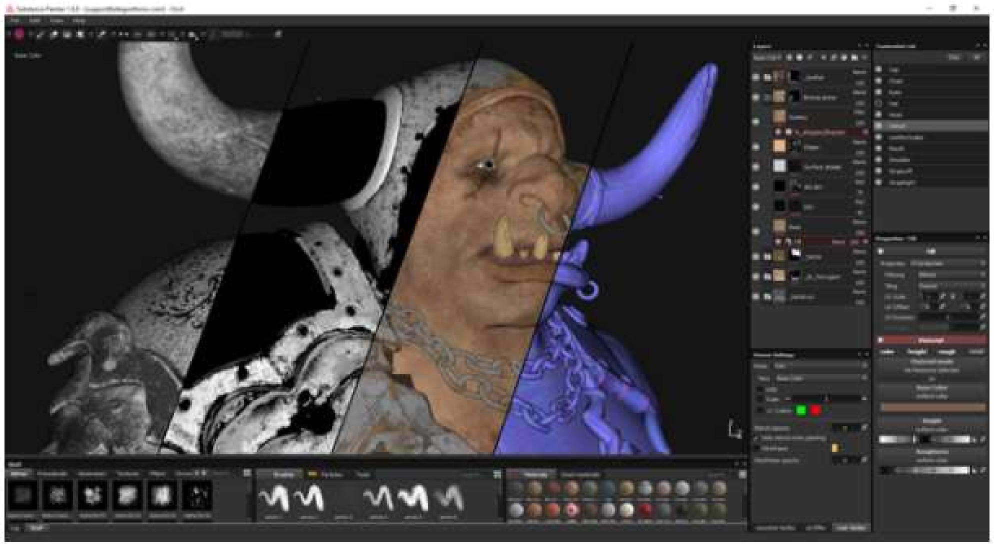
Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas

Ivan Sipiran

Parametrización de Superficies

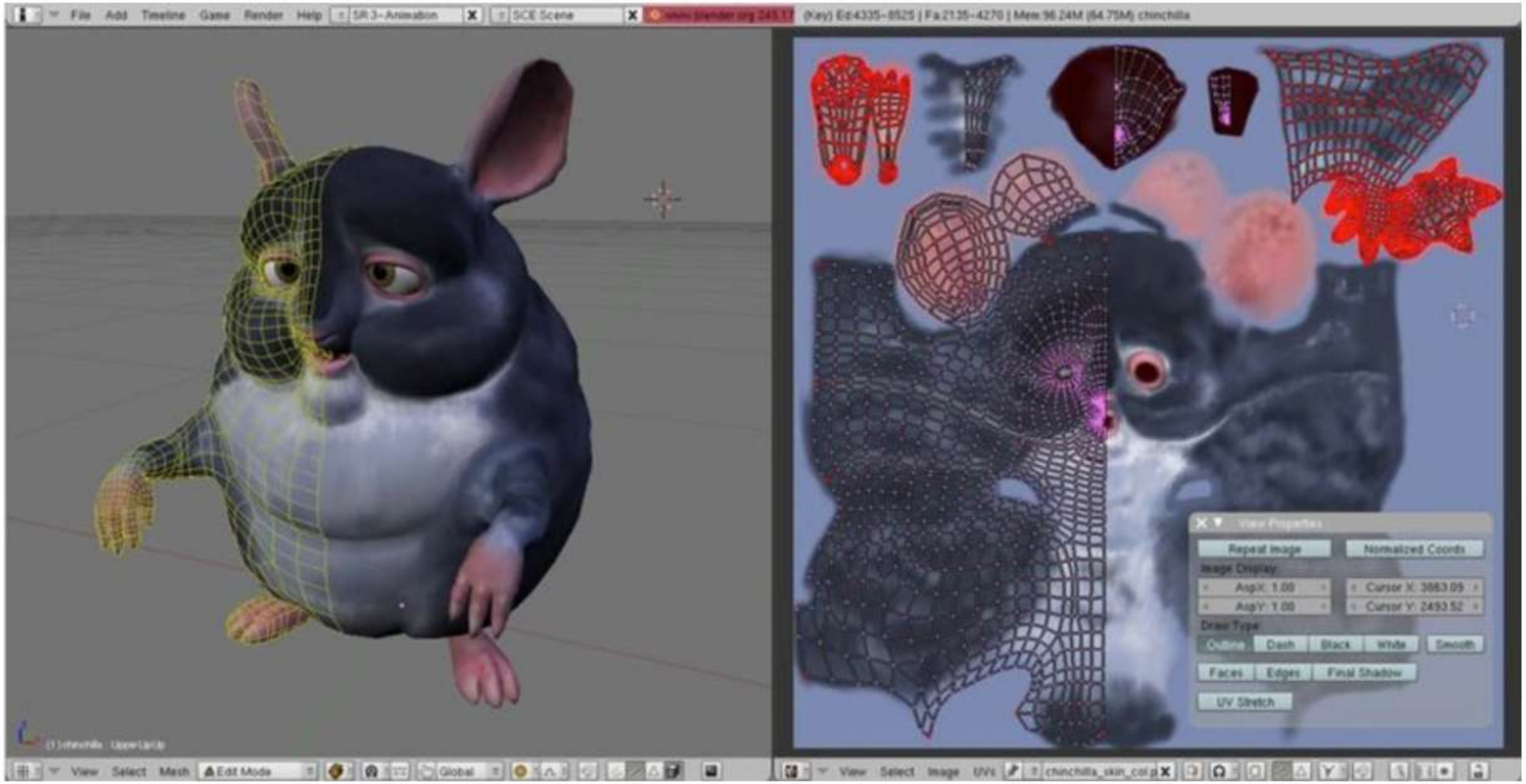
Pintando en superficies



Mari software

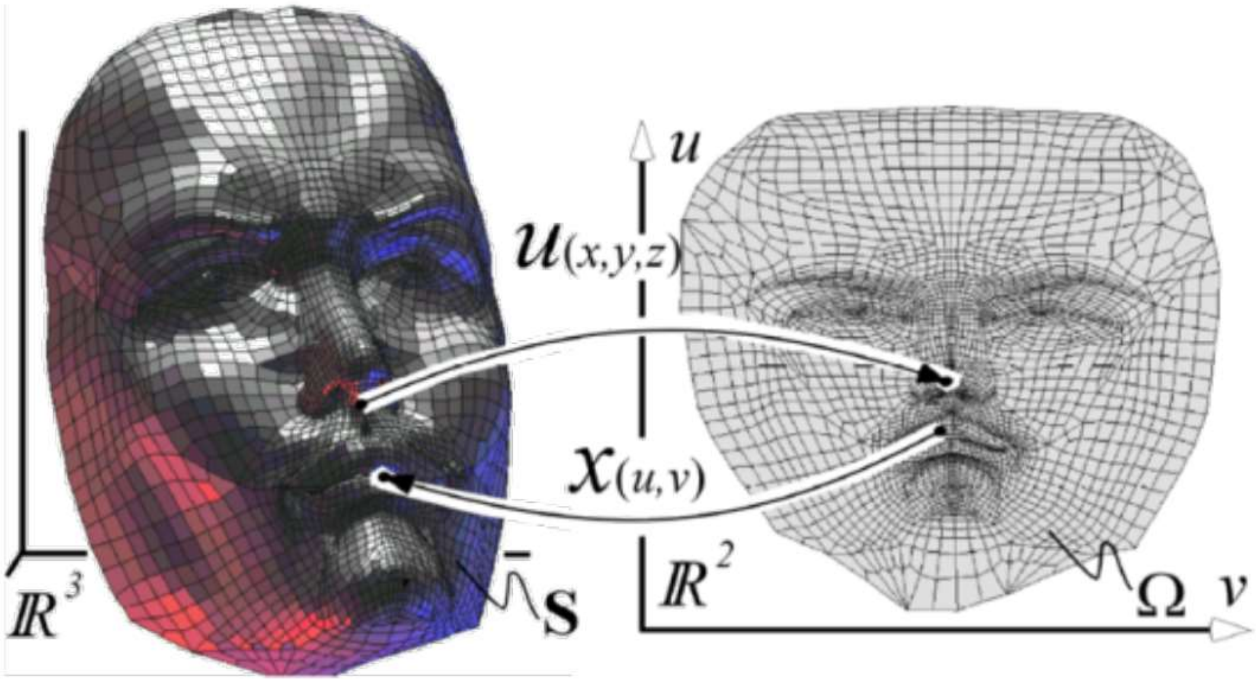
Substance 3D software

Aplicación usual: mapeo de texturas

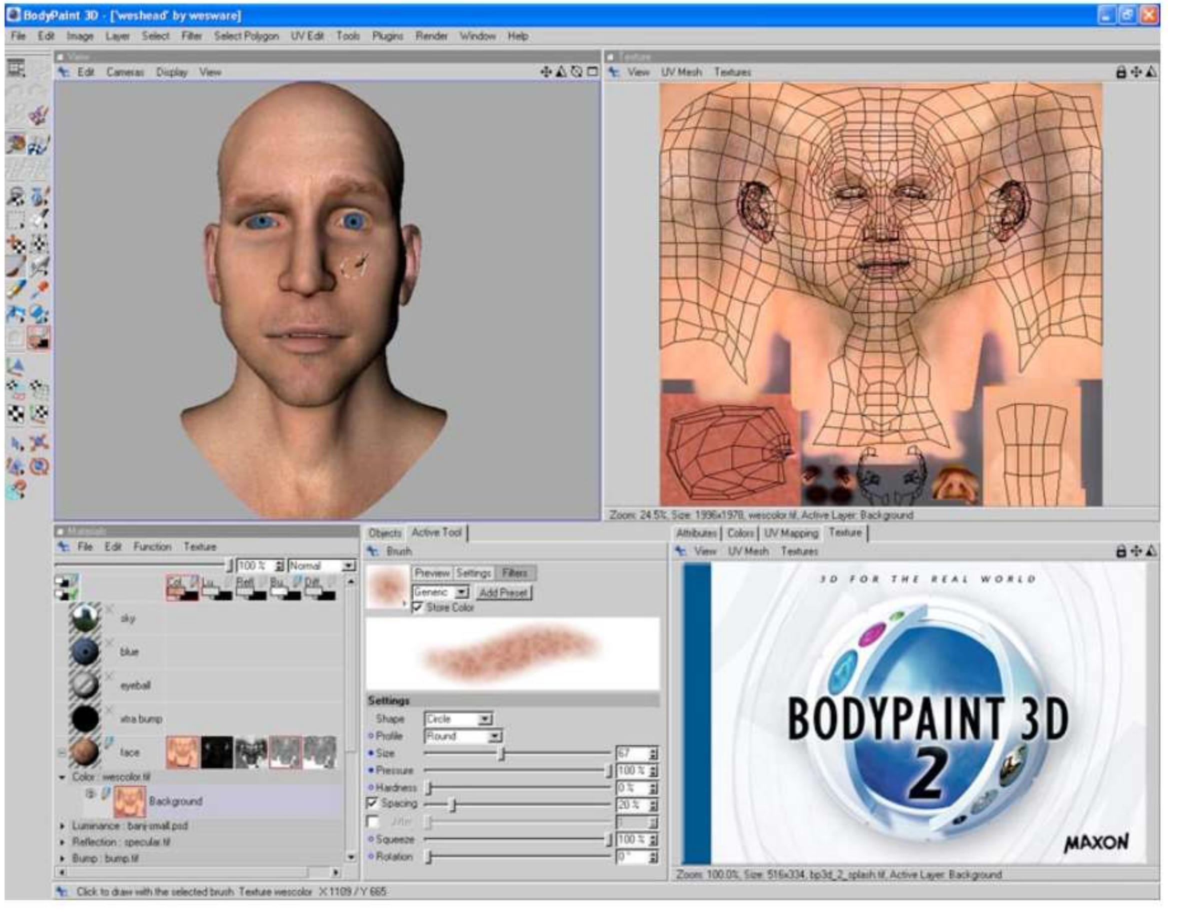


Problema de parametrización

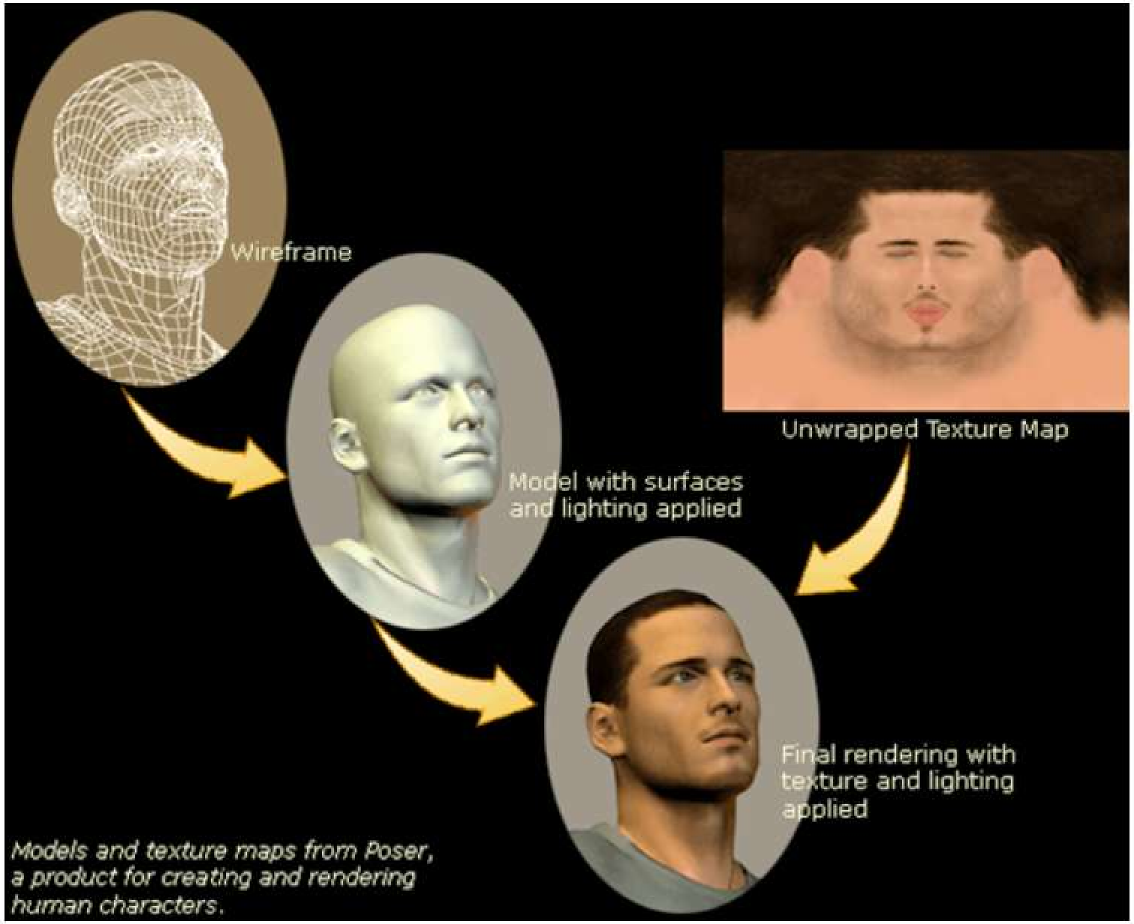
- Dada una superficie S in R^3 y un dominio Ω (por ejemplo, un plano)
  - Encontrar un map biyectivo $U: \Omega \leftrightarrow S$



