

Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas

Ivan Sipiran

Análisis espectral de formas

- La mayoría de problemas de análisis se hacen más fáciles e intuitivos si usamos una representación diferente para los objetos 3D



Porqué análisis espectral?

- Es independiente de la representación



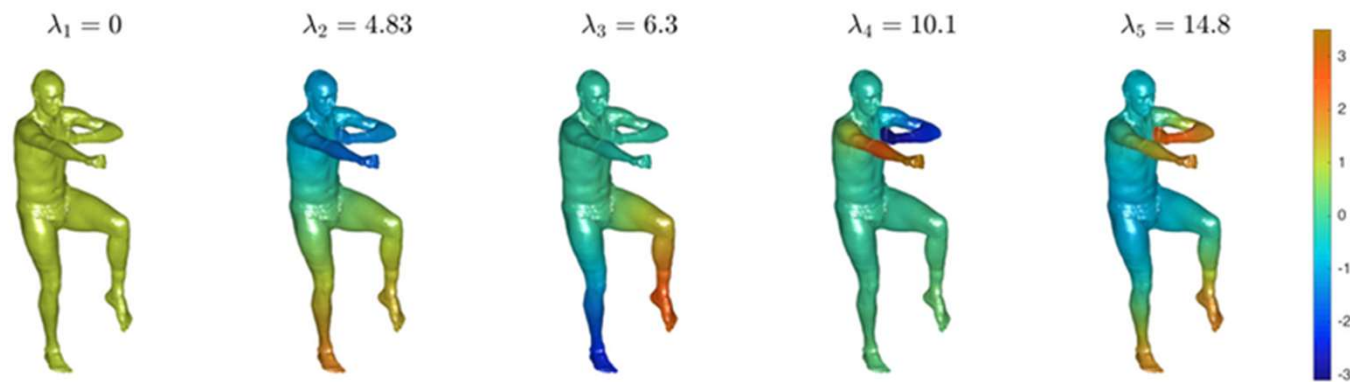
Porqué análisis espectral?

- Es intrínseco, por lo tanto invariante a deformaciones



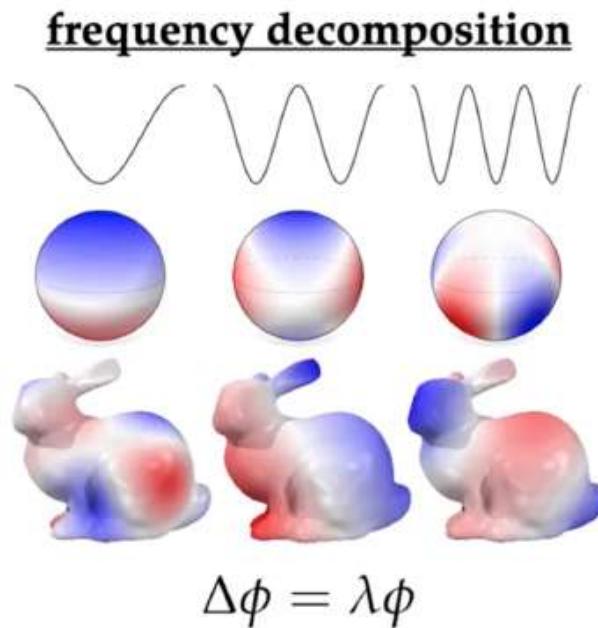
Porqué análisis espectral?

- Es computacionalmente eficiente



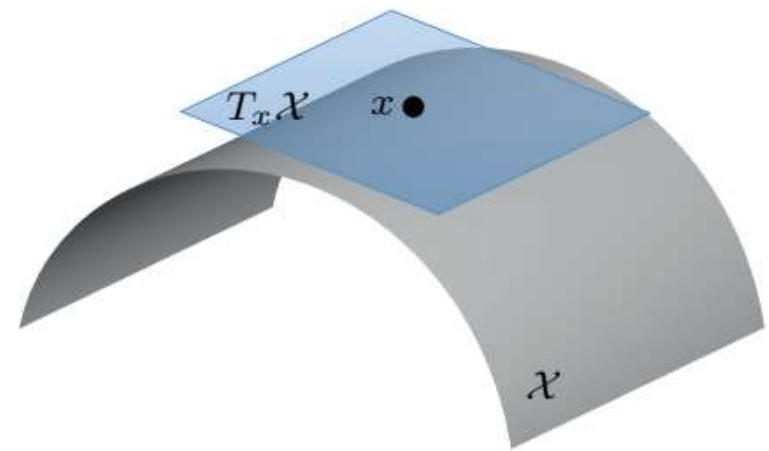
Porqué análisis espectral?

- Puede ser interpretado en términos de procesamiento de señales clásico



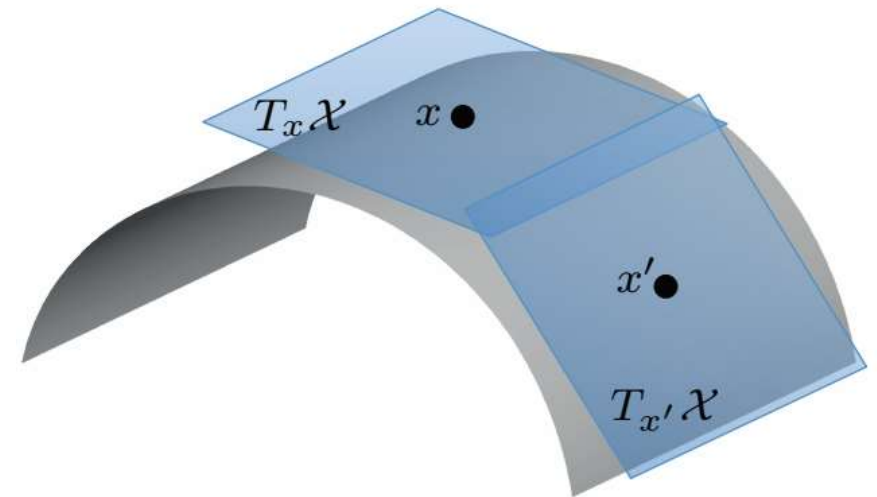
Resumen de Geometría Riemanniana

- Manifold \mathcal{X} es un espacio topológico
- No hay una estructura global Euclidiana
- Plano tangente $T_{\mathcal{X}}$ es una representación local Euclidiana del Manifold alrededor de un punto



Resumen de Geometría Riemanniana

- Manifold \mathcal{X} es un espacio topológico
- No hay una estructura global Euclidiana
- Plano tangente $T_{\mathcal{X}}$ es una representación local Euclidiana del Manifold alrededor de un punto
- Métrica Riemanniana depende suavemente de la superficie

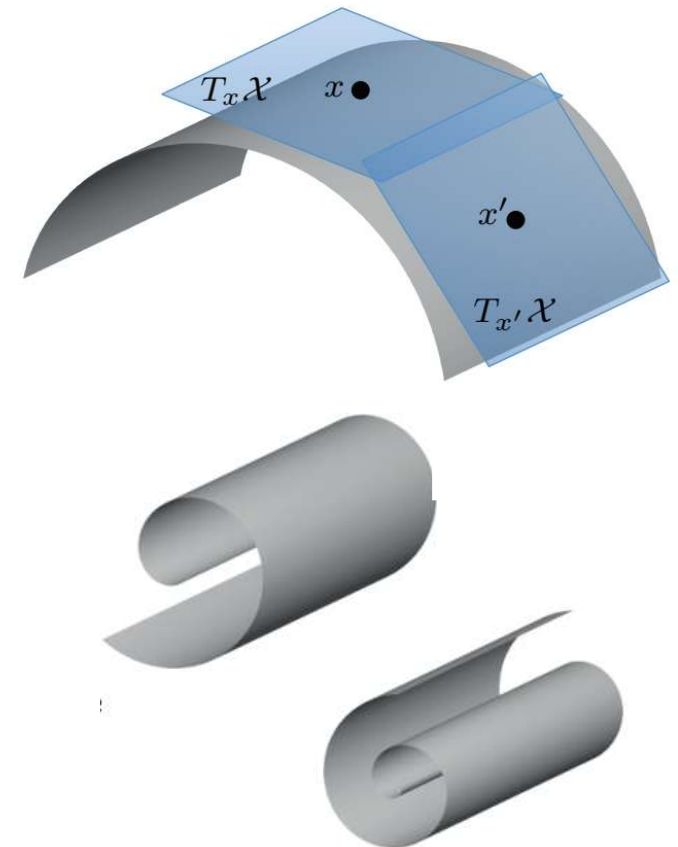


$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_x \mathcal{X}} : T_x \mathcal{X} \times T_x \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

