MPP05 Integralne jednadzbe

Ivan Slapničar

19. prosinca 2018.

1 Integralne jednadžbe

Integralne jednadžbe su povezane s diferencijalnim jednadžbama.

Fredholmova jednadžba glasi

$$\int_a^b k(x,y)u(y)dy + \alpha(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Volterra-ina jednadžba glasi

$$\int_a^x k(x,y)u(y)dy + \alpha(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Zadatak je naći funkciju u koja zadovoljava jednadžbu.

Funkcija k je *jezgra*.

Ako je $k(x,y) = k(y,x)$, jezgra je *simetrična*.

Ako je $f = 0$, jednadžba je *homogena*.

Ako je $\alpha = 0$, jednadžba je *prve vrste*, a inače je *druge vrste*.

Definirajmo *integralne operatore*:

Fredholmov: $Ku(x) = \int\limits_a^b k(x,y)u(y)dy$,

Volerra-in: $Ku(x) = \int\limits_a^x k(x,y)u(y)dy$.

Operatori su linearni.

U oba slučaja integralne jednadžbe možemo zapisati kao

$$Ku + \alpha u = f$$

pa rješenje možemo tražiti i pomoću rješenje problema svojstvenih vrijednosti

$$Ku = \lambda u.$$

Skalarni produkt je

$$(u,v) = \int_a^b u(x) \cdot \overline{v(x)} dx.$$

Skalarni produkt je linearan i vrijedi:

- $(u,v) = \overline{(v,u)}$,
- $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$,
- $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- ako je $(u,v) = 0$, funkcije u i v su *ortogonalne*.

1.1 Primjer - Kontrola inventara

Početna količina robe je a. Neka je $k(t)$ postotak robe koje nije prodana u trenutku t nakon nabave.

Po kojoj stopi $u(t)$ treba naručivati robu ako želimo imati konstantnu zalihu?

Promotrimo vremenski interval $[\tau, \tau + \Delta\tau]$. Smatramo da su vrijednosti konstantne unutar kratkog intervala. Ukupna količina nabavljene robe u tom intervalu je $u(\tau)\Delta\tau$.

Količina robe koja nije prodana u trenutku $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ je

$$k(t-\tau)u(\tau)\Delta\tau.$$

Dakle, ukupna količina robe koja nije prodana u trenutku t je zbroj dijela početne količine robe koji nije prodan u tenutku t i neprodanog dijela robe koja je naručena do trenutka t:

$$ak(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Uvjet da je inventar konstantan daje Volterra-inu jednadžbu

$$ak(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = a.$$

Laplaceova transformacija i teorem o konvoluciji daju

$$a\mathcal{L}(k) + \mathcal{L}(k) \cdot \mathcal{L}(u) = \frac{a}{s}$$

pa je

$$\mathcal{L}(u) = \left(\frac{a}{s} - a\mathcal{L}(k)\right)\frac{1}{\mathcal{L}(k)} = a\left(\frac{1}{s\mathcal{L}(k)} - 1\right).$$

Konačno,

$$u(t) = a\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\mathcal{L}(k)}\right) - a\delta(t).$$

(Koristili smo $\mathcal{L}^{-1}(1) = \delta(t)$.)

1.2 Primjer - Konvolucija

Riješimo jednadžbu

$$u(x) = x - \int_0^x (x-y)u(y)dy.$$

Laplaceova transformacija jednadžbe i teorem o konvoluciji daju

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x)\cdot\mathcal{L}(u) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}(u)$$

odnosno

$$\mathcal{L}(u)\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Dakle,

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s^2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2}$$

pa je

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) = \sin x.$$

In [1]:
```
using SymPy
```

In [2]:
```
x,y=symbols("x,y", real=true)
```

Out[2]:
```
(x, y)
```

In [3]:
```
# Provjera
integrate((x-y)*sin(y),y,0,x)
```

Out[3]:

$$x - \sin(x)$$

1.3 Primjer - Prebacivanje DJ u IJ

Promotrimo problem početnih vrijednosti

$$u' = f(x,u), \quad u(x_0) = u_0.$$

Ako je u rješenje, onda (uz zamjenu varijabli) vrijedi

$$u'(y) = f(y,u(y)), \quad \forall y.$$

Integriranje od x_0 do x daje

$$\int_{x_0}^{x} u'(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(y,u(y))dy.$$

