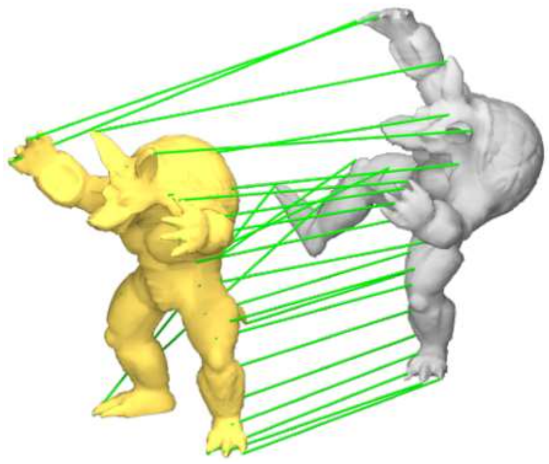
# Procesamiento Geométrico y Análisis de Formas

Ivan Sipiran

# Cálculo de correspondencias

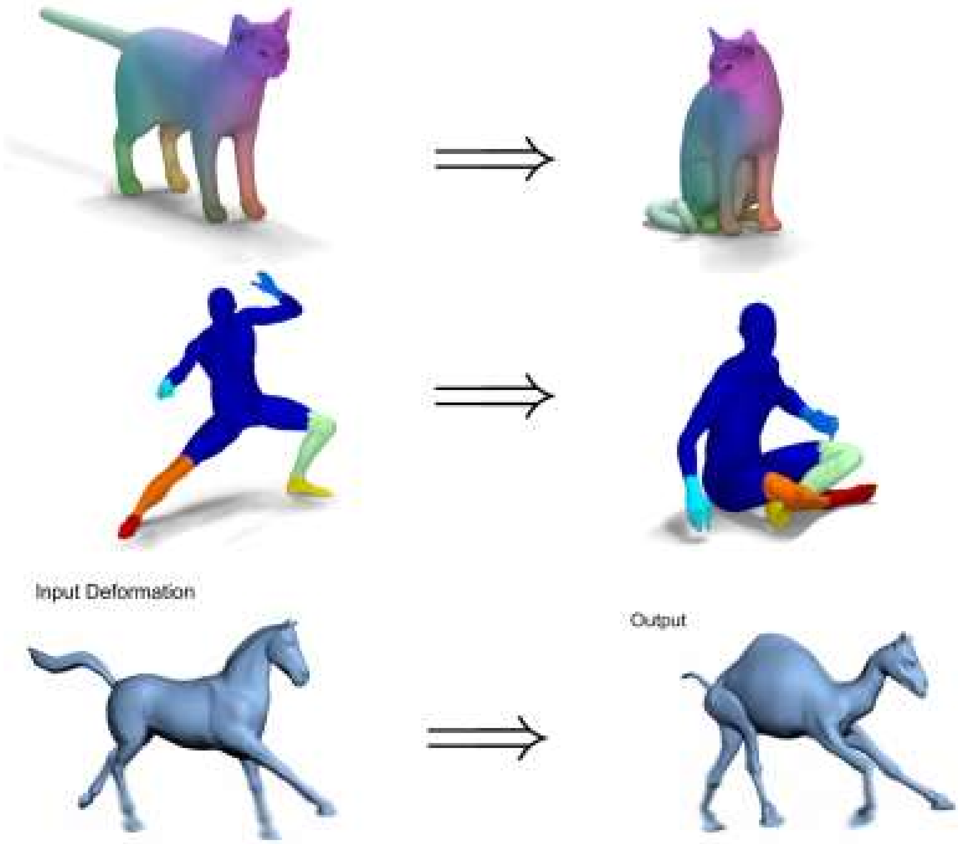
- Dados dos objetos, encontrar las correspondencias entre ellos



- Encontrar el mejor map entre el par de formas.