Resumen de Geometría Riemanniana

- Manifold \mathcal{X} es un espacio topológico
- No hay una estructura global Euclidiana
- Plano tangente $T_{\mathcal{X}}$ es una representación local Euclidiana del Manifold alrededor de un punto
- Métrica Riemanniana depende suavemente de la superficie

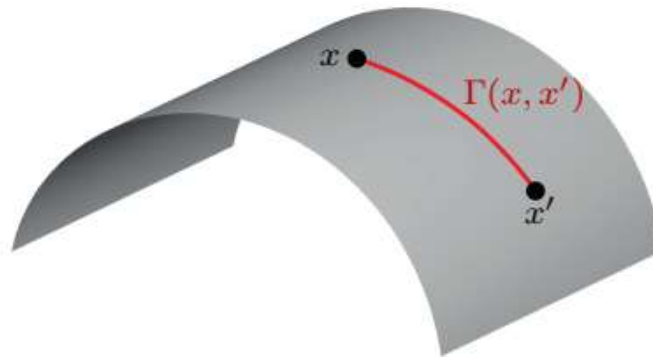
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_x \mathcal{X}} : T_x \mathcal{X} \times T_x \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$



Isometría: deformación que preserva la métrica

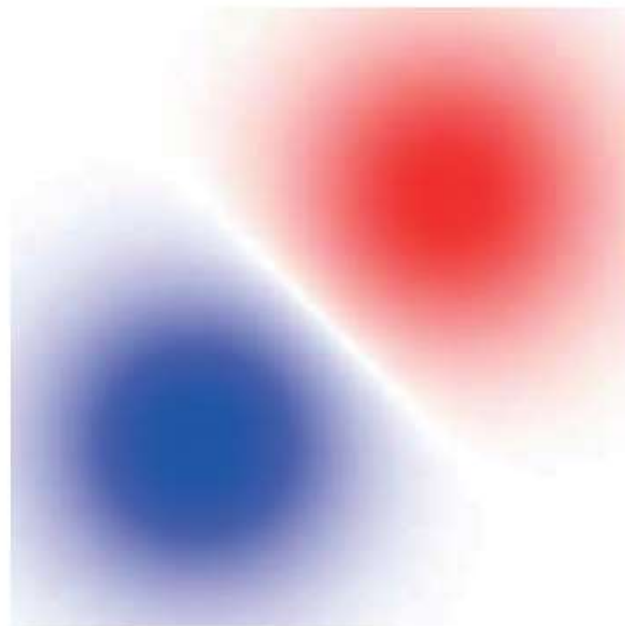
Resumen de Geometría Riemanniana

- Geodesia: camino más corto en χ entre dos puntos



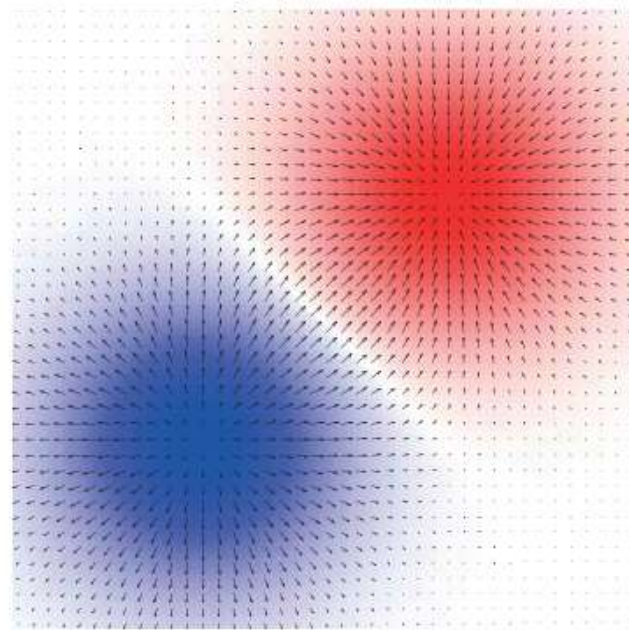
Operador Laplaciano

- Campo escalar suave f



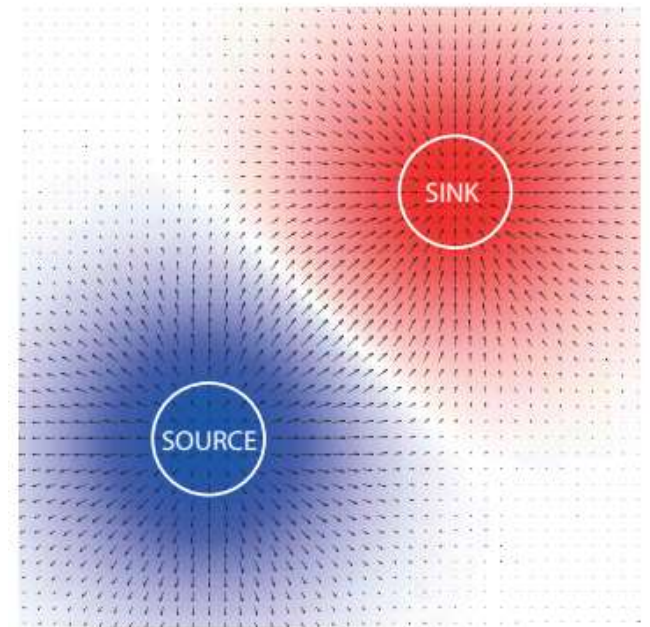
Operador Laplaciano

- Gradiente $\nabla f(x)$: dirección del más grande incremento de f en cada punto



Operador Laplaciano

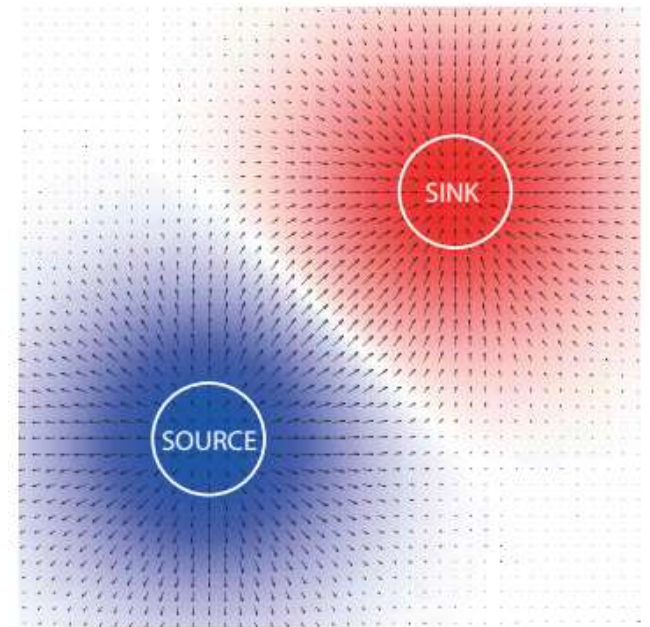
- Gradiente $\nabla f(x)$: dirección del más grande incremento de f en cada punto
- Divergencia $\text{div}(F(x))$: densidad del flujo saliente de F desde un volumen infinitesimal alrededor de un punto



