MPP01 Varijacijski racun

Ivan Slapničar

11. listopada 2018.

1 Varijacijski račun

Neka je $y \in C^1[a,b]$ (y je neprekidno derivabilna na intervalu $[a,b]$) i neka je $F(x,y,z)$ dva puta drivabilna funkcija svojih argumenata.

Funkciji y pridružuje se broj definiran određenim integralom

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx.$$

I je funkcija na skupu funkcija (**funkcional**), odnosno,

$$I : C^1[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Tražimo funkciju y za koju funkcional postiže najveću ili najmanju vrijednost.

Nužan uvjet ekstrema

Ako za funkciju y funkcional postiže najveću ili najmanju vrijednost, onda y zadovoljava **Euler-Lagrange-ovu** jednadžbu

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0.$$

Pri tome y zadovoljava zadane **rubne uvjete** $y(a) = A$ i $y(b)$. Ukoliko rubni uvjet nije zadan, tada u toj točki y zadovoljava **uvjet transverzalnosti**, na primjer,

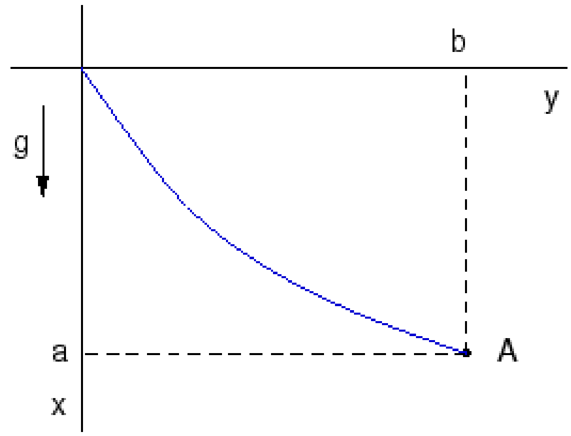
$$F'_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0.$$

.

Dovoljan uvjet ekstrema

Legendre-ovi uvjeti su:

- ako je $F''_{y'y'} \geq 0$, onda y daje minimum funkcionala I, a
- ako je $F''_{y'y'} \leq 0$, onda y daje maksimum funkcionala I.



brahistohrona

1.1 Primjer

Nađimo ekstrem funkcionala

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Euler-Lagrange-ova jednadžba glasi

$$2 - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

odnosno $y'' = 1$. Dakle, rješenje je polinom drugog reda, $y = \dfrac{x^2}{2} + ax + b$.

Odredimo konstante integracije a i b tako da y zadovoljava rubne uvjete: $y(0) = b = 0$ i $y(1) = \frac{1}{2} + a2 = 0$ pa je $a = -\frac{1}{2}$, odnosno

$$y = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Vrijedi $F''_{y'y'} = 2 > 0$ pa y daje minimum zadanog funkcionala.

1.1.1 Primjer - problem najkraćeg vremena (brahistohrona}

Odredite krivulju po kojoj će materijalna točka ispuštena iz ishodišta kližući se bez trenja najbrže stići u točku $A = (a, b)$. Takva krivulja zove se *brahistohrona*.

Neka su $(x(t), y(t))$ koordinate materijalne točke u trenutku t. Neka je s prijeđeni put, v brzina i m masa materijalne točke. Konstantnu gravitacije označit ćemo s g.

Prema zakonu o očuvanju energije vrijedi

$$\frac{1}{2}\,m\,v - m\,g\,x = 0,$$

odnosno,

$$v = \sqrt{2\,g\,x}.$$

S druge strane je $v = ds/\,dt$ pa nakon uvrštavanja i sređivanja imamo

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\,g\,x}}.$$

Element duljine luka jednak je $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ pa je

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2\,g\,x}}\,dx.$$

Integral daje ukupno vrijeme spuštanja:

$$t = t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\,g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx.$$

Dakle, brahistrona je krivulja koja minimizira funkcional t.

Rješenje je *cikloida*

$$x(t) = r\,(1-\cos t), \quad y = r\,(t-\sin t),$$

koja prolazi točkom $A=(a,b)$. Parametar r trebamo odrediti numerički.