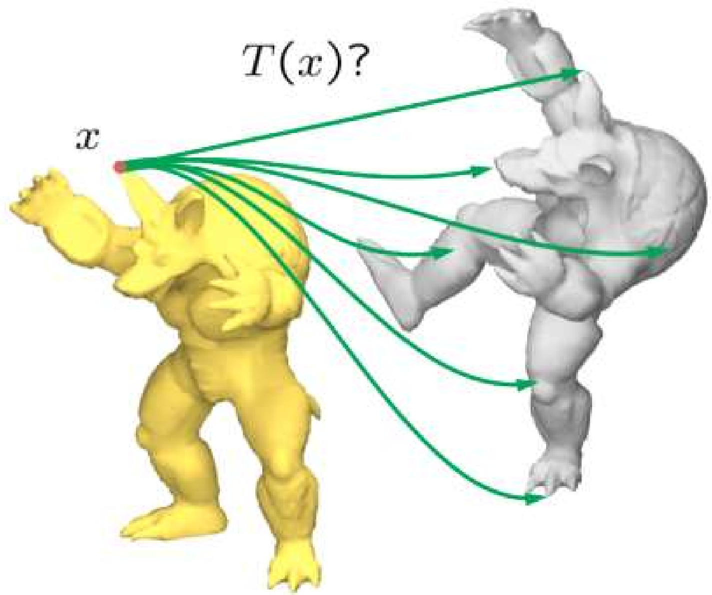
# Para qué sirve?

- Dadas las correspondencias, podemos transferir
  - Texturas y parametrizaciones
  - Segmentaciones y etiquetas
  - Deformaciones



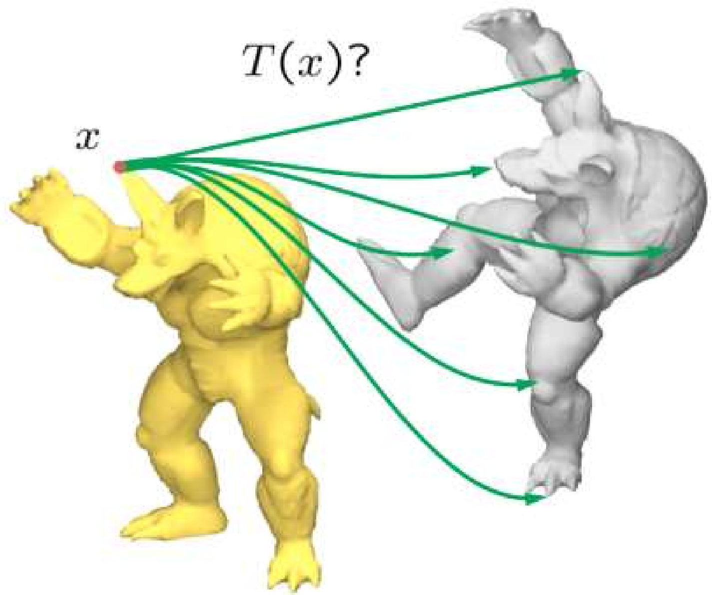
# Non-rigid Shape Matching

- A diferencia del matching rígido con traslaciones y rotaciones, no existe una representación compacta para optimizar el caso no rígido