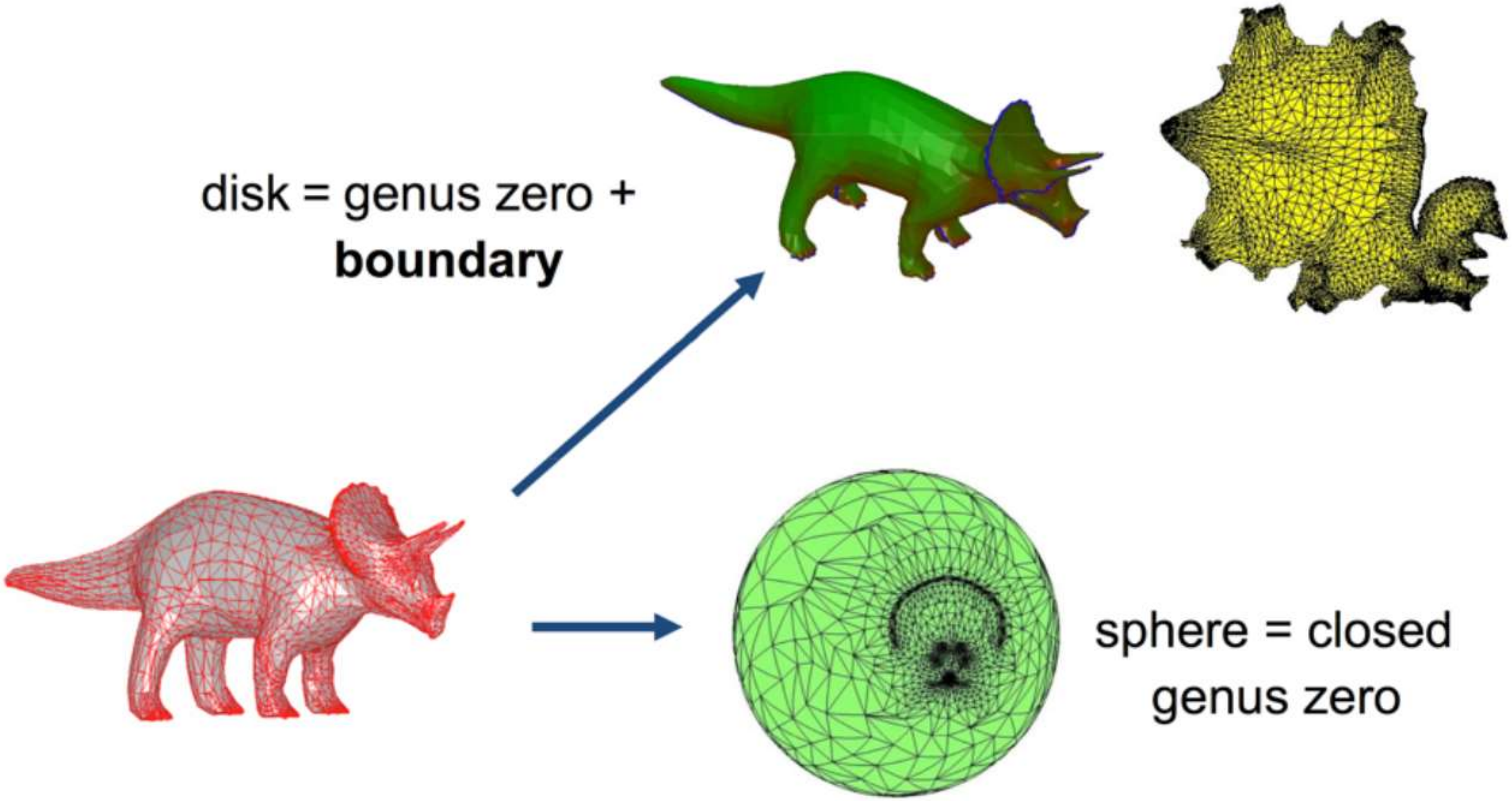
Parametrización para mapeo de textura



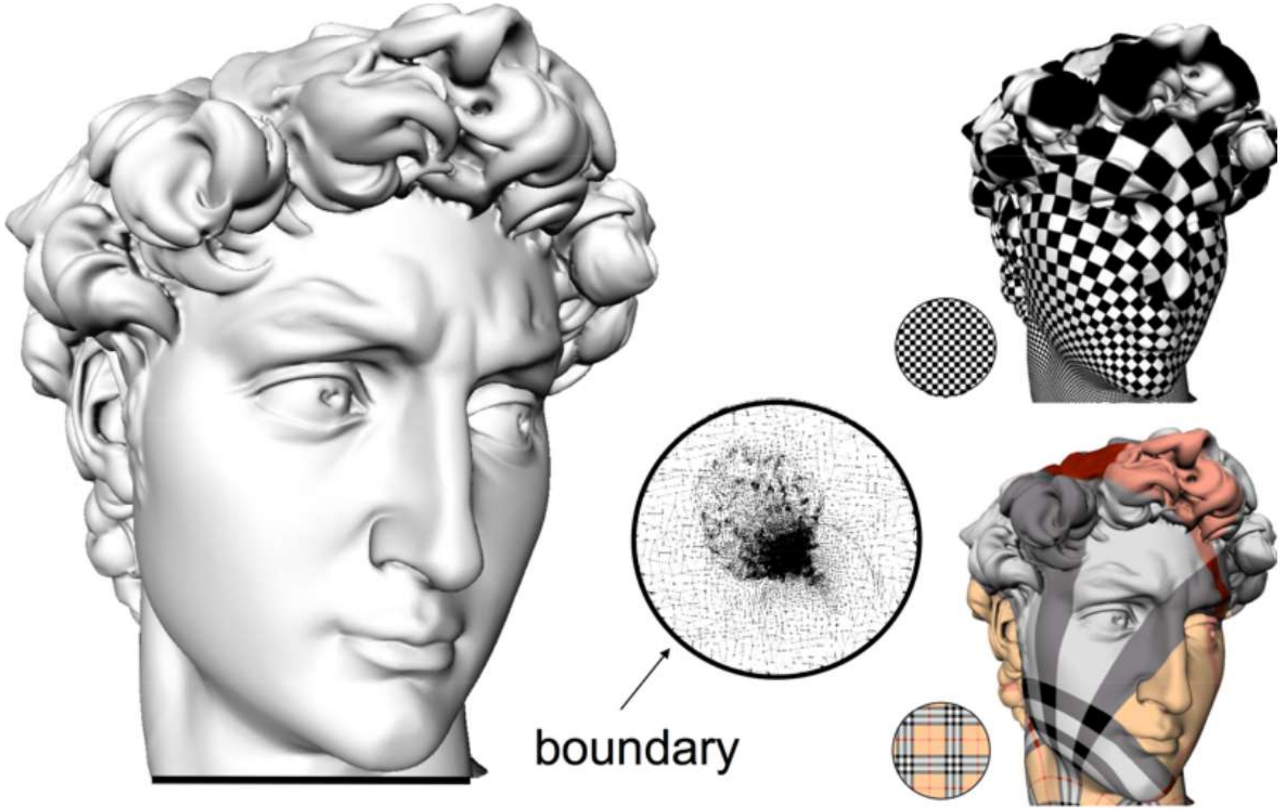
Rendering Workflow



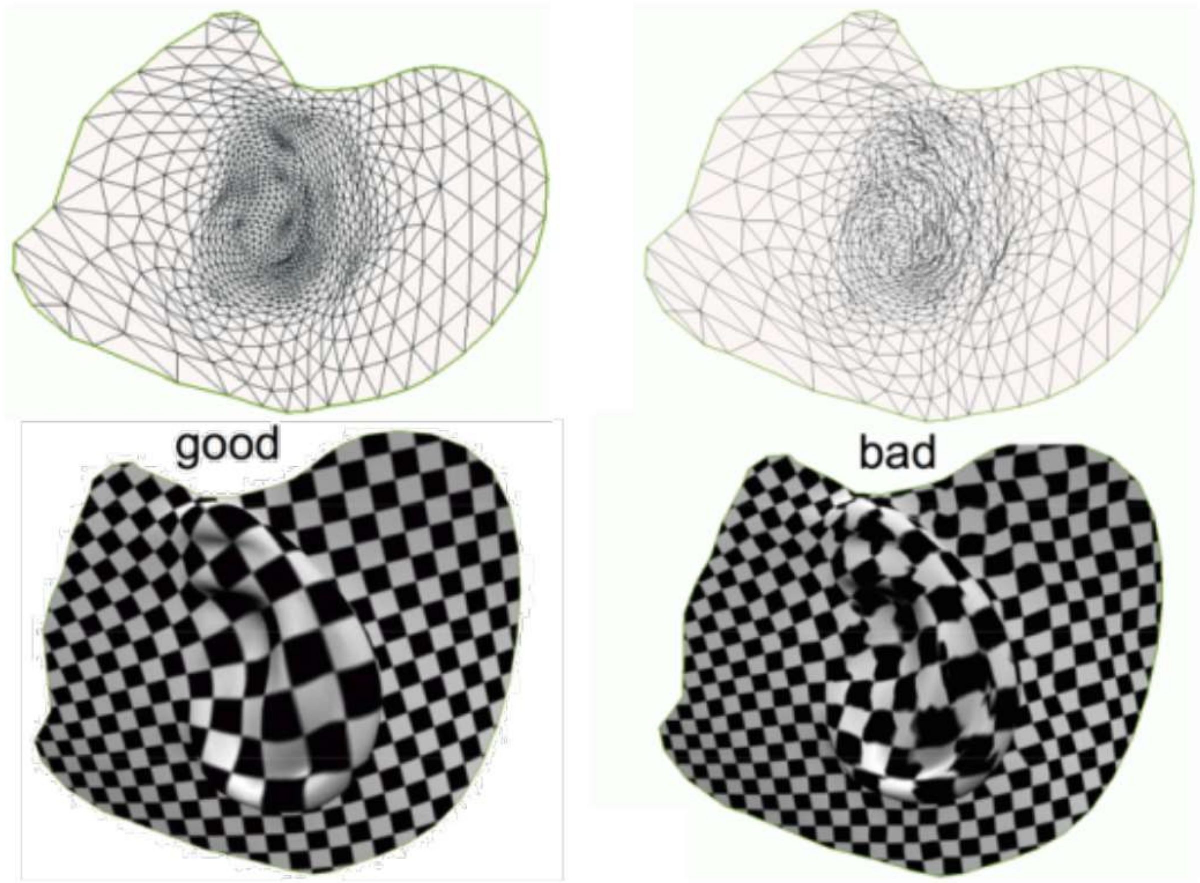
Parametrización- Dominios



Parametrización – Problema de la Frontera



Parametrización – Muchas Soluciones

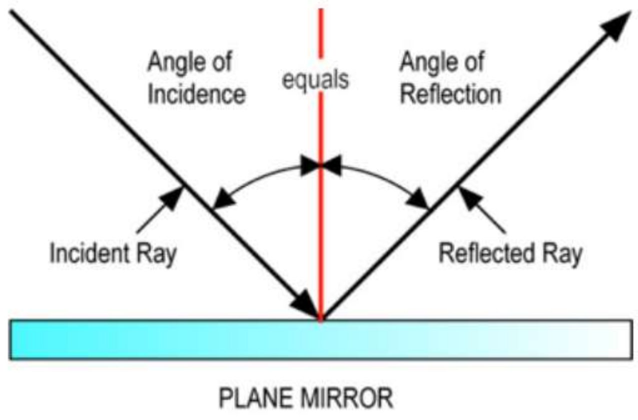


Parametrización - Aplicaciones

- Recuerdo de simplificación de mallas
  - Aproximar la geometría con pocos triángulos
- Idea
  - Desacoplar geometría de apariencia

