



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Trabajo Práctico III

---

Métodos Numéricos  
Segundo Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Iván Arcuschin	678/13	iarcuschin@gmail.com
Martín Jedwabny	885/13	martiniedva@gmail.com
José Massigoge	954/12	jmmassigoge@gmail.com
Iván Pondal	078/14	ivan.pondal@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

## Resumen

Hecho: los videos de bebes son graciosos. Y son mucho más gracios cuando se miran en *slow motion*.

En este trabajo, nos centraremos en 4 diferentes métodos de Interpolación para generar automáticamente videos en cámara lenta. Esto se logra interpolando una cierta cantidad de cuadros nuevos entre cada par de cuadros originales. Dependiendo del método, este procedimiento genera diferentes niveles de calidad.

Una vez que hayamos explicado los métodos junto con su implementación, presentaremos varios experimentos, dentro de dos categorías. La primera, asegurará que los métodos funcionen correctamente, en el caso general de interpolación de funciones. La segunda, proveerá diferentes formas de comparar la calidad de los videos producidos por cada método.

**Keywords:** Video, slow motion, interpolation methods, splines

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Modelo</b>	<b>5</b>
2.1. Video . . . . .	5
2.2. Vecinos . . . . .	5
2.3. Interpolación Fragmentaria Lineal . . . . .	5
2.4. Interpolación por Splines . . . . .	6
2.5. Interpolación por Splines con tamaño de bloque fijo . . . . .	7
<b>3. Implementación</b>	<b>9</b>
3.1. Interpolación por vecinos . . . . .	9
3.2. Interpolación lineal . . . . .	9
3.3. Interpolación por Splines . . . . .	10
3.4. Interpolación por Splines de a bloques . . . . .	11
<b>4. Experimentación</b>	<b>13</b>
4.1. Detalles generales de la experimentación . . . . .	13
4.2. Funcionamiento de los métodos implementados . . . . .	13
4.3. Medición de los tiempos de ejecución de los métodos . . . . .	15
4.4. Medición del ECM y PSNR de los métodos. . . . .	16
4.4.1. ECM - Agregando 1 cuadro . . . . .	17
4.4.2. PSNR - Agregando 1 cuadro . . . . .	19
4.4.3. ECM - Agregando 5 cuadros . . . . .	20
4.4.4. PSNR - Agregando 5 cuadros . . . . .	22
4.4.5. Conclusiones . . . . .	23
4.4.6. Interpolación por Splines: bloques de tamaño variable vs fijo . . . . .	23
4.5. Análisis cualitativos de los métodos, fenómeno de artifacts. . . . .	25
4.5.1. Interpolación por vecinos . . . . .	25
4.5.2. Interpolación lineal . . . . .	26
4.5.3. Interpolación por Splines . . . . .	26
4.6. Comparación . . . . .	27
<b>5. Conclusión</b>	<b>28</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>29</b>
<b>7. Enunciado</b>	<b>30</b>

## 1. Introducción

El objetivo principal de este Trabajo Práctico es estudiar, implementar y analizar métodos de Interpolación para generar Videos con *slow motion*.

Comenzaremos haciendo una breve introducción a los distintos métodos de Interpolación, para luego explicar cual es el modelo que subyace en cada uno:

- Interpolación por Vecinos.
- Interpolación Fragmentaria Lineal.
- Interpolación por Splines.
- Interpolación por Splines (bloques de tamaño fijo).

Una vez finalizada la parte del Modelo, pasaremos a describir la Implementación de los diferentes métodos presentados, realizadas en C++.

Ya llegando al final, pasaremos a presentar la Experimentación realizada, a la vez que iremos analizando y discutiendo los resultados obtenidos.

Los experimentos realizados pueden dividirse en dos categorías. La primera, relacionada con el costo temporal y la correctitud de los diversos algoritmos utilizados:

- Funcionamiento de los métodos implementados al tratar de interpolar diferentes familias de funciones.
- Comparación de tiempos de ejecución entre los distintos métodos.

La segunda, relacionada con el aspecto cualitativo de los métodos:

- Comparación del *Error Cuadrático Medio* y *Peak to Signal Noise Rate* entre los distintos métodos.
- Análisis del fenómeno de Artifacts.

Para finalizar, cerraremos el presente informe con una conclusión, en la cual discutiremos acerca de los métodos vistos, así como de la experimentación realizada. También, contaremos las dificultades encontradas al realizar el Trabajo Práctico, las posibles continuaciones que se podrían realizar, y si los objetivos planteados fueron alcanzados.

## 2. Modelo

### 2.1. Video

Definiremos un modelo para los videos con el cual sea fácil de trabajar a la hora de realizar el *slow motion*. Dado un video, definiremos:

- $w$  el ancho en píxeles de cada frame.
- $h$  el ancho en píxeles de cada frame.
- $f_i$  el  $i$ -ésimo frame, con  $0 < i < k$ , donde  $k$  es la cantidad de frames totales.
- $p(x, y, f_i)$ , con  $0 < x < w$ ,  $0 < y < h$ , el píxel en la posición  $(x, y)$  del frame  $f_i$ .

Luego, si tomamos  $p(x, y, f_i)$  y  $p(x, y, f_{i+1})$  queremos agregar una cierta cantidad de píxeles entre ambos, de forma que haya una transición del primero al segundo y se produzca el *slow motion*.

Para elegir que valores agregar entre los píxeles, utilizaremos diferentes métodos de interpolación.

- **Vecinos:** Consiste en rellenar los nuevos frames replicando los valores de los píxeles del frame original más cercano.
- **Interpolación Lineal:** Consiste en rellenar los píxeles utilizando interpolaciones lineales entre píxeles de frames originales consecutivos.
- **Interpolación por Splines:** Consiste en rellenar los píxeles utilizando Splines entre píxeles de frames originales consecutivos. En este método, utilizaremos la información provista por todos los frames del video, y generaremos  $k - 1$  funciones, cada una de a lo sumo grado cúbico.
- **Interpolación por Splines con tamaño de bloque variante:** Simliar al anterior, pero con la posibilidad de variar la cantidad de frames tomados en cuenta al generar las funciones.

En las siguientes secciones explicaremos con mayor detalle cada uno de los métodos.

### 2.2. Vecinos

En este método, eligiremos para cada nuevo píxel el valor del frame original que se encuentre más cercano. Si definimos  $c$  como la cantidad de frames a agregar entre cada par original, y  $g_0, \dots, g_{c-1}$  los nuevos frames. Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(x, y, f_i) &= p(x, y, f_i) \\ p(x, y, g_0) &= p(x, y, f_i) \\ &\vdots \\ p(x, y, g_{c/2-1}) &= p(x, y, f_i) \\ p(x, y, g_{c/2}) &= p(x, y, f_{i+1}) \\ &\vdots \\ p(x, y, g_{c-1}) &= p(x, y, f_{i+1}) \\ p(x, y, f_{i+1}) &= p(x, y, f_{i+1}) \end{aligned}$$

### 2.3. Interpolación Fragmentaria Lineal

En este método, buscaremos interpolar los píxeles de frames contiguos con una función lineal. Para ello, construiremos un Polinomio Interpolante de grado 1 utilizando *diferencias divididas*, ya que ofrece una construcción más sencilla que al seguir el método de Lagrange.

Luego, si llamamos  $f$  a la función (desconocida excepto en los puntos  $x_j$ ), definimos:

- Diferencia dividida de orden cero en  $x_j$ :

$$f[x_j] = f(x_j)$$

- Diferencia dividida de orden uno en  $x_j, x_{j+1}$ :

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f[x_{j+1}] - f[x_j]}{x_{j+1} - x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

- Polinomio Interpolante de grado 1 para  $x_j, x_{j+1}$ :

$$P_1(x) = f[x_j] + f[x_j, x_{j+1}](x - x_j) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} * (x - x_j)$$

## 2.4. Interpolación por Splines

El método de interpolación por splines se basa en dados  $n$  puntos la construcción de  $n - 1$  funciones que interpolan los puntos y además cumplen una serie de condiciones que aseguran que la función por tramos resultante no posea las irregularidades de trabajar con polinomios de alto grado generando además uniones suaves entre cada segmento.

Dada una función  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$  y un conjunto de nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

1. Definimos  $S(x)$  como un polinomio cúbico denominándolo  $S_j(x)$  en el subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  con  $j \in [0, \dots, n - 1]$ .
2.  $S_j(x_j) = f(x_j)$  y  $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$  para todo  $j \in [0, \dots, n - 1]$ .
3.  $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$  para todo  $j \in [0, \dots, n - 2]$ .
4.  $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$  para todo  $j \in [0, \dots, n - 2]$ .
5.  $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$  para todo  $j \in [0, \dots, n - 2]$ .
6. Por último, se cumple una de la siguientes condiciones
  - a)  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  (natural o de libre frontera).
  - b)  $S'(x_0) = f'(x_0)$  y  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (sujeta).

Un spline definido en un intervalo que está dividido en  $n$  subintervalos requiere determinar  $4n$  constantes. Se aplican las condiciones descritas previamente a los siguiente polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para cada  $j \in [0, \dots, n - 1]$

Para este trabajo, dado que no conocemos la función  $f$  que estamos interpolando se decidió utilizar la condición 6a, que define al spline como natural o libre.