Dakle, $u(x)$ je rješenje Volterra-ine jednadžbe

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(y,u(y))dy.$$

1.4 Primjer - Prebacivanje IJ u DJ

Neka je zadana integralna jednadžba

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y,u(y))dy.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ daje početni uvijet $u(x_0) = u_0$.
Leibnitzova fomula glasi: ako je

$$I(\alpha) = \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx.$$

onda je

$$I'(\alpha) = \int_{\phi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)dx + f(\psi(\alpha),\alpha)\frac{d\psi}{d\alpha} - f(\phi(\alpha),\alpha)\frac{d\phi}{d\alpha}.$$

Primjena Leibnitzove formule daje

$$u'(x) = 0 + \int_{x_0}^{x} f_x(y,u(y))dy + f(x,u(x)) \cdot x' - f(x_0,u(x_0)) \cdot x_0' = f(x,u(x)).$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo činjenice:

$$f_x(y, u(y)) = 0, \quad x' = 1, \quad x_0' = 0.$$

1.5 Primjer - Prebacivanje DJ u IJ (II)

Promotrimo problem početnih vrijednosti

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x > a, \quad u(a) = u_0,\, u'(a) = u_1.$$

Potreban nam je sljedeći rezultat:

Lema. Neka je f neprekidna funkcija za $x \geq a$. Onda je

$$\int_a^x \int_a^s f(y)\,dy\,ds = \int_a^x f(y)(x-y)dy.$$

Dokaz: Označimo $F(s) = \int_a^s f(y)\,dy$. Parcijalna integracija daje:

$$\begin{aligned}\int_a^x \int_a^s f(y)\,dy\,ds &= \int_a^x F(s)\,ds \quad (u = F(s),\, dv = ds)\\ &= sF(s)\Big|_a^x - \int_a^x sF'(s)\,ds\\ &= xF(x) - aF(a) - \int_a^x sF'(s)\,ds.\end{aligned}$$

Očito je $F(a) = 0$, a Leibnitzova formula daje

$$F'(s) = \int_a^s f_s(y)\,dy + f(s)\frac{ds}{ds} - f(a)\frac{da}{ds} = f(s).$$

Dakle,

$$\int_a^x \int_a^s f(y)\,dy\,ds = xF(x) - \int_a^x sf(s)\,ds = x\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x yf(y)\,dy.$$

Q.E.D.

Vratimo se zadanom problemu početnih vrijednosti. Vrijedi

$$u'' = -p(x)u' - q(x)u + f(x)$$

pa je

$$\int_a^x u''(y)\,dy = -\int_a^x p(y)u'(y)\,dy - \int_a^x (q(y)u(y) - f(y))\,dy.$$

Integriranje lijeve strane i uvrštavanje početnih uvjeta te parcijalna integracija prvog integrala na desnoj strani daje

$$u'(x) - u_1 = -p(x)u(x) + p(a)u_0 - \int_a^x [(q(y) - p'(y))u(y) - f(y)]\, dy$$

Ponovna integracija daje

$$u(x) - u_0 = -\int_a^x p(y)u(y)\, dy - \int_a^x \int_a^s [(q(y) - p'(y))u(y) - f(y)]\, dy\, ds + (p(a)u_0 + u_1)(x - a).$$

Iz lemme konačno slijedi

$$u(x) = -\int_a^x \{p(y) + (x-y)[q(y) - p'(y)]\}u(y)\, dy - \int_a^x (x-y)f(y)\, dy + (p(a)u_0 + u_1)(x-a) + u_0,$$

što je Volterra-ina jednadžba oblika

$$u(x) = \int_a^x k(x,y)u(y)\, dy + F(x).$$

(Vidi J. Logan, Applied Mathematics, str. 233.)

1.6 Fredholmova jednadžba

Promotrimo jednostavniju jednadžbu ($\alpha(x) = \lambda$)

$$Ku + \lambda u = f$$

i to za *separabilnu jezgru*,

$$k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y).$$

Teorem. Za separabilnu jezgru k vrijedi:

- za $\lambda = 0$ vrijedi:
  - ako f nije linearna kombinacija od α_i, jednadžba nema rješenja,
  - ako je f linearna kombinacija od α_i, jednadžba ima beskonačno rješenja,
- za $\lambda \neq 0$ izračunajmo matricu skalarnih produkata $A_{ij} = (\beta_i, \alpha_j)$ i njene svojstvene vrijednosti. Vrijedi:
  - ako je λ svojstvena vrijednost od A, jednadžba ili nema rješenje ili ima beskonačno rješenja,
  - ako λ nije svojstvena vrijednost od A, jednadžba ima jedinstveno rješenje.