Parametrización - Aplicaciones

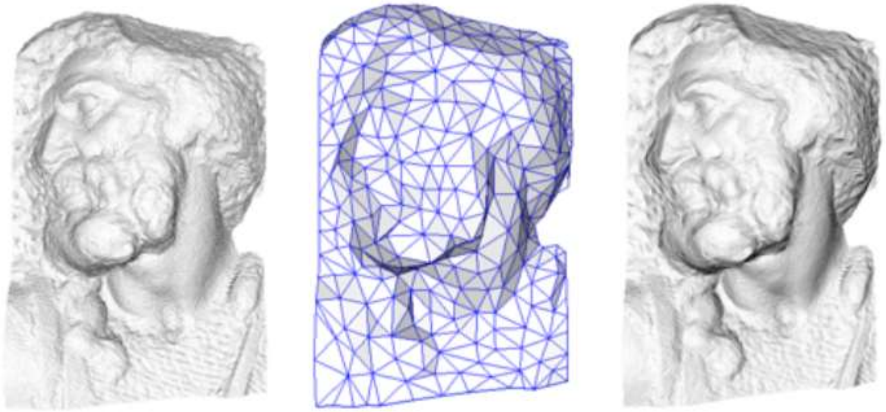
- Recuerdo de simplificación de mallas
  - Aproximar la geometría con pocos triángulos
- Idea
  - Desacoplar geometría de apariencia



  - Observación: apariencia (reflexión) depende de la geometría y normales

Parametrización - Aplicaciones

- Mapeo de Normales
  - Desacoplar geometría de apariencia
  - Codificar normales dentro del triángulo



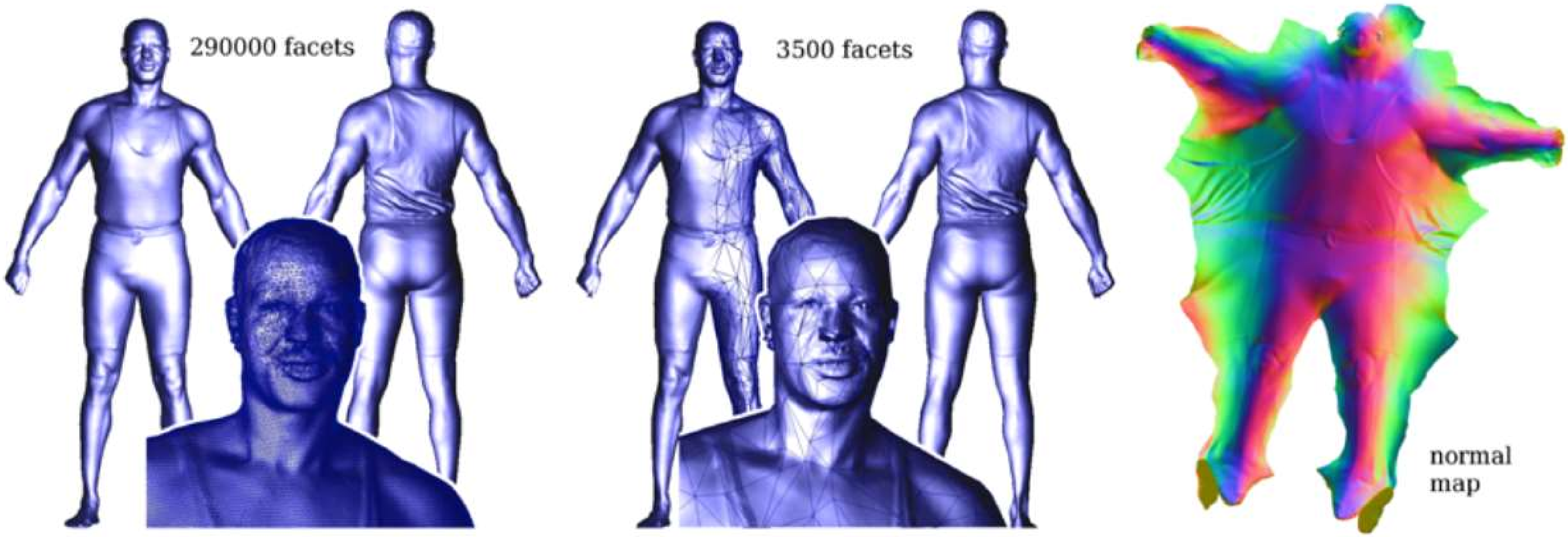
original mesh
4M triangles

simplified mesh
500 triangles

simplified mesh
and normal mapping
500 triangles

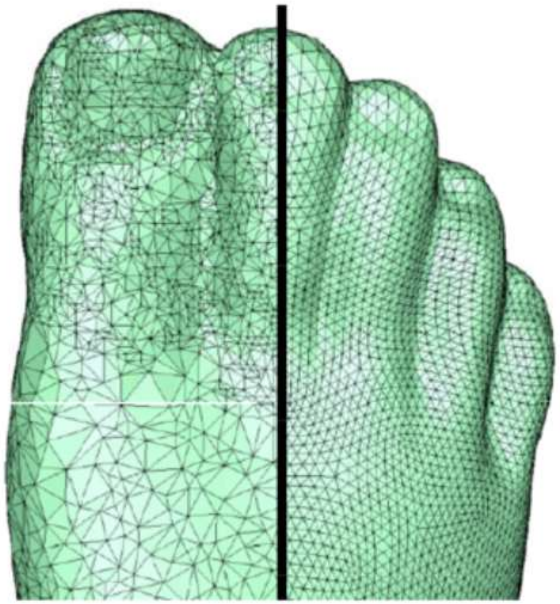
Parametrización - Aplicaciones

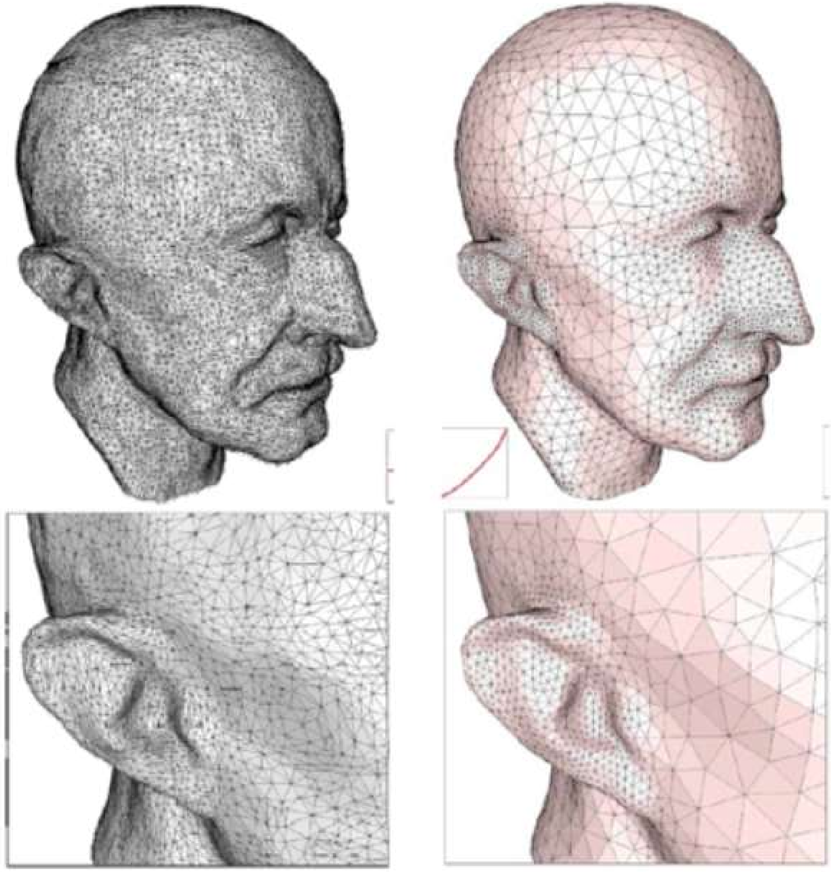
- Mapeo de normales con parametrización



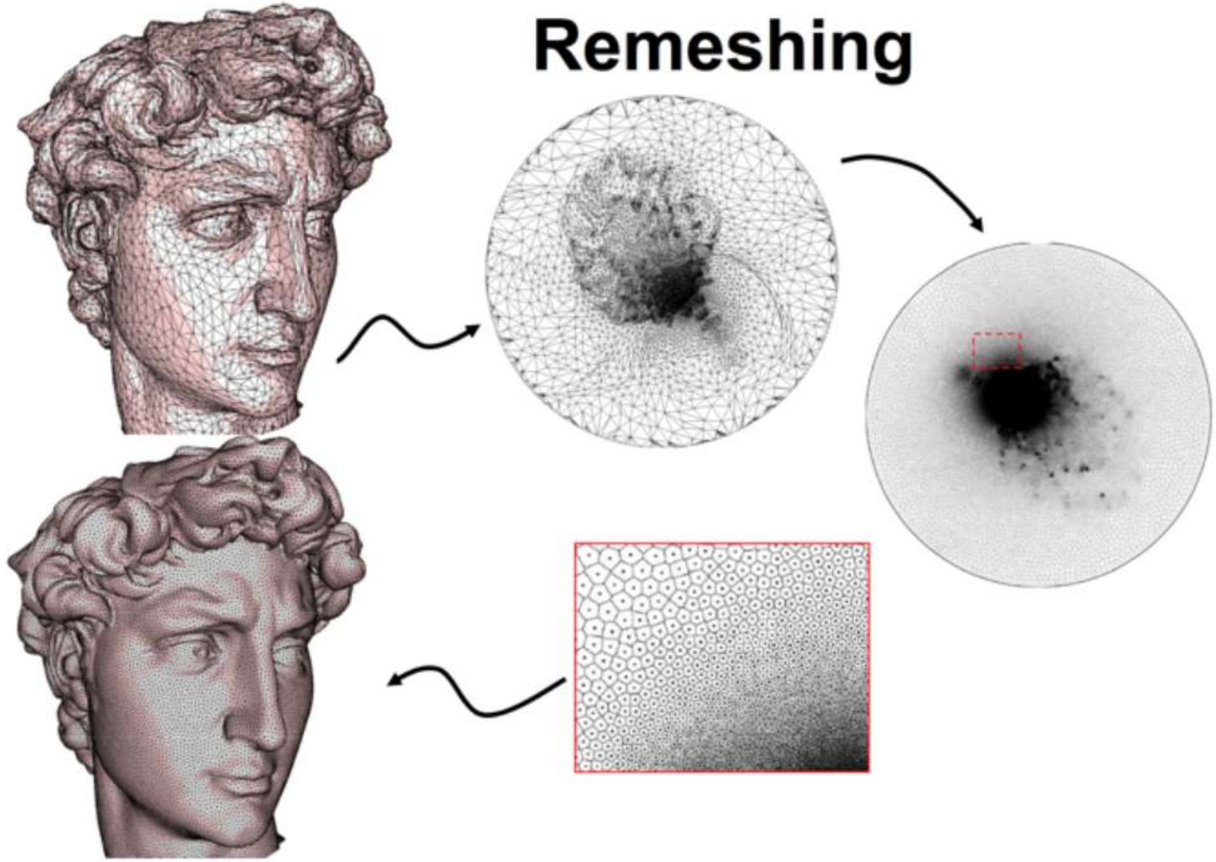
Parametrización - Aplicaciones

- Remeshing



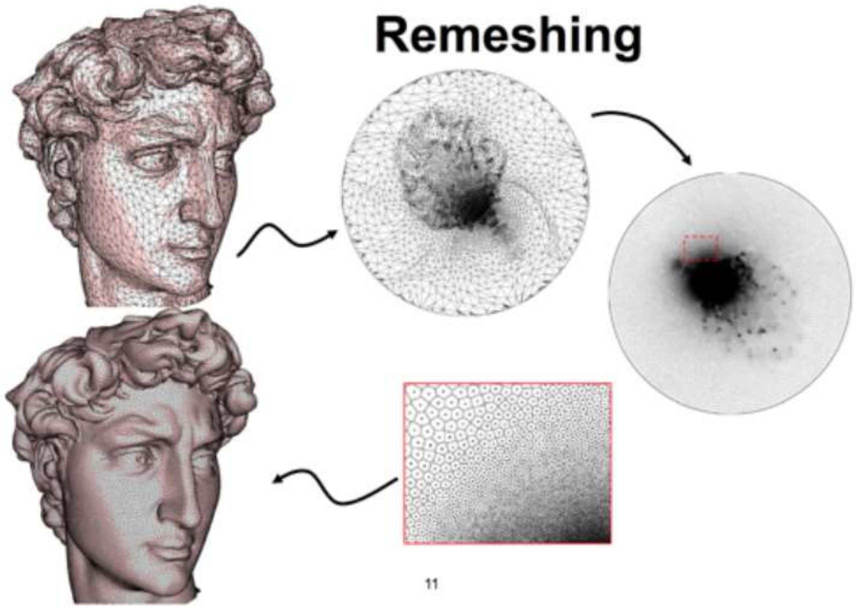


Parametrización - Aplicaciones



Parametrización - Aplicaciones

- Básicamente las cosas se vuelven más fáciles en 2D



Otras aplicaciones

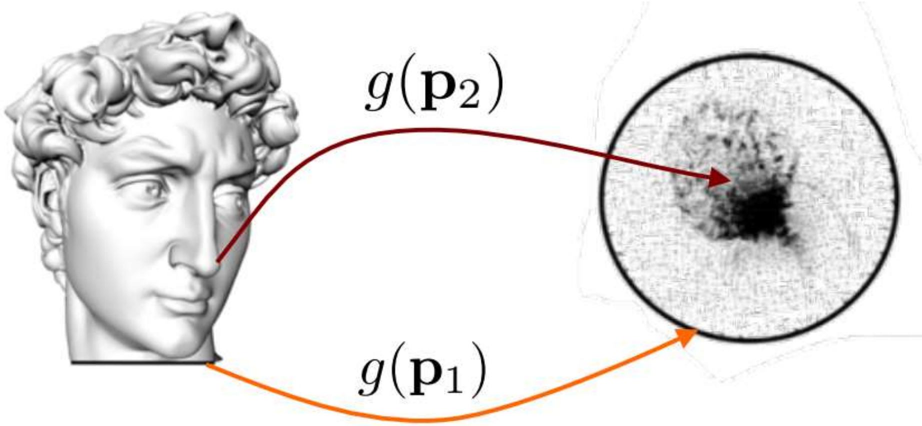
- Surface fitting
- Edición
- Mesh completion
- Interpolación
- Morphing
- Shape matching
- Visualización