Una vez establecidas las ecuaciones resultantes de aplicar las condiciones y despejando todas las variables en función de  $c_j[1]$ , nos quedan las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} h_j &= x_{j+1} - x_j \\ a_j &= f(x_j) \text{ para cada } j \in [0, \dots, n] \\ b_j &= \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{2c_j h_j - c_{j+1} h_j}{3} \\ d_j &= \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \end{aligned}$$

para cada  $j \in [0, \dots, n - 1]$

Donde los  $c_j$  nos quedan determinados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$c_0 = 0$$

$$c_n = 0$$

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3(a_{j+1} - a_j)}{h_j} + \frac{3(a_{j-1} - a_j)}{h_{j-1}}$$

para cada  $j \in [1, \dots, n-1]$

El mismo se puede representar como la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{j-1} \quad c_j \quad c_{j+1} \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1} \quad c_n \\ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{j-1} & 2(h_{j-1} + h_j) & h_j & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} b \\ 0 \\ \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} + \frac{3(a_0 - a_1)}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{3(a_{j+1} - a_j)}{h_j} + \frac{3(a_{j-1} - a_j)}{h_{j-1}} \\ \vdots \\ \frac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} + \frac{3(a_{n-2} - a_{n-1})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Ahora para el problema planteado, que es la interpolación de los cuadros de un video, nuestro  $h_j$  será la distancia entre cada uno de ellos. Esta distancia la podemos pensar como el tiempo entre cada captura del video, y como la duración del mismo se define por la cantidad de cuadros por segundo, podemos afirmar que son equidistantes, por lo tanto tenemos  $h_j = 1$  para todo  $j \in [0, \dots, n-1]$ .

Reemplazando en la matriz anterior nos queda:

$$\begin{array}{c} c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{j-1} \quad c_j \quad c_{j+1} \quad \dots \quad c_{n-2} \quad c_{n-1} \quad c_n \\ \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} b \\ 0 \\ 3(a_2 - a_1) + 3(a_0 - a_1) \\ \vdots \\ 3(a_{j+1} - a_j) + 3(a_{j-1} - a_j) \\ \vdots \\ 3(a_n - a_{n-1}) + 3(a_{n-2} - a_{n-1}) \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Como se puede observar resulta en una matriz cuadrada tridiagonal estrictamente dominante por filas. Como consecuencia tenemos que la misma y sus submatrices principales son inversibles, llevando a que el sistema tenga una única solución y que además  $A$  posea factorización  $LU$ .

Una vez que se tiene la factorización  $A = LU$ , sólo queda resolver el sistema planteado y así calcular los coeficientes de cada  $S_j(x)$ . Por último resta evaluar el spline en los puntos donde se agregaron cuadros nuevos para así poder lograr el efecto buscado.

El beneficio de utilizar la factorización  $LU$  es que el spline que se utiliza para interpolar cada pixel del video comparte el mismo sistema, lo que cambia son los valores de los  $a_j$  que definen nuestro vector  $b$ . De esta manera, recalculamos el vector  $b$ , utilizamos la factorización  $LU$  para resolver el sistema y nuevamente calculamos los coeficientes del spline.

## 2.5. Interpolación por Splines con tamaño de bloque fijo

Este método tiene el mismo fondo teórico que el anterior ya que también trabaja con splines. La diferencia es que en el modelo anterior, dados todos los valores que tomaba cada pixel del video se generaba un único spline para cada pixel, mientras que con splines de a bloques lo que hacemos es para cada pixel generar varios splines conectados entre si.

La motivación para realizar esto es la hipótesis de que si estamos trabajando con un video que contiene cambios bruscos, el utilizar toda la duración del video para alimentar un spline puede resultar impreciso,

mientras que si generamos splines asociados a tramos del video, creemos que podría comportarse mejor a variaciones abruptas.

Dada una función  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$  y un conjunto de nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , definimos  $B$  como el tamaño de cada bloque y  $Sb(x)$  como un spline de  $a$  bloques con  $Sb_j(x)$  siendo el spline definido en el subintervalo  $[x_j, x_{j+B}]$  con  $j \in [0, \dots, n - B - 1]$  que interpola los puntos de  $f$  en ese mismo intervalo.



### 3. Implementación

#### 3.1. Interpolación por vecinos

Este método consiste en reemplazar los cuadros intermedios a ser rellenados por el cuadro original mas cercano en el tiempo. Es decir, dados los cuadros del video sin camara lenta, generamos otro video en camara lenta copiando los cuadros originales de la siguiente manera:

Sean Frame1 y Frame2 dos cuadros consecutivos del video original:

Frame1	Frame2
--------	--------

Si queremos ahora 6 cuadros entre cada 2 del archivo original lo transformamos a:

Frame1	Frame1	Frame1	Frame1	Frame2	Frame2	Frame2	Frame2
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

El pseudocódigo sería el siguiente:

Sean W,H,I el ancho, alto y la cantidad de frames del video original  
Sea video[W][H][I] el triple vector de numeros enteros que representa el video original

Sea K la cantidad de frames que queremos agregar entre cuadro y cuadro

Crear un triple vector de enteros new\_video[W][H][I+(I-1)\*K]

Para w = 0 hasta W-1 hacer

  Para h = 0 hasta H-1 hacer

    Para i = 0 hasta I-2 hacer

      Para j = 0 hasta K/2 hacer

        new\_video[w][h].push\_back(video[w][h][i])

      Fin para

      Para j = (K/2)+1 hasta K hacer

        new\_video[w][h].push\_back(video[w][h][i+1])

      Fin para

    Fin para

    new\_video[w][h].push\_back(video[w][h][I-1])

  Fin para

Fin para

Devolver new\_video

#### 3.2. Interpolación lineal

En este caso, usamos el polinomio interpolador de Lagrange entre cada par de puntos/pixeles consecutivos para aproximar los valores intermedios que irían en el video de camara lenta. Esto genera una función lineal para los pixeles consecutivos en la misma posición.

Por ejemplo, sean dos pixeles con valores 1 y 4:

1	4
---	---

Si queremos un video en camara lenta con 5 cuadros intermedios por cada 2 del original, estos se replicarán de la siguiente forma:

1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
---	-----	---	-----	---	-----	---

El procedimiento es el siguiente:

```
Sean W,H,I el ancho, alto y la cantidad de frames del video original
Sea video[W][H][I] el triple vector de numeros enteros que representa el
    video original
Sea K la cantidad de frames que queremos agregar entre cuadro y cuadro

Crear un triple vector de enteros new_video[W][H][I+(I-1)*K]
Para w = 0 hasta W-1 hacer
    Para h = 0 hasta H-1 hacer
        Para i = 0 hasta I-2 hacer
            coef_cero = video[w][h][i]
            coef_uno = (video[w][h][i+1] - video[w][h][i]) / (K+1);
            Para k = 0 hasta K hacer
                pixel = coef_cero + coef_uno*k;
                Si (pixel < 0) pixel = 0
                Si (pixel > 255) pixel = 255
                new_video.push_back(pixel)
            Fin para
        new_video.push_back(video[w][h][I-1])
    Fin para
Fin para
Devolver new_video
```

### 3.3. Interpolación por Splines

En este método aplicamos la técnica de Splines. Esta consiste en generar un sistema de ecuaciones para encontrar una función por partes que interpole cada par de puntos con polinomios de forma que la curva resultante sea continua y dos veces derivable. Como el sistema es tridiagonal, podemos aprovechar para guardar los valores de la matriz de forma más eficiente. El pseudocódigo es el siguiente:

```
Sean W,H,I el ancho, alto y la cantidad de frames del video original
Sea video[W][H][I] el triple vector de numeros enteros que representa el
    video original
Sea K la cantidad de frames que queremos agregar entre cuadro y cuadro

Crear un triple vector de enteros new_video[W][H][I+(I-1)*K]
Para w = 0 hasta W-1 hacer
    Para h = 0 hasta H-1 hacer
        Crear un vector de enteros valores[I+(I-1)*K]
        GenerarSpline(video[w][h], valores, I, K)
        new_video[w][h] = valores
    Fin para
Fin para
Devolver new_video

GenerarSpline(y, valores, I, K):
    n = y.size()
    Crear doble vector de enteros sistema[n][2]
    sistema[0] = {1,0}
    Para j = 1 hasta n-2 hacer
        sistema[j] = {1, 4}
    Fin para
    sistema[n-1] = {0,1}
    // Factorización LU
    Para j = 1 hasta n-2 hacer
```

```
    coef = sistema[i + 1][0]/sistema[i][1];
    sistema[i + 1][0] = coef
    sistema[i + 1][1] -= coef
Fin para
Crear vectores x[n], a[n], b[n], c[n], d[n]
a = y
Para i = 1 hasta n-2 hacer
    x[i] = 3*(a[i + 1] - 2*a[i] + a[i - 1]);
    x[i] -= x[i - 1]*sistema[i][0];
Fin para
// Resuelvo triangular superior (Uc = x)
Para i = n - 2 hasta 1 hacer
    c[i] = x[i];
    c[i] -= c[i + 1];
    c[i] /= sistema[i][1];
Fin para
// Calculo mis coeficientes "b" y "d"
Para i = 0 hasta n-2 hacer
    b[i] = a[i + 1] - a[i] - (2*c[i] + c[i + 1])/3;
    d[i] = (c[i + 1] - c[i])/3;
Fin para
//Calculo los pixeles resultantes con el Spline
Para i = 0 hasta n-1 hacer
    Para j = 0 hasta K hacer
        dif = j/(K+1)
        val = a[i] + b[i]*(dif) + c[i]*(dif)*(dif) + d[i]*(dif)*(dif)*(dif)
        valores.push_back(val)
    Fin para
Fin para
valores.push_back(y[n-1])
```

### 3.4. Interpolación por Splines de a bloques

A diferencia del método anterior, en este caso vamos a querer aplicar la técnica de Splines a bloques de pixeles de tamaño fijo. Es decir, para una misma posición del video, en vez de utilizar todos los valores del pixel a través del tiempo, generamos splines entre particiones de la misma longitud. El procedimiento es:

```
Sean W,H,I el ancho, alto y la cantidad de frames del video original
Sea video[W][H][I] el triple vector de numeros enteros que representa el
    video original
Sea K la cantidad de frames que queremos agregar entre cuadro y cuadro
Sea T el tamaño de bloque de los Splines
Observacion: reutilizamos el metodo GenerarSpline() de los Splines
    normales
Observacion: asumimos que I es divisible por T para simplificar este
    pseudocodigo

Crear un triple vector de enteros new_video[W][H][I+(I-1)*K]
Para w = 0 hasta W-1 hacer
    Para h = 0 hasta H-1 hacer
        Para t = 0 hasta T-1 hacer
            Crear subvector aux[T] = video[w][h][T*t..T*(t+1)-1]
```

```
    Crear vector bloque[T+(T-1)*K]
    GenerarSpline(aux, bloque, T, K)
    Pusear a new_video[w][h] todos los elementos de 'bloque' excepto
        el ultimo
    Fin para
    new_video[w][h].push_back(video[w][h][I-1])
    Fin para
Fin para
Devolver new_video
```

## 4. Experimentación

En esta sección, se detallan los diferentes experimentos que realizamos para medir el funcionamiento, la eficiencia y calidad de resultados, tanto de forma cuantitativa como cualitativa, de los métodos implementados.