Operador Laplaciano

- Gradiente $\nabla f(x)$: dirección del más grande incremento de f en cada punto
- Divergencia $\text{div}(F(x))$: densidad del flujo saliente de F desde un volumen infinitesimal alrededor de un punto
- Teorema de la divergencia

$$\int_V \text{div}(F) dV = \int_{\partial V} \langle F, \hat{n} \rangle dS$$



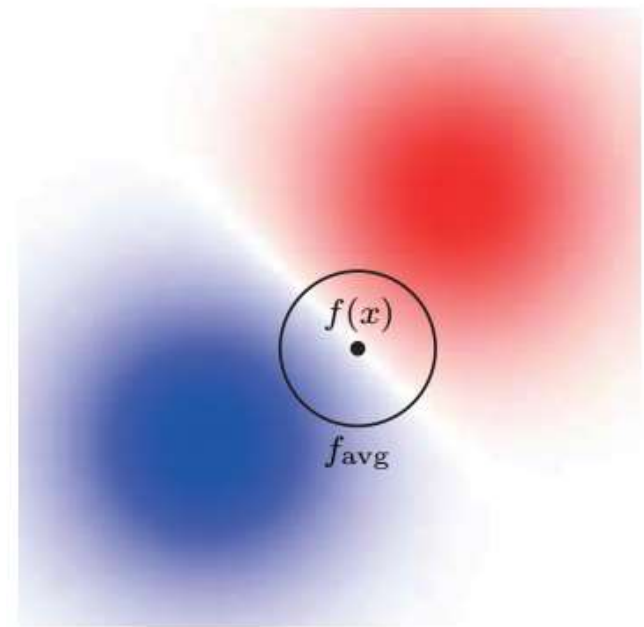
Operador Laplaciano

- Gradiente $\nabla f(x)$: dirección del más grande incremento de f en cada punto
- Divergencia $\text{div}(F(x))$: densidad del flujo saliente de F desde un volumen infinitesimal alrededor de un punto
- Teorema de la divergencia

$$\int_V \text{div}(F) dV = \int_{\partial V} \langle F, \hat{n} \rangle dS$$

- Laplaciano $\Delta f(x) = -\text{div}(\nabla f(x))$

Diferencia entre $f(x)$ y el promedio de f en una esfera infinitesimal alrededor de un punto.

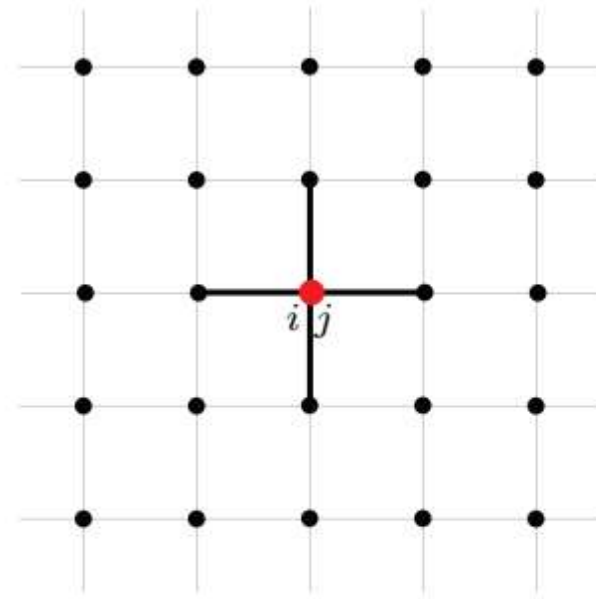


Laplaciano Discreto



En una dimensión

$$(\Delta f)_i \approx 2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}$$



En dos dimensiones

$$\begin{aligned} (\Delta f)_{ij} &\approx 4f_{ij} - f_{i-1,j} - f_{i+1,j} \\ &\quad - f_{i,j-1} - f_{i,j+1} \end{aligned}$$

Aplicación Física: Ecuación de calor

$$f_t = -c\Delta f$$

- Ley de enfriamiento de Newton: ratio de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura de su alrededor
- c es la constante de difusividad térmica

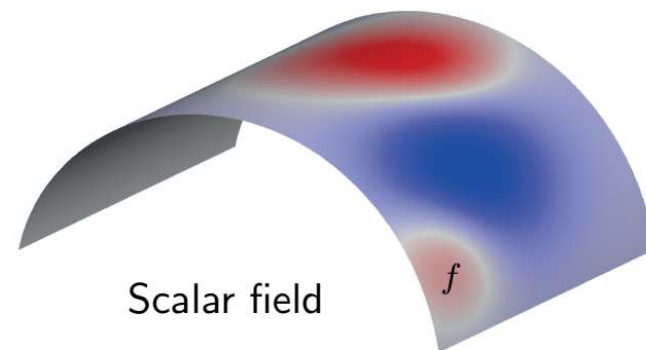
Aplicación física: ecuación de onda

$$f_{tt} = -v^2 \Delta f$$

- Onda modelada como un desplazamiento de masas conectadas con un sistema de resortes: aceleración proporcional a la fuerza neta

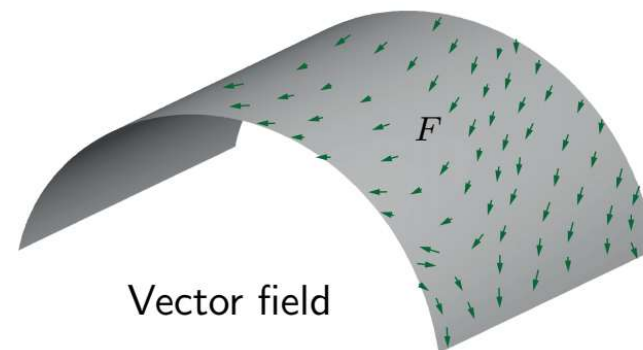
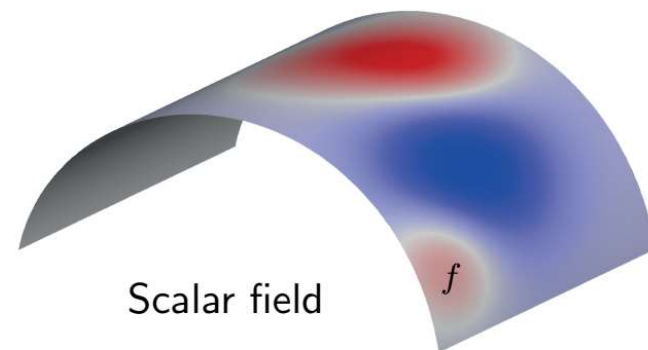
Cálculo en Manifolds: campos

- Campo escalar $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$



Cálculo en Manifolds: campos

- Campo escalar $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$
- Campo vectorial $F : \mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$

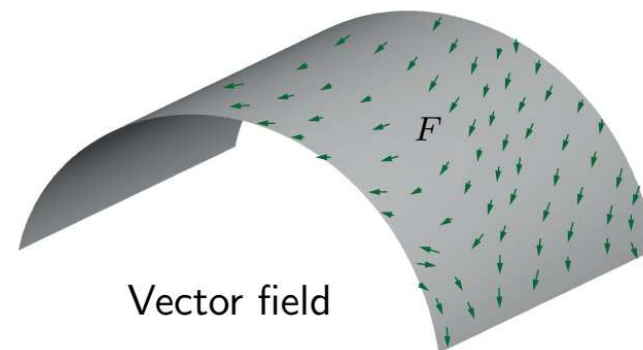
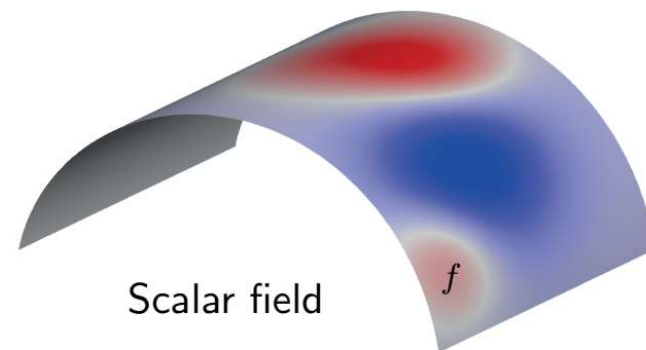