Na primjer, za $A=(1,2)$ je

$$1 = r\,(1-\cos t), \quad 2 = r\,(t-\sin t)$$

pa izjednačavanje parametra r daje jednadžbu

$$2\cos t - \sin t + t - 2 = 0.$$

In [1]:
```
# Pkg.add("Roots")
using Roots
```

In [2]:
```
# Kordinate točke A
a=1
b=2
# Funkcija
f(x)=b*cos(x)-a*sin(x)+a*x-b
```

Out[2]:
```
f (generic function with 1 method)
```

In [3]:
```
τ=fzero(f,1,5)
```

Out[3]: 3.5083687685244755

In [4]:
```
r=a/(1-cos(τ))
```

Out[4]: 0.5171999216865494

In [5]:
```
# Nacrtajmo
using Gadfly
```

In [6]:
```
# Raster točaka za crtanje
t=linspace(0,τ,200)
```

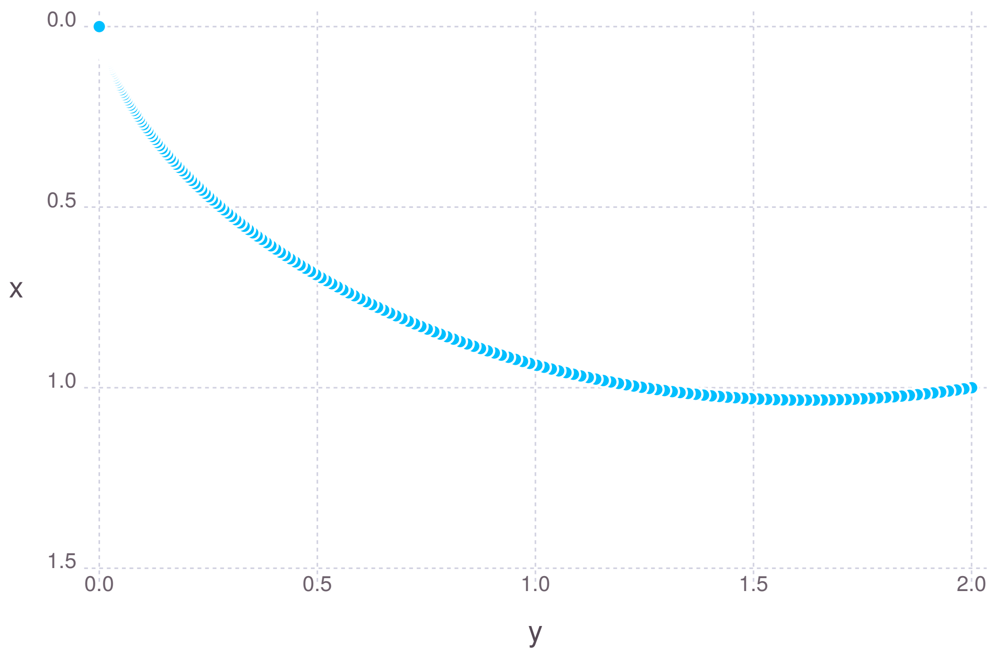
Out[6]: 0.0:0.017629993811680787:3.5083687685244755

In [7]:
```
x=r*(1-cos.(t))
y=r*(t-sin.(t))
```

Out[7]:
```
200-element Array{Float64,1}:
 0.0
 4.72342e-7
 3.77856e-6
 1.27517e-5
 3.02229e-5
 5.90208e-5
 0.00010197
 0.000161893
 0.000241603
 0.00034391
 0.000471616
 0.000627516
 0.000814396
 ⋮
 1.80318
 1.82127
 1.83932
 1.85734
 1.87533
 1.89328
 1.91118
 1.92905
 1.94686
 1.96463
 1.98234
 2.0
```

In [8]:
```
# Crtanje
plot(x=y,y=x, Coord.cartesian(yflip=true), Guide.xlabel("y"), Guide.ylabel("x"))
```

Out[8]:



Zadatak: Izračunajte i nacrtajte rješenje za nekoliko različitih točaka $A = (a, b)$.