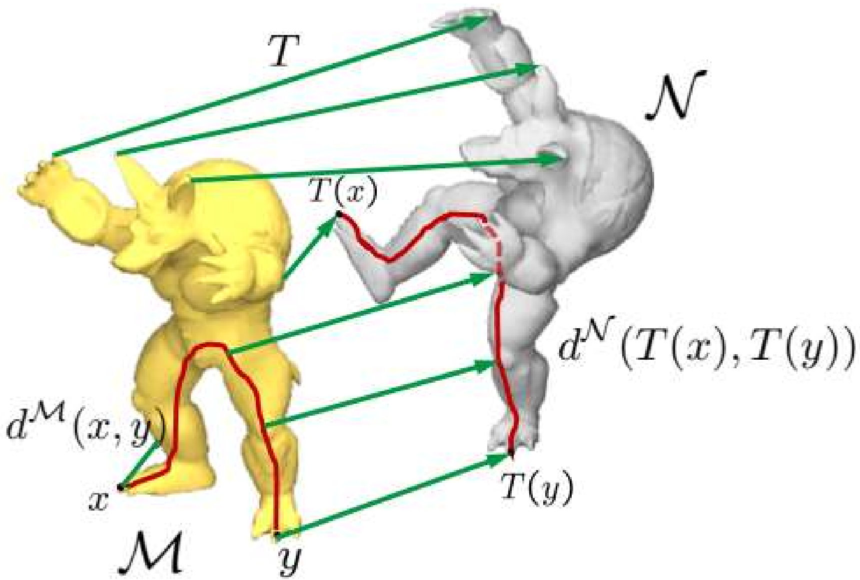
# Non-rigid Shape Matching

- Preguntas:
  - Qué significa que una correspondencia sea buena?
  - Cómo computar correspondencias eficientemente?



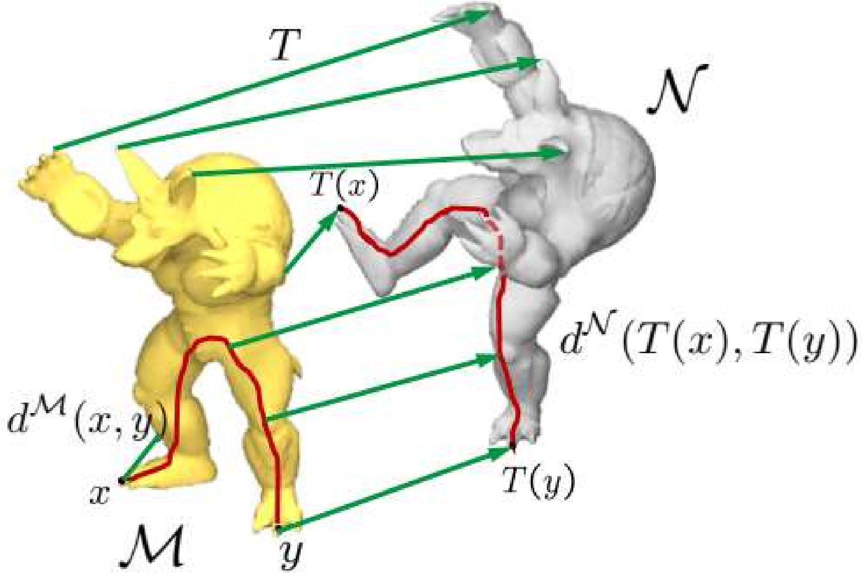
# Isometric Shape Matching

- Modelo de deformación:
  - Buenos maps deben preservar distancias geodésicas



# Isometric Shape Matching

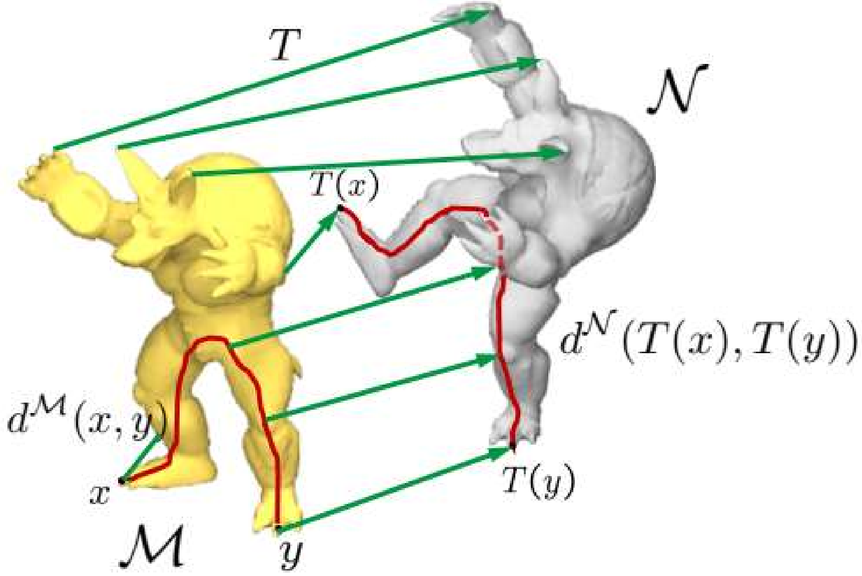
- Enfoque:
  - Encontrar el mapping que minimice la distorsión de distancias




$$T_{\text{opt}} = \arg\min_{T} \sum_{x,y} \| d^{\mathcal{M}}(x, y) - d^{\mathcal{N}}(T(x), T(y)) \|$$