Para lograr tal fin realizamos los siguientes tipos de experimentos:

- **Funcionamiento de los métodos implementados:** Mostraremos que los métodos de interpolación funcionan correctamente comparandolos contra diferentes familias de funciones. A su vez, basandonos en las precisiones obtenidas, determinaremos el tamaño de bloque óptimo para el método Interpolación por Splines.
- **Medición del ECM y PSNR de los métodos:** Compararemos los errores obtenidos en varias instancias de pruebas para los distintos métodos.
- **Medición de los tiempos de ejecución de los métodos:** Compararemos los tiempos de ejecución utilizando los distintos métodos.
- **Análisis cualitativos de los métodos, fenómeno de artifacts:** Buscaremos reconocer defectos de interpolación en los videos generados.

Los videos utilizados para los diversos experimentos, fueron los siguientes:

- **Video 1 - Skate:** 426x240, cantidad de cuadros originales: 151 , fps: 30, duracion: 5s.
- **Video 2 - Messi:** 426x240, cantidad de cuadros originales: 151, fps: 30, duracion: 5s.
- **Video 3 - Amanecer:** 426x240, cantidad de cuadros originales: 151, fps: 30, duracion: 5s.

Es importante mencionar que cada video representa una clase de video distinto, en donde el Video 1 contiene movimientos bruscos, el Video 2 cambios de camara, y el Video 3 movimientos suaves.

El motivo de estas elecciones se debe a la búsqueda de diversos *artifacts* a partir de las características de cada clase.

### 4.1. Detalles generales de la experimentación

- En los experimentos que se utilizaron números aleatorios, se generaron utilizando la función *rand*, provista por la librería `stdlib.h`.
- La semilla para los números aleatorios se seteo utilizando el método *srand(time(NULL))*, para evitar repeticiones de números en diferentes corridas.
- Las instancias de prueba fueron generadas con los archivos provistos por la cátedra. Adicionalmente, hicimos nuestras propias instancias emulando diferentes funciones (por ejemplo una función constante, lineal y cuadrática) para realizar el control de calidad de los métodos.
- Para medir los tiempos utilizamos la librería *chrono* y medimos los resultados en nanosegundos.
- A su vez, utilizamos el nivel de optimización *O2* de C++ a la hora de compilar el código.
- Todos los tests fueron corridos en la misma máquina bajo las mismas condiciones.

### 4.2. Funcionamiento de los métodos implementados

En este experimento nuestro objetivo fue asegurarnos el correcto funcionamiento de nuestra implementación de la interpolación fragmentaria lineal, interpolación por splines, e interpolación por splines con tamaño de bloque fijo, tomando bloques de 2, 4, 8, 16, 32 y 64 cuadros.

Con este fin, realizamos una serie de tests que muestran el correcto funcionamiento de cada método para distintas familias de funciones:

- Función constante.
- Función lineal.
- Función cuadrática.
- Función cúbica.

Luego, cada método de interpolación fue testeado contra cada una de las familias de funciones mencionadas de la siguiente forma:

- Dada una familia de funciones, se generan aleatoriamente los coeficientes necesarios para definir una función de esa familia, i.e.: para una constante se genera solo el coeficiente independiente, mientras que para una cuadrática se generan 3 coeficientes.
- Una vez generada la función, se la evalúa en un rango de valores para obtener un array de valores esperados.
- Luego, a partir del array de valores esperados se construye otro array quitándole elementos a intervalos fijos. Este nuevo array será el utilizado para realizar la interpolación, y lo que testaremos es la aproximación de la interpolación a los elementos que quitamos.
- Una vez que tenemos la interpolación con cualquiera de los métodos mencionados, basta recorrer los elementos del array de valores esperados a la vez que evaluamos la interpolación obtenida. Para cada par de valores: esperado e interpolado, queremos ver que la diferencia absoluta es menor que un epsilon/cota de precisión que definiremos dependiendo del método utilizado y la función a interpolar.

Es importante mencionar algunas características de las instancias utilizadas:

- Cantidad de puntos generados con la función (tamaño del array de valores esperados): 100
- Cantidad de puntos a interpolar: 50.
- Todos los coeficientes generados aleatoriamente están en el rango  $[1, 10]$ , para evitar que las funciones generadas crezcan de forma desmedida.

Luego, se obtuvieron las siguientes cotas de precisión para los distintos métodos y funciones:

	F. Constante	F. Lineal	F. Cuadrática	F. Cúbica
Interpolación por Vecinos	0.0001	10	1000	100000
Interpolación Fragmentaria Lineal	0.0001	0.0001	10	1000
Interpolación por Splines (bloques tamaño 2)	0.0001	0.0001	10	1000
Interpolación por Splines (bloques tamaño 4)	0.0001	0.0001	5	500
Interpolación por Splines (bloques tamaño 8)	0.0001	0.0001	1	200
Interpolación por Splines (bloques tamaño 16)	0.0001	0.0001	1	200
Interpolación por Splines (bloques tamaño 32)	0.0001	0.0001	1	200
Interpolación por Splines (bloques tamaño 64)	0.0001	0.0001	1	200
Interpolación por Splines (1 solo bloque)	0.0001	0.0001	1	200

Analizando dichas cotas vemos que:

- La Interpolación por Vecinos resulta razonable solo para funciones con muy poca variación (derivada a lo sumo constante). Esto se ve claramente en la cota de precisión al interpolar una función Cuadrática.
- La Interpolación Fragmentaria Lineal es sustancialmente mejor que por Vecinos, y devuelve resultados razonables para funciones a lo sumo Cuadráticas.
- La Interpolación por Splines utilizando solo 2 puntos para cada bloque es equivalente a interpolar utilizando funciones lineales, y queda evidenciado al tener las mismas cotas de precisión.

- A partir de los tamaños de bloque 4 a 16, la Interpolación por Splines realiza una mejora “asintótica” de su cota de precisión.
- Entre los tamaños de bloque 16 a 64, no se notó una mejora significativa en la cota de precisión de la Interpolación por Splines.
- Al realizar Interpolación por Splines *standard* (1 solo bloque), vemos que su cota de precisión concuerda con las cotas a las cuales “convergen” los métodos de Interpolación por Splines con bloque de tamaño fijo. Es por esta razón que para los experimentos cualitativos, utilizaremos solamente la Interpolación por Splines *standard*, y no la de tamaño de bloques fijo.

### 4.3. Medición de los tiempos de ejecución de los métodos

A partir de la implementaciones descritas en la Sección 3, podemos inferir una complejidad temporal para los metodos vecinos, interpolacion fragmentaria lineal e interpolacion por splines.

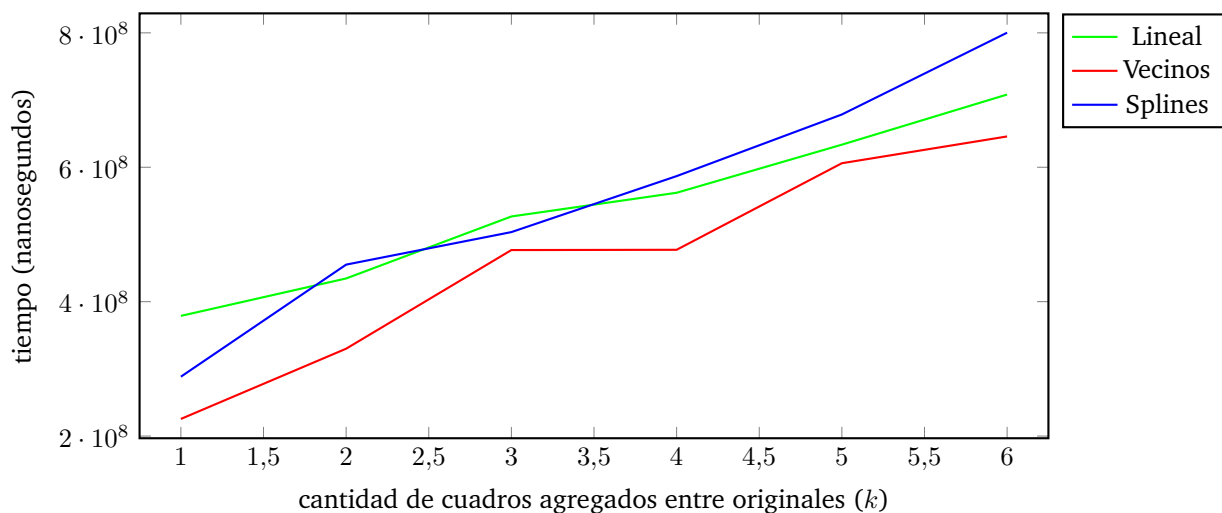
Sea  $w$  la cantidad de filas de píxeles en cada imagen,  $h$  la cantidad de columnas,  $i$  la cantidad de cuadros originales y sea  $k$  la cantidad de cuadros a agregar entre los originales:

Todos los metodos enumerados previamente tienen la misma complejidad temporal que es  $\Theta(w * h * i * k)$ . Esta conclusion surge del hecho de que, en todos los casos, tenemos 4 ciclos anidados, en donde el primero se ejecuta  $w$  veces, el segundo  $h$  veces, el tercero  $i$  veces, y el cuarto  $k$  veces.

