Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы и модели биологии»

«Часть 1: Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
И. В. Шамков

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

- *Одномерная система:*

$$u_{t+1} = r \cdot \sqrt{u_t}(1 - a u_t^3), a > 0, r > 0, u_t \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1}$$

- *Двумерная система:*

$$u_{t+1} = r \cdot \sqrt{u_t}(1 - a u_{t+1}^3), a > 0, r > 0, u_t \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.2}$$

Необходимые задачи:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования цикла длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
6. В случае системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Исследование одношаговой системы

2.1 Нахождение неподвижных точек

Введём определение неподвижной точки для исследования дискретной одношаговой системы 1.1

> **Определение.** Точка $u^* \in \mathbb{R}$ называется неподвижной точкой системы $u_{t+1} = f(u_t)$, если $u^* = f(u^*)$, где $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Рассмотрим $f = f(u, a, r) = r\sqrt{u}(1 - au^3)$. Тогда для нахождения неподвижный точек требуется решить уравнение $f(u, a, r) = u$.

$$r\sqrt{u}(1 - au^3) = u$$

$$r\sqrt{u}(1 - au^3) - u = 0$$

$$\sqrt{u} \cdot (r - aru^3 - \sqrt{u}) = 0$$

$$\begin{cases} u \ = 0, \\ (r - aru^3 - \sqrt{u}) = 0 \end{cases}$$

Из системы следует, что первая неподвижная точка $u_1^* = 0$. Исследуем второе уравнение из системы: $r - aru^3 = \sqrt{u}$. Аналитического решения этого уравнения не существует, однако попробуем выяснить количество решений и их зависимость от параметров a, r.Рассмотрим функцию $f(u) = \sqrt{u}$. $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} > 0$ для $\forall u > 0$ (по условию) $\Rightarrow$ функция $f(u)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$.
Az Исследуем функцию $g(u) = r - aru^3$. Исследуем производную,чтобы найти промежутки возрастания-убывания $g(u).g'(u) = -3aru^2$. Тогда для $\forall a > 0, r > 0$ $g(u)$ убывает на $\mathbb{R}_+$. Следовательно существует единственное некоторое нетривиальное решение $\tilde{u} : f(\tilde{u}) = g(\tilde{u})$.Однако аналитически выразить решение не представляется возможным.

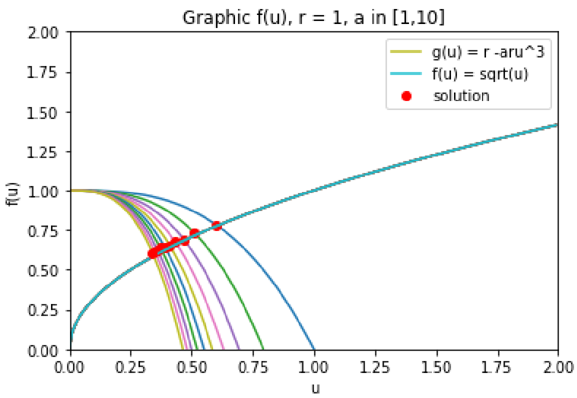

Рис. 1. Графики $g(u) = r - aru^3$ и $f(u) = \sqrt{u}$ при фиксированном $r = 1$ и $a \in [1, 10]$ красными точками помечено решение уравнения $f(u) = g(u)$

2.2 Исследование устойчивости неподвижных точек

Сначала дадим теоретическую сводку об устойчивости и ассимптотическом устойчивости точек.

Пусть задана дискретная система:
$u_{t+1} = f(u_t),\ f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$.
Пусть также задано начальное приближение u_0.

Определение. (Устойчивость по Ляпунову)
Неподвижная точка u^* называется *устойчивой* точкой по Ляпунову, если: для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall u_0 : |u_0 - u^*| < \delta \Rightarrow |u_t - u^*| < \varepsilon$ для $\forall t \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, если $\lim_{t \to \infty} f(u_t) = u^*$, то точка u^* называется *ассимптотически устойчивой*.

Определение. Устойчивые неподвижные точки называются *аттракторами*, а неустойчивые неподвижные точки называются *репеллерами*.

Утверждение 2.1. Пусть задана система **??** и f — непрерывно-дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, u^* — неподвижная точка системы **??**, тогда есть три случая:

1. Если $|f'(u^*)| < 1$, то u^* *ассимптотически устойчива.*
2. Если $|f'(u^*)| > 1$, то u^* *неустойчива.*
3. Если $|f'(u^*)| = 1$, то устойчивость точки неопределенна.

Найдём производную функции:
$f(u) = r\sqrt{u} - aru^{\frac{7}{2}}$, $f'(u) = \frac{r}{2\sqrt{u}} + \frac{7}{2}aru^{\frac{5}{2}}$. Рассмотрим $\lim_{u \to u^*} f'(u) = \infty \Rightarrow u^*$ — неустойчива. Наглядно показано на следующем графике.

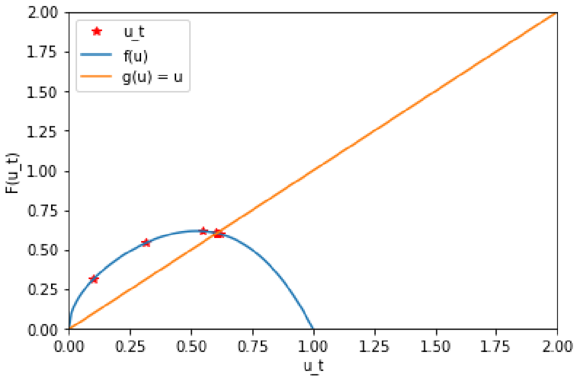

Рис. 2. Начальное приближение $u_0 = 0.1$, фиксированные $a = 1, r = 1$, $t = \overline{0, 10}$

Видно, что траектория не сходится к неподвижной точке $u^* = 0$.

2.3 Исследование существования циклов длинной 2 и 3

Дадим теоретическую сводку.