Cálculo en Manifolds: campos

- Campo escalar $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$
- Campo vectorial $F : \mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$
- Espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)dx$$

$$\langle F, G \rangle_{L^2(T\mathcal{X})} = \int_{\mathcal{X}} \langle F(x), G(x) \rangle_{T_x \mathcal{X}} dx$$

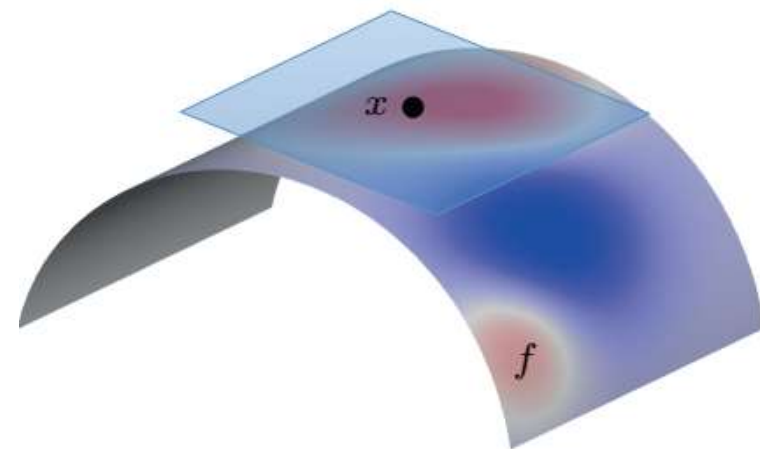


Cálculo en Manifolds: gradiente

- Diferencial $df : T\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ actuando sobre campos vectoriales
- Derivada direccional

$$df(x)F(x) = \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_{T_x \mathcal{X}}$$

cuánto cambia la función en x en la dirección $F(x)$



Cálculo en Manifolds: gradiente

- Diferencial $df : T\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ actuando sobre campos vectoriales
- Derivada direccional

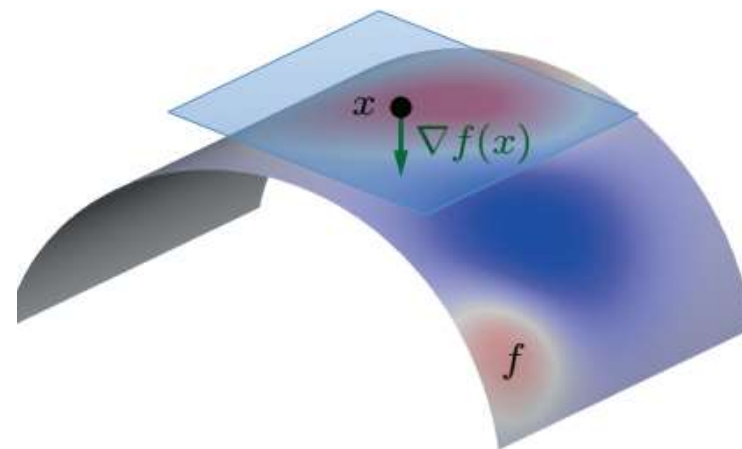
$$df(x)F(x) = \langle \nabla f(x), F(x) \rangle_{T_x \mathcal{X}}$$

cuánto cambia la función en x en la dirección $F(x)$

- Operador intrínseco del gradiente

$$\nabla f : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(T\mathcal{X})$$

Dirección en el cambio más grande de f

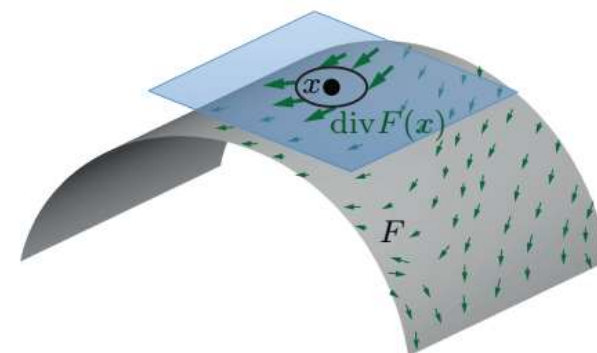


Cálculo en Manifolds: divergencia

- Operador intrínseco de divergencia

$$\operatorname{div} : L^2(T\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$$

Flujo neto del campo F en x



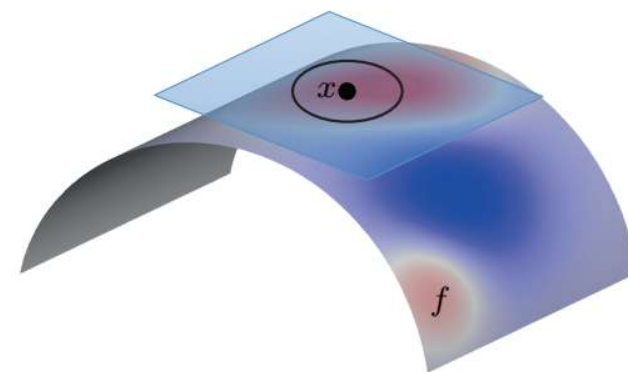
Cálculo en Manifolds: Laplaciano

- Operador Laplaciano o Laplace-Beltrami

$$\Delta : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$$

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f)$$

- Diferencia entre $f(x)$ y el valor promedio de f alrededor de x .
- Es intrínseco, expresado solamente en términos de la métrica Riemanniana



Invariante a isometrías

Laplaciano es su propio adjunto

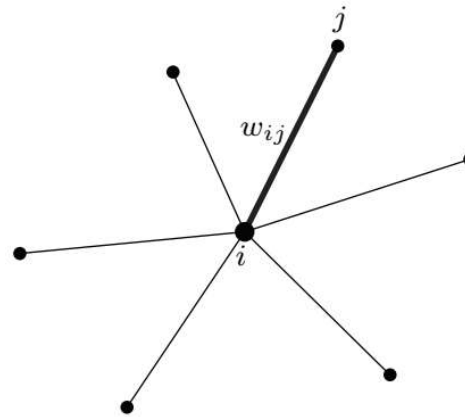
$$\langle \Delta f, g \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \langle f, \Delta g \rangle_{L^2(\mathcal{X})}$$

Eigenfunciones ortogonales

Positivo semi-definido

Eigenvalues no negativos

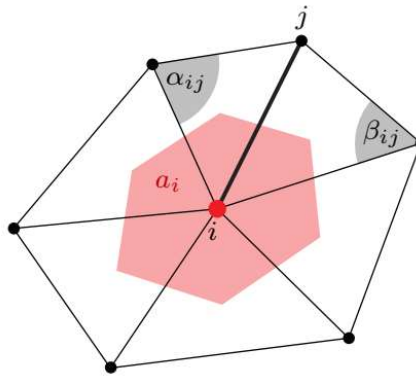
Laplaciano Discreto: Grafo



- Laplaciano no normalizado simétrico

$$(\Delta f)_i \approx \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} w_{ij} (f_i - f_j)$$

Laplaciano Discreto: Malla triangular

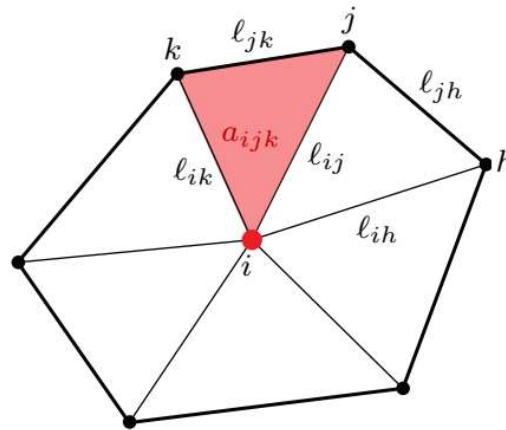


- Laplaciano cotangente para Manifolds

$$(\Delta f)_i \approx \frac{1}{a_i} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2} (f_i - f_j)$$