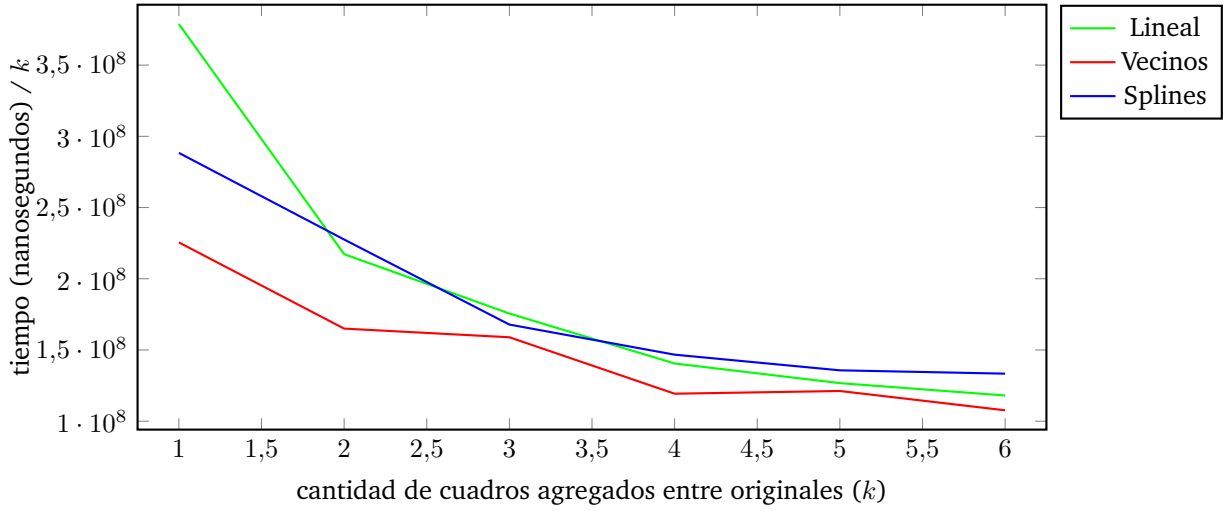
Para corroborar esta hipotesis planteamos un experimento con las siguientes características:

- Utilizamos el video provisto por la catedra llamado *funnybaby*, el cual tiene 44 cuadros y es de 240x320.
- Solo medimos la resolucion del sistema, no su creacion o los respectivos pasajes de video a texto y viceversa.
- Dado que  $w$ ,  $h$  y  $i$  son valores fijos que no podemos cambiar, variamos el  $k$ .
- Generamos instancias para valores de  $k$  entre 1 y 6.
- Para cada valor distinto de  $k$  generamos 4 instancias, cuyos valores vamos a promediar para mitigar los posibles valores distorsionados por algun procedimiento del procesador.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:



Si tomamos los tiempos que arrojó la experimentación, y los dividimos por su respectivo  $k$ , obtenemos el siguiente resultado:



A partir de los graficos, queda de manifiesto que los metodos tienen la misma complejidad temporal, ya que solo difieren en una constante.

#### 4.4. Medición del ECM y PSNR de los métodos.

Sea  $F$  un frame del vídeo real (ideal) , y  $\bar{F}$  el mismo frame del vídeo efectivamente contruidos por alguno de los métodos. Sea  $m$  la cantidad de filas de píxeles en cada imagen y  $n$  la cantidad de columnas.

Definimos el Error Cuadrático Medio, ECM, como el real dado por:

$$\text{ECM}(F, \bar{F}) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |F_{k_{ij}} - \bar{F}_{k_{ij}}|^2 \quad (1)$$

A su vez definimos *Peak to Signal Noise Ratio*, PSNR, como el real dado por:

$$\text{PSNR}(F, \bar{F}) = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{\text{ECM}(F, \bar{F})} \right). \quad (2)$$

Ambas medidas nos sirven para realizar un análisis cuantitativo de la calidad de los resultados obtenidos con los distintos métodos.

En este experimento utilizamos los videos propuestos al inicio de la experimentacion, variando la cantidad de cuadros que agregamos. Dichos videos fueron elegidos especificamente para variar la dificultad de Interpolación:

- El video **Amanecer** no contiene movimientos bruscos ni cambios de cámaras por lo que, para cualquier método, el error debería ser en líneas generales menor que para el resto de los videos.
- El video **Skate** contiene movimientos bruscos pero no cambios de cámaras por lo que, se espera un mayor error que en el video anterior. Además, deberíamos ver un aumento del error en los frames donde hay movimientos bruscos.
- El video **Skate** contiene movimientos bruscos y cambios de cámaras por lo que, se espera un mayor error que en el resto de los videos. Además, deberíamos ver un aumento *importante* del error en los frames donde se produce el cambio de cámara.

A continuación, presentaremos e iremos analizando los resultados obtenidos:



#### 4.4.1. ECM - Agregando 1 cuadro

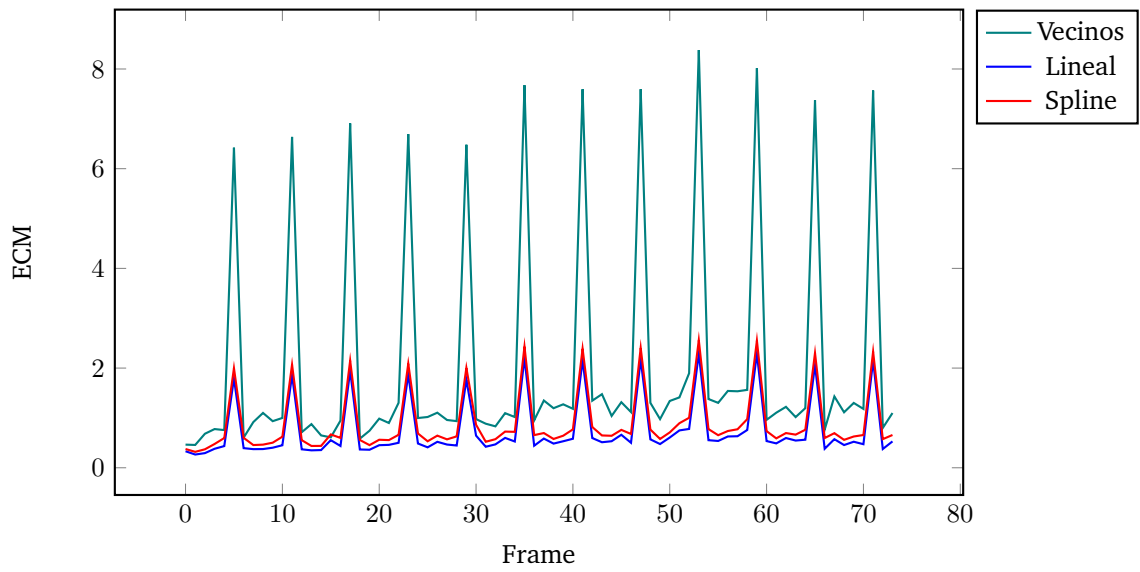


Figura 1: ECM para el video **Amanecer** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

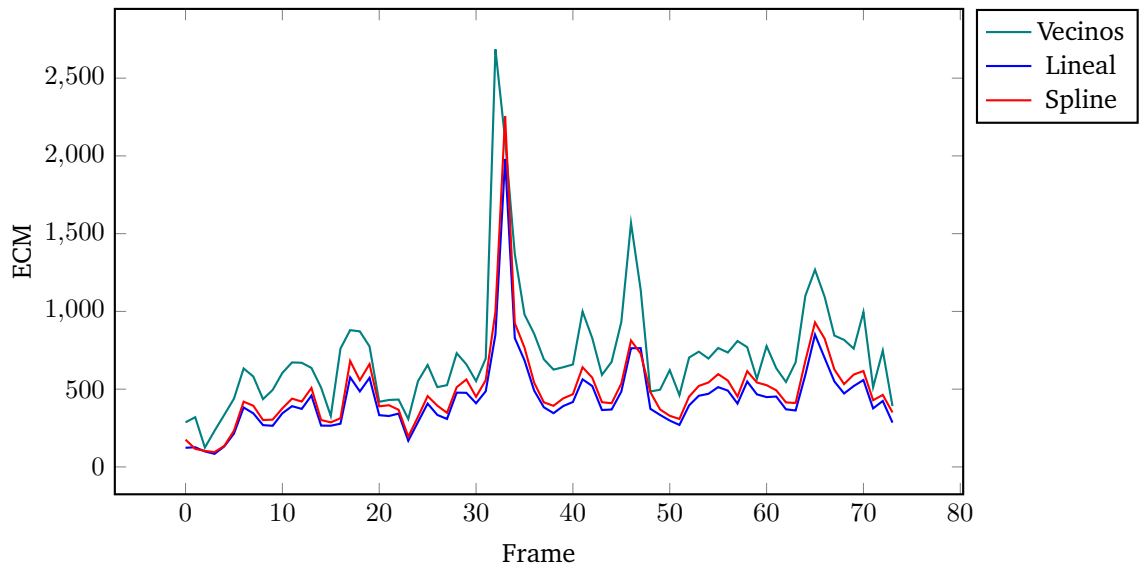


Figura 2: ECM para el video **Skate** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

