

Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas

Ivan Sipiran

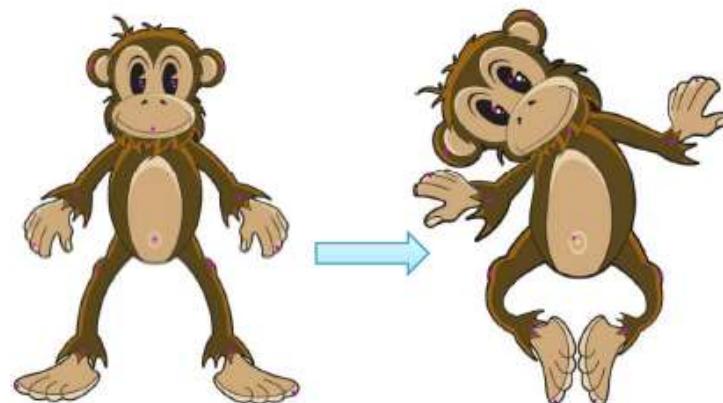
Deformación de mallas

- Objetivo
 - Encontrar las nuevas coordenadas de los vértices para una manipulación plausible.



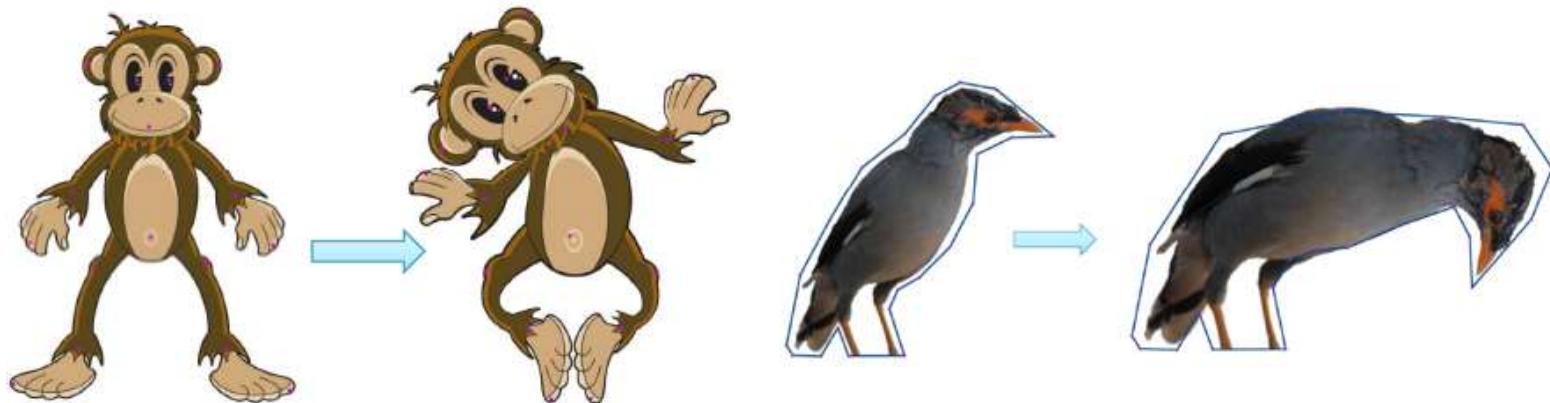
Deformación de mallas

- Conceptos matemáticos ocultos detrás de una interfaz de usuario intuitiva



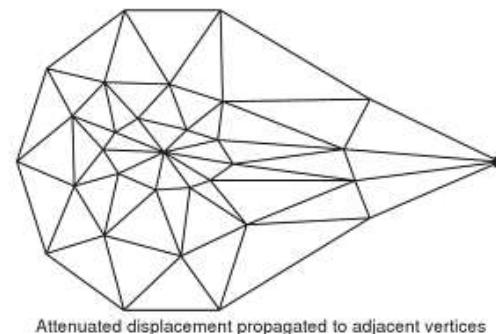
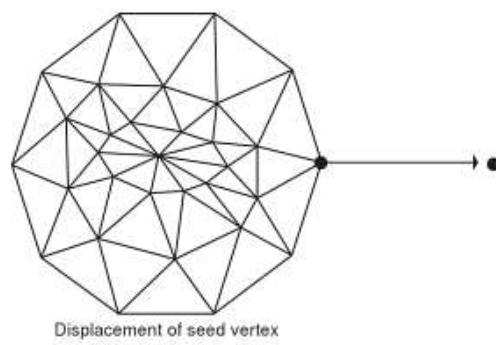
Motivación

- Provee fácil modelamiento. Generar nuevas formas deformando las existentes.
 - Crear una pelota que se deforma cuando rebota.
 - Deformar un personaje cuando camina o habla.



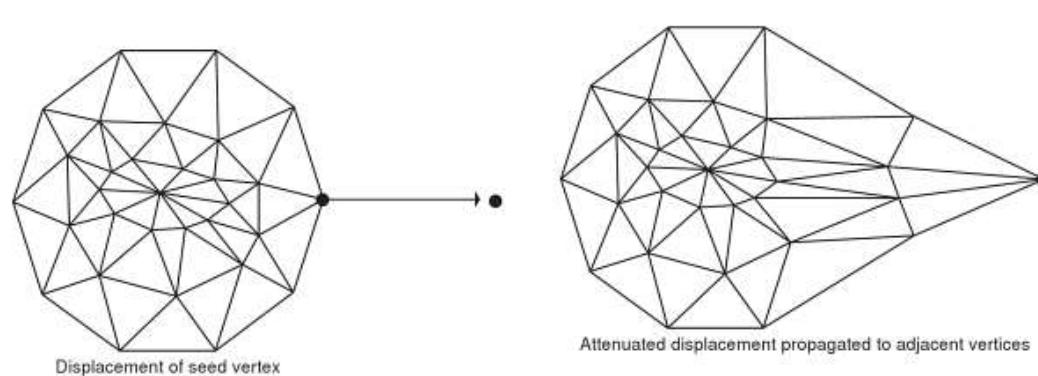
Tipos de deformaciones

- Desplazamiento vértice a vértice es fácil pero tedioso.
- Agrupar un número de vértices y desplazarlos uniformemente es fácil pero muy restrictivo.
- Permitir al usuario desplazar un vértice y propagar al desplazamiento de vértices cercanos mientras se atenúa la cantidad de desplazamiento.



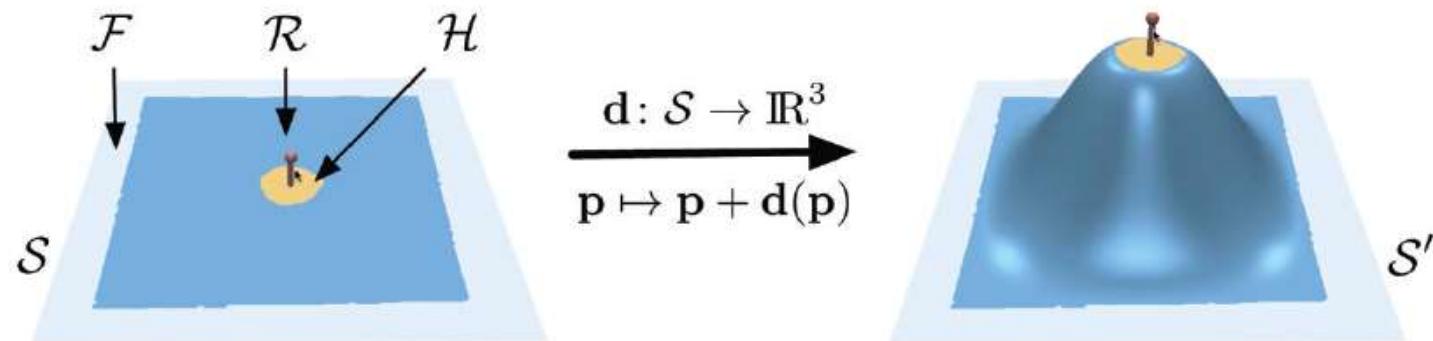
Tipos de deformaciones

- Funciones de atenuación
 - Trade-off calidad vs. complejidad computacional
 - Distancia Euclíadiana
 - Mínimo número de aristas desplazadas
 - Distancia geodésica



Tipos de deformaciones

- El usuario controla la deformación por mover una región H y mantener fija una región F . La región de deformación R debería deformarse en una manera intuitiva.



