

# Решение листочка 2 по теории вероятностей

Михаил Иванов

Декабрь 2019

## Задача 1

Попробуем посмотреть на распределения. Нас просят доказать, что есть некоторая случайная величина  $M$ , к которой  $M_n$  сходится по распределению — то есть во всех точках, где  $F_M$  непрерывна,  $F_{M_n}$  сходится к  $F_M$ .

Взглянем на  $F_{M_n}$  (в одном месте мы пользуемся независимостью и одинаковой распределённостью величин):

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}\{M_n \leq x\} = \mathbb{P}\left\{n \min_{j \leq n} W_j \leq x\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{n \min_{j \leq n} W_j > x\right\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left\{\bigwedge_{j \leq n} nW_j > x\right\} = 1 - \mathbb{P}\{nW_1 > x\}^n = 1 - \mathbb{P}\left\{W_1 > \frac{x}{n}\right\}^n = \\ &= 1 - \left(\int_{\max(\frac{x}{n}, 0)}^{+\infty} e^{-t} dt\right)^n = \\ &= 1 - \left(e^{-\max(\frac{x}{n}, 0)}\right)^n = 1 - e^{-\max(x, 0)}. \end{aligned}$$

Получилась функция стандартного показательного распределения. Поэтому  $M_n$  сходится по распределению.

Но вот сходимостью почти наверное и не пахнет. Действительно, рассмотрим событие  $A_n = \{W_n \leq \frac{1}{n}\}$ . Все события  $A_n$  независимы; кроме того,  $\mathbb{P}A_n = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{e-1}{e}$  (при  $n \geq 1$ ), поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}A_n$  расходится. Тогда по лемме Борелля-Кантелли вероятность того, что множество  $n$ , для которых выполнено событие  $A_n$ , бесконечно, равна единице. То есть почти наверное  $nW_n \leq 1$  для бесконечно многих  $n$ . Это значит, что почти наверное  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} nW_n \leq 1$ . Следовательно, почти наверное  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_n \leq 1$  (так как  $M_n \leq nW_n$ ). С другой стороны, если бы  $M_n$  сходилась почти наверное, то мы знаем, к какой величине — к стандартной показательной. У неё почти наверняка был бы предел, и с вероятностью  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-1}$  предел был бы больше 1. Значит, нижний предел тоже с вероятностью не менее  $e^{-1}$  был бы больше 1, а мы только что выяснили, что он почти наверное не больше 1.

## Задача 2

Обозначим

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Пусть  $F_X$  — функция распределения случайной величины  $X$ :

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}.$$

И  $\mathcal{N}$ , и  $F_X$  действуют из  $\mathbb{R}$  в  $[0; 1]$ . Но  $\mathcal{N}$  — это гладкая функция с положительной производной, поэтому дифференциал по  $F_X$  переписывается через дифференциал по  $\mathcal{N}$ : существует вероятностная мера  $\mu$  на отрезке  $[0; 1]$ , что  $F_X = \mu \circ \mathcal{N}$ . Мы хотим доказать равносильность условия про функцию  $g$  и того, что  $X$  имеет распределение  $\mathcal{N}$ , то есть что  $F_X = \mathcal{N}$ , то есть что  $\mu$  — это обычная мера Лебега.

Условие равносильно тому, что  $\mathbb{E}(Xg(X) - g'(X)) = 0$ , или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) - g'(x) dF_X = 0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\left(g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' e^{\frac{x^2}{2}} dF_X = 0.$$

Потрудимся это красиво расписать, пользуясь тем, что  $\mathcal{N}' = \frac{d\mathcal{N}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{dg\mathcal{N}'}{dx} : \frac{d\mathcal{N}}{dx} d\mu \circ \mathcal{N} = 0.$$

$g(x)\mathcal{N}'(x)$  — это любая непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем (так как  $\mathcal{N}$  гладкая с положительной производной). Но это функция переменной  $x$ . Подставим в качестве  $x$  функцию, обратную к  $\mathcal{N}$ , получим некоторую функцию  $h$ , которая принимает значение  $\mathcal{N}$  и восстанавливает, чему при этом значении должно быть равно  $g\mathcal{N}'$ . Функция  $h$  — это любая непрерывно дифференцируемая функция с носителем в интервале  $(0; 1)$  (так как она является композицией хорошей функции  $g(x)\mathcal{N}'(x)$  и гладкой  $\mathcal{N}^{-1}$ , в обратную сторону это соответствие тоже работает). Итак, у нас получается такое условие:

$$\int_0^1 -\frac{dh}{d\mathcal{N}} d\mu = 0.$$

Заметим, что мы уже полностью забыли о том, что  $\mathcal{N}$  была функцией; теперь это переменная, по которой мы интегрируем и дифференцируем.

Докажем, что  $\mu = \lambda$  равносильно тому, что для любой непрерывно дифференцируемой  $h$  с носителем в  $(0; 1)$  выполнено неравенство выше. В одну сторону очевидно: если  $\mu$  — мера Лебега, то интеграл производной функции с компактным носителем нулевой (равен разности значений функции в единице и нуле, которые оба нулевые).