- a_i es el elemento de área local (=1/3 área del triángulo)

Laplaciano Discreto: Malla triangular



- Laplaciano cotangente en términos de longitud de aristas

$$(\Delta f)_i \approx \frac{1}{a_i} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left(\frac{-\ell_{ij}^2 + \ell_{jk}^2 + \ell_{ik}^2}{8a_{ijk}} + \frac{-\ell_{ij}^2 + \ell_{jh}^2 + \ell_{ih}^2}{8a_{ijh}} \right) (f_i - f_j)$$

- $a_{ijk} = \sqrt{s(s - \ell_{ij})(s - \ell_{jk})(s - \ell_{ik})}$ s es el perímetro

Matriz Laplaciana

- Operador Laplaciano discreto

$$(\Delta f)_i \approx \frac{1}{a_i} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} w_{ij} (f_i - f_j)$$

Puede ser escrito como una matriz $n \times n$ esparsa

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{W})\mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = (f(x_1), \dots, f(x_n))^{\top}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

mass matrix

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2} & (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

stiffness matrix

$$\mathbf{D} = -\text{diag}(\sum_{j \neq 1} w_{1j}, \dots, \sum_{j \neq n} w_{nj})$$

Propiedades del Laplaciano

- Eigenfunción constante $\Delta f = 0$ si f es constante
- Simetría: $\langle \Delta f, g \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \langle \Delta g, f \rangle_{L^2(\mathcal{X})}$ $\Delta = \Delta^\top$
 - Eigenvalues reales y eigenvectors ortogonales
- Localidad: $(\Delta f)(x)$ solo está definido en la vecindad de x
- Precisión lineal: Si \mathcal{X} es un plano y $f = ax + by + c$, entonces $\Delta f = 0$
- Semi-definido positivo: $\langle \Delta f, f \rangle_{L^2(\mathcal{X})} \geq 0$

$$\mathbf{f}^\top \Delta \mathbf{f} \geq 0, \text{ i.e., } \Delta \succeq 0$$

- Convergencia: solución de PDE discreta converge a solución continua cuando $n \rightarrow \infty$

No free lunch

	SYM	LOC	LIN	POS	PSD	CON
Combinatorial ¹	●	●	○	●	●	○
Cotangent ²	●	●	●	○	●	●
Mean value ³	○	●	●	●	○	○
Intrinsic Delaunay ⁴	●	○	●	●	●	—

No free lunch

	SYM	LOC	LIN	POS	PSD	CON
Combinatorial ¹	●	●	○	●	●	○
Cotangent ²	●	●	●	○	●	●
Mean value ³	○	●	●	●	○	○
Intrinsic Delaunay ⁴	●	○	●	●	●	—

- Teorema No free lunch, todas las propiedades no pueden ser satisfechas al mismo tiempo
- Es necesario escoger una discretización dependiendo de la aplicación

Eigenvalues y eigenfunciones

- Laplaciano de un Manifold compacto tiene muchas eigenfunciones enumerables

$$\Delta\phi_k(x) = \lambda_k\phi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

- Eigenfunciones son reales y ortonormales $\langle\phi_i, \phi_j\rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \delta_{ij}$
- Eigenvalues son no negativos $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Eigenvalues y eigenfunciones

- Descomposición propia del Laplaciano discreto

$$\mathbf{\Delta}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}$$

Donde $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ y $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

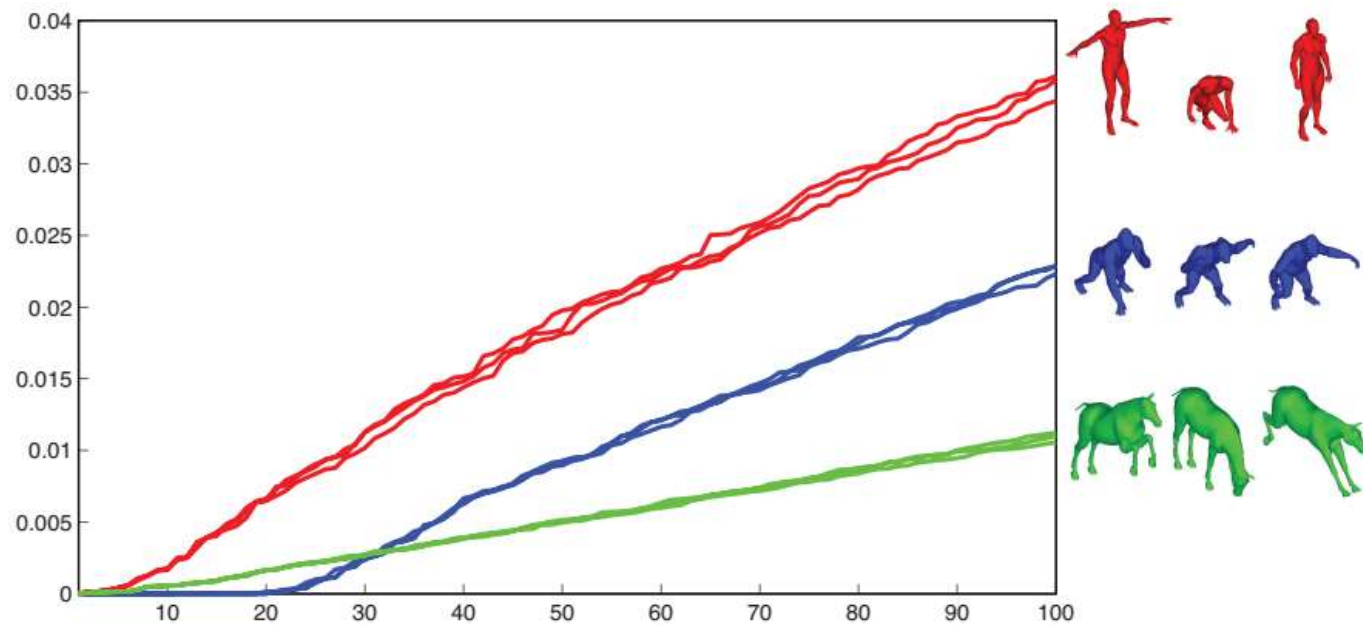
Problema generalizado

$$(\mathbf{D} - \mathbf{W})\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}$$

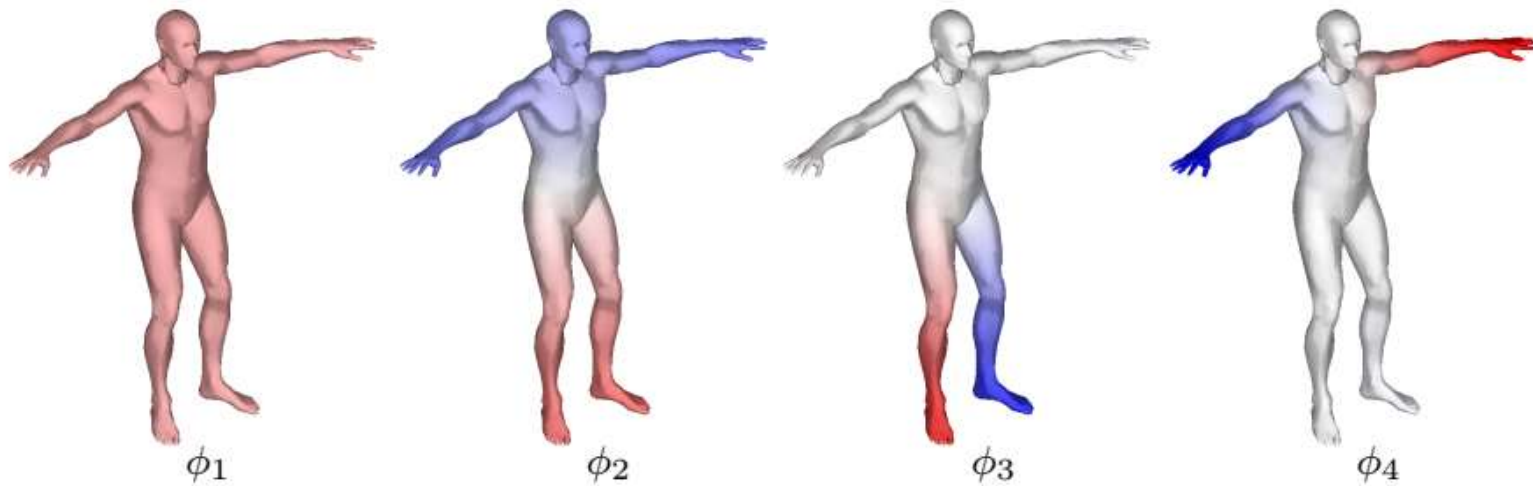
Con eigenvectors A-normalizados $\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{A} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$

