностью не менее e^{-1} был бы больше 1, а мы только что выяснили, что он почти наверное не больше 1.

Задача 2

Обозначим

$$\mathcal{N}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Пусть F_X — функция распределения случайной величины X:

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leqslant x\}.$$

И $\mathcal{N}$, и F_X действуют из $\mathbb{R}$ в $[0;1]$. Но $\mathcal{N}$ — это гладкая функция с положительной производной, поэтому дифференциал по F_X переписывается через дифференциал по $\mathcal{N}$: существует вероятностная мера μ на отрезке $[0;1]$, что $F_X = \mu \circ \mathcal{N}$. Мы хотим доказать равносильность условия про функцию g и того, что X имеет распределение $\mathcal{N}$, то есть что $F_X = \mathcal{N}$, то есть что μ — это обычная мера Лебега.

Условие равносильно тому, что $\mathbb{E}\left(Xg(X) - g'(X)\right) = 0$, или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xg(x) - g'(x)\, dF_X = 0,$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\left(g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' e^{\frac{x^2}{2}}\, dF_X = 0.$$

Потрудимся это красиво расписать, пользуясь тем, что $\mathcal{N}' = \frac{d\mathcal{N}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{dg\mathcal{N}'}{dx} : \frac{d\mathcal{N}}{dx}\, d\mu \circ \mathcal{N} = 0.$$

$g(x)\mathcal{N}'(x)$ — это любая непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем (так как $\mathcal{N}$ гладкая с положительной производной). Но это функция переменной x. Подставим в качестве x функцию, обратную к $\mathcal{N}$, получим некоторую функцию h, которая принимает значение $\mathcal{N}$ и восстанавливает, чему при этом значении должно быть равно $g\mathcal{N}'$. Функция h — это любая непрерывно дифференцируемая функция с носителем в интервале $(0;1)$ (так как она является композицией хорошей функции $g(x)\mathcal{N}'(x)$ и гладкой $\mathcal{N}^{-1}$, в обратную сторону это соответствие тоже работает). Итак, у нас получается такое условие:

$$\int\limits_{0}^{1} -\frac{dh}{d\mathcal{N}}\, d\mu = 0.$$

Заметим, что мы уже полностью забыли о том, что $\mathcal{N}$ была функцией; теперь это переменная, по которой мы интегрируем и дифференцируем.

Докажем, что $\mu = \lambda$ равносильно тому, что для любой непрерывно дифференцируемой h с носителем в $(0;1)$ выполнено неравенство выше. В одну сторону очевидно: если μ — мера Лебега, то интеграл производной функции с компактным носителем нулевой (равен разности значений функции в единице и нуле, которые оба нулевые).

В другую сторону менее очевидно. Как известно из математического анализа, для любых двух различных мер с компактным носителем существует гладкая функция с компактным носителем, у которой по ним разные интегралы (это следует из теоремы Стоуна-Вейерштрасса). Вот для любого отрезка $[a;b]$ строго внутри $(0;1)$ можно ограничить μ и λ только на отрезок $[a;b]$, и если эти меры там разные, то найдётся гладкая функция с носителем в $[a;b]$, у которой в этом отрезке разные интегралы. Если найдётся непрерывная функция с компактным носителем с другим отношением интегралов по этим двум мерам, то найдётся их непрерывная линейная комбинация $\varphi(\mathcal{N})$, у которой лебегов интеграл нулевой, а интеграл по μ ненулевой. Тогда $\Phi(\mathcal{N}) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$ подойдёт в качестве h, для которой $\int\limits_0^1 -\frac{dh}{d\mathcal{N}}\,d\mu \neq 0$: она непрерывно дифференцируема, так как её производная — φ, она имеет компактный носитель, так как интеграл φ по Лебегу нулевой, ну и неравенство выполнено, так как интеграл φ по μ ненулевой.

Таким образом, мы доказали, что отношение лебегова интеграла и интеграла по μ у любых непрерывных функций с компактным носителем в $(0;1)$ фиксировано. При этом, если в качестве последовательности функций рассмотреть такие гладкие функции со значениями от 0 до 1, у которых значения в $\left[0;\frac{1}{n}\right]$ и $\left[1-\frac{1}{n};1\right]$ нулевые, а в $\left[\frac{2}{n}';1-\frac{2}{n}\right]$ единичные, то эти функции имеют компактные носители в $(0;1)$, и при этом по обеим мерам их интеграл стремится к мере единичного отрезка, то есть к единице. ($\mu[0;1] = 1$, так как $\mu[0;1] = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$.) Значит, отношение равно единице. Таким образом, на отрезках в $(0;1)$ меры μ и λ совпадают. Значит, они вообще совпадают, так как меры точек 0 и 1, очевидно, нулевые, а любой отрезок в $[0;1]$ представим в виде объединения счётного числа отрезков из $(0;1)$ и, возможно, точек 0 и 1.