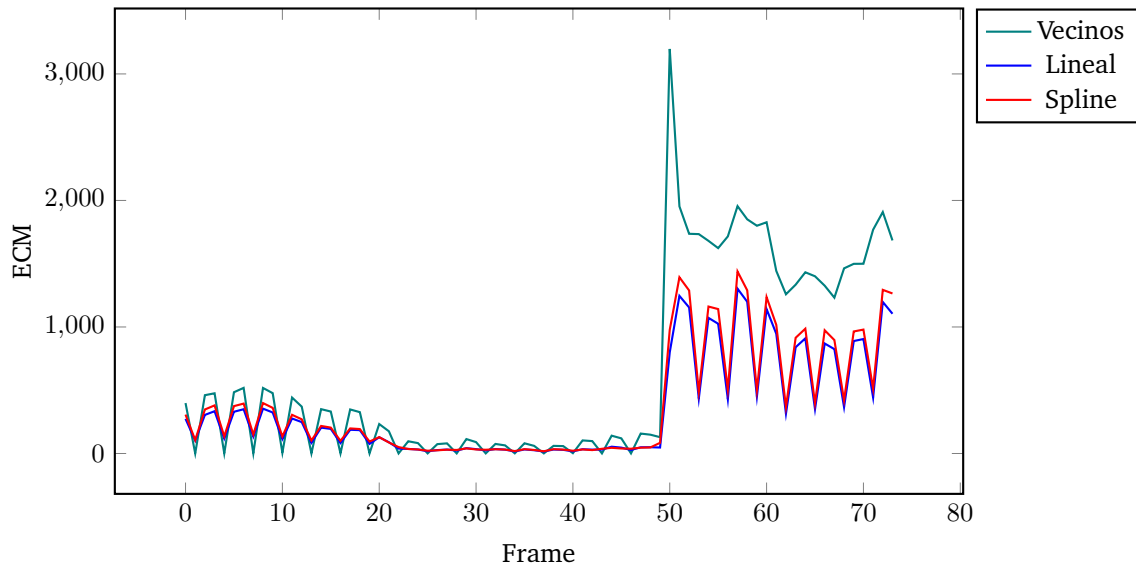


Figura 3: ECM para el video **Messi** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

Viendo las Figuras 1, 2 y 3 podemos decir que:

- La Interpolación por Vecinos obtiene consistentemente un mayor error que el resto de los métodos.
- La Interpolación Fragmentaria Lineal y la Interpolación por Splines obtienen en general un error similar, siendo la primera ligeramente mejor.
- El rango de error obtenido por todos los métodos en el video **Amanecer**, es significativamente menor que en el resto de los videos. Además, se puede ver que el error obtenido en ese video es en cierta forma “regular”, lo cual tiene sentido ya que tiene movimientos suaves y repetitivos.
- El rango de error obtenido por todos los métodos en los videos **Skate** y **Messi**, son similares, y ambos mayores al rango obtenido en el video **Amanecer**.
- El error obtenido en el video **Skate** es bastante irregular al compararlo con el video **Amanecer**, encontrándose un pico de error en el movimiento más brusco del video.
- A diferencia del caso anterior, el error obtenido en el video **Messi** es bastante regular, a excepción del pico de error que encontramos cuando ocurre el cambio de cámara, el cual es notorio para todos los métodos.

#### 4.4.2. PSNR - Agregando 1 cuadro

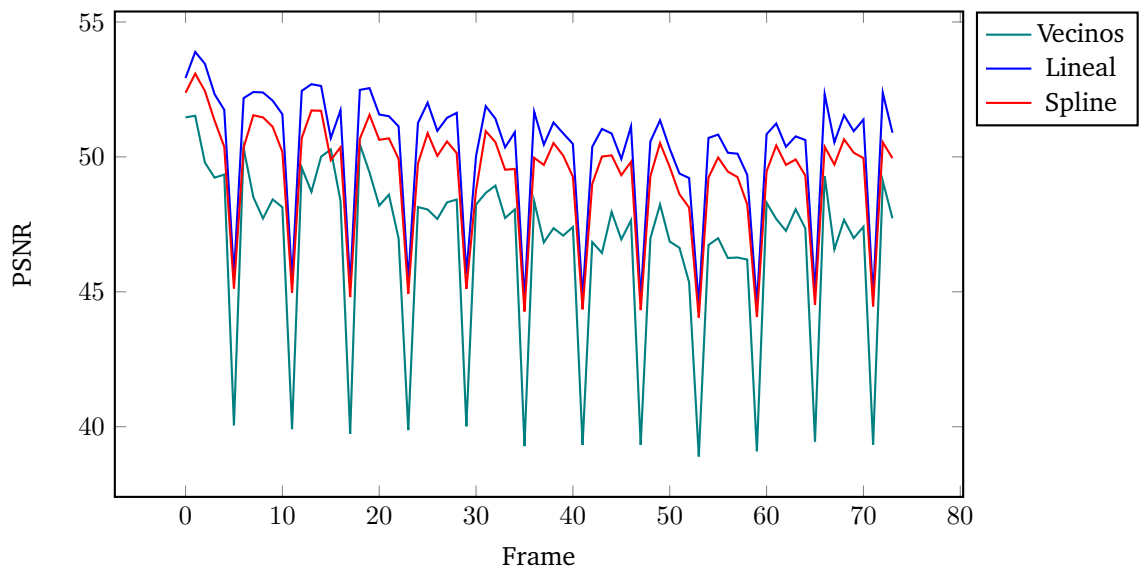


Figura 4: PSNR para el video **Amanecer** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

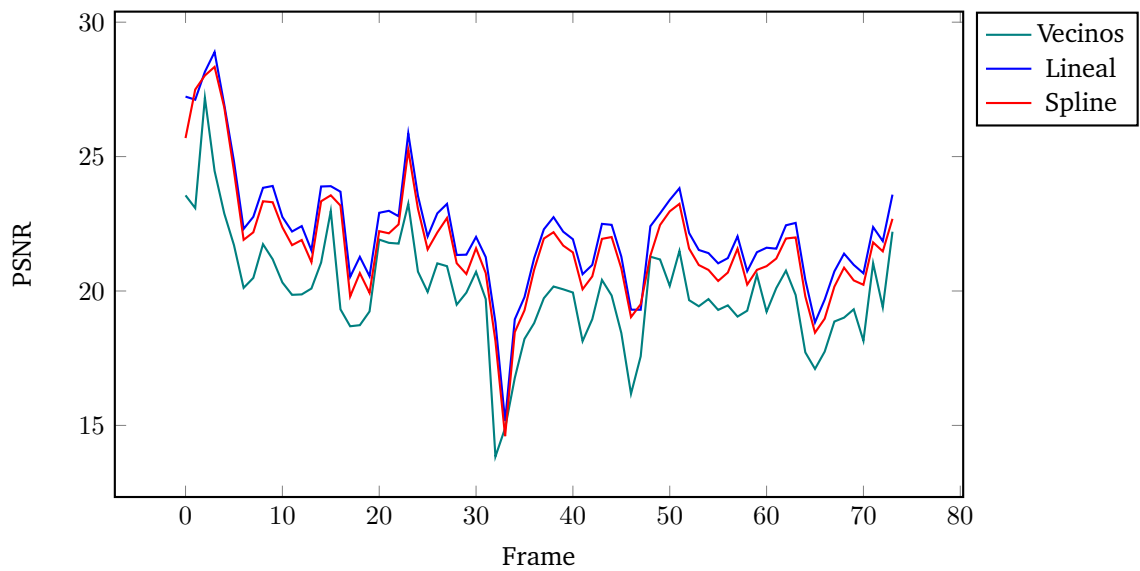


Figura 5: PSNR para el video **Skate** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

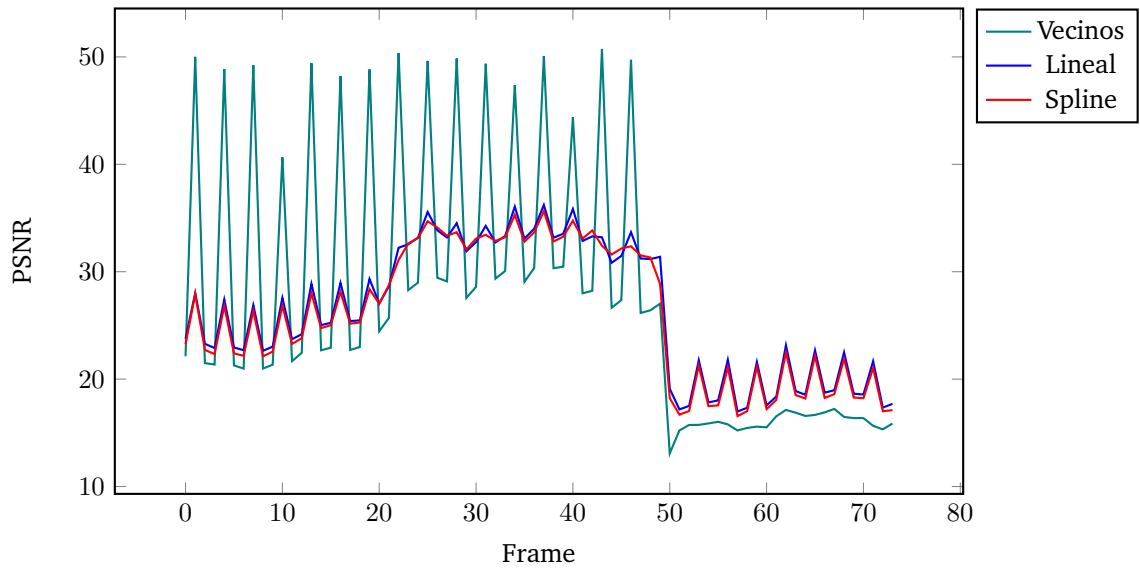


Figura 6: PSNR para el video **Messi** al agregar 1 cuadro con distintos métodos de Interpolación.

Sabiendo que, mientras más grande es el ECM más chico es el PSNR, encontramos que la información provista por este último no aporta nuevos elementos al análisis, ya que se condice con lo analizado previamente utilizando el ECM.