Tipos de deformaciones

- Crear formas por interpolación



X

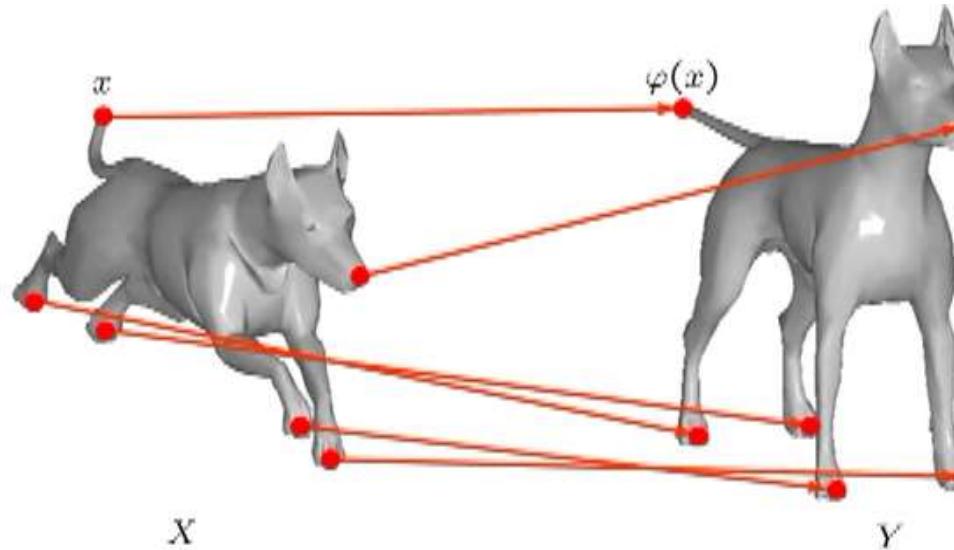


Y

$\lambda X + (1 - \lambda)Y$

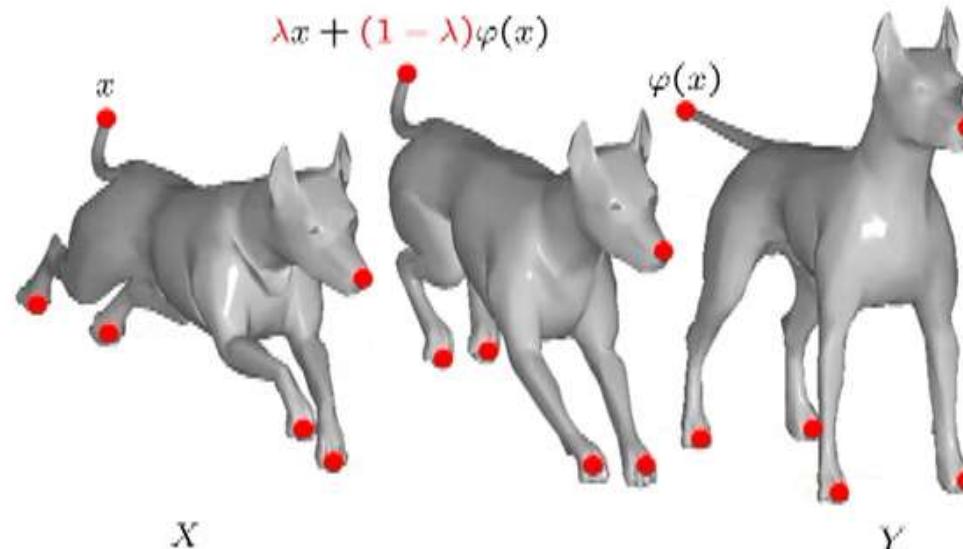
Tipos de deformaciones

- Crear formas por interpolación



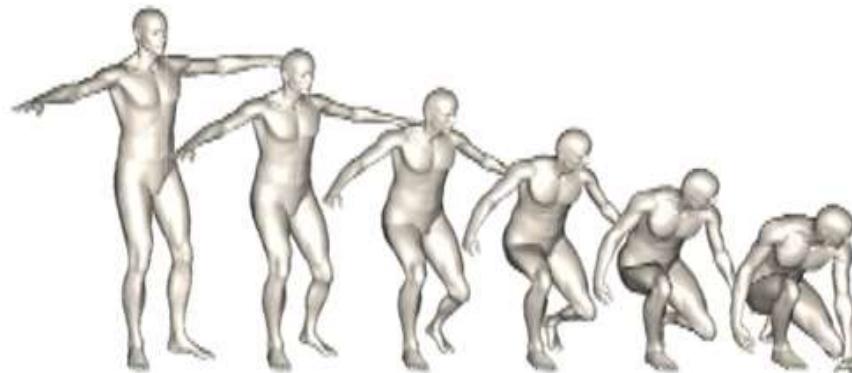
Tipos de deformaciones

- Crear formas por interpolación



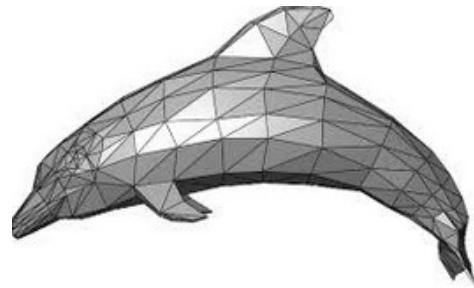
Tipos de deformaciones

- Crear formas por interpolación



Tipos de deformaciones

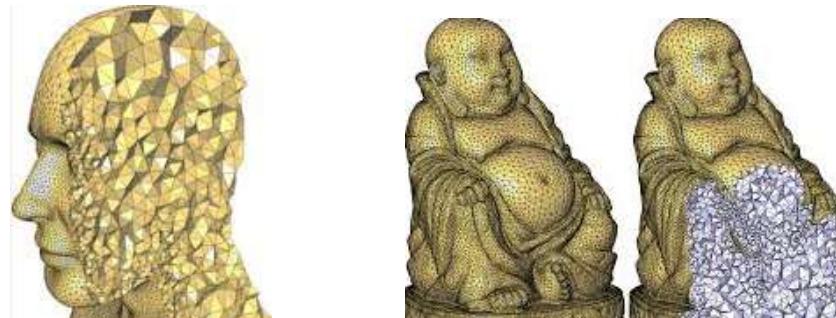
- Shell-based deformation: mallas poligonales



- Deformación volumétrica: mallas tetrahedrales
- Deformación multi-escala: eficiencia
- Free-form deformation: basada en latices o rejillas

Tipos de deformaciones

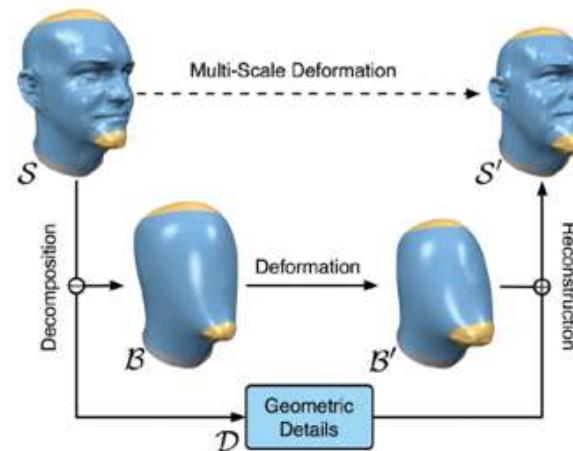
- Shell-based deformation: mallas poligonales
- Deformación volumétrica: mallas tetrahedrales



- Deformación multi-escala: eficiencia
- Free-form deformation: basada en latices o rejillas