Parametrización en el plano

- Problema general
  - Dada una malla en 3D, encontrar un map biyectivo

$$g: P \rightarrow \boldsymbol{R}^2$$

$$g(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{u}_i = (u_i, v_i)$$

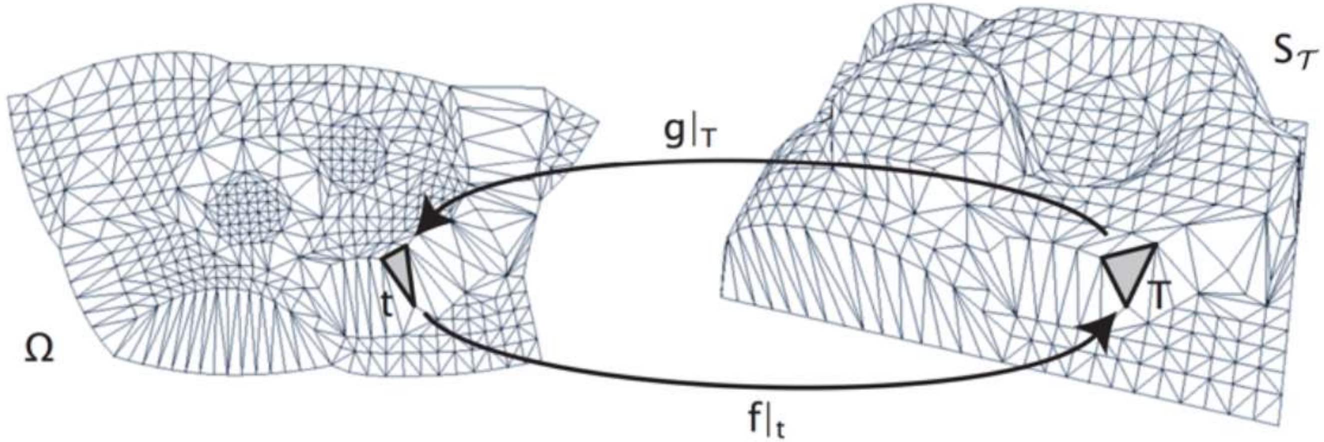


Parametrización en el plano

- Problema general
  - Dada una malla en 3D, encontrar un map biyectivo

$$g: P \to \boldsymbol{R}^2$$

$$g(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{u}_i = (u_i, v_i)$$



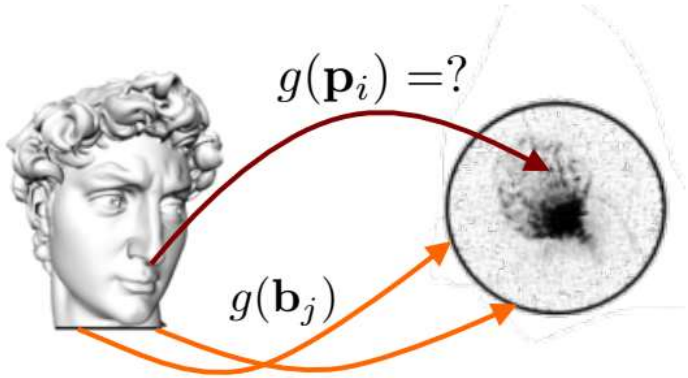
Parametrización en el plano

- Problema general
  - Dada una malla en 3D, encontrar un map biyectivo

$$g: P \rightarrow \boldsymbol{R}^2$$

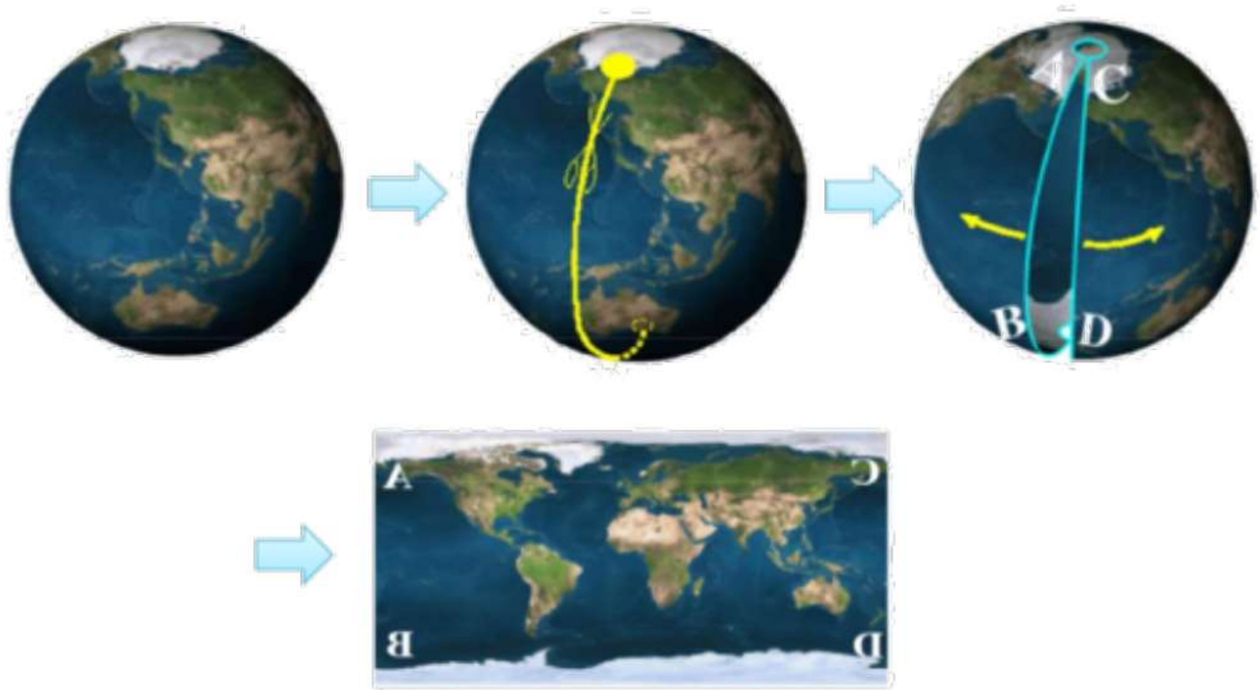
$$g(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{u}_i = (u_i, v_i)$$

  - Bajo algunas restricciones de borde: $g(\boldsymbol{b}_j) = \boldsymbol{u}_j$ para algún $\{b_j\}$



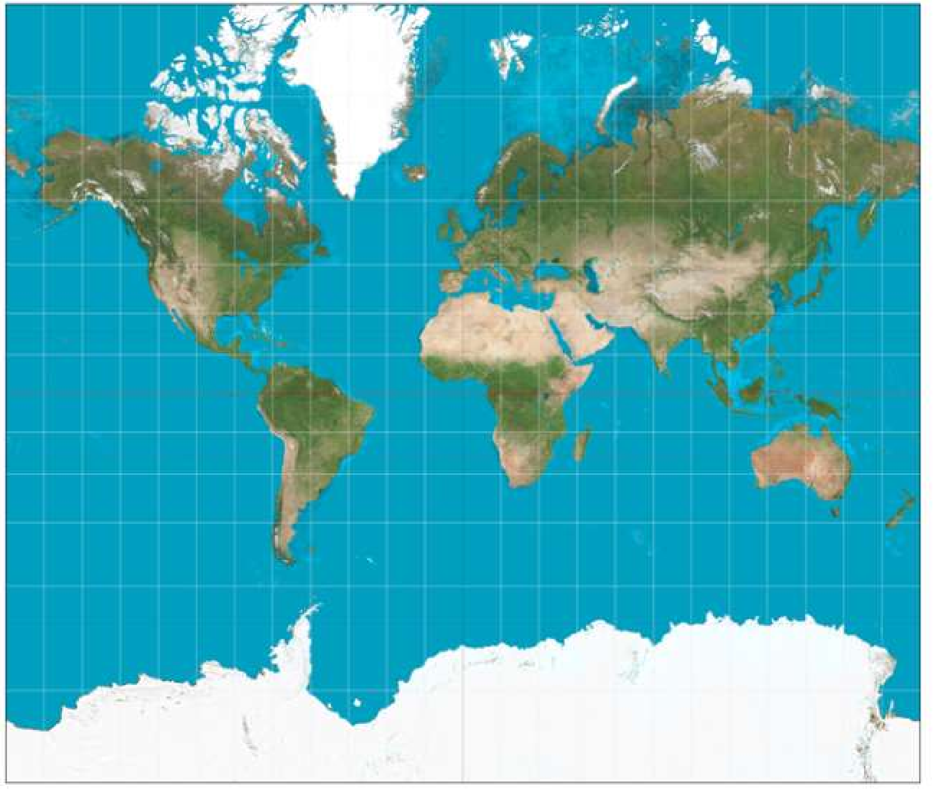
Parametrización en el plano

- Problema relacionado: Mapear la Tierra



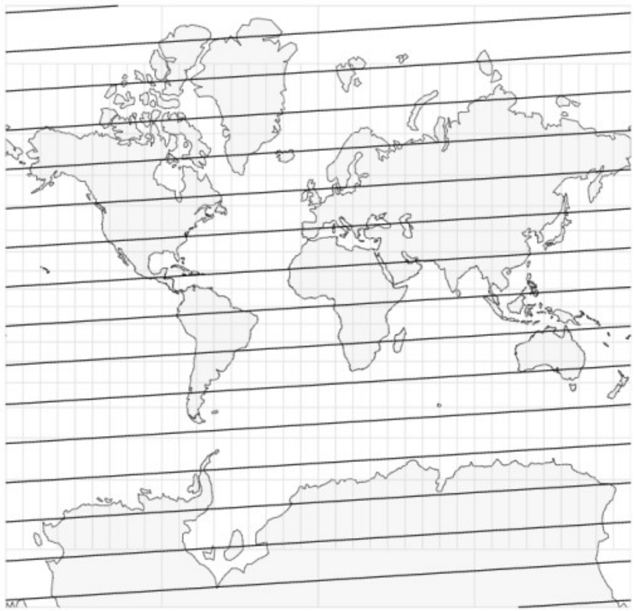
Parametrización en el plano

- Mercator



Parametrización en el plano

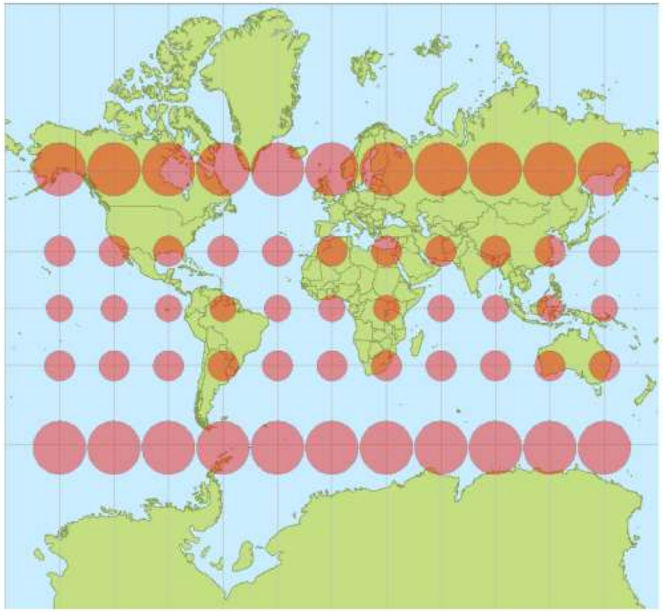
- Proyección de Mercator



Mapear loxodromos a líneas rectas

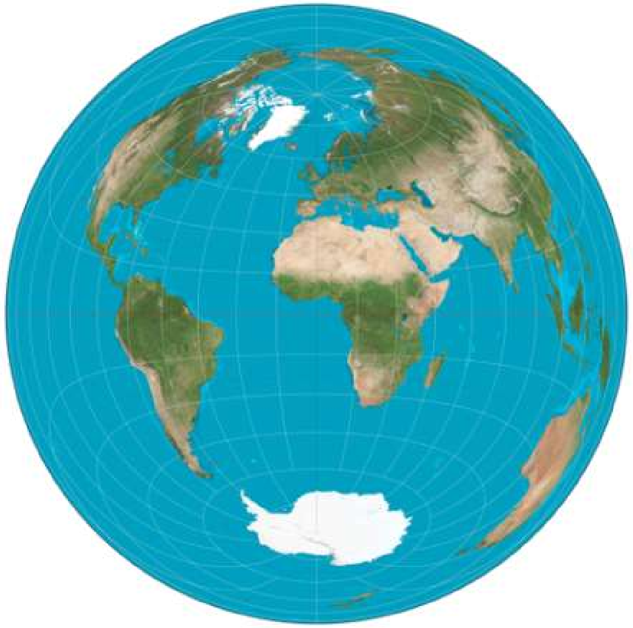
Parametrización en el plano

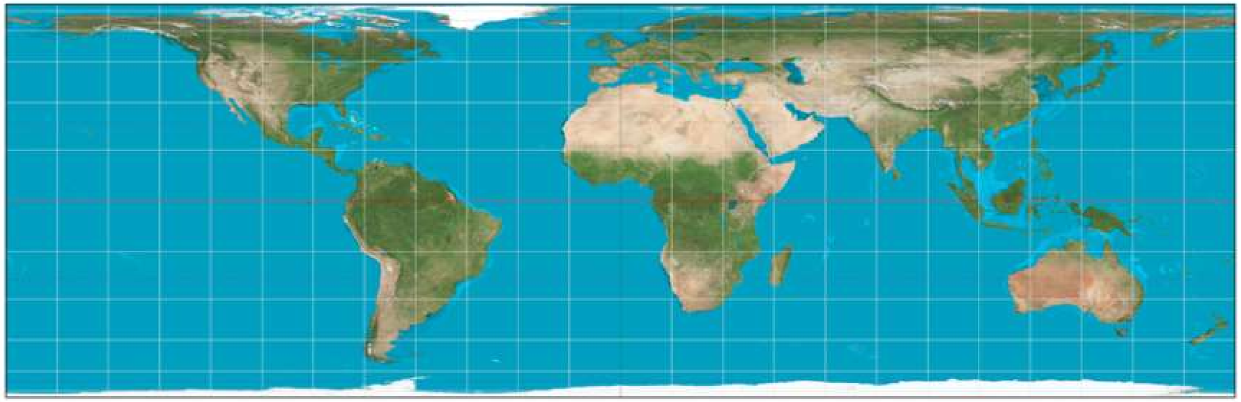
- Mercator (preserva ángulos, pero distorsiona áreas)