#### 4.4.3. ECM - Agregando 5 cuadros

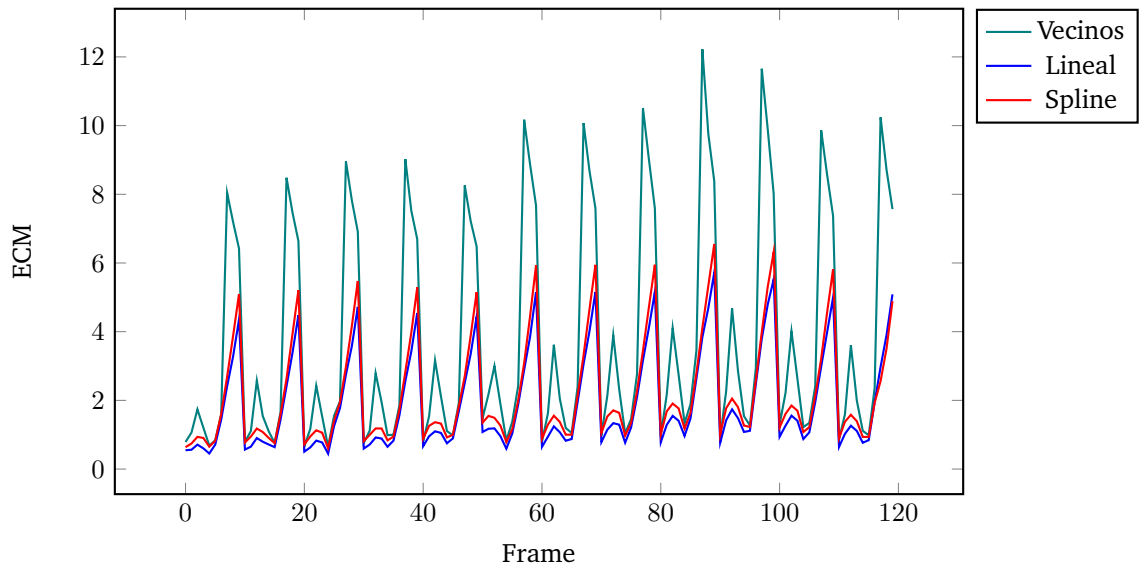


Figura 7: ECM para el video **Amanecer** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

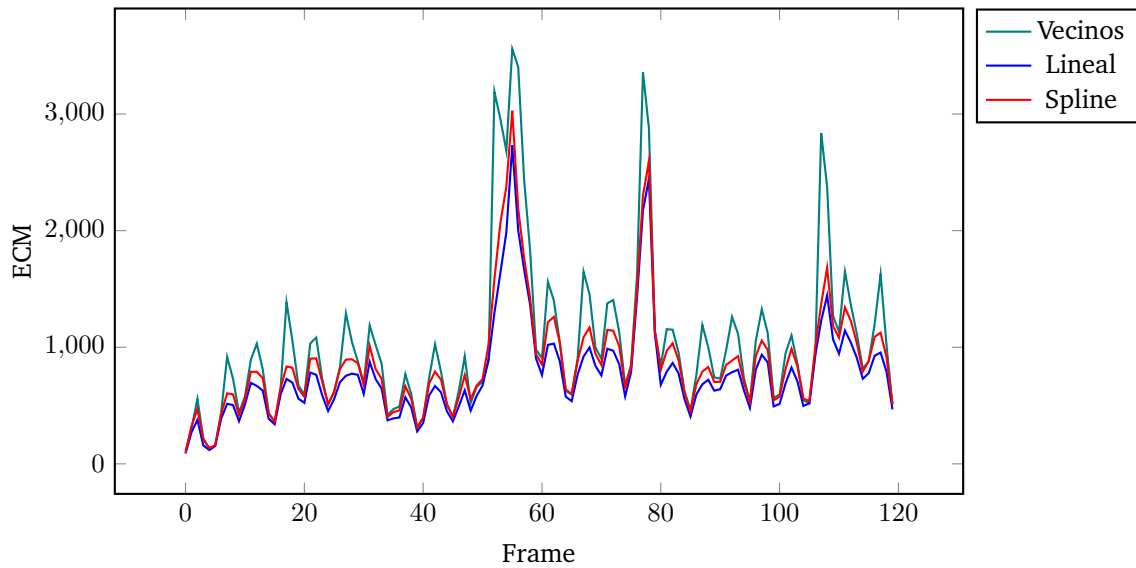


Figura 8: ECM para el video **Skate** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

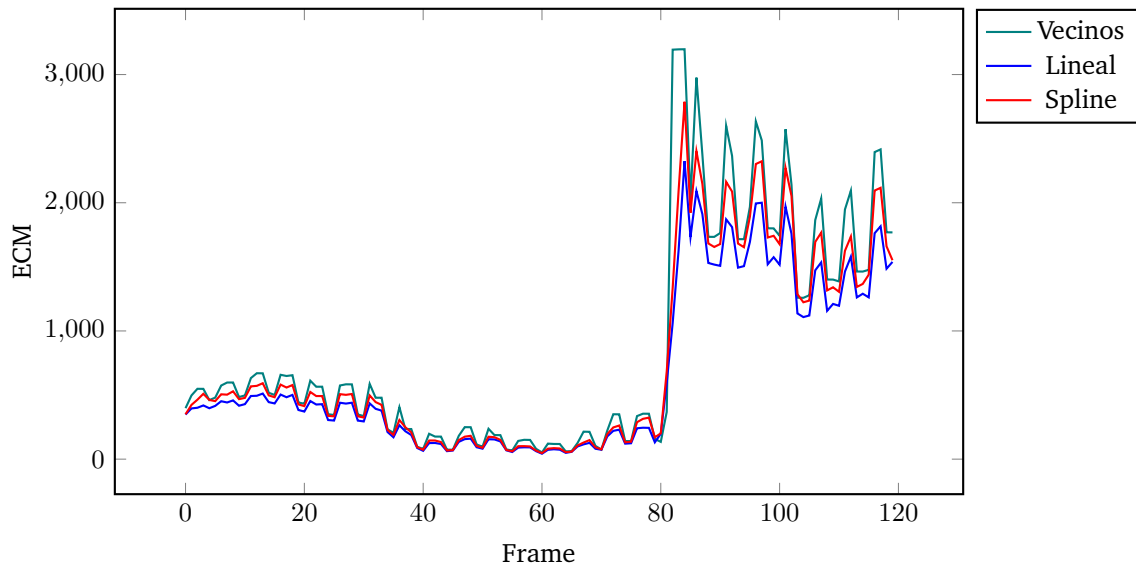


Figura 9: ECM para el video **Messi** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

Viendo las Figuras 7, 8 y 9 podemos decir que:

- El comportamiento general de los métodos para cada video no varió con respecto al escenario en el cual agregabamos 1 cuadro. Los análisis de movimiento brusco y cambios de cámaras se reafirman.
- En líneas generales, y en todos los videos, el error se incrementó con respecto al escenario en el cual agregabamos 1 cuadro, a excepción del método de Interpolación por Vecinos, que mantiene su rango de error.

#### 4.4.4. PSNR - Agregando 5 cuadros

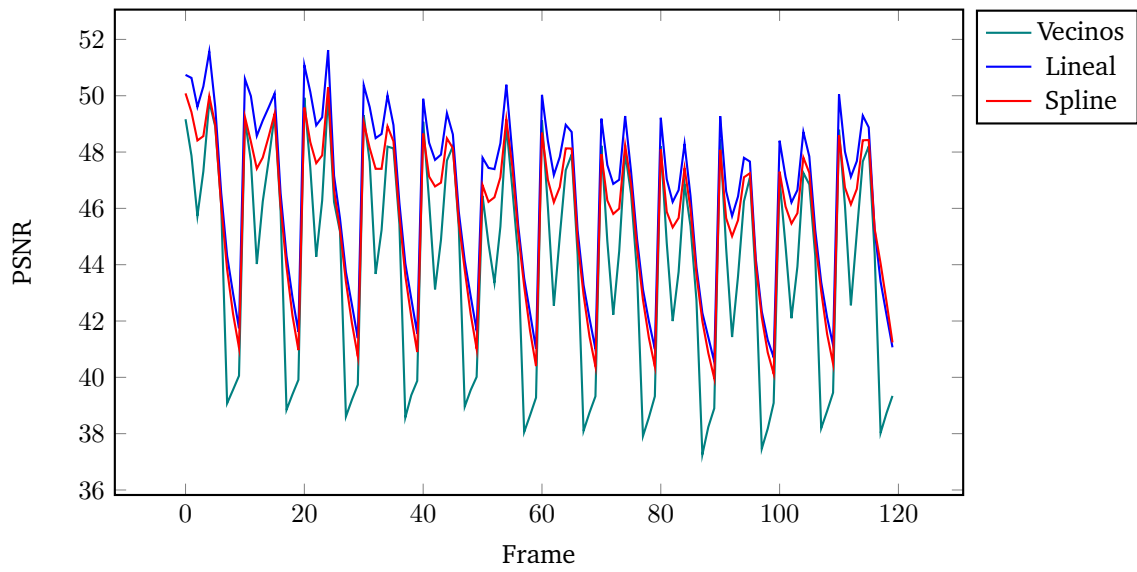


Figura 10: PSNR para el video **Amanecer** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