Tipos de deformaciones

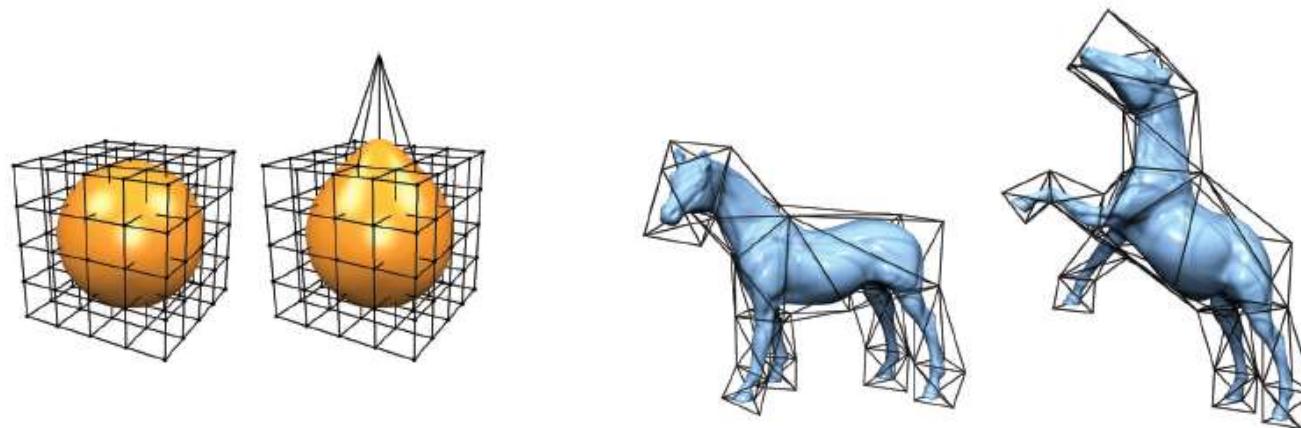
- Shell-based deformation: mallas poligonales
- Deformación volumétrica: mallas tetrahedrales
- Deformación multi-escala: eficiencia



- Free-form deformation: basada en latices o rejillas

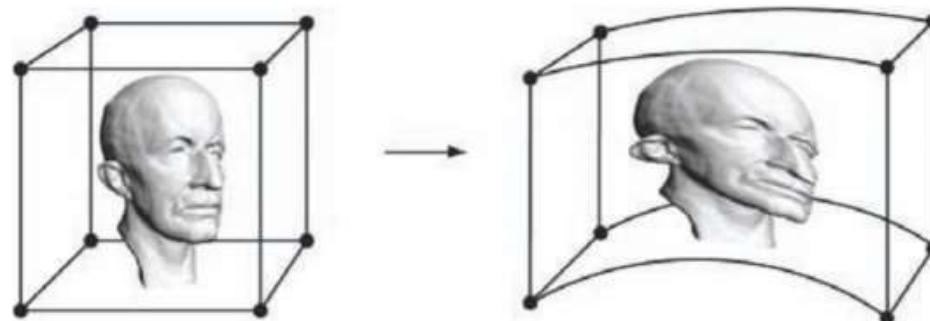
Tipos de deformaciones

- Shell-based deformation: mallas poligonales
- Deformación volumétrica: mallas tetrahedrales
- Deformación multi-escala: eficiencia
- Free-form deformation: basada en latices o rejillas



Free-form deformation

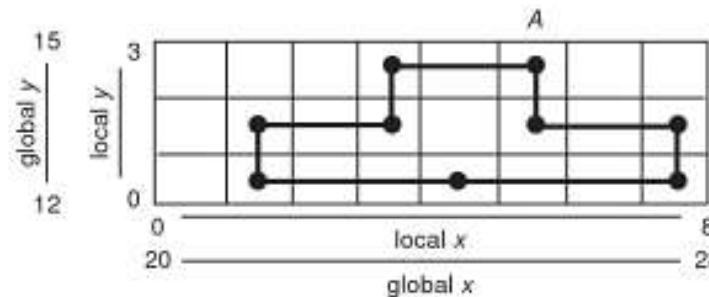
- Basada en latices o rejilla



- Deformar el espacio, por ende se deforma el objeto dentro.
- Para cada vértice del objeto, coordenadas relativas a la grilla local son determinadas de tal forma que registran el vértice a la malla.
- Usuario manipula una malla de baja resolución

Free-form deformation

- Vértice A tiene coordenadas globales (25.6, 14.7), y coordenadas locales (5.6, 2.7)

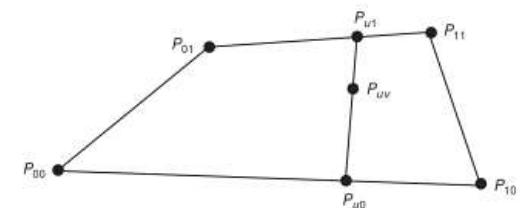


- Vértice A es reubicado en la grilla modificada usando interpolación bilineal

$$P = (0.6)(0.7)P_{00} + (0.6)(1.0 - 0.7)P_{01} + (1.0 - 0.6)(0.7)P_{10} + (1.0 - 0.6)(1.0 - 0.7)P_{11}$$

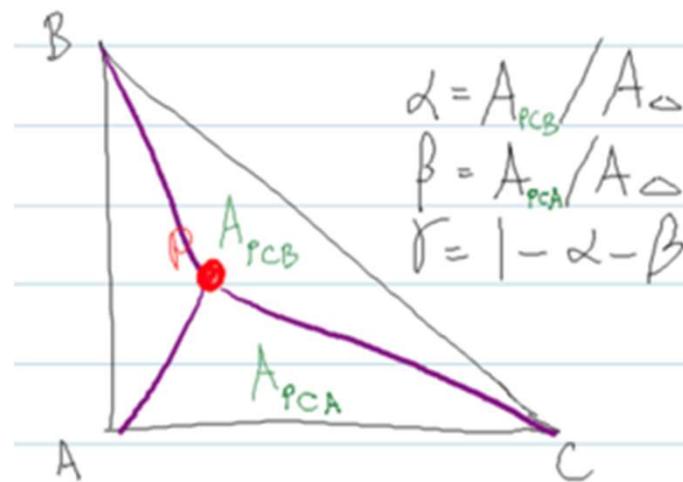


$$\begin{aligned} P_{00} &= (1 - u)P_{00} + uP_{10} \\ P_{01} &= (1 - u)P_{01} + uP_{11} \\ P_{uv} &= (1 - v)P_{u0} + vP_{u1} \\ &= (1 - u)(1 - v)P_{00} + (1 - u)vP_{01} + u(1 - v)P_{10} + uvP_{11} \end{aligned}$$



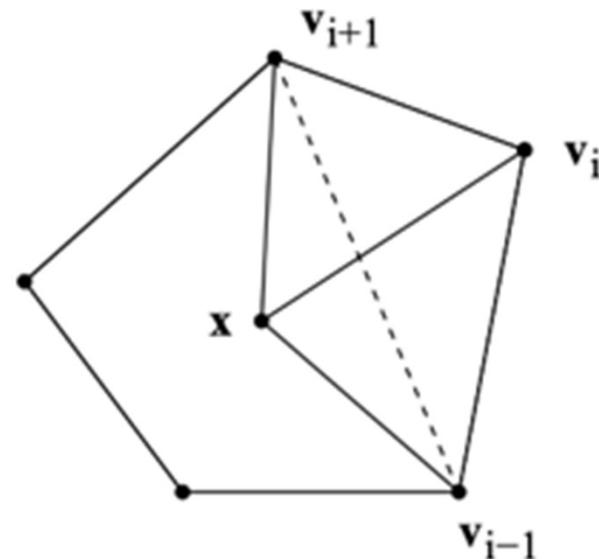
Free-form deformation

- También se pueden usar celdas triangulares
- Coordenadas baricéntricas: cualquier punto P en un triángulo puede ser expresado como $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$



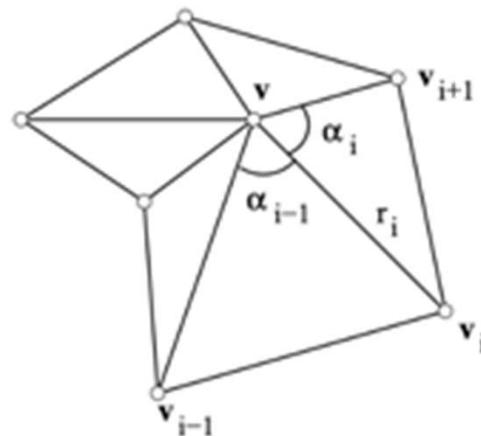
Free-form deformation

- También se pueden usar celdas poligonales convexas
- Coordenadas Wachspress: cualquier punto puede ser expresado como una combinación convexa de los vértices.



