

MPP03e Valna jednadžba

Ivan Slapničar

15. studenog 2018.

1 Valna jednadžba

Valna jednadžba, čije ćemo detalje objasniti kasnije, može se svesti na problem rubnih vrijednosti kao u sljedećem primjeru:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi \\u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi.\end{aligned}$$

Prema klasifikaciji, PDJ je hiperbolička, i može se riješiti separacijom varijabli i svođenjem na SLP. Funkcija $u(x, t)$ daje položaj (visinu) vala na mjestu x u trenutku t (na primjer, titranje žice čiji su krajevi u ovom slučaju fiksni).

Primijetimo da uz rubne uvjete, kao početne uvjete zadajemo položaj (visinu) i brzinu vala u trenutku $t = 0$.

Pretpostavimo da je

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Jednadžba glasi

$$X'' \cdot T = X \cdot T'',$$

odnosno

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda.$$

Iz rubnih uvjeta vidimo da možemo definirati regularni SLP po varijabli x :

$$\begin{aligned}X'' &= -\lambda X, & 0 < x < \pi \\X(0) &= 0, \quad X(\pi) = 0.\end{aligned}$$

Kao i do sada, analizirajmo posebno tri slučaja:

Slučaj 1. Za $\lambda = 0$ je $X = ax + b$, $X(0) = b = 0$, $X(\pi) = a\pi = 0$, pa je $a = b = 0$. Dakle, $\lambda_0 = 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj 2. Za $\lambda < 0$ je

$$X = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

pa prvi rubni uvjet povlači

$$X(0) = a + b = 0,$$

odnosno $a = -b$. Drugi uvjet sada glasi

$$X(\pi) = a(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi})$$

pa je $a = b = 0$. Funkcija $X = 0$ ne može biti svojstvena funkcija pa $\lambda < 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj 3. Za $\lambda > 0$ je

$$X = a \sin(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Prvi rubni uvjet povlači

$$X(0) = b = 0.$$

Drugi uvjet glasi

$$X(\pi) = a \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

pa je $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$. Dakle, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ su svojstvene vrijednosti, a $X_n(x) = \sin(nx)$ su pripadne svojstvene funkcije.

Druga jednadžba sada glasi $T'' = -n^2T$ pa je

$$T_n = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Prema principu superpozicije vrijedi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \sin(nx). \end{aligned}$$

Prvi početni uvjet daje

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = f(x)$$

pa su a_n koeficijenti razvoja funkcije $f(x)$ u Fourierov red:

$$a_n = \frac{(f, \sin(nx))}{(\sin(nx), \sin(nx))} = \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx}{\int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx}.$$

Drugi početni uvjet daje

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin(nx) = g(x)$$

pa su nb_n koeficijenti razvoja funkcije $g(x)$ u Fourierov red, odnosno

$$b_n = \frac{1}{n} \frac{(g, \sin(nx))}{(\sin(nx), \sin(nx))} = \frac{1}{n} \frac{\int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx}{\int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx}.$$

Nacrtajmo rješenje problema za $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = x$.

Za simboličko računanje koristimo paket `SymPy.jl`, a za crtanje paket `PyPlot.jl`.

```
In [1]: using PyPlot
        using SymPy
```

```
In [2]: n=symbols("n",integer=true,positive=true)
```

```
Out[2]:
```

n

```
In [3]: f(x)=sin.(x)
        g(x)=x
```

```
Out[3]: g (generic function with 1 method)
```

```
In [4]: a=integrate(x->f(x)*sin(n*x),0,pi)/integrate(x->sin(n*x)^2,0,pi)
```

```
Out[4]:
```

$$\frac{2 \left(\begin{cases} 0 & \text{for } n \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \right)}{\pi}$$

```
In [5]: b=integrate(x->g(x)*sin(n*x),0,pi)/integrate(x->sin(n*x)^2,0,pi)/n
```

```
Out [5]:
```

$$-\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

```
In [6]: # Izračunajmo numeričke vrijednosti koeficijenata
l=10
Na=[N(a(n)) for n=1:l]
Nb=[N(b(n)) for n=1:l]
```

```
Out [6]: 10-element Array{Real,1}:
```

```
 2
-1//2
 2//9
-1//8
 2//25
-1//18
 2//49
-1//32
 2//81
-1//50
```