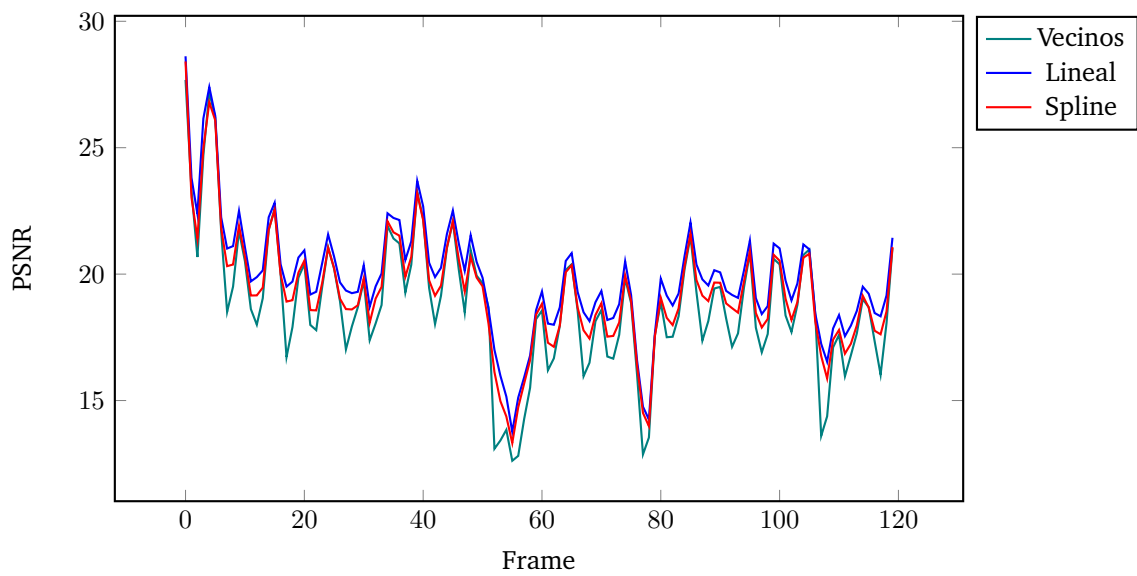


Figura 11: PSNR para el video **Skate** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

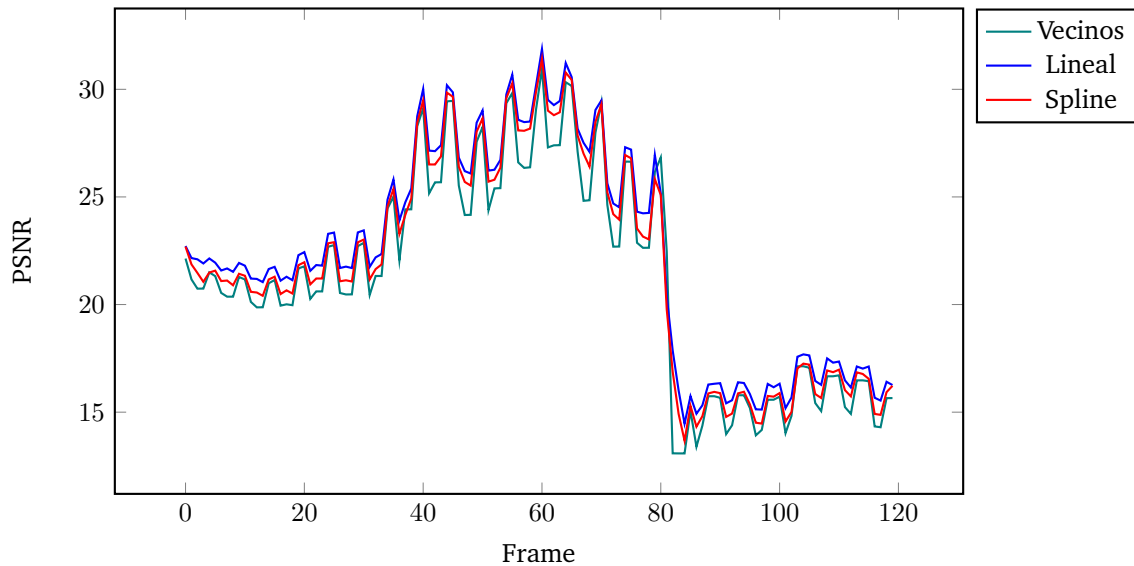


Figura 12: PSNR para el video **Messi** al agregar 5 cuadros con distintos métodos de Interpolación.

Sabiendo que, mientras más grande es el ECM más chico es el PSNR, encontramos que la información provista por este último no aporta nuevos elementos al análisis, ya que se condice con lo analizado previamente utilizando el ECM.

#### 4.4.5. Conclusiones

En base a lo analizado, podemos concluir que:

- El error máximo cometido por el método de Interpolación por Vecinos, en comparación con los otros dos, lo hace inusable en la mayoría de los casos, y empeora a medida que agregamos más cuadros.
- Si bien en el Experimento de la Sección 4.2 pudimos lograr una mayor precisión con la Interpolación por Splines que con la Interpolación Fragmentaria Lineal, no sucedió lo mismo cuando aplicamos los métodos a la interpolación de videos. En este escenario, los métodos obtuvieron errores muy similares, siendo la Interpolación Fragmentaria Lineal mejor en algunos casos.

Esto lo atribuimos a que los píxeles de los videos no respetan ninguna familia de funciones, obviamente, y por lo tanto la función que infiere la Interpolación por Splines no es sustancialmente mejor que la obtenida mediante Interpolación Fragmentaria Lineal.

Sin embargo, ya que las cotas de precisión definidas previamente no nos permitieron proyectar que la Interpolación por Splines iba a dar resultados similares a la Interpolación Fragmentaria Lineal, queda la duda de si la Interpolación por Splines de tamaño de bloque fijo puede dar mejores resultados. Para eso, haremos un experimento extra a continuación para comparar el error de dichos métodos.

- El video con movimientos suaves es mucho más sencillo de interpolar que los demás, y permite que incluso el método de Interpolación por Vecinos logre errores bajos. Al ir agregando movimientos bruscos y cambios de camaras, los videos se vuelven más difíciles de interpolar, aumentando el error obtenido con los distintos métodos.

#### 4.4.6. Interpolación por Splines: bloques de tamaño variable vs fijo

A continuación presentamos los resultados de comparar los errores de los siguientes métodos, solo para el video **Messi**:

- Interpolación por Splines *standard*, o de bloque variable.

- Interpolación por Splines (bloques de tamaño 2)
- Interpolación por Splines (bloques de tamaño 8)
- Interpolación por Splines (bloques de tamaño 32)

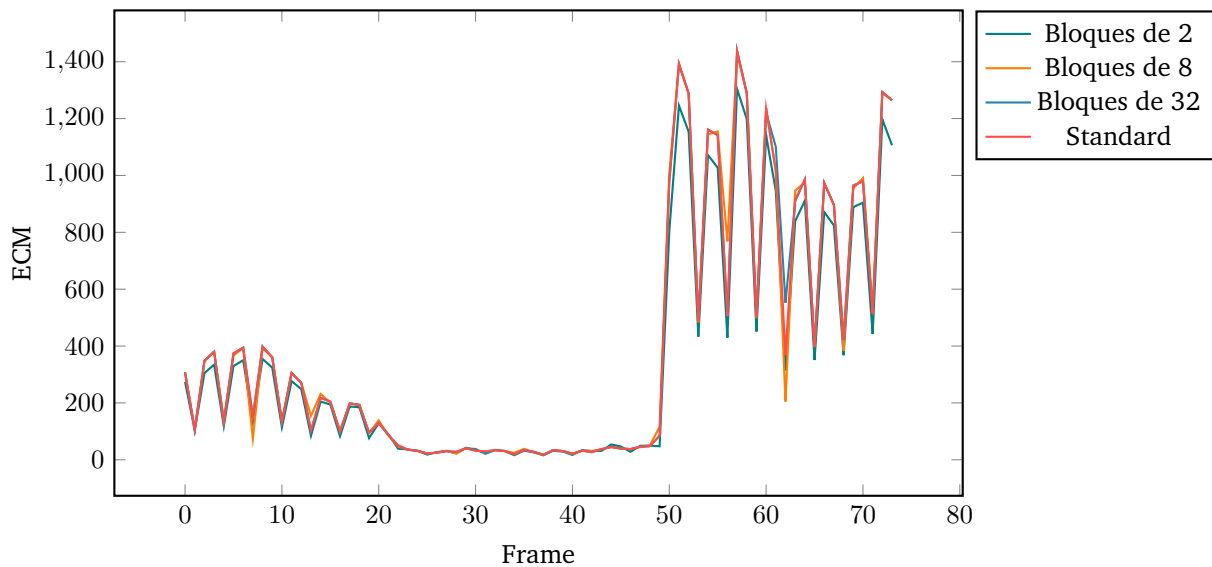


Figura 13: ECM para el video **Messi** al agregar 1 cuadro con variantes del método de Interpolación por Splines.