# Isometric Shape Matching

- Enfoque:
  - Encontrar el mapping que minimice la distorsión de distancias

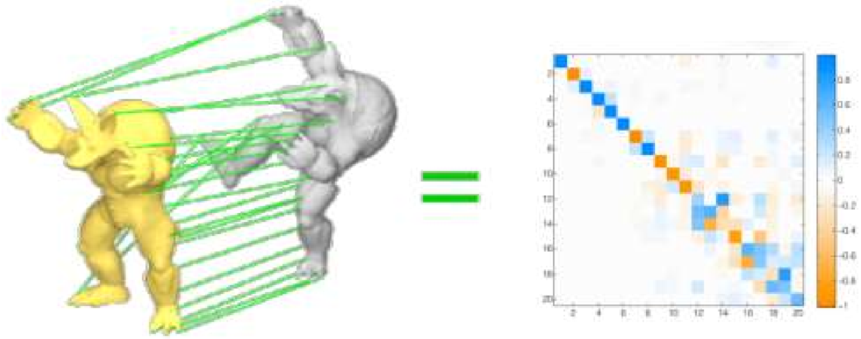



$$T_{\text{opt}} = \arg\min_{T} \sum_{x,y} \|d^{\mathcal{M}}(x,y) - d^{\mathcal{N}}(T(x),T(y))\|$$

El espacio de posibles soluciones es altamente no lineal y no convexo.

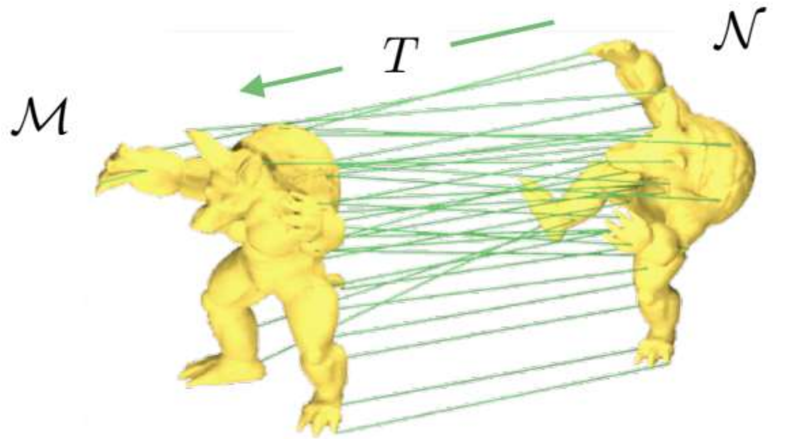
# Representación de Mapa Funcional

- Representación compacta para mapas
- Inherentemente global y multi-escala
- Manejar incertidumbre y ambigüedad
- Permite manipulaciones eficientes
- Problemas de optimización simples (lineales)



# Enfoque funcional de Mappings

- Dadas dos formas  y un map punto a punto $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$