ShapeDNA

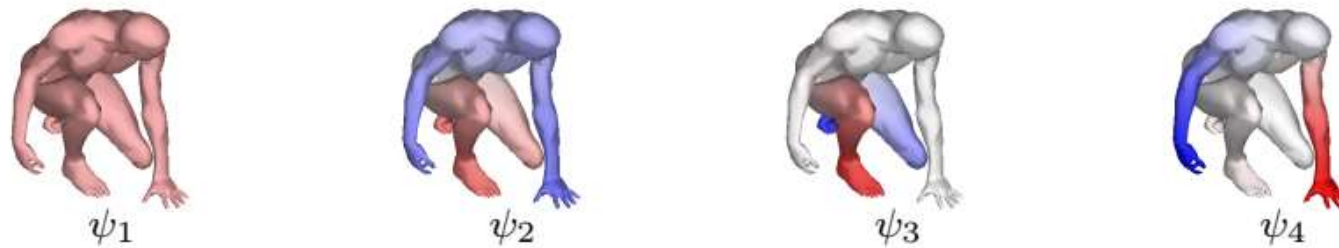
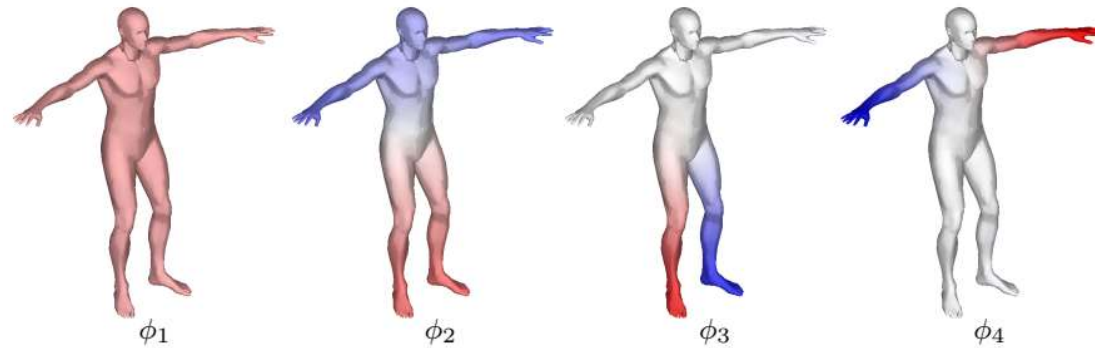
- Eigenvalues del Laplaciano pueden ser usados como un descriptor invariante a la isometría



Eigenfunciones Laplacianas



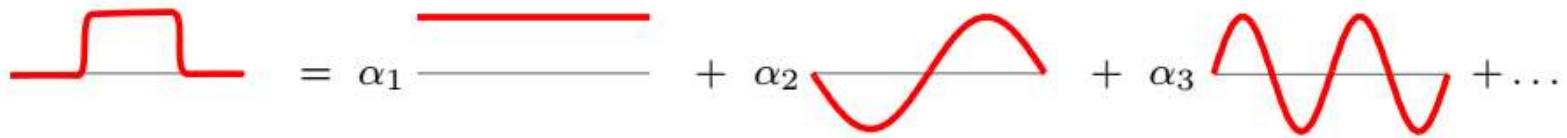
Eigenfunciones Laplacianas



Análisis de Fourier

- Una función $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrita como una serie de Fourier

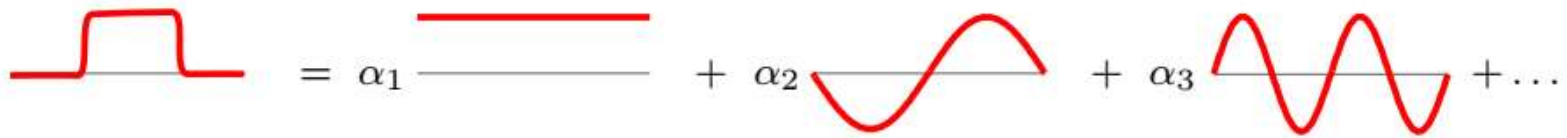
$$f(x) = \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') e^{-ikx'} dx' e^{ikx}$$



Análisis de Fourier

- Una función $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrita como una serie de Fourier

$$f(x) = \sum_k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') e^{-ikx'} dx'}_{\hat{f}_k = \langle f, e^{ikx} \rangle_{L^2([-\pi, \pi])}} e^{ikx}$$

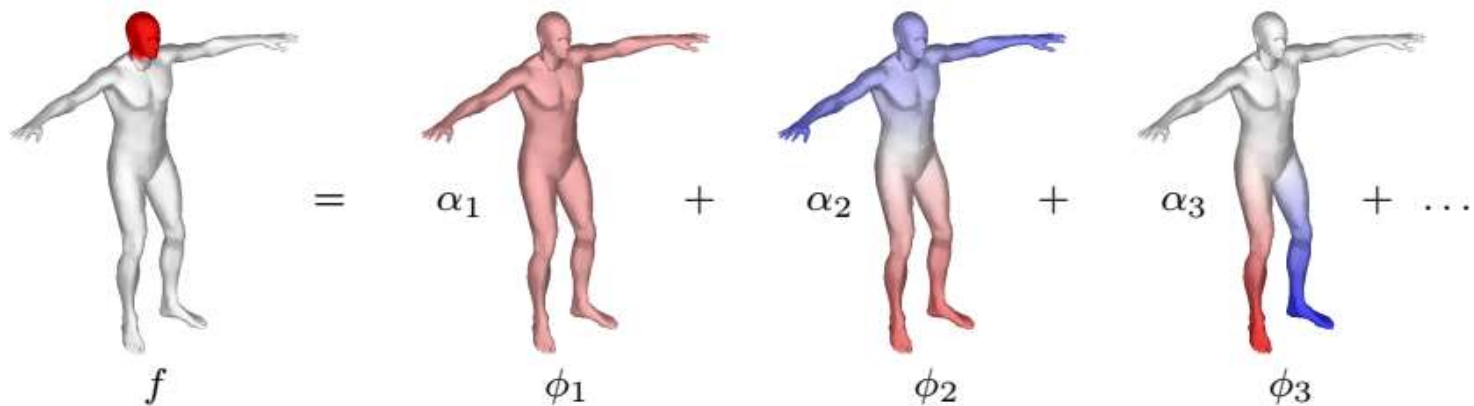


Bases de Fourier = Eigenfunciones Laplacianas $-\frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = k^2 e^{ikx}$

Análisis de Fourier: espacio no Euclidiano

- Una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrita como una serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} f(x') \phi_k(x') dx'}_{\hat{f}_k = \langle f, \phi_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})}} \phi_k(x)$$



Ecuación del calor



Joseph Fourier (1768-1830)

THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.



