

MPP02 Problem svojstvenih vrijednosti i SLP

Ivan Slapničar

18. listopada 2018.

1 Problem svojstvenih vrijednosti i SLP

1.1 Matrični problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratna realna matrica.

Tražimo **svojstvene vrijednosti** $\lambda \in \mathbb{R}$ i **svojstvene vektore** $x \in \mathbb{R}^n \neq 0$, takve da je

$$Ax = \lambda x.$$

Dakle, A djeluje na vektor x tako da ga produži ili skрати, eventualno promijeni orijentaciju, dok smjer ostaje isti.

Vrijedi

$$Ax - \lambda Ix = (A - \lambda I)x = 0.$$

Ovo je homogeni sustav linearnih jednadžbi koji ima netrivialna rješenja ($x \neq 0$) ako i samo ako je matrica sustava $(A - \lambda I)$ singularna, odnosno ako i samo ako je

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Izraz $\det(A - \lambda I)$ je polinom stupnja n u varijabli λ s realnim koeficijentima, koji, prema osnovnom teoremu algebre, ima n nul-točaka koje su ili realne ili dolaze u konjugirano kompleksnim parovima.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni.

Dokaz: Zaista, neka je

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y, \quad x, y \neq 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Pretpostavimo da su x i y linearno zavisni, odnosno,

$$\alpha x + \beta y, \quad |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Vrijedi

$$A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda x + \beta \mu y = A \cdot 0 = 0.$$

Množenje prve jednakosti s λ daje sustav

$$\begin{aligned}\lambda \alpha x + \lambda \beta y &= 0 \\ \alpha \lambda x + \beta \mu y &= 0.\end{aligned}$$

Oduzimanje prve jednadžbu od druge daje

$$\beta(\mu - \lambda)y = 0$$

pa je, zbog $\mu - \lambda \neq 0$ i $y \neq 0$, nužno $\beta = 0$. Uvrštavanjem u originalnu linearnu kombinaciju, zbog $x \neq 0$ slijedi $\alpha = 0$ pa su x i y linearno nezavisni.

Teorem. Ako je A simetrična matrica, $A = A^T$, tada su sve svojstvene vrijednosti realne i imaju ortogonalni skup svojstvenih vektora, odnosno postoji matrica U takva da je

$$U^T U = U U^T = I A = U \Lambda U^T, \quad A U = U \Lambda, \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T.$$

```
In [1]: # Primjer
        srand(123)
        A=Symmetric(rand(-8:8,6,6))

Out[1]: 6×6 Symmetric{Int64,Array{Int64,2}}:
        -4  -6   5   6  -7  -8
        -6   7   4  -5   3  -5
         5   4   7   0  -7  -4
         6  -5   0   0  -5   8
        -7   3  -7  -5  -2   7
        -8  -5  -4   8   7  -4

In [2]: λ,U=eig(A);

In [3]: λ

Out[3]: 6-element Array{Float64,1}:
        -19.333
        -10.0208
         -3.43984
          1.66537
          16.1117
          19.0165
```

```
In [4]: U
```

```
Out[4]: 6×6 Array{Float64,2}:
 0.505624 -0.621465 0.207178 0.231883 0.186143 0.476218
 0.199786 -0.0706871 0.554191 -0.331815 -0.726553 -0.0999079
-0.0964963 -0.0889766 -0.555649 -0.494401 -0.29631 0.584631
-0.44412 -0.122698 0.49035 -0.53329 0.48422 0.168499
-0.262047 -0.758628 -0.259875 -0.088005 -0.0843794 -0.522891
 0.655139 0.101468 -0.182277 -0.547315 0.328762 -0.345881
```

```
In [5]: # Ortogonalnost matrice svojstvenih vektora
        U'*U
```

```
Out[5]: 6×6 Array{Float64,2}:
 1.0 5.55112e-17 5.55112e-17 ... -1.11022e-16 1.66533e-16
 5.55112e-17 1.0 -3.46945e-18 -1.04083e-16 -1.59595e-16
 5.55112e-17 -3.46945e-18 1.0 -1.31839e-16 -1.80411e-16
-5.55112e-17 -1.52656e-16 2.63678e-16 -1.94289e-16 3.33067e-16
-1.11022e-16 -1.04083e-16 -1.31839e-16 1.0 -1.11022e-16
 1.66533e-16 -1.59595e-16 -1.80411e-16 ... -1.11022e-16 1.0
```

```
In [6]: U*U'
```

```
Out[6]: 6×6 Array{Float64,2}:
 1.0 -4.85723e-17 1.66533e-16 ... -2.77556e-17 -1.66533e-16
-4.85723e-17 1.0 -8.32667e-17 -4.85723e-17 -5.55112e-17
 1.66533e-16 -8.32667e-17 1.0 -5.55112e-17 -5.55112e-17
-1.38778e-16 -4.09395e-16 -9.71445e-17 2.22045e-16 6.93889e-17
-2.77556e-17 -4.85723e-17 -5.55112e-17 1.0 -3.46945e-17
-1.66533e-16 -5.55112e-17 -5.55112e-17 ... -3.46945e-17 1.0
```

```
In [7]: # Provjerimo točnost rastava
        U*diagm(λ)*U'
```

```
Out[7]: 6×6 Array{Float64,2}:
-4.0 -6.0 5.0 6.0 -7.0 -8.0
-6.0 7.0 4.0 -5.0 3.0 -5.0
 5.0 4.0 7.0 -8.65974e-15 -7.0 -4.0
 6.0 -5.0 -8.65974e-15 2.05391e-14 -5.0 8.0
-7.0 3.0 -7.0 -5.0 -2.0 7.0
-8.0 -5.0 -4.0 8.0 7.0 -4.0
```

```
In [8]: sum([λ[i]*U[:,i]*U[:,i]' for i=1:size(A,1)])
```

```
Out[8]: 6×6 Array{Float64,2}:
-4.0 -6.0 5.0 6.0 -7.0 -8.0
```