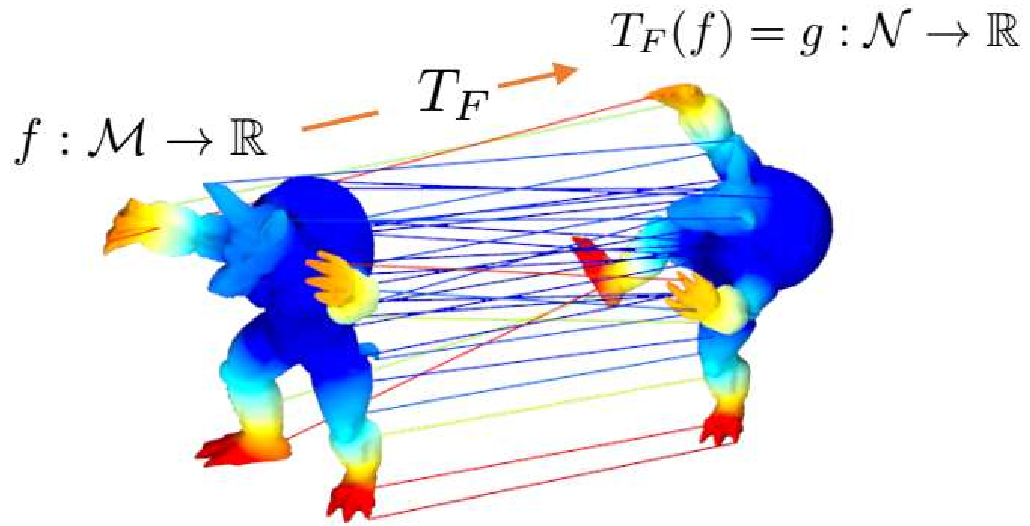



- El mapa induce una correspondencia funcional

$$T_F(f) = g, \text{ where } g = f \circ T$$

# Enfoque funcional de Mappings

- Dadas dos formas  y un map punto a punto $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$

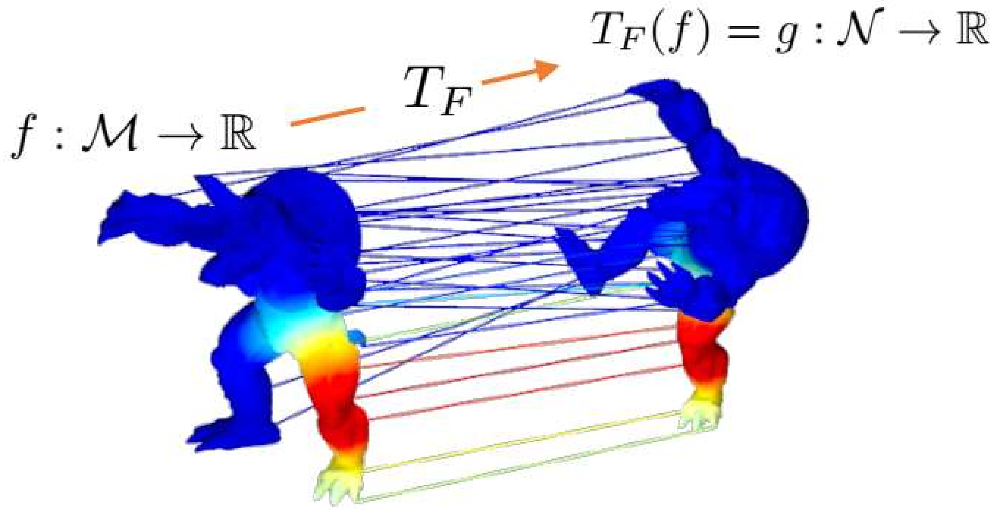



- El mapa induce una correspondencia funcional

$$T_F(f) = g, \text{ where } g = f \circ T$$

# Enfoque funcional de Mappings

- Dadas dos formas y un map punto a punto $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$

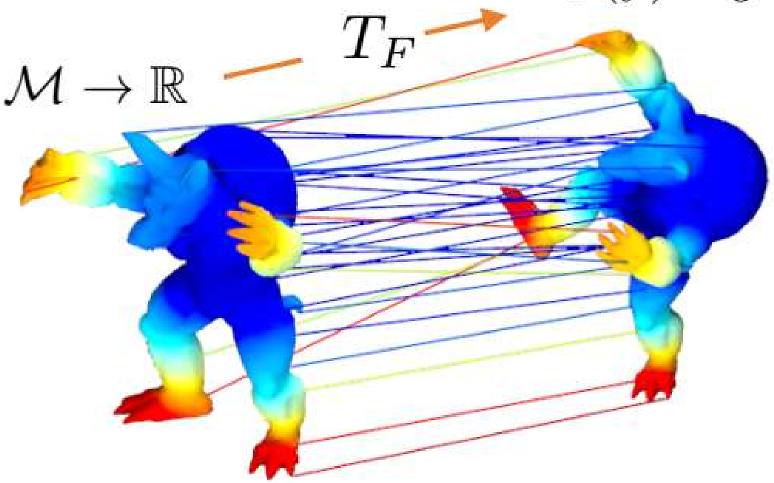



- El mapa induce una correspondencia funcional

$$T_F(f) = g, \text{ where } g = f \circ T$$

# Enfoque funcional de Mappings

- Dadas dos formas y un map punto a punto $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$