1.6.1 Primjer

Analizirajmo zadnji slučaj teorema.
Uvrštavanje jezgre u jednadžbu daje

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\beta_j(y)u(y)dy + \lambda u(x) = f(x)$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \int_a^b \beta_j(y)u(y)dy + \lambda u(x) = f(x).$$

Uz oznake $c_j = (\beta_j, u)$ i $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ imamo

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)c_j + \lambda u(x) = f(x).$$

Pomnožimo ovu jednadžbu s $\beta_i(x)$ i integrirajmo od a do b:

$$\sum_{j=1}^n (\beta_i, \alpha_j)c_j + \lambda c_i = (\beta_i, f), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uz oznaku $F = \begin{bmatrix} (\beta_1, f) \\ \vdots \\ (\beta_n, f) \end{bmatrix}$, dobili smo sustav linearnih jednadžbi

$$(A - \lambda I)c = F.$$

Rješenje problema je

$$u(x) = \frac{1}{\lambda}\Big(- f(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)c_j \Big).$$

1.6.2 Primjer

Riješimo jednadžbu

$$\int_0^1 (1 - 3xy)u(y)dy - 2u(x) = e^x.$$

Pripadni operator je

$$Ku(x) = \int_0^1 (1-3xy)u(y)dy.$$

Jezgra je separabilna:

$$k(x,y) = 1 - 3xy = \alpha_1(x)\beta_1(y) + \alpha_2(x)\beta_2(y),$$

gdje je

$$\alpha_1(x) = 1,\ \beta_1(y) = 1,\ \alpha_2(x) = -3x,\ \beta_2(y) = y.$$

Matrica A je

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^1 1\cdot 1\,dx & \int_0^1 1\cdot(-3x)\,dx \\ \int_0^1 x\cdot 1\,dx & \int_0^1 (-3x)\cdot x\,dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su rješenja jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

In [4]:
```
A=[1//1 -3//2; 1//2 -1]
```

Out[4]:
```
2×2 Array{Rational{Int64},2}:
 1//1  -3//2
 1//2  -1//1
```

In [5]:
```
using LinearAlgebra
eye(n)=Matrix{Rational}(I,n,n)
```

Out[5]:
```
eye (generic function with 1 method)
```

In [6]:
```
det(A-x*eye(2))
```

Out[6]:

$$(-x+1)\left(-x-1+\frac{3}{4\,(-x+1)}\right)$$

In [7]:
```
simplify(det(A-x*eye(2)))
```

Out[7]:

$$x^2 - \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Rješavanje jednadžbi

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

daje svojstvene vektore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa su svojstvene funkcije operatora K

$$u_1(x) = [v_1]_1 \alpha_1(x) + [v_1]_2 \alpha_2(x) = 3(1-x), u_2(x) = [v_2]_1 \alpha_1(x) + [v_2]_2 \alpha_2(x) = 1 - 3x.$$

Vrijedi $(u_1, u_2) = 0$, odnosno $u_1 \perp u_2$.

```
In [8]: eigen(A)
```

```
Out[8]: Eigen{Float64,Float64,Array{Float64,2},Array{Float64,1}}
        eigenvalues:
        2-element Array{Float64,1}:
          0.5
         -0.5
        eigenvectors:
        2×2 Array{Float64,2}:
         0.948683  0.707107
         0.316228  0.707107
```

```
In [9]: integrate((1-x)*(1-3*x),x,0,1)
```

```
Out[9]:
```

$$0$$

```
In [10]: using Base.MathConstants
```

```
In [11]: e
```

```
Out[11]: e = 2.7182818284590...
```

U zadatku je $\lambda = -2$ različita od svojstvenih vrijednosti matrice A pa je rješenje jedinstveno.

```
In [12]: F=[integrate(e^x,x,0,1); integrate(e^x*x,x,0,1)]
```

Out[12]:

$$\begin{bmatrix} -1+e \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
In [13]: c=(A-2*I)\F
```

Out[13]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{4e}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{2e}{15}-\frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

```
In [14]: # Rješenje
         u(x)=1/2*(-exp(x)+1*c[1]+(-3*x)*c[2])
```

```
Out[14]: u (generic function with 1 method)
```

```
In [15]: u(y)
```

Out[15]:

$$-1.5y\left(-\frac{2e}{15}-\frac{2}{15}\right)-0.5e^{y}-0.4e+0.6$$

```
In [16]: # Provjera - mora biti exp(x)
         ex=integrate((1-3*x*y)*u(y),y,0,1)-2*u(x)
```

Out[16]:

$$3.0x\left(-\frac{2e}{15}-\frac{2}{15}\right)+0.4x+0.4ex+1.0e^{x}$$

```
In [17]: # !!!!!!!!!!!!!
         simplify(ex)
```

Out[17]:

$$-1.11022302462516\cdot 10^{-16}x+1.0e^{x}$$