Parametrización en el plano

- Lambert (preserva áreas, pero distorsiona ángulos)

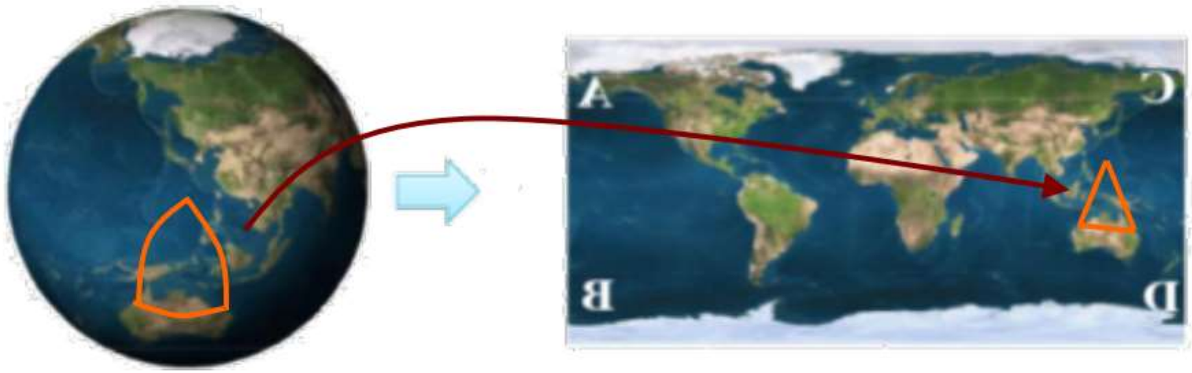




Diferentes formas de parametrización

- Equiareal: preservan áreas
- Conformal: Preservan ángulos de intersección
- Isométrica: preserva distancias geodésicas

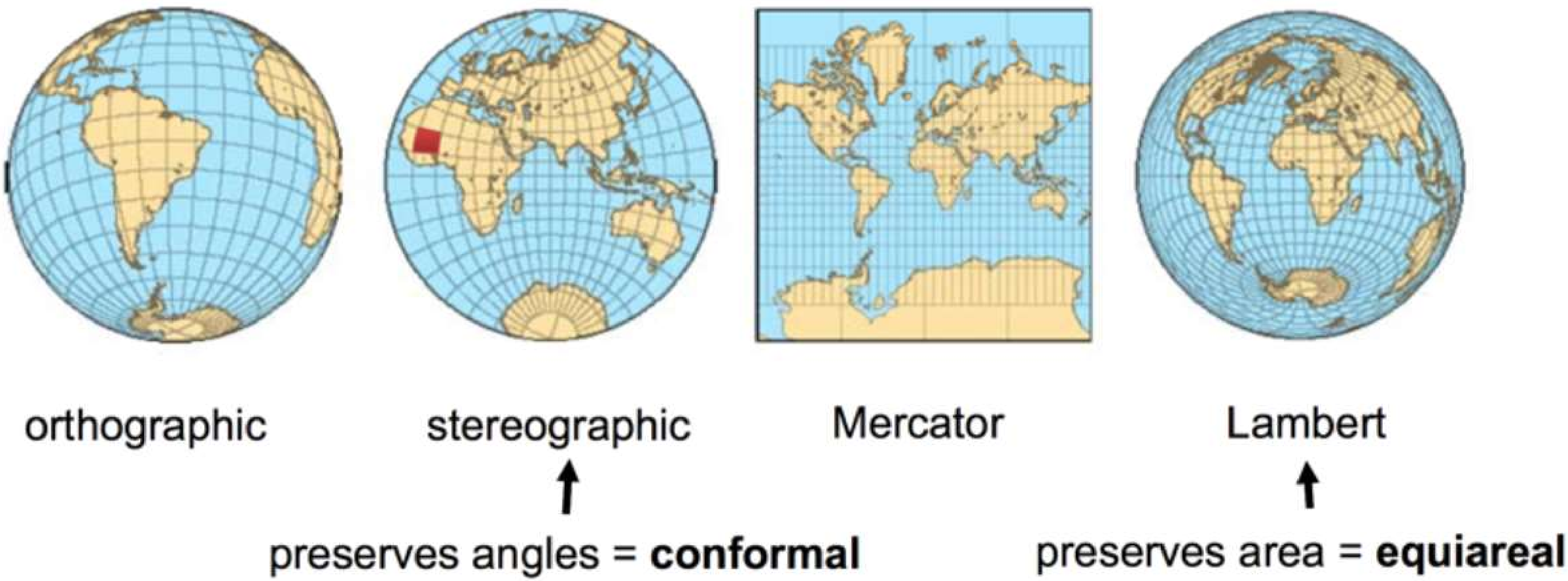
- Isométrica = Conformal + Equiareal



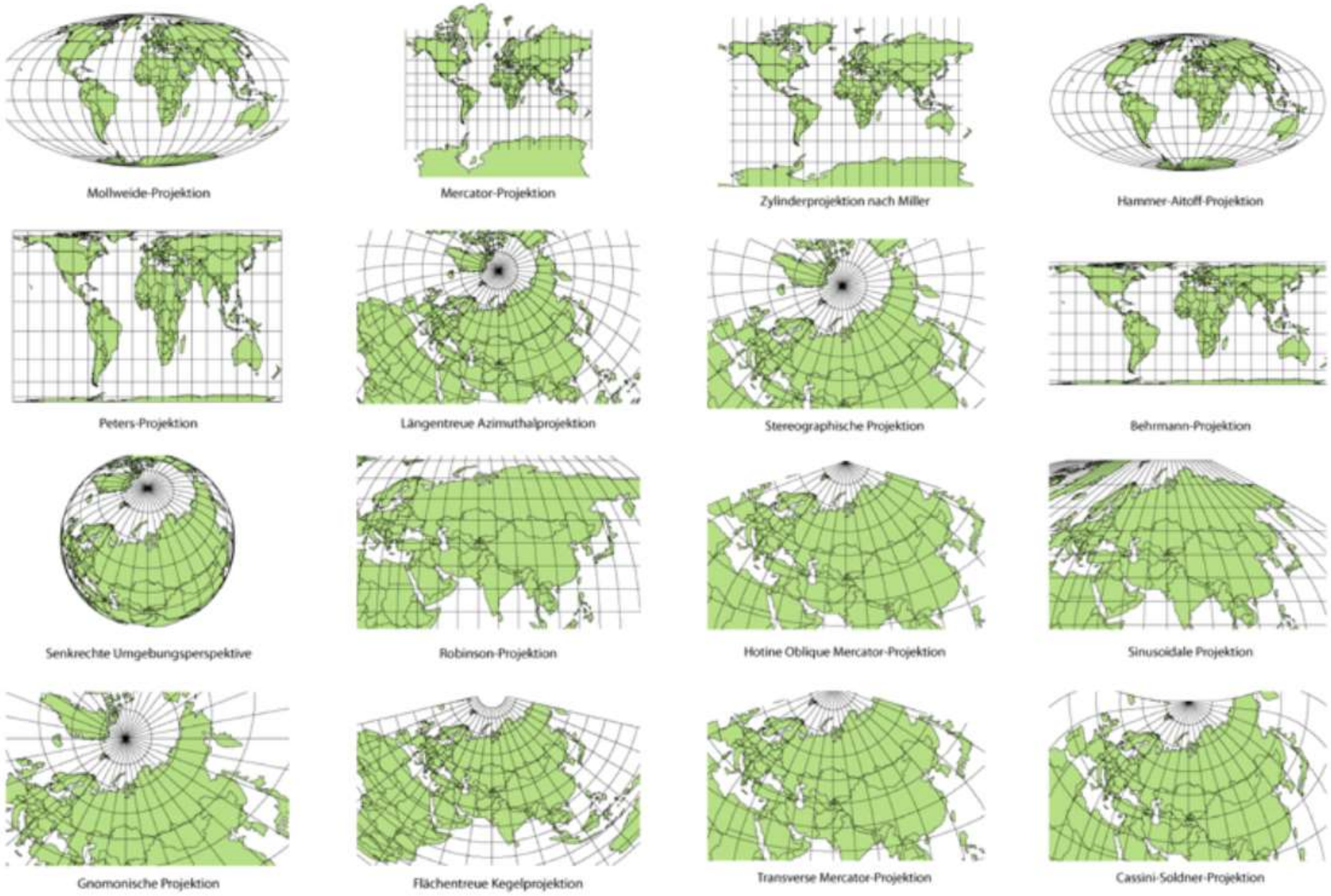
Diferentes formas de parametrización

- Propiedades Intrínsecas
  - Aquellas que dependen de ángulos y distancias en la superficie.
  - Intrínseco: distancias geodésicas
  - Extrínseco: coordenadas del espacio
- Propiedades intrínsecas son preservadas por isometrías
- Malas noticias: Teorema Egregium de Gauss
  - Curvatura es intrínseca. No existe un mapping isométrico entre una esfera y un plano

Diferentes formas de parametrización

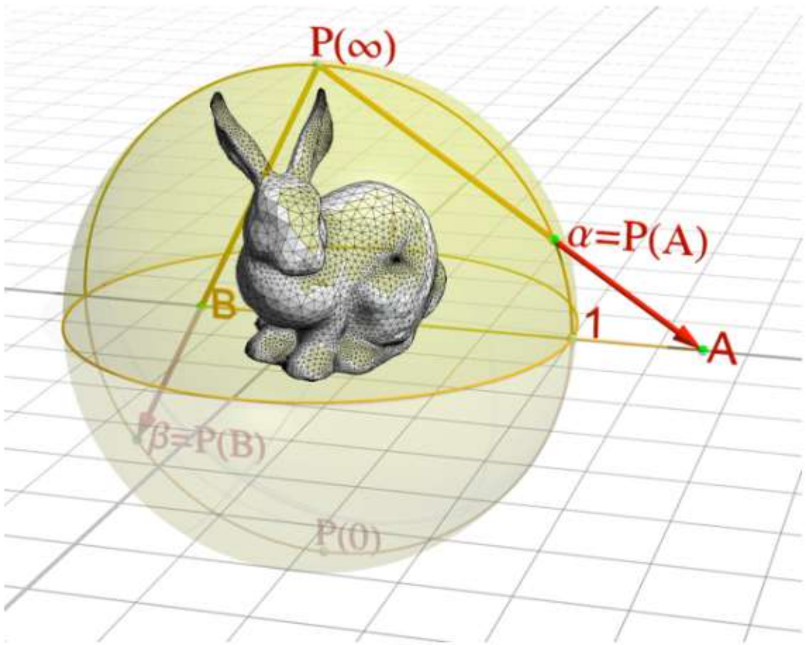


Diferentes formas de parametrización



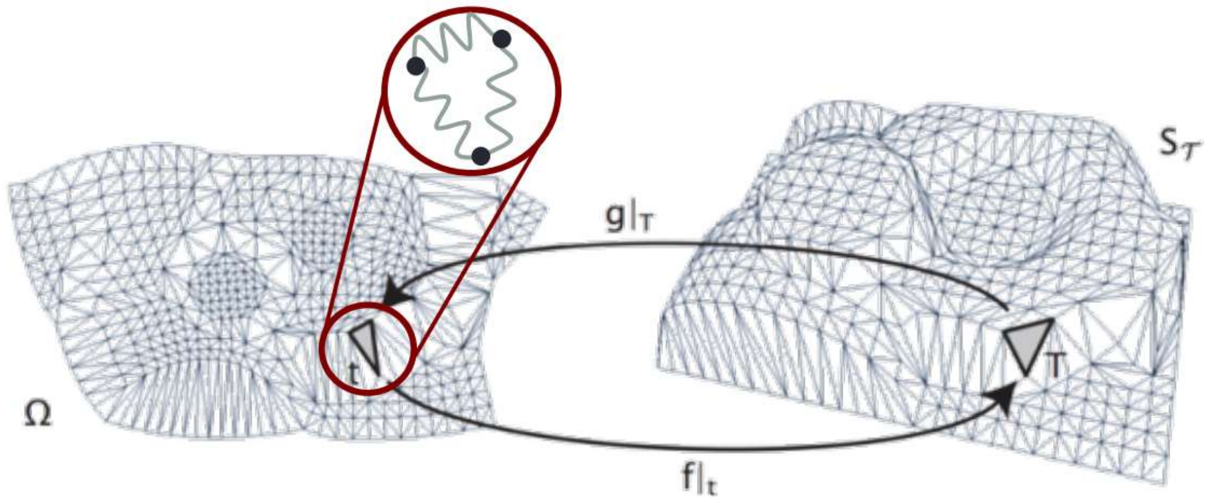
Diferentes formas de parametrización

- Desde que empleamos mallas triangulares, necesitamos asegurar un map biyectivo



Modelo Resorte para Parametrización

- Dada una malla en 3D, encontrar un map biyectivo $g(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{u}_i$, dadas las restricciones $g(\boldsymbol{b}_j) = \boldsymbol{u}_j$ para algún $\{\boldsymbol{b}_j\}$
- Modelo: imagina un resorte en cada arista de la malla
- Si la frontera es fija, que los puntos internos encuentren un equilibrio