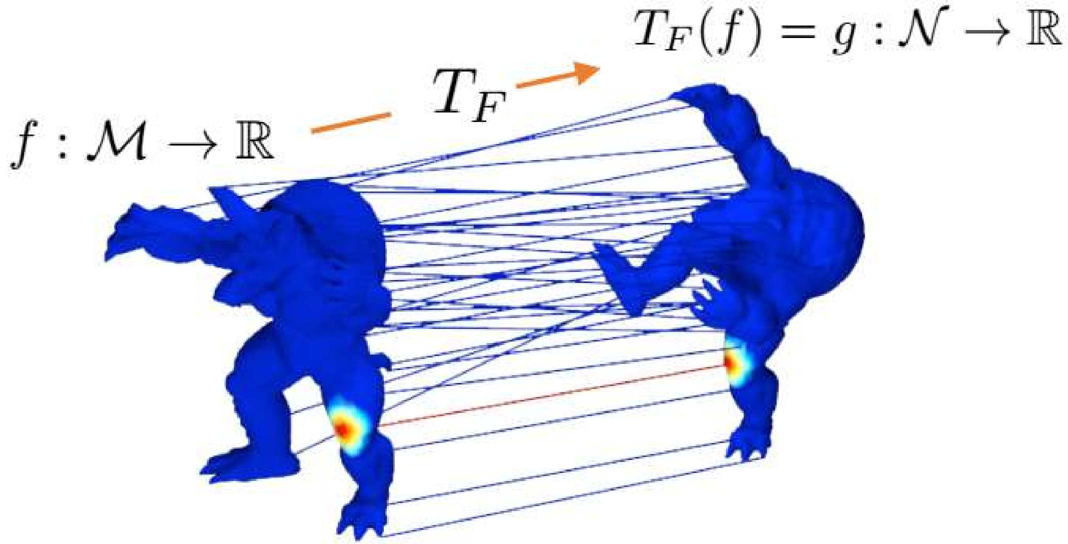



- La correspondencia funcional inducida es lineal

$$T_F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T_F(f_1) + \alpha_2 T_F(f_2)$$

# Representación de mapas funcionales

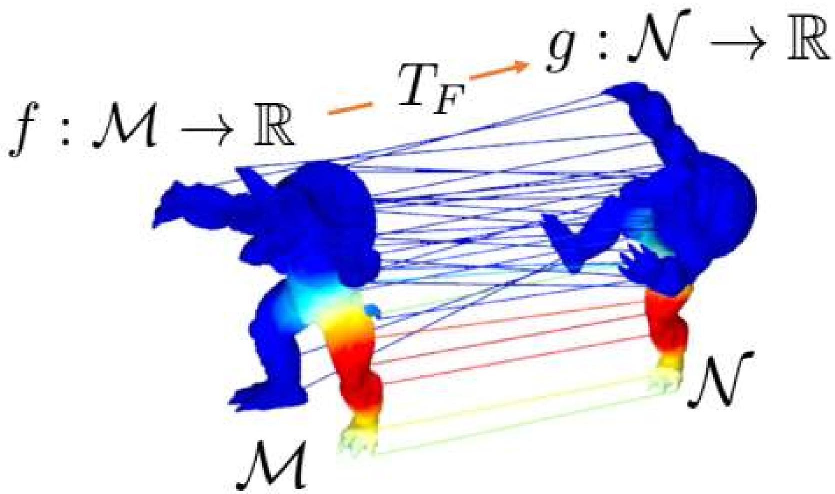
- Dadas dos formas y un mapa punto a punto $T : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$




- El mapa funcional inducido es completo

# Observación

- Asumir que ambas funciones $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}), g \in \mathcal{L}_2(\mathcal{N})$




- Expresar ambas en términos de funciones bases

$$f = \sum_i a_i \phi_i^{\mathcal{M}} \qquad g = T_F(f) = \sum_j b_j \phi_j^{\mathcal{N}}$$