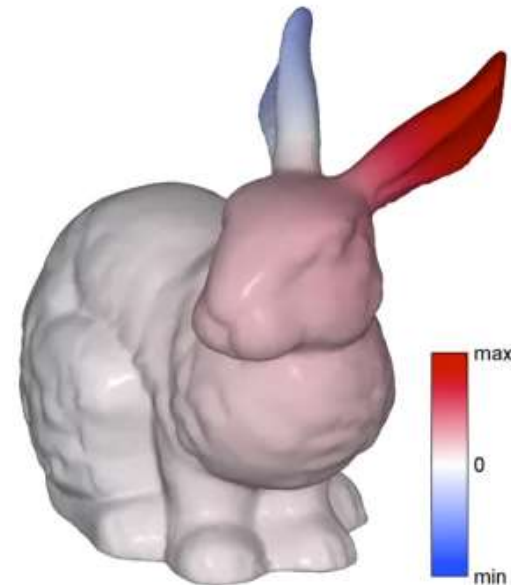
A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Difusión del calor en Manifolds

$$\begin{cases} f_t(x, t) = -\Delta f(x, t) \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

- $f(x, t)$ = cantidad de calor en el punto x en el tiempo t
- $f_0(x)$ = distribución de calor inicial

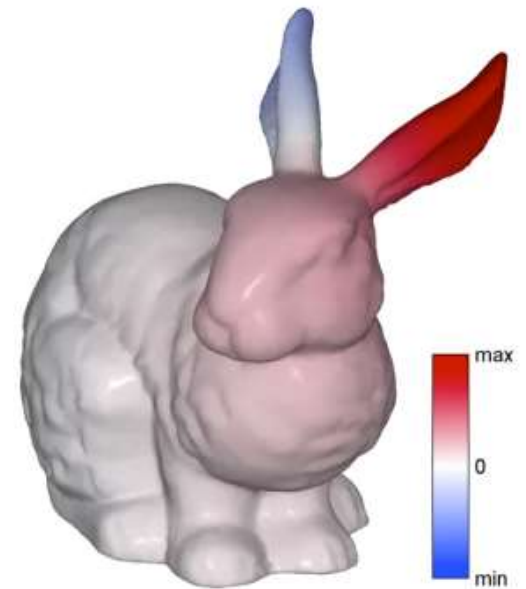


Difusión del calor en Manifolds

$$\begin{cases} f_t(x, t) = -\Delta f(x, t) \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

- $f(x, t)$ = cantidad de calor en el punto x en el tiempo t
- $f_0(x)$ = distribución de calor inicial
- Solución de la ecuación de calor expresado como el operador de calor

$$f(x, t) = e^{-t\Delta} f_0(x)$$

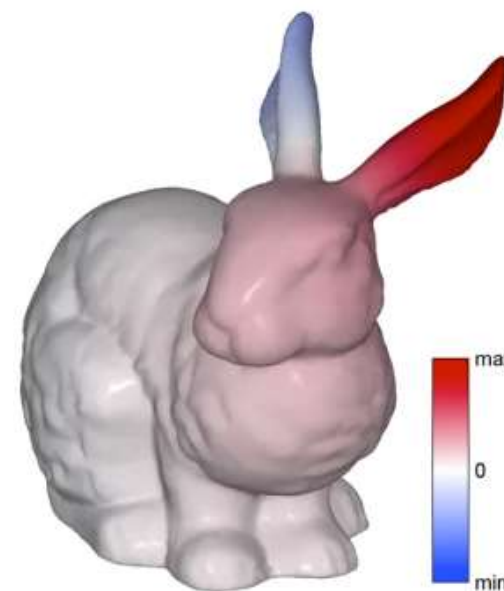


Difusión del calor en Manifolds

$$\begin{cases} f_t(x, t) = -\Delta f(x, t) \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

- $f(x, t)$ = cantidad de calor en el punto x en el tiempo t
- $f_0(x)$ = distribución de calor inicial
- Solución de la ecuación de calor expresado como el operador de calor

$$f(x, t) = e^{-t\Delta} f_0(x) = \sum_{k \geq 1} \langle f_0, \phi_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x)$$

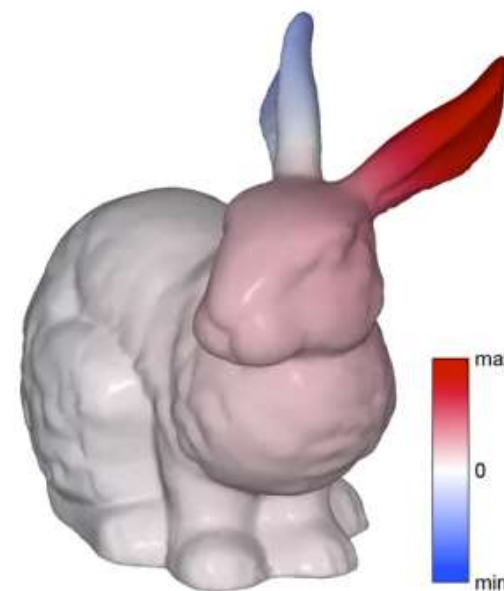


Difusión del calor en Manifolds

$$\begin{cases} f_t(x, t) = -\Delta f(x, t) \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

- $f(x, t)$ = cantidad de calor en el punto x en el tiempo t
- $f_0(x)$ = distribución de calor inicial
- Solución de la ecuación de calor expresado como el operador de calor

$$\begin{aligned} f(x, t) &= e^{-t\Delta} f_0(x) = \sum_{k \geq 1} \langle f_0, \phi_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f_0(x') \sum_{k \geq 1} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \phi_k(x') dx' \end{aligned}$$

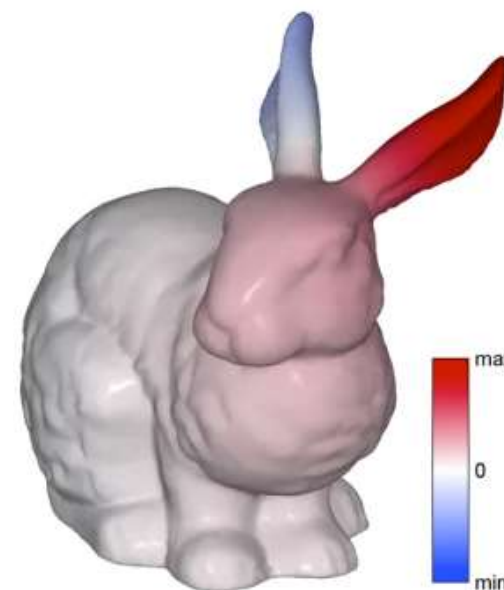


Difusión del calor en Manifolds

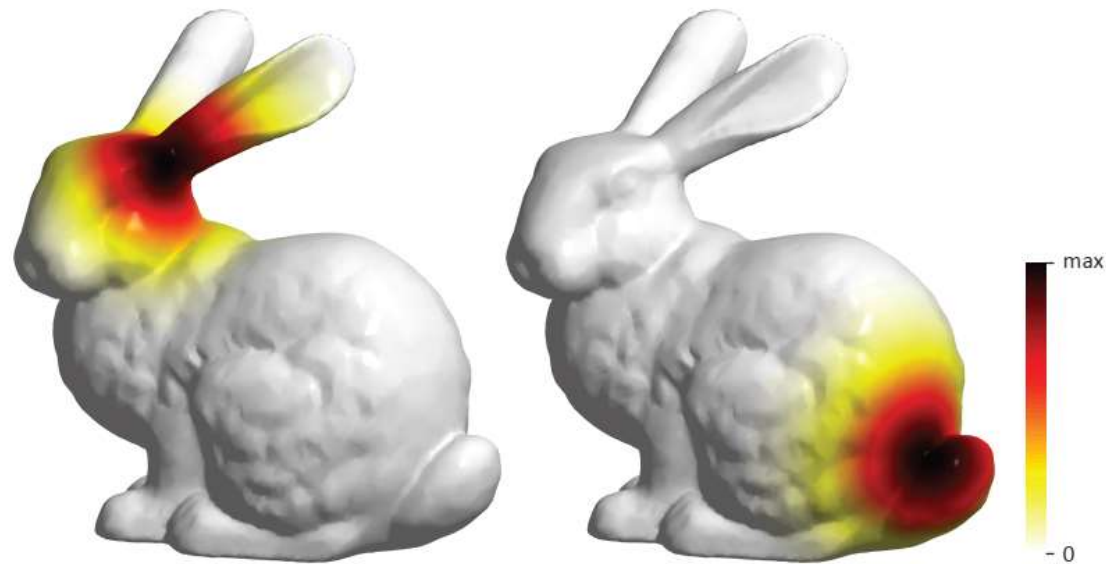
$$\begin{cases} f_t(x, t) = -\Delta f(x, t) \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

