Teorema 2.3 *Sea f una función continua sobre el intervalo $[a_0, b_0]$ y tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones generadas por el método de bisección, de acuerdo con las notaciones anteriores.*

Entonces, denotando mediante x_* una raíz de f en $[a_0, b_0]$, se tiene

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_*$

ii) $|x_* - c_n| \leq 2^{-(n+1)}\,(b_0 - a_0)$

Demostración: En primer lugar, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones monótonas y acotadas, que deben tener el mismo límite pues

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

Por otro lado, denotando x_* al límite común y pasando al límite en

$$0 \geq f(a_n)f(b_n)$$

(f continua) se obtiene $(f(x_*))^2 \leq 0$ y, por tanto, $f(x_*) = 0$.

Teorema 2.1 *Valor intermedio. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a\ b]$ y $f(a) \leq x \leq f(b)$ o $f(b) \leq x \leq f(a)$, existe un punto c, $a \leq c \leq b$, en el cual $f(c) = x$.*

Si el intervalo con que se empieza el proceso iterativo, $[a_0\ b_0]$, contiene una solución r, usando como estimación de ésta $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, se tendrá que

$$e_0 = |r - c_0| \leq \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

En cualquier iteración, razonando de forma similar,

$$e_i = |r - c_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Teorema 2.2 *Al aplicar el método de la bisección a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en un intervalo $[a\ b]$ en el que $f(a)f(b) < 0$, después de n iteraciones, en las que se habrán evaluado la función $n+2$ veces, se habrá obtenido un valor de la solución c_n tal que su* error

$$|r - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

donde r es el valor real de la solución.

Es fácil ver que si f es continua los intervalos $[a_i, b_i]$ seguirán conteniendo (al menos) una raíz de f, de modo que tomando $c_i = (a_i + b_i)/2$ como su aproximación se tendrá:

$$|x - c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{1}{4}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|b_1 - a_1|$$

que permite establecer una cota de error (absoluto) y calcular el número de iteraciones necesarias para alcanzar una cierta precisión ε_x, pues para asegurar que

$$\frac{1}{2^n}|b_1 - a_1| \leq \varepsilon_x$$

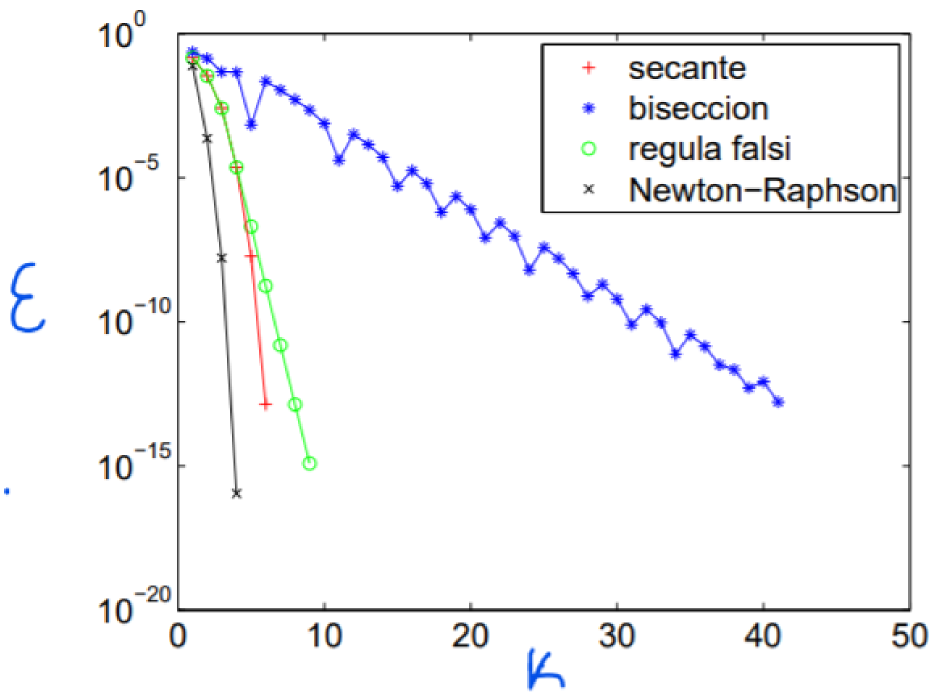
basta con tomar el (primer) valor de n tal que

$$2^n \geq \frac{|b_1 - a_1|}{\varepsilon_x}$$

esto es

$$n \geq \frac{\log(|b_1 - a_1|) - \log(\varepsilon_x)}{\log(2)}$$

Definición 2.1 Una solución es *correcta en p posiciones decimales* si el error es menor que $0{,}5 \times 10^{-p}$.



Si la aritmética de la máquina muestra que la función es igual a cero en un valor que no es exactamente una raíz, no hay manera de que el método o algoritmo pueda recuperarse ni hacer mucho más.