Como $T_F$ es lineal, existe una transformación lineal entre $\{a_i\}$ y $\{b_j\}$

# Representación de mapas funcionales

- Bases
  - Vectores propios del operador Laplace-Beltrami

$$\Delta\phi_i = \lambda_i\phi_i \qquad \Delta(f) = -\mathrm{div}\nabla(f)$$

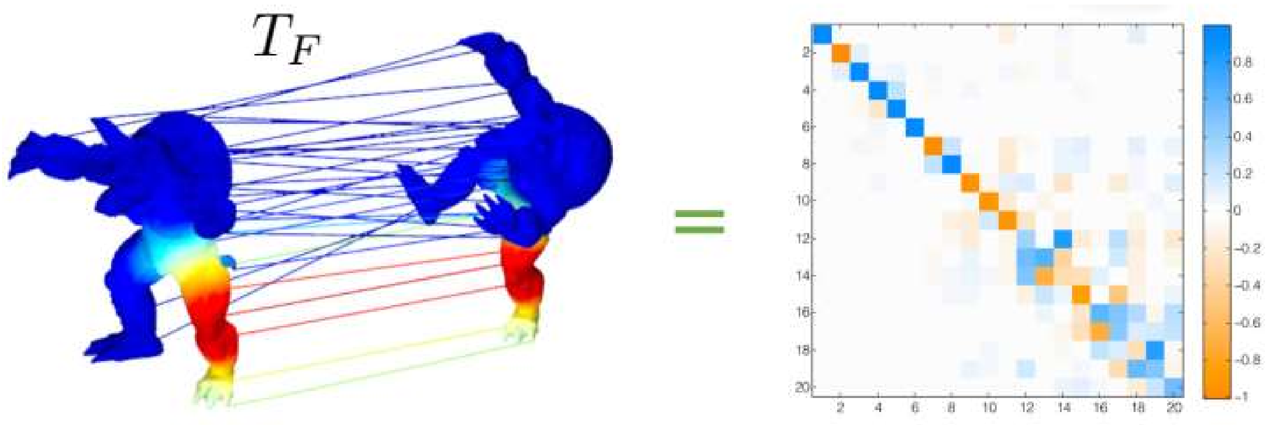
  - Generalización de bases Fourier para superficies
  - Ordenados por valores propios y proveen una noción natural de escala

$\lambda_0 = 0$ $\quad \lambda_1 = 2.6$ $\quad \lambda_2 = 3.4$ $\quad \lambda_3 = 5.1$ $\quad \lambda_4 = 7.6$