- $f(x, t)$ = cantidad de calor en el punto x en el tiempo t
- $f_0(x)$ = distribución de calor inicial
- Solución de la ecuación de calor expresado como el operador de calor

$$\begin{aligned} f(x, t) &= e^{-t\Delta} f_0(x) = \sum_{k \geq 1} \langle f_0, \phi_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f_0(x') \underbrace{\sum_{k \geq 1} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \phi_k(x') dx'}_{\text{heat kernel } h_t(x, x')} \end{aligned}$$



Kernel de calor



- Kernel de calor $h_t(x, \cdot)$ en diferentes puntos de un Manifold

Mapas de difusión y métricas

- Un kernel de difusión es un kernel de la forma

$$g(x, x') = \sum_{k \geq 1} G(\lambda_k) \phi_k(x) \phi_k(x')$$

Que satisface las siguientes propiedades

$$\sum_{k \geq 1} G^2(\lambda_k) < \infty$$

$$G(\lambda_k) \geq 0$$

$$G(\lambda_k) \leq 1$$

Métrica de difusión es una combinación de kernels de difusión

$$\begin{aligned} d(x, x') &= \|g(x, \cdot) - g(x', \cdot)\|_{L^2(\mathcal{X})} \\ &= \left(\int_{\mathcal{X}} (g(x, \eta) - g(x', \eta))^2 d\eta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Mapas de difusión y métricas

- Un mapa de difusión es un mapeo desde un punto x a una secuencia

$$\Phi : x \mapsto \{G(\lambda_k)\phi_k(x)\}_{k \geq 1} \in \ell^2$$

- Dependiendo del kernel, diferentes mapeos se obtienen
 - Eigenmap Laplaciano: $G(\lambda) = 1$
 - Mapa de difusión heat kernel $G(\lambda) = e^{-t\lambda}$
 - Global Point Signature: $G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Mapas de difusión

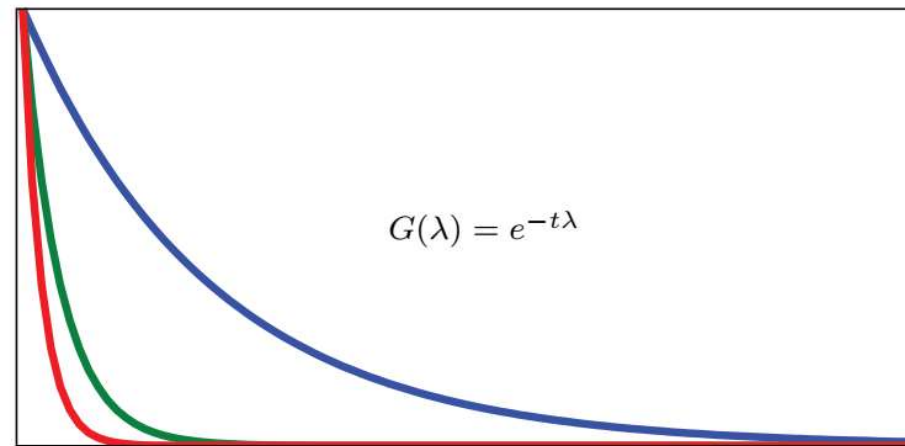
- Por el teorema de Parseval

$$\sum_{k \geq 1} G^2(\lambda_k) (\phi_k(x) - \phi_k(x'))^2 = \int_{\mathcal{X}} (g(x, \eta) - g(x', \eta))^2 d\eta$$

- Como el kernel disminuye, distancia de difusión puede ser aproximada con solo m términos

$$d(x, x') \approx \left(\sum_{k=1}^m G^2(\lambda_k) (\phi_k(x) - \phi_k(x'))^2 \right)^{1/2}$$

Distancias de difusión



$t = 100$



$t = 500$



$t = 1000$

Descriptores locales

- Heat Kernel Signature

- Autodifusividad : diagonal del kernel de calor

$$h_t(x, x) = \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k t} \phi_k^2(x)$$

- Cuánto calor permanece en el punto x después de un tiempo t

- Vector dimensional

$$\mathbf{f}(x) : x \mapsto (h_{t_1}(x, x), \dots, h_{t_Q}(x, x))$$

Heat kernel signature

- Muchas propiedades interesantes
 - Intrínseco por construcción
 - Eficiente de computar en el dominio espectral
 - Denso
 - Multi-escala

Heat kernel signature



$$f_1(x) = h_{t_1}(x, x)$$



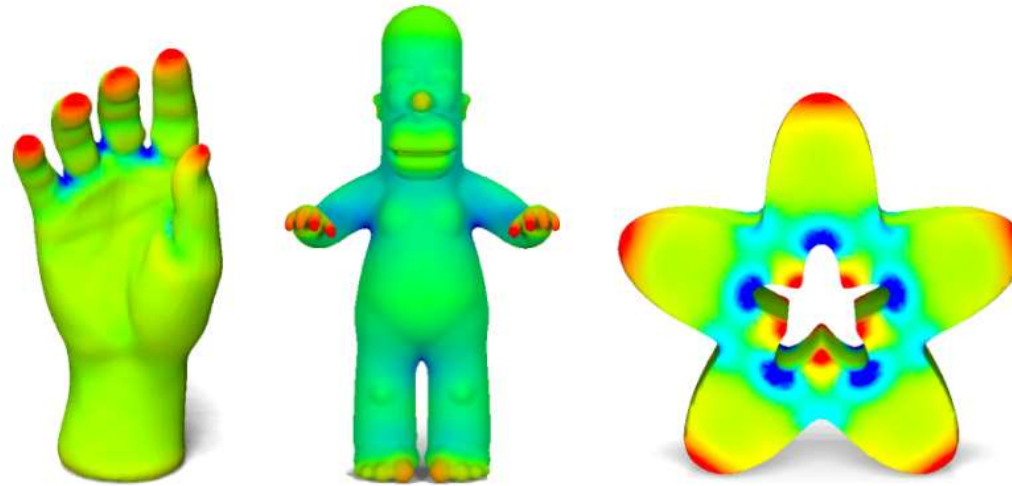
$$f_2(x) = h_{t_2}(x, x)$$

...



$$f_Q(x) = h_{t_Q}(x, x)$$

Heat kernel signature



- Autodifusividad está relacionada con la curvatura Gaussiana

$$h_t(x, x) \approx \frac{1}{4\pi t} + \frac{K(x)}{12\pi} + \mathcal{O}(t)$$

Wave kernel signature

- Modelo físico diferente: una partícula cuántica con distribución de energía inicial $f(\lambda)$

- Descrita por la ecuación de Schrödinger

$$\left(i\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(x, t) = 0$$

- Solución $\psi(x, t)$ función de onda compleja: comportamiento oscilatorio
- Probabilidad de encontrar una partícula en el punto x en el tiempo t

$$|\psi(x, t)|^2$$

Wave kernel signature

- Solución en el dominio espectral

$$\psi(x, t) = \sum_{k \geq 1} e^{i\lambda_k t} f(\lambda_k) \phi_k(x)$$

- Familia de distribuciones de energía iniciales log-normal

$$f_e(\lambda) \propto \exp\left(-\frac{(\log e - \log \lambda)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Probabilidad de encontrar una partícula

$$p_e(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\psi(x, t)|^2 dt = \sum_{k \geq 1} f_e^2(\lambda_k) \phi_k^2(x)$$