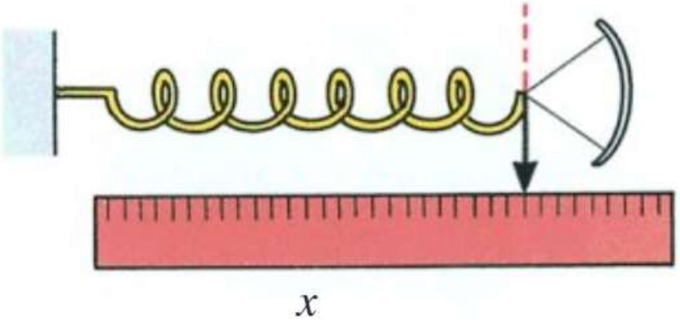


Modelo Resorte para Parametrización

- Energía potencial de un resorte estirado por una distancia x

$$E(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

- k: constante del resorte



Modelo Resorte para Parametrización

- Dado un embedding (parametrización) de una malla, la energía potencial de todo el sistema

$$E = \sum_{e} \frac{1}{2} D_e \left\| \boldsymbol{u}_{e_1} - \boldsymbol{u}_{e_2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2} D_{ij} \left\| \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j \right\|^2$$

- Donde $D_e = D_{ij}$ es la constante resorte de la arista entre i y j
- Objetivo: encontrar las coordenadas $\{\boldsymbol{u}_i\}$ que minimiza E
- Nota: los vértices borde previenen una solución degenerada

Parametrización con coordenadas baricéntricas

- Encontrar el óptimo de

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\frac{1}{2}D_{ij}\left\|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j\right\|^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{u}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j\in N_i} D_{ij}\left(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j\right) = 0$$

$$u_i = \sum_{j\in N_i}\lambda_{ij}u_j \qquad \text{donde} \qquad \lambda_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{j\in N_i} D_{ij}}$$

- Cada punto u_i debe ser una combinación convexa de sus vecinos. Coordenadas baricéntricas

Parametrización con coordenadas baricéntricas

- En la práctica
  - Fijar los puntos de borde $\mathbf{b}_i, i \in \mathcal{B}$
  - Formar las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{b}_i, & \text{if } i \in \mathcal{B} \\ \mathbf{u}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} \mathbf{u}_j &= 0, & \text{if } i \notin \mathcal{B} \end{aligned}$$

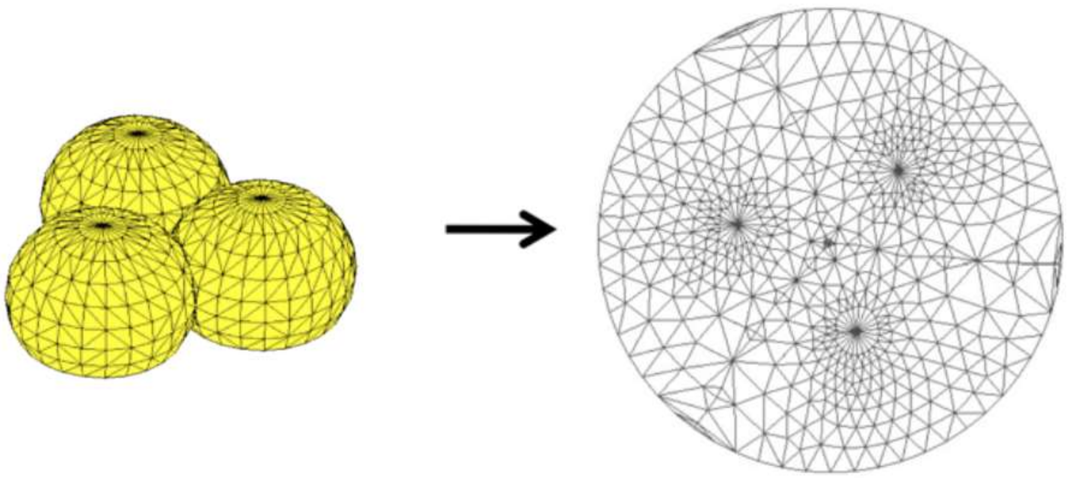
  - Construir dos sistemas lineales (uno por coordenada)

$$LU = \bar{U}, \quad LV = \bar{V} \qquad L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ -\lambda_{ij} & \text{if } j \in \mathcal{N}_i,\ i \notin \mathcal{B} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - Solución son las coordenadas $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$

Parametrización

- Este método funciona?
- Teorema de Maxwell-Tutte
  - Si $G = < V, E >$ es un grafo planar 3-conectado (malla triangular), entonces cualquier dibujo baricéntrico es un embedding válido.



Matriz Laplaciana

- Nuestro sistema de ecuaciones (olvidemos la frontera):

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} \mathbf{u}_j, \quad \text{donde} \quad \lambda_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} D_{ij}}$$

$$LU = 0 \qquad L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ -\lambda_{ij} & \text{if } j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

L no es simétrica

- Alternativamente

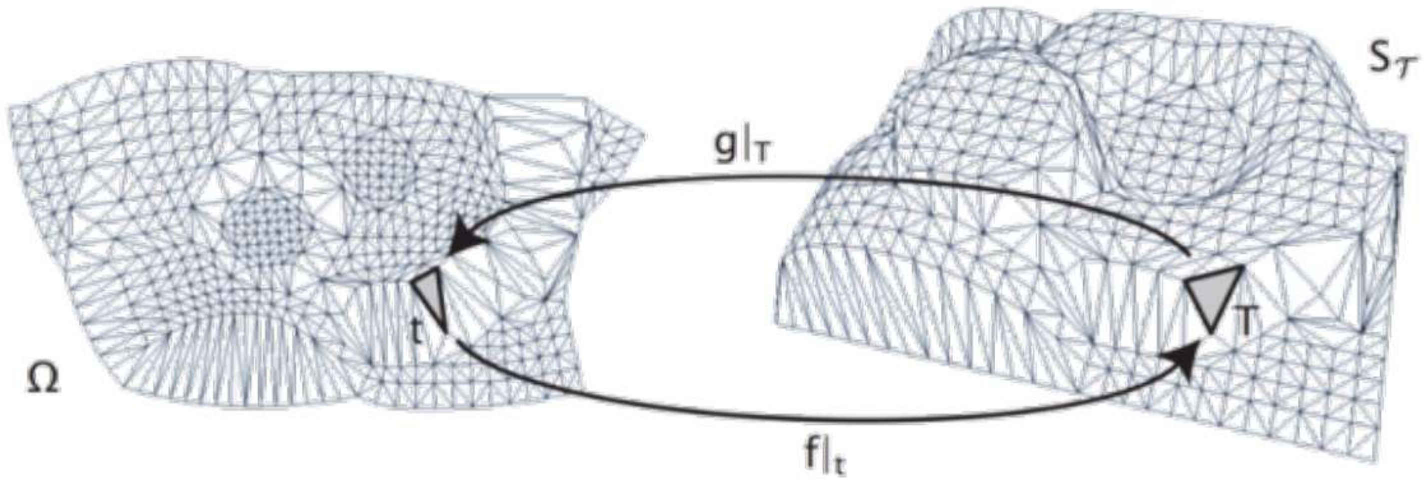
$$\mathbf{u}_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} D_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} D_{ij} \mathbf{u}_j$$

$$LU = 0 \qquad L_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{N}_i} D_{ij} & \text{if } i = j \\ -D_{ij} & \text{if } j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

L es simétrica

Parametrización con Coordenadas Baricéntricas

- Reproducción lineal
  - Si la malla ya es planar, queremos recuperar las coordenadas originales
- Problema
  - Pesos uniformes no logran una reproducción lineal
  - Lo mismo si los pesos son proporcionales a distancias



Parametrización con Coordenadas Baricéntricas

- Reproducción lineal
  - Si la malla ya es planar, queremos recuperar las coordenadas originales
- Problema
  - Pesos uniformes no logran una reproducción lineal
  - Lo mismo si los pesos son proporcionales a distancias
- Solución
  - Si los pesos con baricéntricos con respecto a los puntos originales

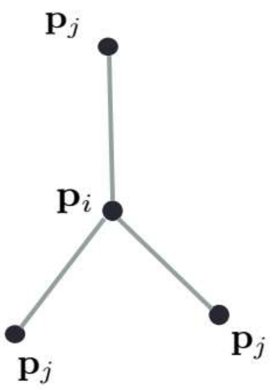
$$\mathbf{p}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j, \quad \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} = 1$$

  - El sistema resultante recuperará las coordenadas planares

Parametrización con Coordenadas Baricéntricas

- Solución
  - Coordenadas baricéntricas con respecto a los puntos originales

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j, \quad \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} = 1$$

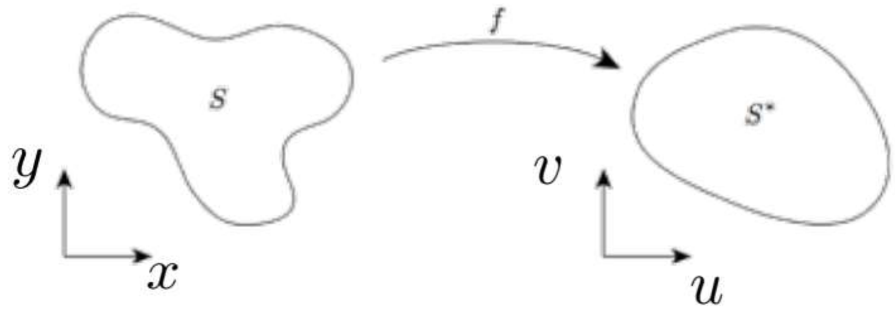


- Si un punto tiene 3 vecinos, entonces las coordenadas baricéntricas son únicas
- Para más de 3 vecinos, existen muchas posibilidades

Mapping Conformal

- Teorema del Mapping de Riemann
  - Cualquier superficie topológicamente equivalente a un disco, puede ser mapeada conformalmente a un disco unitario
- Ecuaciones de Cauchy-Riemann
  - Si un map $(x, y) \rightarrow (u, v)$ es conformal, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

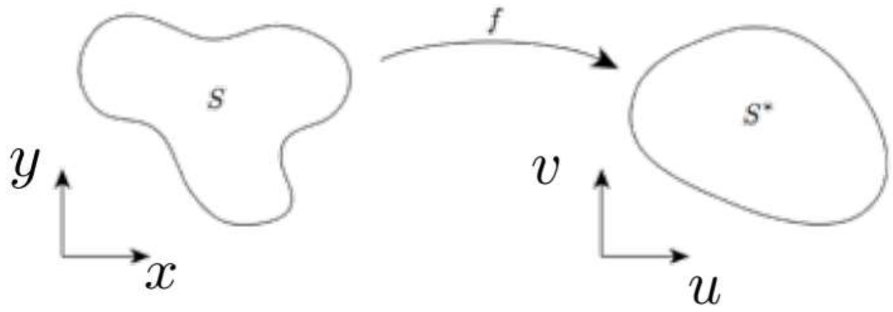


Mapping Conformal

- Teorema del Mapping de Riemann
  - Cualquier superficie topológicamente equivalente a un disco, puede ser mapeada conformalmente a un disco unitario
- Ecuaciones de Cauchy-Riemann
  - Si un map $(x, y) \rightarrow (u, v)$ es conformal, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son armónicos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0$$

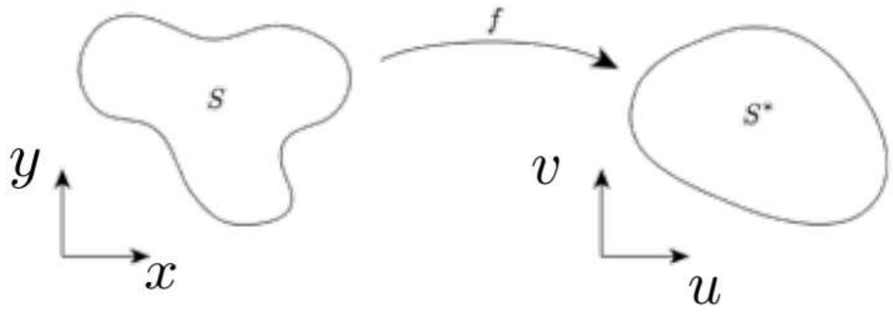


Mapping Conformal

- Teorema del Mapping de Riemann
  - Cualquier superficie topológicamente equivalente a un disco, puede ser mapeada conformalmente a un disco unitario
- Ecuaciones de Cauchy-Riemann
  - Si un map $(x, y) \rightarrow (u, v)$ es conformal, entonces $u(x, y)$ y $\mathrm{v}(x, y)$ son armónicos