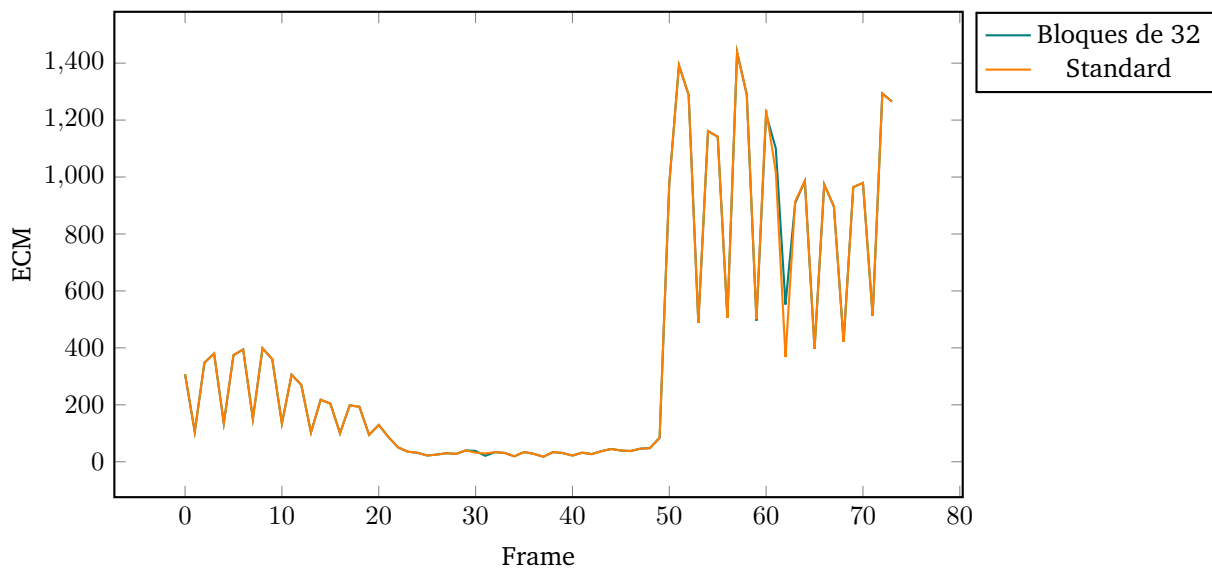


Figura 14: Igual a la Figura 13, pero mostrando solo Bloques 32 y Standard



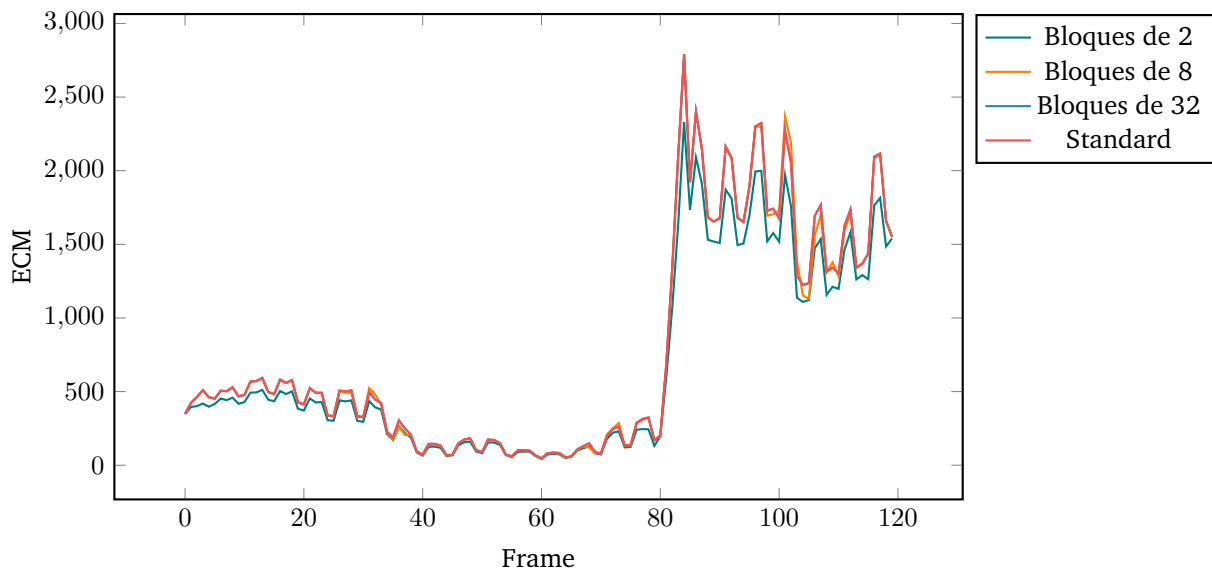


Figura 15: ECM para el video **Messi** al agregar 5 cuadros con variantes del método de Interpolación por Splines.

En base a las Figuras 13, 14 y 15, podemos terminar de concluir que:

- El error del método de Interpolación por Splines usando bloques de tamaño fijo converge, al ir aumentando el tamaño del bloque, al error obtenido con la versión *standard*. Anteriormente ya habíamos confirmado un resultado parecido para diferentes familias de funciones, pero ahora podemos afirmar que esto vale también en el escenario en el cual estamos interpolando cuadros de video.
- Luego, la variante de Interpolación por Splines con tamaño fijo es similar (dependiendo del tamaño del bloque) a la variante *standard*, y por lo tanto similar a la Interpolación Fragmentaria Lineal.

#### 4.5. Análisis cualitativos de los métodos, fenómeno de artifacts.

Los *artifacts* son errores visuales resultantes de la aplicación de los métodos. Estos errores visuales se caracterizan por romper la coherencia entre imágenes al generar distorsiones evidentes.

Para analizar los artifacts producidos por las diferentes implementaciones de Cámara Lenta, utilizamos los siguientes videos:

- **Video 1 - Skate:** 426x240, cantidad de cuadros originales: 151, fps: 30, duracion: 5s.
- **Video 2 - Messi:** 426x240, cantidad de cuadros originales: 151, fps: 30, duracion: 5s.

A través de cada método de interpolación agregamos 10 cuadros entre cada par de frames de los videos. Así, nos propusimos analizar el funcionamiento de cada tipo de interpolación para verificar si hay movimientos bruscos, elementos falsos (por ejemplo cuando una persona se mueve y se duplica su pierna) u otros tipos de anomalías. Los resultados fueron los siguientes:

##### 4.5.1. Interpolación por vecinos

- Como era de esperar no hubieron elementos falsos.
- Eso sí, todos los movimientos parecieron bruscos, casi robóticos y sin ningún tipo de fluidez.
- Por ejemplo, en el video **Messi** la pelota exhibe un movimiento claramente antinatural.
- Todo esto es lógico dado que solo estamos copiando y pegando frames en el tiempo.
- Concluimos que este método no produce resultados de movimientos fluidos.

#### 4.5.2. Interpolación lineal

- En este caso no encontramos los movimientos bruscos de interpolación por vecinos.
- Si podemos ver que hay congelamientos de imagen cada aproximadamente 1 segundo.
- Parecería haber un retroceso de calidad con respecto al método anterior.
- Detectamos imágenes falsas cuando las personas se mueven como:



#### 4.5.3. Interpolación por Splines

- Con seguridad, este hasta ahora es el método que genera los videos más fluidos.
- Los movimientos de las cosas parecen naturales y no hay congelamientos ni transformaciones bruscas.
- Esto se lo atribuimos a que el método en sí aprovecha todos los datos del pixel a través del tiempo para producir resultados mejores que tienen que ver con el marco teórico que le dan los polinomio interpoladores de Lagrange.
- Eso si, siguen habiendo imágenes falsas a causa del movimiento y no son menores pero si ligeramente mejores que en la interpolación lineal.
- Por ejemplo, en la instancia **Skate**, los resultados son del estilo:



## 4.6. Comparación

Como pudimos ver, cada método introduce diferentes artifacts. En el caso de la Interpolación lineal, llama la atención que el resultado parece peor con respecto al de Vecinos. Esto nos indica que, si bien el error matemático de un método puede ser peor, las irregularidades visuales que introduce Interpolación lineal son peores para una persona usuario desde su punto de vista subjetivo. Podemos concluir que, debido a las particularidades que introduce cada método, parecería que la interpolación mediante Splines genera los mejores resultados.

## 5. Conclusión

En este trabajo pudimos no solo modelar el problema planteado, sino apreciar y aprovechar las propiedades del mismo para así resolverlo con los métodos estudiados observando también las características de ellos.

Así mismo, cabe destacar que al realizar operaciones con aritmética finita, tanto para la solución de los sistemas como para los valores evaluados en cada interpolador, no podemos garantizar que los resultados obtenidos sean exactos, pero dado que realizamos varias instancias de prueba con distintas metodologías, pudimos ver que los valores que obtuvimos eran coherentes a su contexto.

Todos los métodos de interpolación realizados en este trabajo cumplieron con la tarea de generar en mayor o menor medida el efecto de cámara lenta que buscábamos cada uno con sus características particulares. Mediante la experimentación pusimos bajo la lupa cada interpolador utilizado para así poder compararlos entre sí.

Comenzamos nuestros experimentos probando el correcto funcionamiento de los métodos implementados. Aquí además de ver mediante las cotas de precisión que todos los métodos cumplían la tarea de interpolar las funciones predeterminadas pudimos tener una primera visión sobre cómo se comportaba cada interpolador. El más básico, por vecinos, efectivamente demostró tener la mayor cota de error distanciándose ampliamente del resto, mientras que la interpolación lineal obtuvo resultados similares a los obtenidos con splines. En este experimento en particular, la interpolación mediante splines probó ser la de menor error, superando a la lineal para funciones cuadráticas y cúbicas, donde a su vez se pudo observar su relación con la interpolación por splines de a bloques, que con bloques más grandes su cota se aproximaba a la del spline standard.

En la siguiente prueba, donde lo que se analizó fue el error producido al eliminar cuadros del video original e intentar recrearlos con nuestros interpoladores, los resultados fueron similares al experimento anterior. Con ambas fórmulas de cálculo de error (ECM y PSNR) se pudo ver cómo vecinos era el método que peor se comportaba mientras que lineal y splines estuvieron emparejados a lo largo de todas las instancias de prueba realizadas.

Finalmente, la búsqueda de artifacts en el video producido, de anomalías y calidad final a nivel visual para el usuario resultó ser el punto determinante para decidir cuál de los sistemas propuestos mejor se desempeña en la tarea de proveer un efecto de cámara lenta. Los resultados acá dieron un giro completo con respecto a las conclusiones que veníamos realizando respecto a las métricas estudiadas. Para empezar, la interpolación de a vecinos dio mejores resultados que la lineal en términos de cantidad de artifacts y calidad general del video producido. El método por splines fue el que mejor llegó a producir la sensación de cámara lenta, con algunas anomalías pero no lo suficientemente significantes como las vistas en la interpolación lineal. Esto creemos que se podría explicar con el hecho de que las métricas seleccionadas para decidir qué interpolador era mejor estaban demasiado atadas a que interpolaran correctamente sin contemplar cómo resultaba visualmente esta interpolación.

Por último, podemos mencionar como posibles desarrollos a futuro la búsqueda de métricas que se centren más en el aspecto visual de los interpoladores, distintas formas de interpolación o directamente métodos completamente distintos, como lo sería considerar la aplicación de cuadrados mínimos, para seguir comparando y buscando que se generen los menores artifacts posibles.

## 6. Referencias

- [1] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*, chapter 3, pages 144–163. Richard Stratton, 9th edition, 2011.

## 7. Enunciado