# Representación de Mapas Funcionales

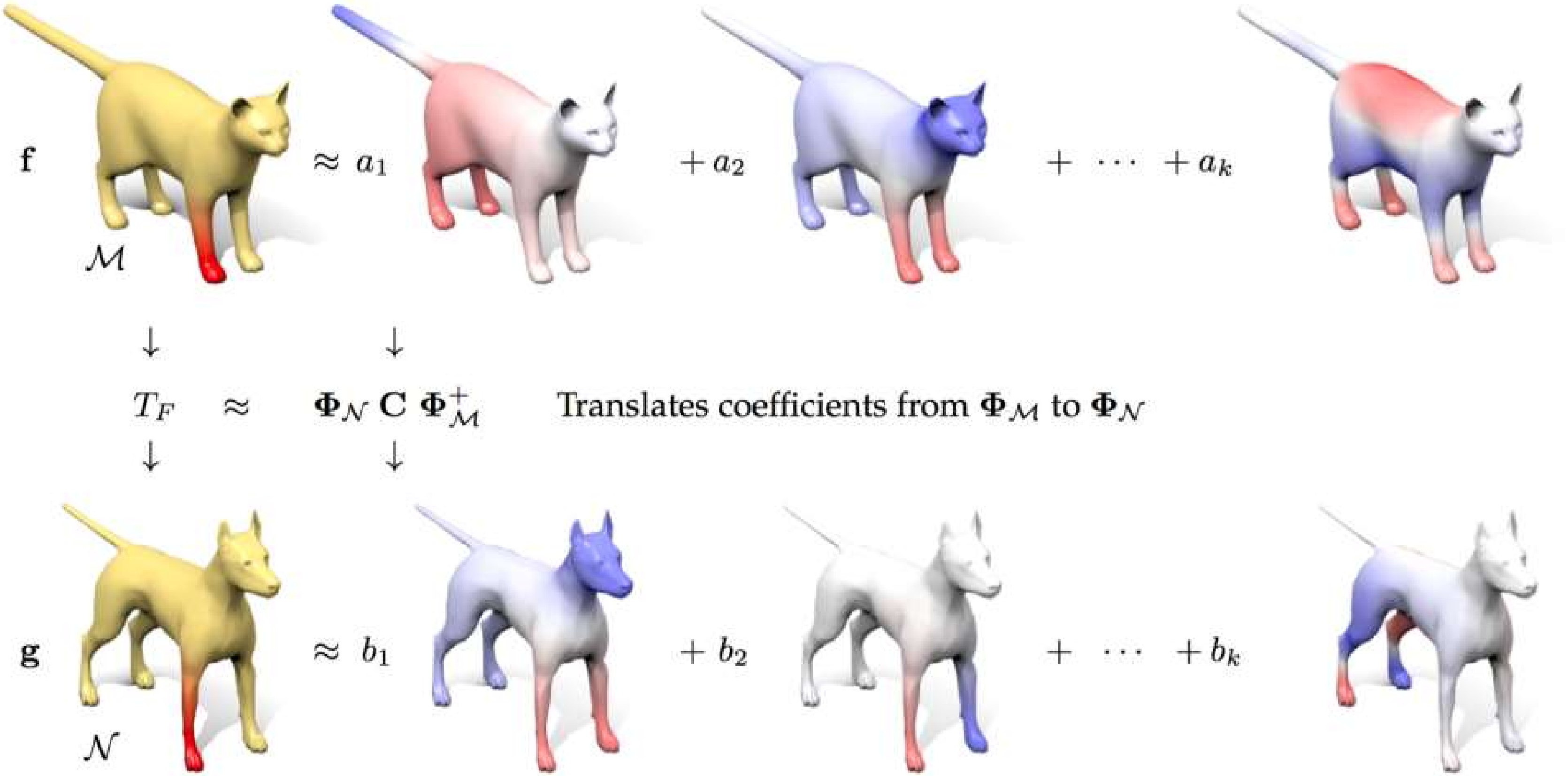
- Desde que el mapping funcional es lineal

$$T_F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T_F(f_1) + \alpha_2 T_F(f_2)$$

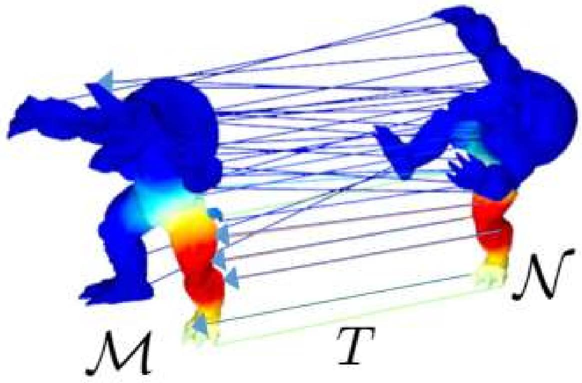



- $T_F$ puede ser representada como una matriz $C$, dadas las bases del espacio de funciones

# Definición de Mapa Funcional



# Ejemplo




- Dadas dos formas con $m$ y $n$ puntos y un map $T : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$

$$\mathbf{T} : n_{\mathcal{N}} \times n_{\mathcal{M}}$$

Matriz que codifica el map $T$, un 1 por columna

- Si las funciones son representadas como vectores, el mapa funcional es dado por el producto matriz-vector

$$g = \mathbf{T}^T f \qquad C = \mathbf{T}^T$$

# Shape Matching

- En la práctica, no conocemos la matriz $C$. Dados dos objetos nuestro objetivo es encontrar las correspondencias

- Como podemos obtener las correspondencias desde la representación funcional?