Free-form deformation

- También se pueden usar celdas poligonales arbitrarias
- Coordenadas de valor medio: cualquier punto puede ser expresado usando



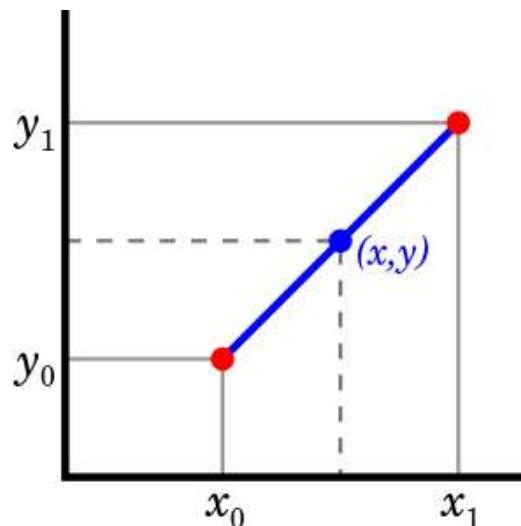
$$\lambda_i = w_i / \sum_{j=1}^n w_j, \quad w_i = \frac{1}{r_i} \left(\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \right),$$

Interpolación

- FFD se basa principalmente en interpolación. Veamos algunos tipos de interpolación.
- Interpolación lineal: interpolación sobre una línea 1D
 - Encontrar el valor f de un punto x : $f(x)$
- Interpolación bilineal: interpolación sobre el plano 2D
 - Encontrar el valor f de un punto (x, y) : $f(x, y)$
- Interpolación trilineal: interpolación sobre un volumen 3D
 - Encontrar el valor f de un punto (x, y, z) : $f(x, y, z)$

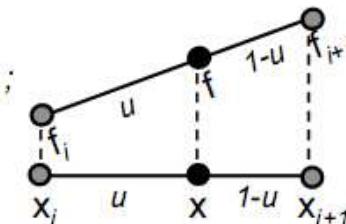
Inteporlación

- Interpolación lineal: interpolación sobre una línea 1D
- Interpolar puntos sobre una línea desde v_0 hasta v_1 usando t



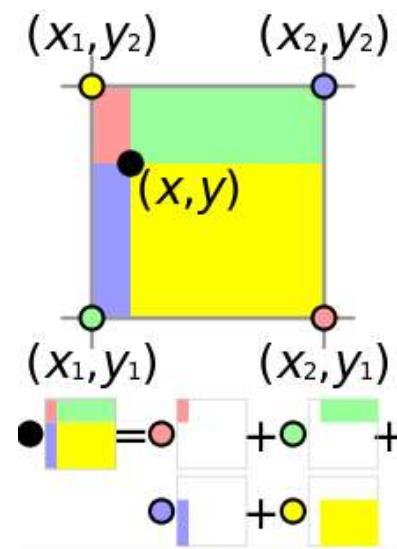
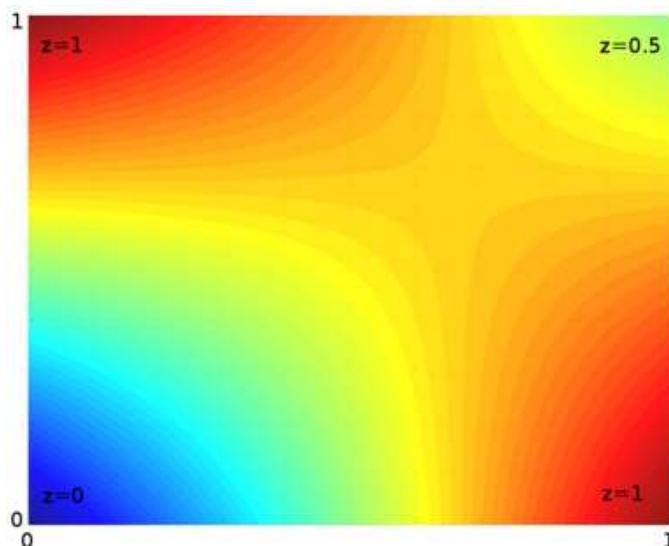
```
// Precise method which guarantees v = v1 when t = 1.  
float lerp(float v0, float v1, float t) {  
    return (1-t)*v0 + t*v1;  
}
```

$$x = x_i + u(x_{i+1} - x_i) = (1-u)x_i + ux_{i+1};$$
$$f(x) = (1-u)f_i + uf_{i+1}$$



Interpolación

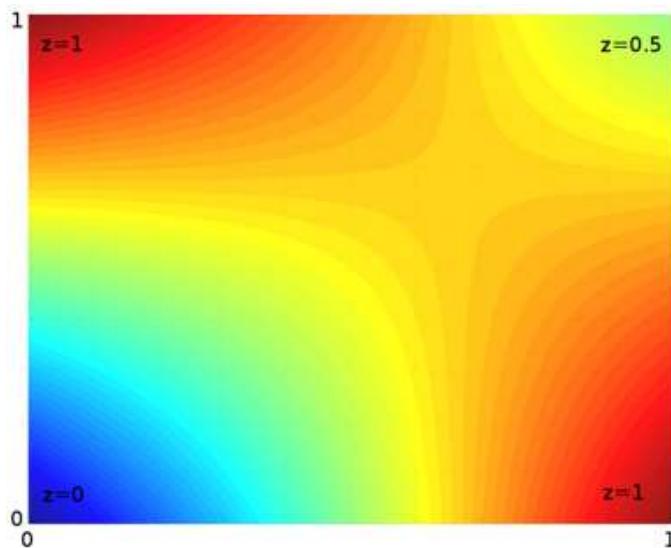
- Interpolación bilineal: interpolación sobre un plano 2D
- Interpolar... usando u y v



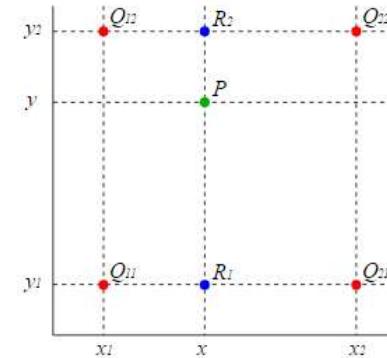
In this geometric visualisation, the value at the black spot is the sum of the value at each coloured spot multiplied by the area of the rectangle of the same colour, divided by the total area of all four rectangles.

Interpolación

- Interpolación bilineal: interpolación sobre un plano 2D
- Interpolar... usando u y v

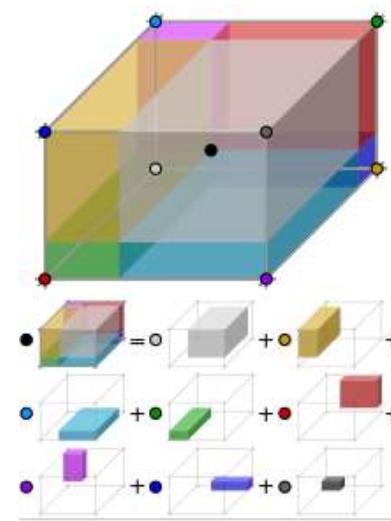
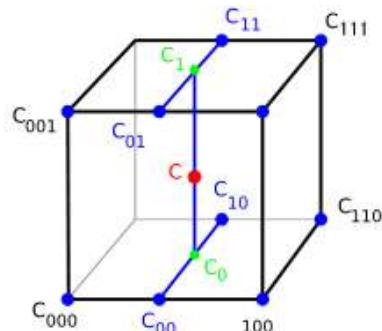