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta v = 0$$



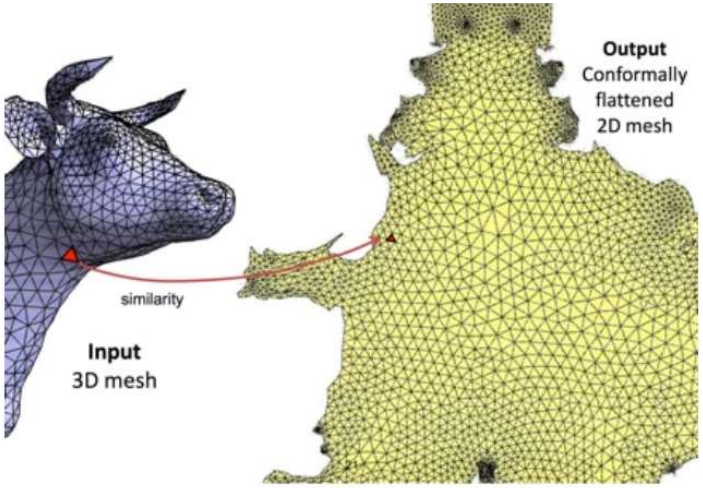
Mapping Conformal

- Teorema del Mapping de Riemann
  - Cualquier superficie topológicamente equivalente a un disco, puede ser mapeada conformalmente a un disco unitario
- Ecuaciones de Cauchy-Riemann
  - Si un map $S \rightarrow (u, v)$ es conformal, entonces u y v son armónicos

$$\Delta_S u = 0$$

$$\Delta_S v = 0$$

Δ_S: Operador Laplace-Beltrami

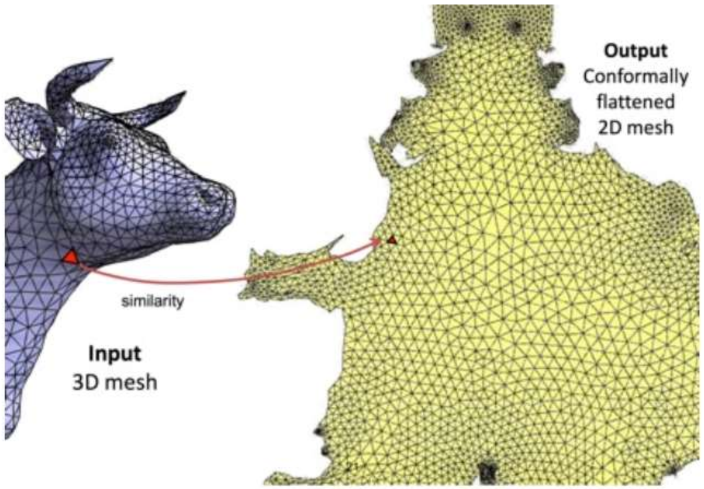


Mapping armónico

- Isometrico ➔ Conformal ➔ Armónico
- Mapping armónico es más fácil de computar, pero puede no preservar ángulos. Puede no ser biyectivo.
- Map armónico minimiza la energía de Dirichlet

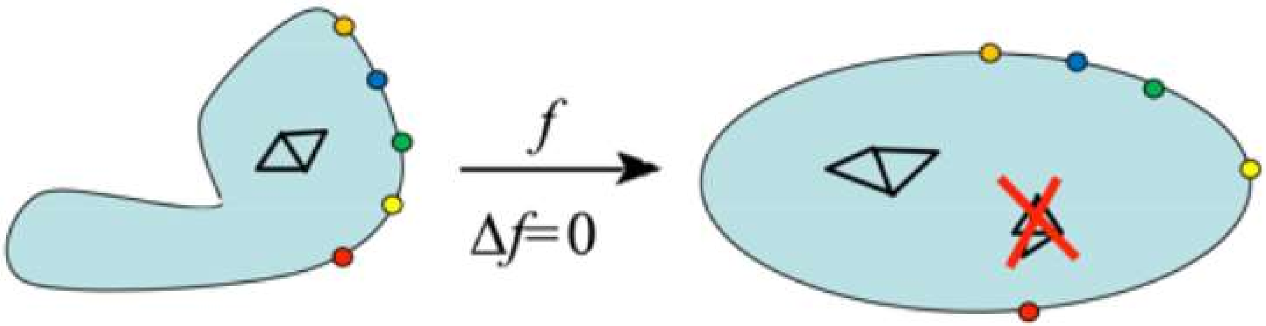
$$E_D(f) = \frac{1}{2} \sum_S \|\nabla_S f\|^2$$

Dadas las condiciones de borde.



Mapping armónico

- Teorema (Rado-Kneser-Choquet)
  - Si $f: S \rightarrow R^2$ es armónico y mapea la frontera ∂S a una frontera ∂S^* de alguna región convexa $S^* \subset R^2$, entonces f es biyectivo.



El método general

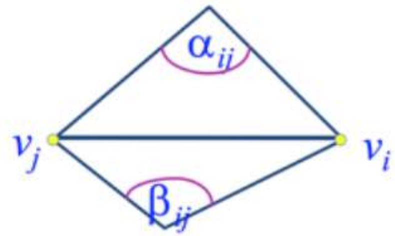
- Fijar los puntos de la frontera $\mathbf{b}_i, i \in \mathcal{B}$
- Construir dos sistemas lineales (uno por cada coordenada)

$$LU = \bar{U}, \quad LV = \bar{V} \qquad L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j,\ i \in \mathcal{B} \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} D_{ij} & \text{if } i = j,\ i \notin \mathcal{B} \\ -D_{ij} & \text{if } j \in \mathcal{N}_i,\ i \notin \mathcal{B} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

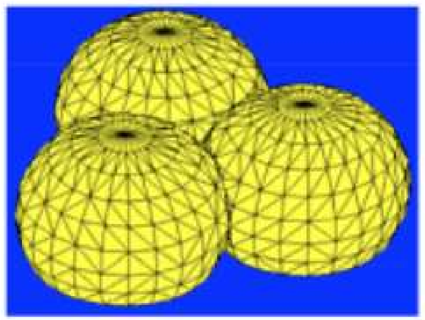
- Solución del sistema lineal entrega las coordenadas $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$

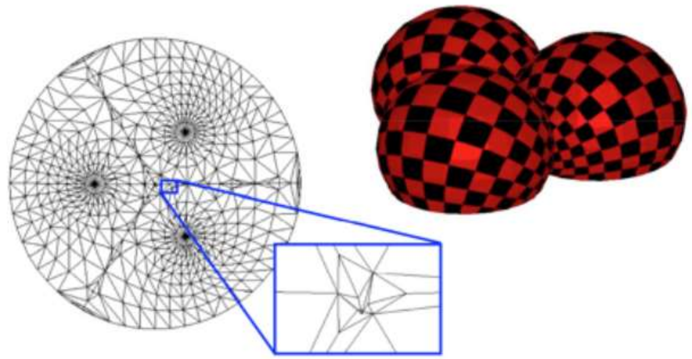
Coordenadas baricéntricas

$$\boxed{D_{ij} = \frac{\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})}{2}}$$



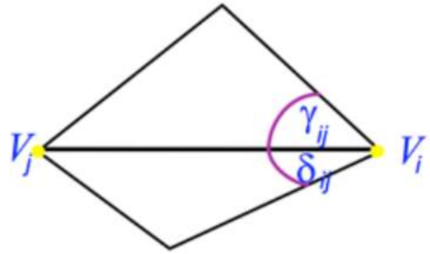
- Pesos pueden ser negativos – no siempre válido
- Pesos dependen sólo de los ángulos – no del todo conformal



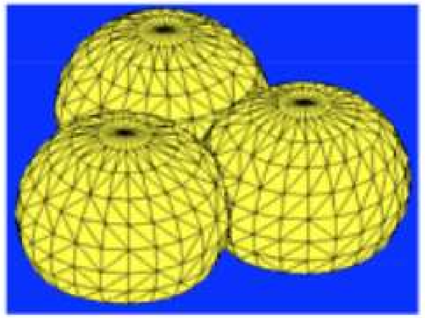


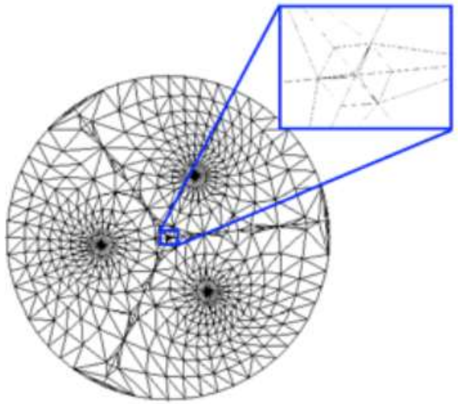
Coordenadas baricéntricas

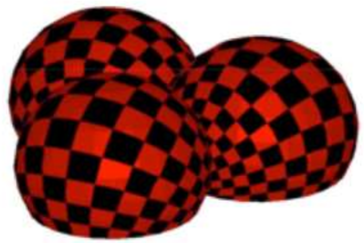
$$D_{ij} = \frac{\tan(\gamma_{ij}/2) + \tan(\delta_{ij}/2)}{2\,\|V_i - V_j\|}$$



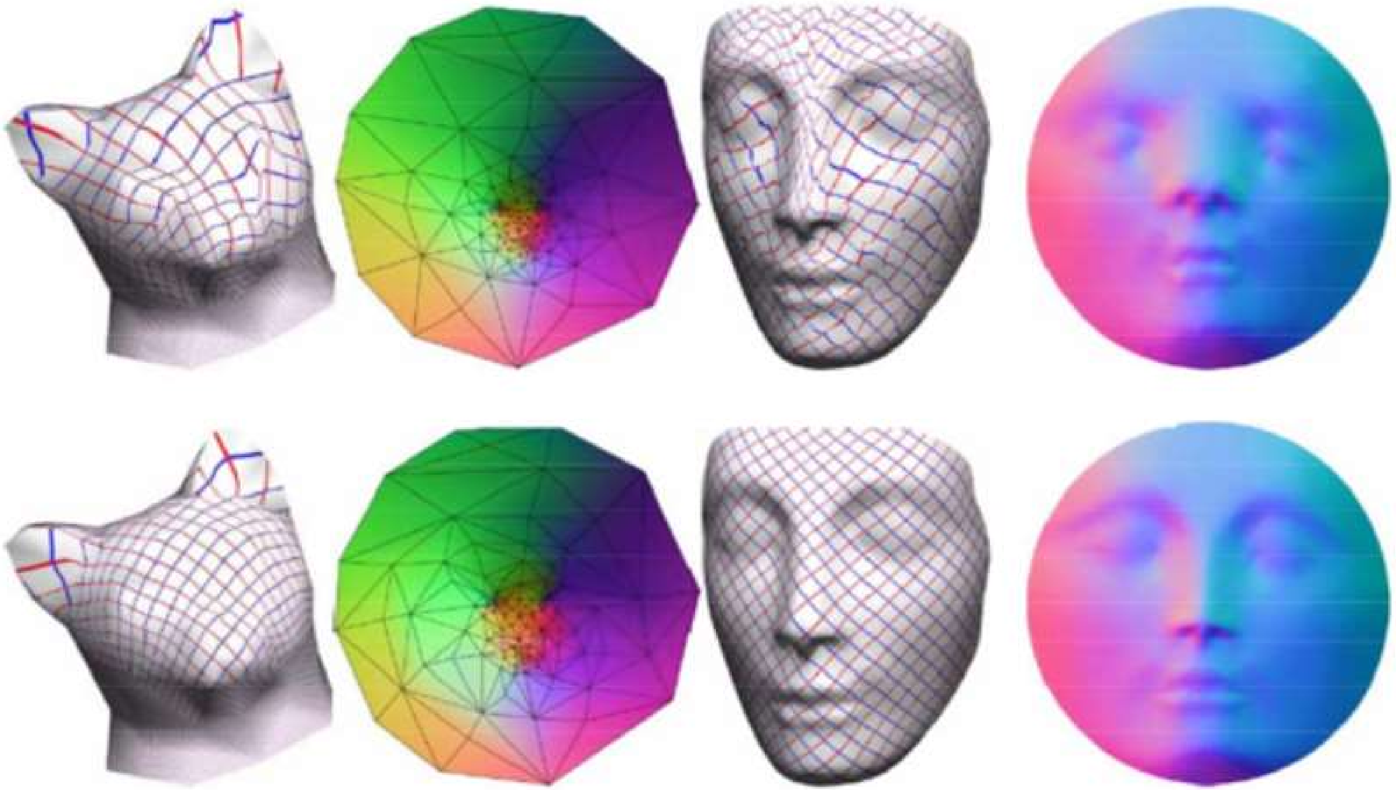
- Resultados visualmente similares al armónico
- No pesos negativos – siempre válido