El error hacia atrás es cercano a $\epsilon_{\text{máq}} \approx 2{,}2 \times 10^{-16}$, mientras que el error hacia delante es aproximadamente 10^{-5}. Como el error hacia atrás no puede disminuirse por debajo de un error relativo por debajo del épsilon de la máquina, tampoco es posible disminuir el error hacia delante.

Hay que destacar que este ejemplo es bastante especial pues la función tiene una **raíz triple** en $r = 2/3$, •

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3.$$

Definición 2.3 Si una función continua y derivable m veces tiene en r una raíz, $f(r) = 0$, y $0 = f(r) = f'(r) = f''(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r)$, pero $f^{(m)}(r) \neq 0$, se dice que f tiene una **raíz de multiplicidad** m en r. Se dice que f tiene una **raíz múltiple** en r si la multiplicidad es mayor que uno. La *raíz es simple* si la multiplicidad es igual a uno.

Teorema 2.3 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y derivable, $f(r) = r$ y $S = |f'(r)| < 1$, la iteración de punto fijo, para estimaciones iniciales lo suficientemente próximas a r, converge linealmente hacia el punto r, con razón S.*

Definición 2.5 Sea e_i el error en el paso i de un método iterativo. Si

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se dice que el método *converge linealmente* con razón S.

Definición 2.6 Sea una sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $x_i \in \mathbb{R}$, convergente a x^*. El **orden de convergencia** de $\{x_i\}$ es el máximo de los números no negativos r que satisface

$$0 \leq \lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^r} < \infty.$$

Si $r = 1$, la sucesión se dice que **converge linealmente**; si $r = 2$, se dice que lo hace **cuadráticamente**; si $r = 3$, **cúbicamente**, etc. El valor del límite, β, se conoce como *razón*, o **constante de error asintótico**.

Definición 2.7 Un método iterativo $x_{i+1} = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, que parte de un punto x_0, se dice que tiene una **velocidad de convergencia de orden** r cuando la sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ converge con orden r hacia la solución x.

- La convergencia cuadrática quiere decir, grosso modo, que en las proximidades del límite o solución el número de dígitos significativos que aporta cada paso del proceso al valor de la solución es el doble que el anterior
- Converge linealmente. Esta convergencia significa que cada iteración añade un número de dígitos constante a la solución final

Problema

Encontrar la(s) raíces de

a. $f(x) = cos^2(x) - x^2$
b. f(x)=xsin(x)-1 en [-1,2]
c. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$
d. Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.
e. $x^3 - 2x - 5 = 0$. Esta ecuación tiene valor histórico. Fue la ecuación que usó John Wallis para presentar por primera vez el método de Newton a la academia francesa de ciencias en el siglo XV.

Empleando los métodos con $TOL = 10^{-8}; 10^{-16}; 10^{-32}; 10^{-56};$

- ⇒ Posición falsa 1 ⟶ #8
- ⇒ Newton-Raphson 2 ⟶ #1
- ⇒ Müller 3 ⟹ #2
- ⇒ algoritmo Δ^2 de Aitken (TODOS)
- ⇒ Punto Fijo 4 ⟹ #7
- ⇒ Newton-Raphson Relajado 5 ⟹ #5
- ⇒ Halley 6 ⟹ #3
- ⇒ Secante 7 ⟹ #4
- ⇒ ~~Posición Falsa~~ Punto fijo 8 ⟹ #6
- ⇒ Newton Raphson 9 ⟹ #9

PREGUNTAS

- Cuales son condiciones para aplicar el método
- Proporcione una explicación geométrica del algoritmo (*excepto para la convergencia acelerada)
- Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo
- Cuál son las raíces. Valide su resultado
- Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.
- Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema
- Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar)
- ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?
- Realice una gráfica que muestre la relación entre ε_{i+1} y ε_i, qué representa esa gráfica, encuentre una relación de la forma:

$$\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$$

Utilizando la definición 2.6 verifique el orden de convergencia de forma numérica, también verifique la definición 2.5 acerca de la convergencia lineal (realice un número considerable de iteraciones)

- Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones
- Como se comporta el método con respecto al de bisección
- Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Entregables:

- Documento con introducción general del método, y las respuestas a las preguntas (en formato pdf con edición LATEX) en repositorio
- La implementación en R y/o Python

Fechas

- Presentación de primeros resultados (16 Febrero- 17 Febrero)
- Presentación de resultados completos (18,- 19 de Febrero): Exposición con máximo 5 diapositivas y duración máxima de 10 minutos
- Documentación (Entregables) en GitHub de cada estudiante 21 de Febrero

Evaluación

Este problema vale la mitad del parcial (7.5%) de Marzo 2- o 3 2021

Enlaces- Referencias

CHAPRA, Steven C. y CANALE, Raymond P.: Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw Hill 2002.

https://www.codesansar.com/numerical-methods/secant-method-online-calculator.htm

https://rdrr.io/cran/cmna/

Palabras Claves:

Épsilon de la máquina, Python, R, Convergencia, significancia, Error hacia Adelante, Error hacia atrás