Hacemos lerp en una dirección y luego en la otra dirección



Interpolación

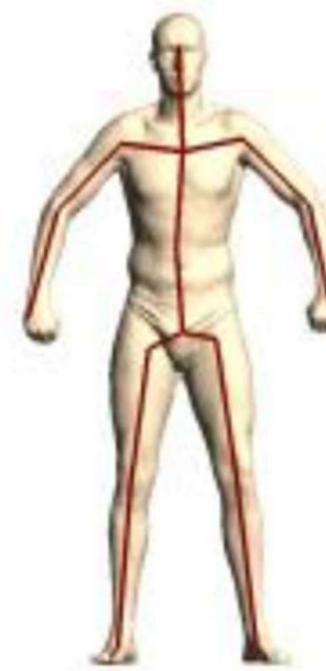
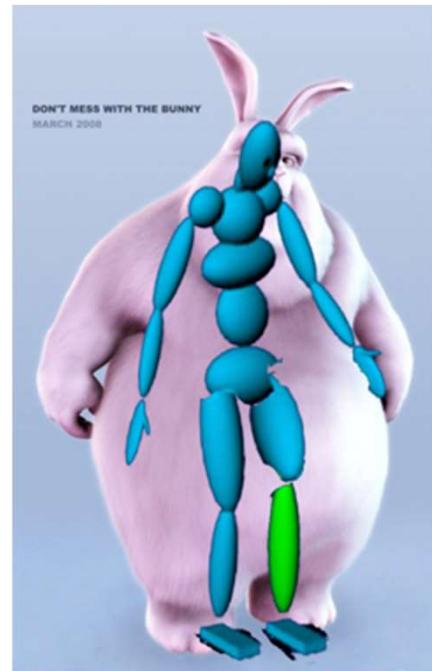
- Interpolación trilineal: interpolación sobre una celda 3D
- Interpolación usando u, v, w



- FFD usa interpolación trilineal

Skinning

- Una variante de FFD es skinning, donde ponemos la estructura de control dentro de la forma: un esqueleto que controla la deformación



Skinning

- Una variante de FFD es skinning, donde ponemos la estructura de control dentro de la forma: un esqueleto que controla la deformación
- Unir vértices a los huesos
- Animar el esqueleto (cambiar los ángulos de junturas), la superficie se mueve acorde a eso
- Skinning es también conocido como
 - Skeletal subspace deformation (SSD)
 - Linear blending skinning (LBS)

Skinning



Colored
triangles are
attached to 1
bone

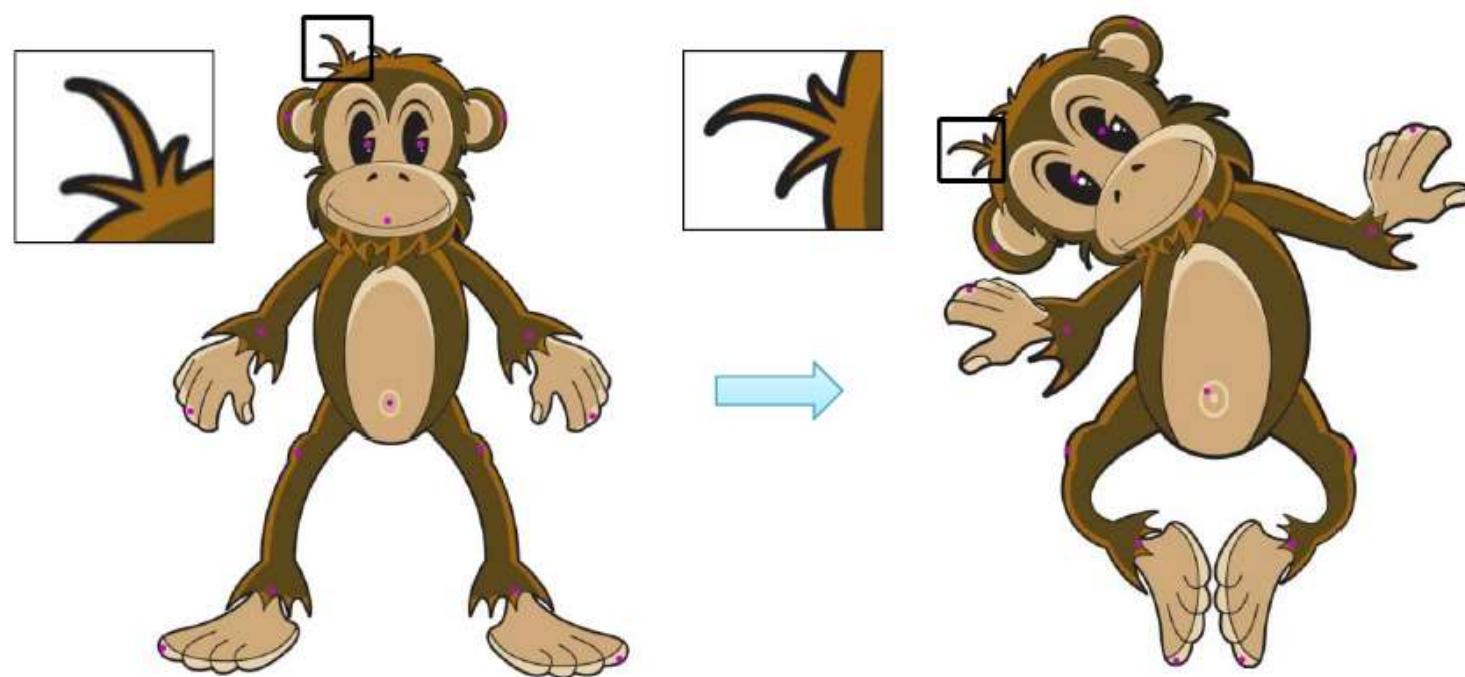
Black triangles
are attached to
more than 1

Note how they
are near joints



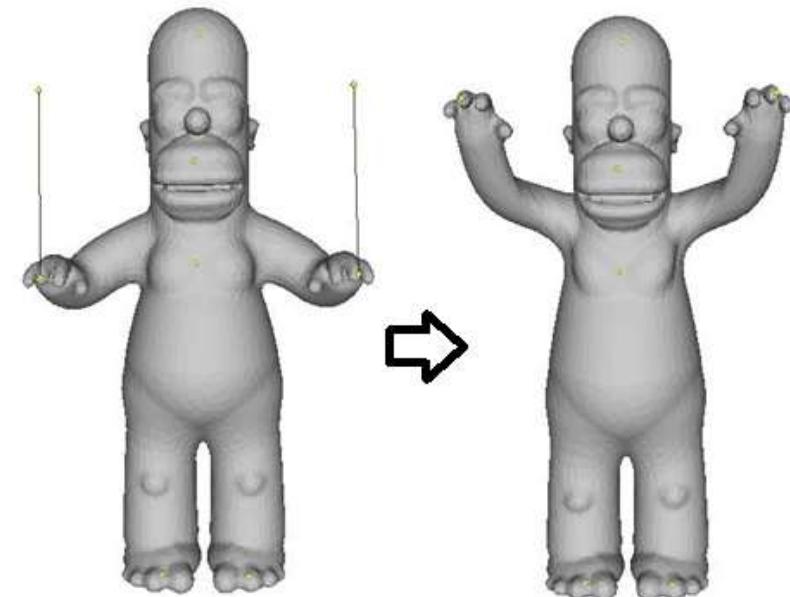
Shell-based deformation

- Reto: deformación intuitiva requiere cambio global + preservación de detalles local



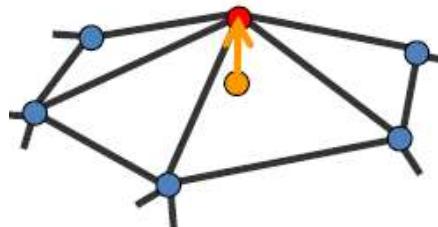
Shell-based deformation

- Deformación usando coordenadas Laplaciadas
 - Deformación Laplaciana
 - Coordenadas Laplaciadas = coordenadas diferenciales = coordenadas delta
- Mecanismo de control
 - Handles manejados por el usuario
 - Región de influencia es deformada



Coordenadas diferenciales

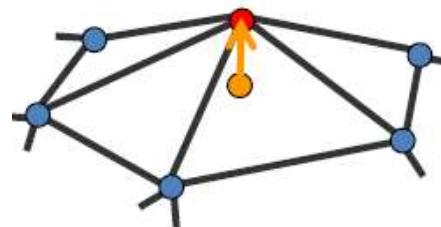
- Difícil hacer operaciones en mallas que almacenen la geometría en coordenadas absolutas
 - Deformación que preserve la forma es difícil de operar punto a punto.
- Solución: Usar coordenadas diferenciales
 - Encapsula información de forma local de un vértice
 - Aproximación de la curvatura media alrededor de un vértice



$$\vec{\delta}_i = \vec{v}_i - \frac{\sum_{j \in N(i)} w_{ij} \vec{v}_j}{\sum_{j \in N(i)} w_{ij}} \longrightarrow \vec{\delta}_i = \vec{v}_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} \vec{v}_j$$