Coordenadas baricéntricas

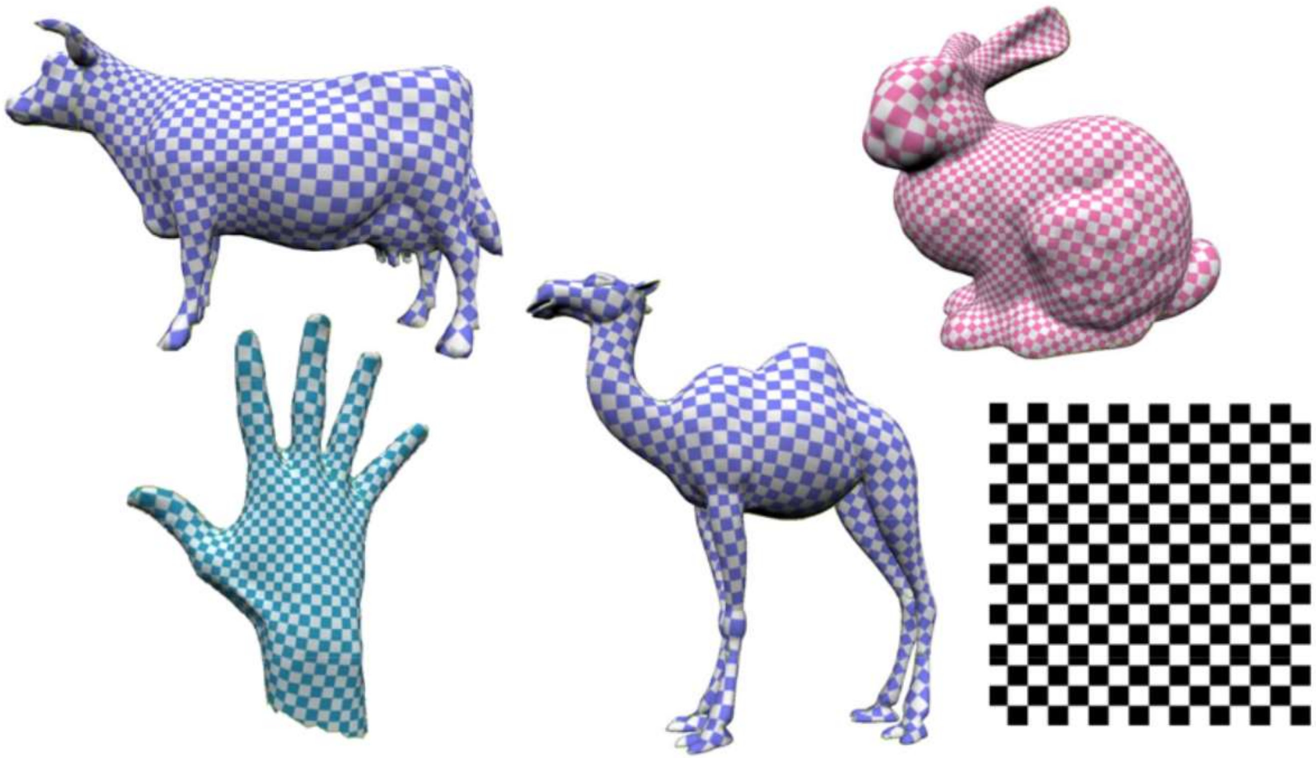


Uniforme

Armónico

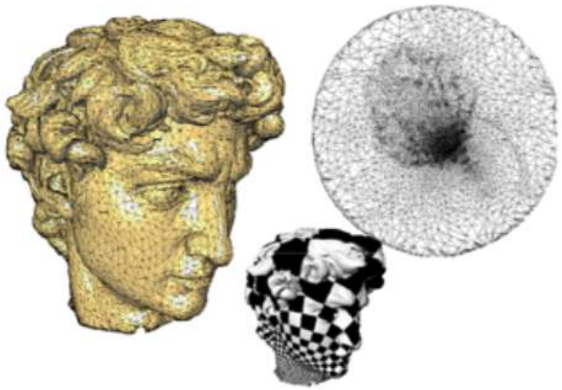
Mapping Conformal

- Son los más usados en la práctica



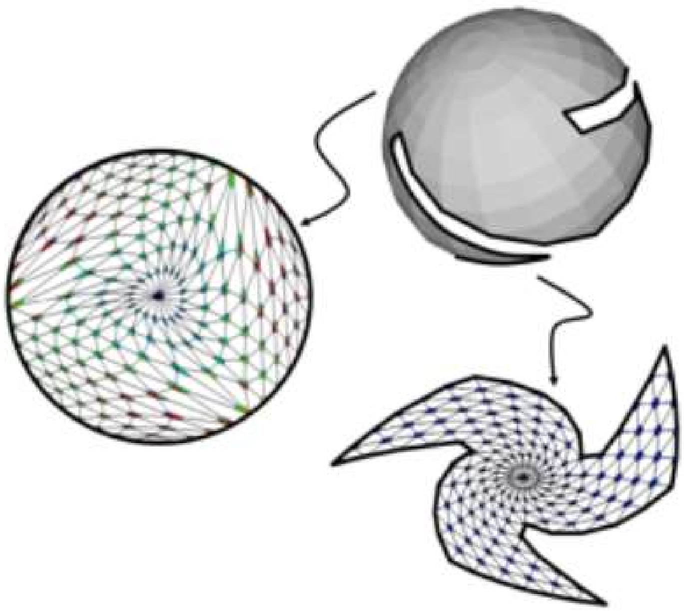
Mapping Conformal

- Fijando la frontera
    - Forma simple convexa (triángulo, cuadrado, círculo)
    - Distribuir puntos en la frontera
        - Usar parametrización de longitud de arco
    - Frontera fija puede crear distorsión grande



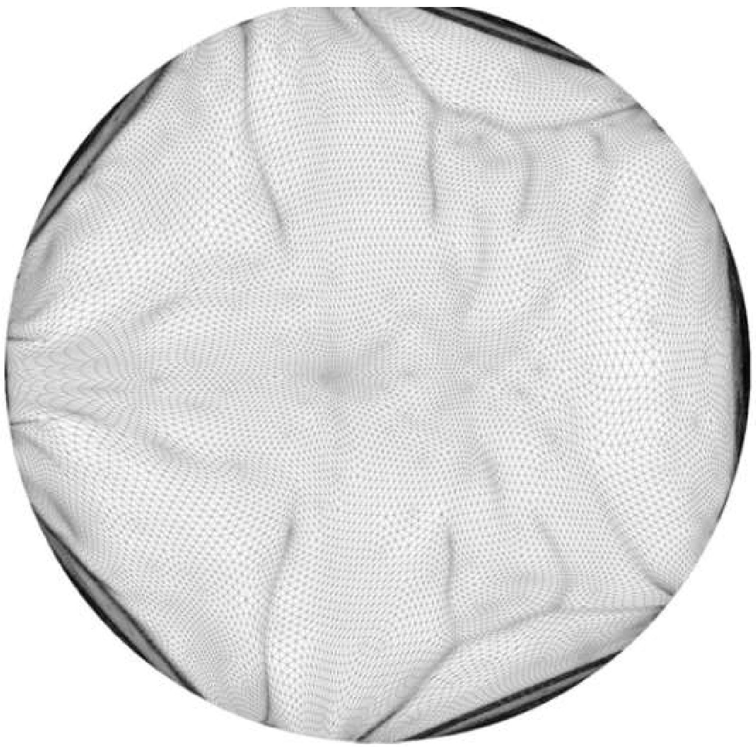
Mapping Conformal

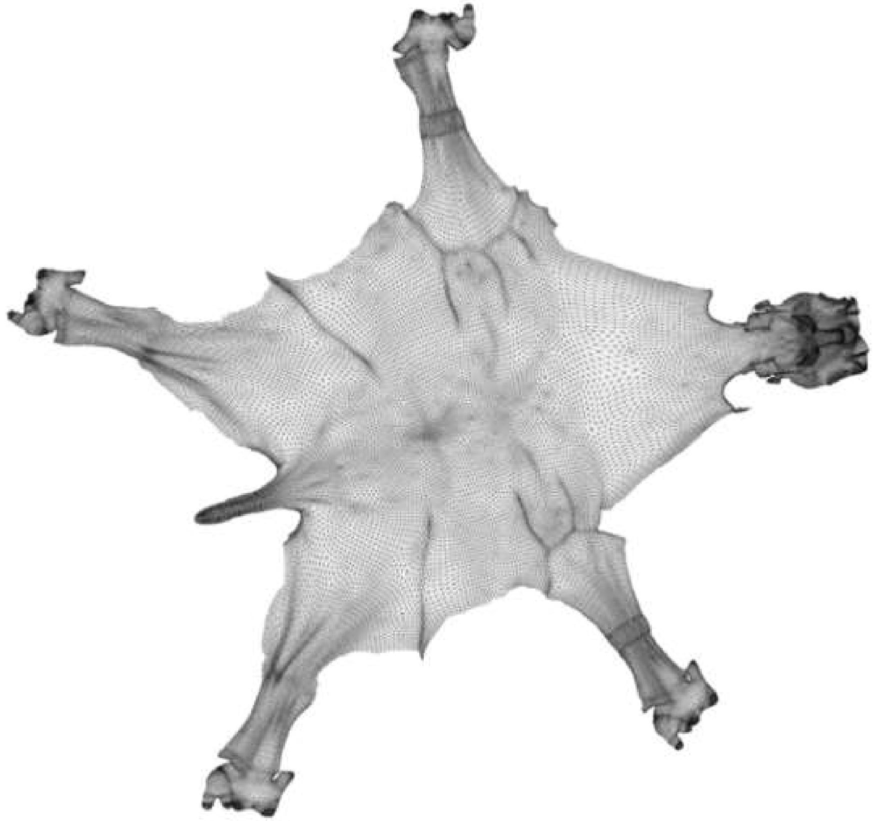
- Fijando la frontera
  - Forma simple convexa (triángulo, cuadrado, círculo)
  - Distribuir puntos en la frontera
    - Usar parametrización de longitud de arco
  - Frontera fija puede crear distorsión grande

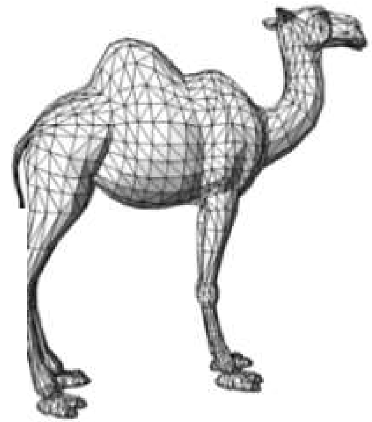


  - Frontera libre es mejor, pero más difícil de optimizar

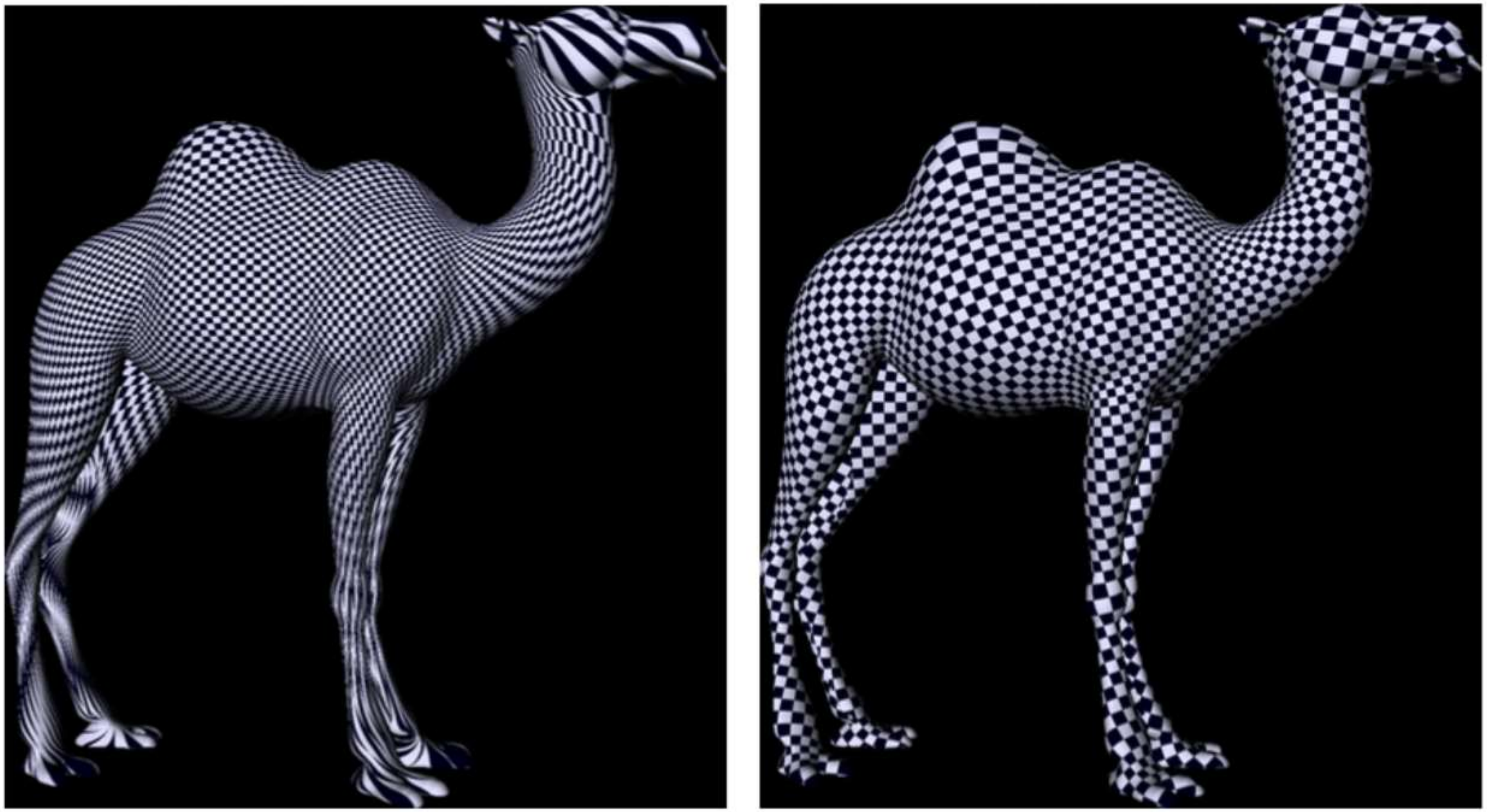
Frontera Fija vs. Libre





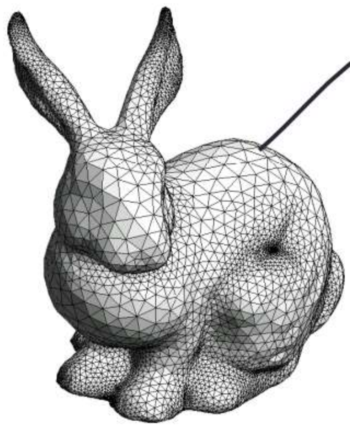


Frontera Fija vs. Libre



Métodos de frontera libre

- Enfoque general



$$E(f) = \sum_{t \in \text{triangles}} \text{distortion}(t|f)$$

- Las coordenadas de los vértices son desconocidas, construimos una energía que mida distorsión

$$(u_{\text{opt}}, v_{\text{opt}}) = \underset{f=(u,v)}{\arg\min}\, E(f)$$