В другую сторону менее очевидно. Как известно из математического анализа, для любых двух различных мер с компактным носителем существует гладкая функция с компактным носителем, у которой по ним разные интегралы (это следует из теоремы Стоуна-Вейерштрасса). Вот для любого отрезка  $[a; b]$  строго внутри  $(0; 1)$  можно ограничить  $\mu$  и  $\lambda$  только на отрезок  $[a; b]$ , и если эти меры там разные, то найдётся гладкая функция с носителем в  $[a; b]$ , у которой в этом отрезке разные интегралы. Если найдётся непрерывная функция с компактным носителем с другим отношением интегралов по этим двум мерам, то найдётся их непрерывная линейная комбинация  $\varphi(\mathcal{N})$ , у которой лебегов интеграл нулевой, а интеграл по  $\mu$  ненулевой. Тогда  $\Phi(\mathcal{N}) = \int_0^1 \varphi(t) dt$  подойдёт в качестве  $h$ , для которой  $\int_0^1 -\frac{dh}{dN} d\mu \neq 0$ : она непрерывно дифференцируема, так как её производная —  $\varphi$ , она имеет компактный носитель, так как интеграл  $\varphi$  по Лебегу нулевой, ну и неравенство выполнено, так как интеграл  $\varphi$  по  $\mu$  ненулевой.

Таким образом, мы доказали, что отношение лебегова интеграла и интеграла по  $\mu$  у любых непрерывных функций с компактным носителем в  $(0; 1)$  фиксировано. При этом, если в качестве последовательности функций рассмотреть такие гладкие функции со значениями от 0 до 1, у которых значения в  $[0; \frac{1}{n}]$  и  $[1 - \frac{1}{n}; 1]$  нулевые, а в  $[\frac{2}{n}; 1 - \frac{2}{n}]$  единичные, то эти функции имеют компактные носители в  $(0; 1)$ , и при этом по обоим мерам их интеграл стремится к мере единичного отрезка, то есть к единице. ( $\mu[0; 1] = 1$ , так как  $\mu[0; 1] = F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 - 0 = 1$ .) Значит, отношение равно единице. Таким образом, на отрезках в  $(0; 1)$  меры  $\mu$  и  $\lambda$  совпадают. Значит, они вообще совпадают, так как меры точек 0 и 1, очевидно, нулевые, а любой отрезок в  $[0; 1]$  представим в виде объединения счётного числа отрезков из  $(0; 1)$  и, возможно, точек 0 и 1.

## Задача 4

В прямую сторону верно. Для любого  $\varepsilon > 0$  из сходимости по вероятности следует, что  $\mathbb{P}\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \rightarrow 0$ . Значит, для достаточно больших  $n > N$  эта вероятность меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Значит, для достаточно больших  $m > N$  и  $n > N$  вероятность того, что хоть кто-то из  $X_n$  и  $X_m$  отстоит от  $X$  более, чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$ , меньше  $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Но это событие следует из того, что  $|X_n - X_m| > \varepsilon$ . Следовательно, вероятность того, что  $|X_n - X_m| > \varepsilon$ , меньше  $\varepsilon$ , с того же самого места  $N$ .

В обратную сторону мы сделаем так: мы найдём подпоследовательность, сходящуюся по вероятности. Чтобы найти место, начиная с которого, любой член последовательности отличается более чем на  $\varepsilon$  от предела с вероятностью менее, чем  $\varepsilon$ , мы возьмём максимум из места, с которого подпоследовательность отличается от предела более чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$  с вероятностью менее, чем  $\frac{\varepsilon}{2}$ , и места, с которого любые два члена последовательности отличаются более чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$  с вероятностью менее, чем  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Искать подпоследовательность будем так: рассмотрим любой строго положительный сходящийся ряд  $a_n$ , найдём места  $N_n$ , начиная с которых, любые два члена последовательности отличаются более чем на  $a_n$  с вероятностью менее, чем  $a_n$ , и рассмотрим любую подпоследовательность, в которой  $n$ -й член правее всех  $N_i$ ,  $i \leq n$ . Теперь  $X$  определим так: если у подпоследовательности есть предел, то  $X_n$  ему и равняется, а иначе  $X_n$  равно любой константе. Если мы докажем, что случай, что предела нет, имеет нулевую вероятность, то мы выиграем: подпоследовательность

будет сходиться даже не по вероятности, а почти наверное.

Для доказательства рассмотрим такие события:  $A_n$  означает, что  $X_n$  отличается от  $X_{n+1}$  более чем на  $a_n$ . Тогда  $\mathbb{P}A_n < a_n$ . Ряд из вероятностей  $A_n$ , таким образом, сходится. По лемме Бореля-Кантелли вероятность того, что бесконечное количество разных  $A_n$  выполнится, нулевая. Значит, почти наверное с некоторого места  $A_n$  не выполняются. Значит, почти наверное с этого места последовательность сходится по Коши ( $n$ -й и  $m$ -й члены отличаются меньше, чем на  $\min(n, m)$ -й остаток ряда), а тогда она просто почти наверное сходится, что и требовалось.