Coordenadas diferenciales

- Difícil hacer operaciones en mallas que almacenen la geometría en coordenadas absolutas
 - Deformación que preserve la forma es difícil de operar punto a punto.
- Solución: Usar coordenadas diferenciales
 - Encapsula información de forma local de un vértice
 - Aproximación de la curvatura media alrededor de un vértice



$$\vec{\delta}_i = \vec{v}_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} \vec{v}_j$$

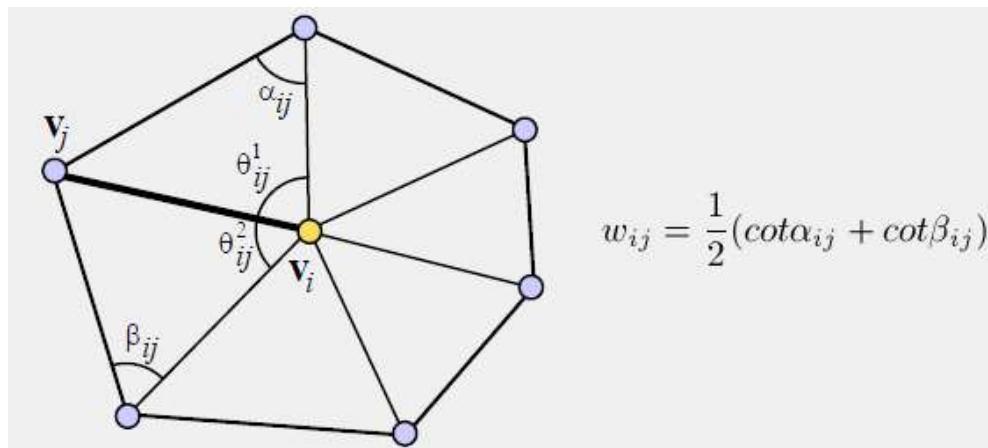
Vector del promedio de la vecindad
al vértice v_i

$$\vec{\delta}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

Promedio de vectores

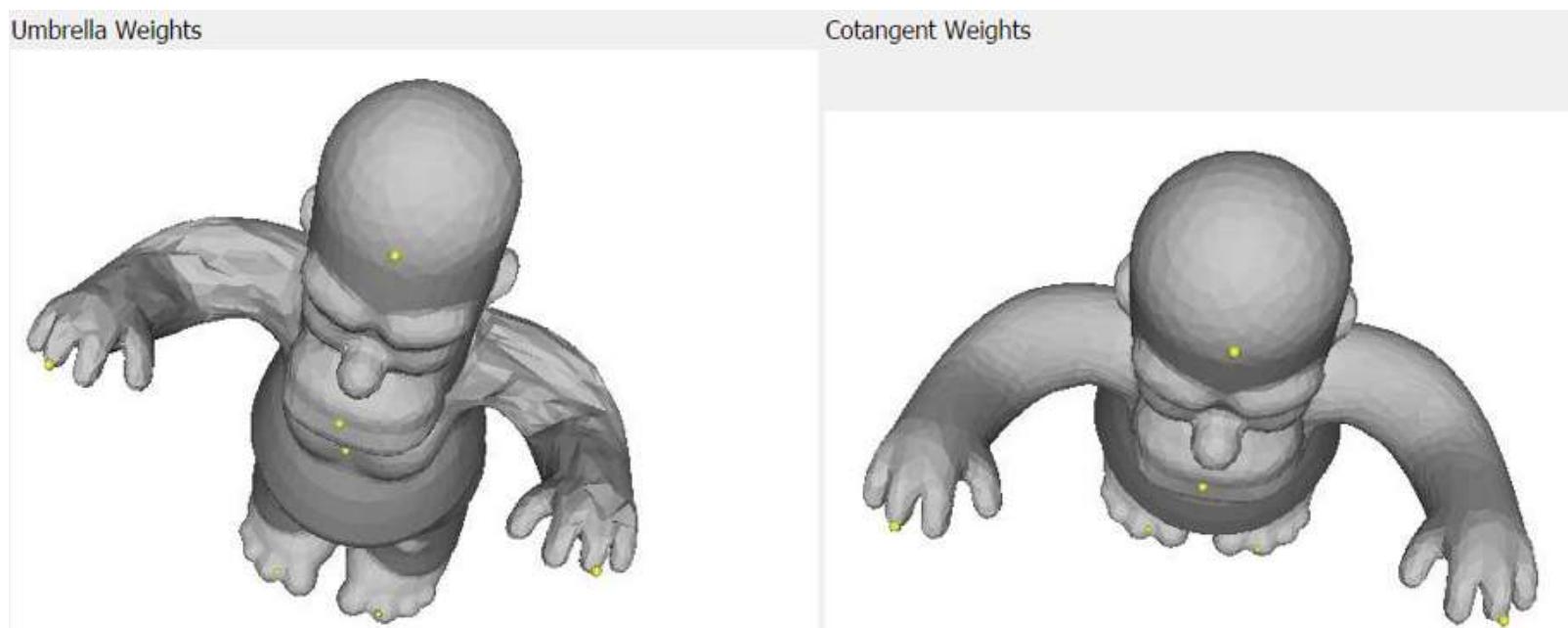
Coordenadas diferenciales

- Coordenadas diferenciales por pesos cotangentes
 - Un esquema de ponderación más geométrico
 - Invariante a diferentes triangulaciones
 - Basado en ángulos: preserva ángulos mejor que pesos uniformes



Coordenadas diferenciales

- Coordenadas diferenciales por pesos cotangentes
 - Preserva la geometría mejor que pesos uniformes



Coordenadas diferenciales

- Matriz Laplaciana L
 - Como la coordenada diferencial es una combinación lineal de un vértice y sus vecinos, el proceso de construir coordenadas diferenciales para todos los vértices puede ser representada matricialmente como $LV = \delta$

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\frac{1}{d_i} & (i, j) \in E \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Coordenadas diferenciales - Reconstrucción

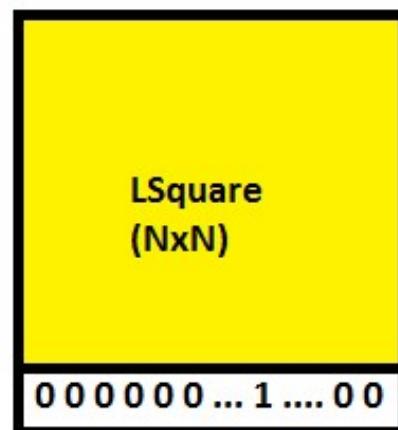
- Recuperar coordenadas absolutas desde coordenadas diferenciales
 - Deltas almacenan coordenadas diferenciales (toda la información de ubicación se perdió)
 - Para recuperar, poner la malla en algún lugar del espacio y hacer algo de álgebra

$$LV = \delta$$

$$V = L^{-1}\delta \qquad \qquad L \text{ no es invertible}$$

Coordenadas diferenciales - Reconstrucción

- Recuperar coordenadas absolutas desde coordenadas diferenciales
 - Deltas almacenan coordenadas diferenciales (toda la información de ubicación se perdió)
 - Para recuperar, poner la malla en algún lugar del espacio y especificar la posición de exactamente 1 vértice
 - Agregar una fila debajo de la matriz L con un 1 en el índice del vértice fijo y ceros en el resto de la fila. Poner la coordenada diferencial de esta fila como la posición absoluta de ese vértice



Coordenadas diferenciales - Reconstrucción

- Recuperar coordenadas absolutas desde coordenadas diferenciales
 - Deltas almacenan coordenadas diferenciales (toda la información de ubicación se perdió)
 - Para recuperar, poner la malla en algún lugar del espacio y especificar la posición de exactamente 1 vértice
 - Agregar una fila debajo de la matriz L con un 1 en el índice del vértice fijo y ceros en el resto de la fila. Poner la coordenada diferencial de esta fila como la posición absoluta de ese vértice
 - Usualmente se hace para más de 1 vértice.