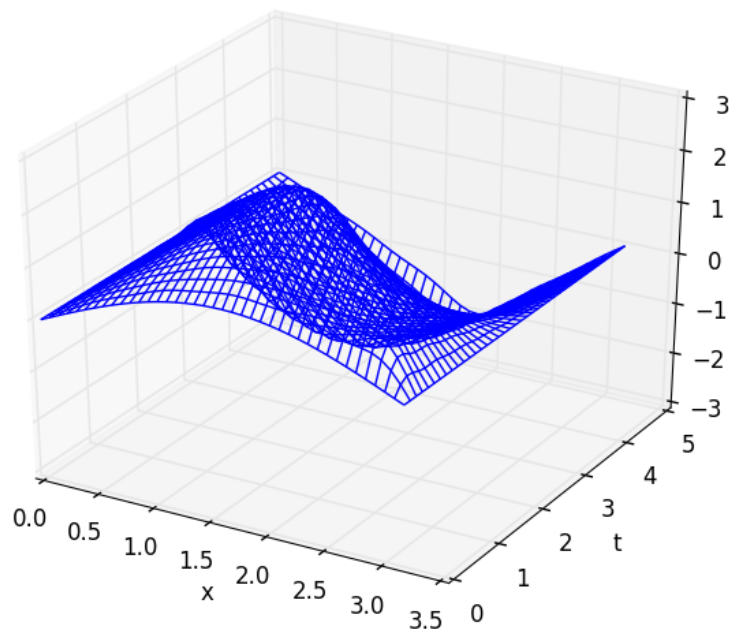
```
In [7]: # Pripremimo mrežu za crtanje
m=40
X=range(0,stop=pi,length=m)
T=range(0,stop=5,length=m)
XT=collect(Iterators.product(X,T))
```

```
Out [7]: 40×40 Array{Tuple{Float64,Float64},2}:
```

```
(0.0, 0.0)      (0.0, 0.128205)      ... (0.0, 5.0)
(0.0805537, 0.0) (0.0805537, 0.128205)      (0.0805537, 5.0)
(0.161107, 0.0) (0.161107, 0.128205)      (0.161107, 5.0)
(0.241661, 0.0) (0.241661, 0.128205)      (0.241661, 5.0)
(0.322215, 0.0) (0.322215, 0.128205)      (0.322215, 5.0)
(0.402768, 0.0) (0.402768, 0.128205)      ... (0.402768, 5.0)
(0.483322, 0.0) (0.483322, 0.128205)      (0.483322, 5.0)
(0.563876, 0.0) (0.563876, 0.128205)      (0.563876, 5.0)
(0.644429, 0.0) (0.644429, 0.128205)      (0.644429, 5.0)
(0.724983, 0.0) (0.724983, 0.128205)      (0.724983, 5.0)
(0.805537, 0.0) (0.805537, 0.128205)      ... (0.805537, 5.0)
(0.88609, 0.0) (0.88609, 0.128205)      (0.88609, 5.0)
(0.966644, 0.0) (0.966644, 0.128205)      (0.966644, 5.0)
⋮
(2.2555, 0.0) (2.2555, 0.128205)      (2.2555, 5.0)
(2.33606, 0.0) (2.33606, 0.128205)      (2.33606, 5.0)
```

(2.41661, 0.0)	(2.41661, 0.128205)	... (2.41661, 5.0)
(2.49716, 0.0)	(2.49716, 0.128205)	(2.49716, 5.0)
(2.57772, 0.0)	(2.57772, 0.128205)	(2.57772, 5.0)
(2.65827, 0.0)	(2.65827, 0.128205)	(2.65827, 5.0)
(2.73882, 0.0)	(2.73882, 0.128205)	(2.73882, 5.0)
(2.81938, 0.0)	(2.81938, 0.128205)	... (2.81938, 5.0)
(2.89993, 0.0)	(2.89993, 0.128205)	(2.89993, 5.0)
(2.98049, 0.0)	(2.98049, 0.128205)	(2.98049, 5.0)
(3.06104, 0.0)	(3.06104, 0.128205)	(3.06104, 5.0)
(3.14159, 0.0)	(3.14159, 0.128205)	(3.14159, 5.0)

```
In [8]: u(xt)=sum([ (Na[k]*cos.(k*xt[2])+Nb[k].*sin.(k*xt[2])).*sin.(k*xt[1])
    for k in collect(1:1)])
mesh(X,T,Matrix(map(u,XT)'))
xlabel("x")
ylabel("t")
```



```
In [9]: # Proujera rubnog uvjeta
x=range(0,stop=pi,length=m)
y=f(x)
z=sum([Na[k]*sin.(k*x) for k=1:10])
```

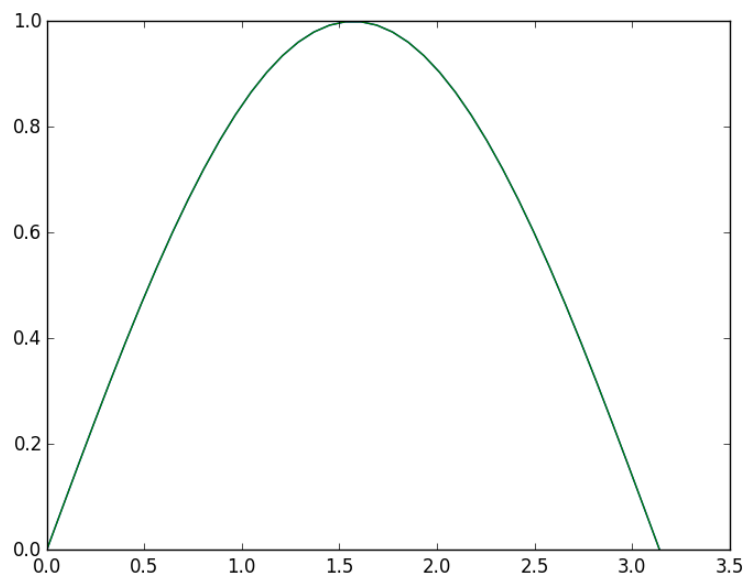
```
Out[9]: 40-element Array{Float64,1}:
 0.0
```

```

0.08046656871672588
0.16041128085776024
0.23931566428755774
0.3166679938014725
0.3919666098600751
0.4647231720437685
0.534465826127801
0.6007422642379788
0.6631226582407952
0.7212024473438146
0.7746049618276546
0.8229838658936564
⋮
0.7746049618276546
0.7212024473438146
0.6631226582407952
0.6007422642379792
0.5344658261278012
0.4647231720437687
0.39196660986007514
0.3166679938014725
0.23931566428755768
0.16041128085776052
0.08046656871672608
1.2246467991473532e-16

```

In [10]: `plot(x,y,x,z)`



Zadatak: Što se dogodi ako početni uvjet nije kompatibilan s rubnim uvjetima? Nacrtajte i objasnite rješenje za $f(x) = \cos(x)$.