Coordenadas diferenciales - Reconstrucción

- Recuperar coordenadas absolutas desde coordenadas diferenciales
 - Deltas almacenan coordenadas diferenciales (toda la información de ubicación se perdió)
 - Para recuperar, poner la malla en algún lugar del espacio y especificar la posición de exactamente 1 vértice
 - Agregar una fila debajo de la matriz L con un 1 en el índice del vértice fijo y ceros en el resto de la fila. Poner la coordenada diferencial de esta fila como la posición absoluta de ese vértice
 - En general, supongamos que tenemos m vértices fijos. Nos da un sistema de $(n + m) \times n$

$$\left(\frac{L}{\omega I_{m \times m} | 0} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta^{(x)} \\ \omega c_{1:m} \end{pmatrix}$$

Solución analítica:

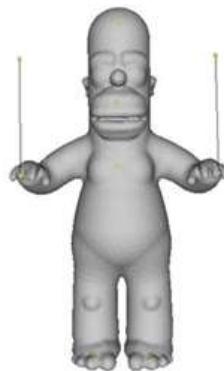
$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= (\tilde{L}^T \tilde{L})^{-1} \tilde{L}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b} &= (\delta, \omega c_1, \dots, \omega c_m)^T\end{aligned}$$

Solución mínimos cuadrados:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left(\|L\mathbf{x} - \delta^{(x)}\|^2 + \sum_{j \in C} \omega^2 |x_j - c_j|^2 \right)$$

Coordenadas diferenciales (Deformación)

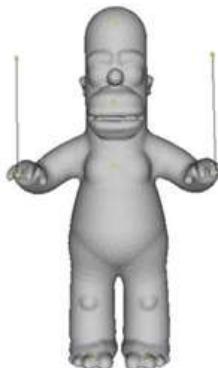
- Deformación de mallas usando coordenadas diferenciales
- Idea:
 - Término de match: mover los vértices handle a los puntos especificados por el usuario lo más cerca posible.
 - Término de regularización: Preservar las características originales antes de la deformación: ángulos, áreas, volúmenes, longitudes, etc
 - Sin término de regularización, término de match es exacto, pero no respeta las propiedades



$$\tilde{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \left(\|L\mathbf{x} - \delta^{(x)}\|^2 + \sum_{j \in C} \omega^2 |x_j - c_j|^2 \right)$$
$$E_{reg} \qquad \qquad E_{match}$$

Coordenadas diferenciales (Deformación)

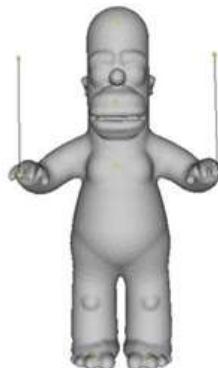
- Deformación de mallas usando coordenadas diferenciales
- Idea:
 - Término de match: mover los vértices handle a los puntos especificados por el usuario lo más cerca posible.
 - Término de regularización: Preservar las características originales antes de la deformación: ángulos, áreas, volúmenes, longitudes, etc
 - Sin término de match, la malla no se mueve, no tiene necesidad de hacerlo.



$$\tilde{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \left(\|L\mathbf{x} - \delta^{(x)}\|^2 + \sum_{j \in C} \omega^2 |x_j - c_j|^2 \right)$$
$$E_{reg} \qquad \qquad E_{match}$$

Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Deformación de mallas usando coordenadas diferenciales
- Idea:
 - Término de match: mover los vértices handle a los puntos especificados por el usuario lo más cerca posible.
 - Término de regularización: Preservar las características originales antes de la deformación: ángulos, áreas, volúmenes, longitudes, etc
 - Con ambos términos, hay un compromiso a optimizar.



$$\tilde{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \left(\|L\mathbf{x} - \delta^{(x)}\|^2 + \sum_{j \in C} \omega^2 |x_j - c_j|^2 \right)$$
$$E_{reg} \qquad \qquad E_{match}$$

Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Deformación de mallas usando coordenadas diferenciales
- Idea:
 - Término de match: mover los vértices handle a los puntos especificados por el usuario lo más cerca posible.
 - Término de regularización: Preservar las características originales antes de la deformación: ángulos, áreas, volúmenes, longitudes, etc
 - Coordenadas diferenciales encapsulan propiedades locales
 - Se quiere minimizar la diferencia entre las nuevas coordenadas diferenciales y las coordenadas diferenciales originales

Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Derivación de la solución analítica es basada en esta idea

$$\arg \min_{v' \in V} \left\{ \sum_{\{i,j\} \in E} \|(v'_j - v'_i) - (v_j - v_i)\|^2 + w \sum_{i \in C} \|v'_i - C_i\|^2 \right\}$$

- Puede ser reescrito como $\arg \min_{v'} \|Av' - b\|^2$
- Resolver separadamente para cada componente x, y, z

Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Derivación de la solución analítica es basada en esta idea

$$\arg \min_{v' \in V} \left\{ \sum_{\{i,j\} \in E} \| (v'_j - v'_i) - (v_j - v_i) \|^2 + w \sum_{i \in C} \| v'_i - C_i \|^2 \right\}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ \vdots & & \\ \hline w & & \\ w & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v'_{0x} \\ v'_{1x} \\ \vdots \\ w c_{0x} \\ w c_{1x} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}'_x} - \underbrace{\begin{bmatrix} e_{0x} \\ e_{1x} \\ \vdots \\ w c_{0x} \\ w c_{1x} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

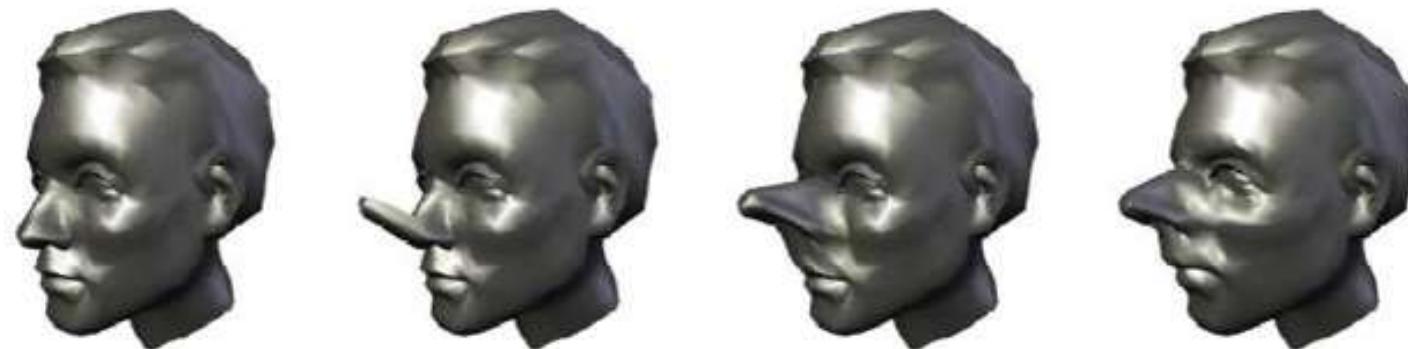
edge vectors

constraints

$$A^T A \mathbf{v}' = A^T \mathbf{b}$$

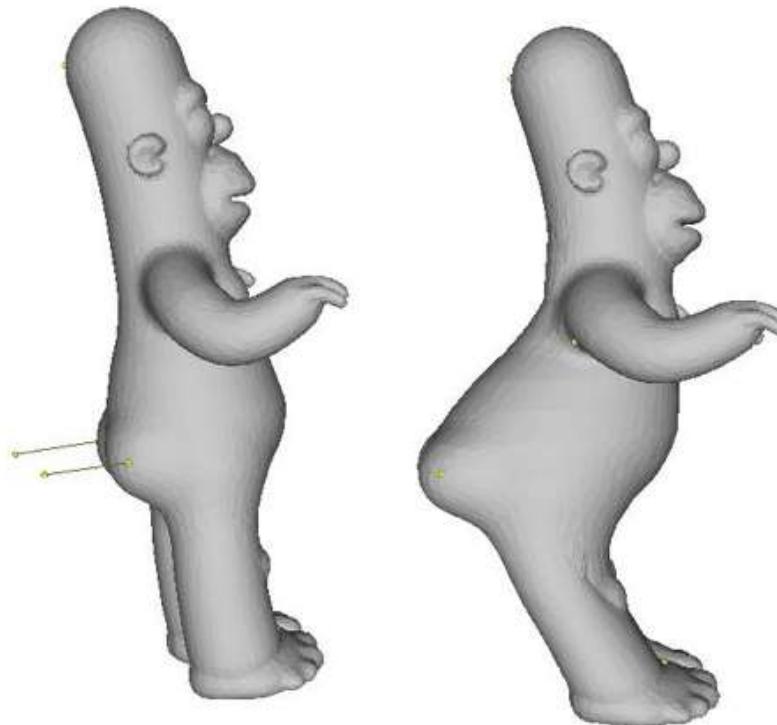
Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Resultados con diferentes pesos de regularización



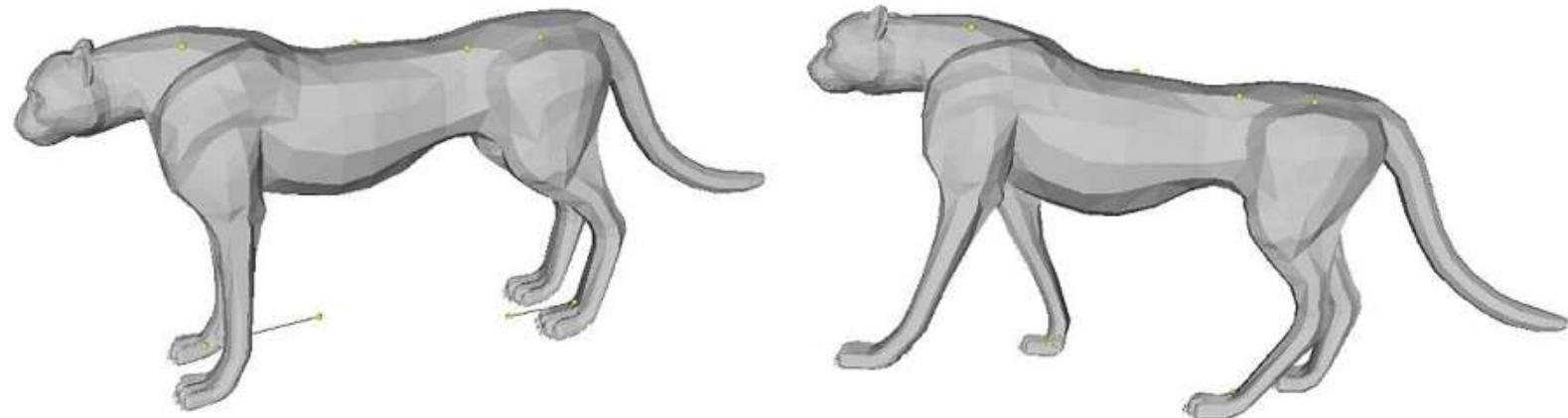
Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Resultados



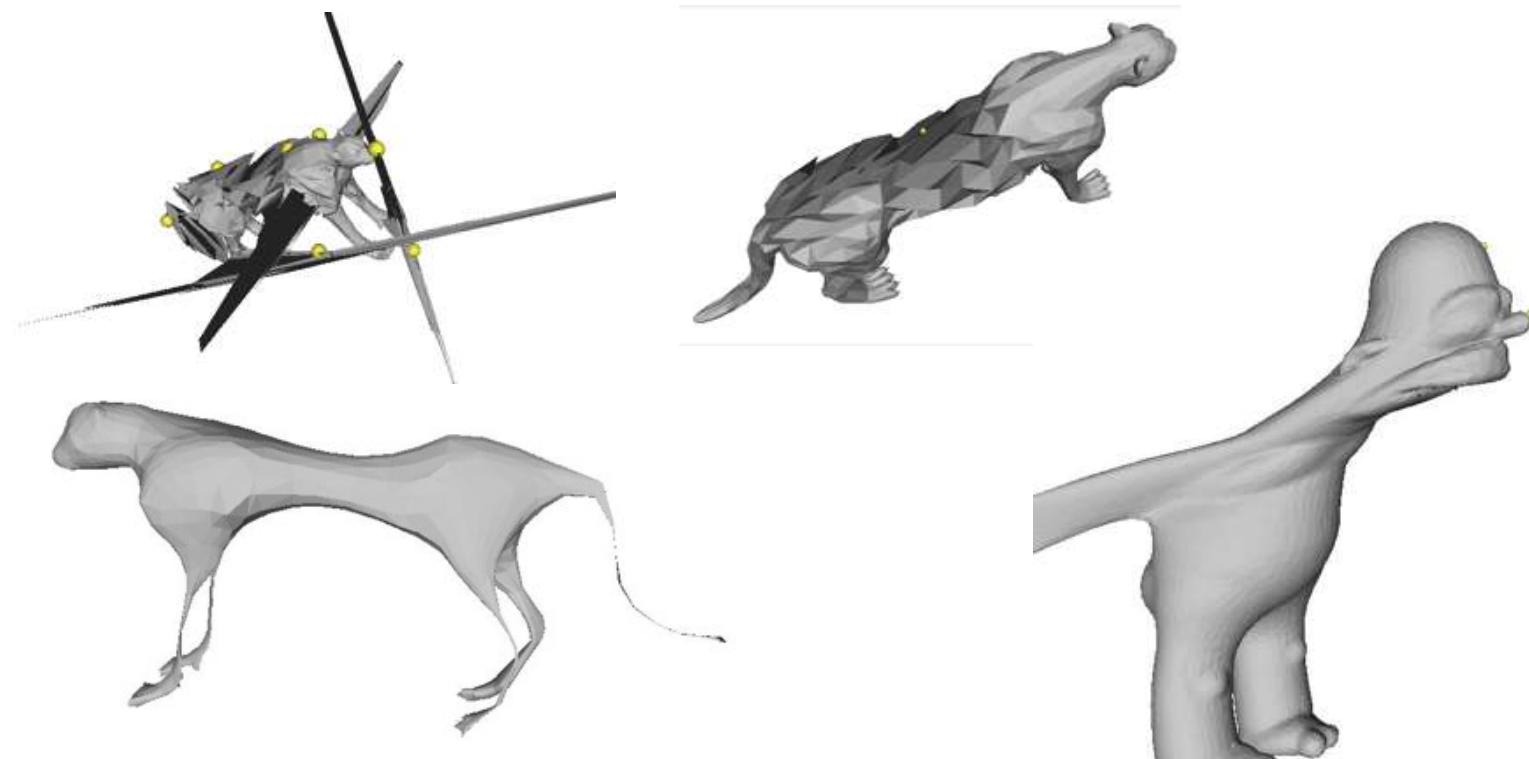
Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Resultados



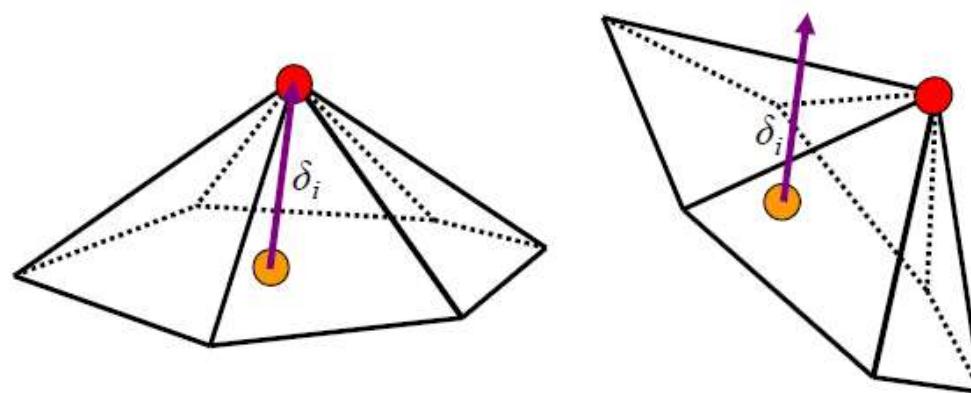
Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Resultados
- Es fácil obtener resultados erróneos



Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Buena solución pero no soporta deformaciones grandes porque no es invariante a la rotación
 - Penaliza rotaciones grandes



Coordenadas diferenciales (Deformación)

- Buena solución pero no soporta deformaciones grandes porque no es invariante a la rotación
 - Penaliza rotaciones grandes