$$\begin{array}{cccccc}
-6.0 & 7.0 & 4.0 & -5.0 & 3.0 & -5.0 \\
5.0 & 4.0 & 7.0 & -8.65974\text{e-}15 & -7.0 & -4.0 \\
6.0 & -5.0 & -8.65974\text{e-}15 & 2.05391\text{e-}14 & -5.0 & 8.0 \\
-7.0 & 3.0 & -7.0 & -5.0 & -2.0 & 7.0 \\
-8.0 & -5.0 & -4.0 & 8.0 & 7.0 & -4.0
\end{array}$$

1.1.1 Primjer - rješavanje algebarskih problema pomoću svojstvenih vrijednosti i vektora

Riješimo problem (prema [Logan, Applied Mathematics, str. 205](#))

$$Ax = \mu x + f.$$

Neka je A simetrična, $A = U\Lambda U^T$ i $\mu \neq \lambda_i$. Stupci matrice U su ortogonalni i tvore bazu n -dimenzionalnog prostora, odnosno svaki vektor se može prikazati kao njihova linearna kombinacija:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i u_i, \quad f = \sum_{i=1}^n f_i u_i.$$

Imamo

$$A \cdot \left(\sum c_i u_i \right) = \mu \left(\sum c_i u_i \right) + \sum f_i u_i,$$

odnosno,

$$\sum c_i \lambda_i u_i = \mu \left(\sum c_i u_i \right) + \sum f_i u_i.$$

Izjednačavanje koeficijenata daje

$$c_i \lambda_i = \mu c_i + f_i$$

pa je

$$c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \mu}.$$

Riješimo problem $Ax = \mu x + f$ za $\mu = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In [9]: $\mu=2$

A=[1 2 3 4;2 5 6 7;3 6 8 9;4 7 9 10]

f=[1;2;1;2]

```
Out [9]: 4-element Array{Int64,1}:
 1
 2
 1
 2
```

```
In [10]:  $\lambda, U = \text{eig}(A);$ 
```

Izračunajmo koeficijente vektora f u bazi U

```
In [11]: fU=[f·U[:,i] for i=1:4]
```

```
Out [11]: 4-element Array{Float64,1}:
-0.317782
 0.913253
 0.368942
-2.98812
```

Izračunajmo koeficijente c rješenja x u bazi U

```
In [12]: c=fU./( $\lambda - \mu$ )
```

```
Out [12]: 4-element Array{Float64,1}:
 0.113272
-0.503146
-0.255861
-0.135439
```

```
In [13]: # Rješenje
x=sum([c[i]*U[:,i] for i=1:4])
```

```
Out [13]: 4-element Array{Float64,1}:
-0.0740741
-0.333333
 0.481481
 0.037037
```

```
In [14]: # Provjera
A*x- $\mu$ *x-f
```

```
Out [14]: 4-element Array{Float64,1}:
-6.66134e-16
-4.44089e-16
-1.44329e-15
 0.0
```

1.2 Linearni operatori

Operator je preslikavnje $L : X \rightarrow X$ gdje je X vektorski prostor.

Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Operator je **linearan** ako je **aditivan**,

$$L(x + y) = L(x) + L(y),$$

i **homogen**,

$$L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Oba svojstva zajedno možemo pisati kao

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

1.2.1 Primjer - matrica je linearni operator na skupu vektora

Uz definiciju

$$A(x) \equiv A \cdot x,$$

vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad A(\alpha x) = \alpha A(x),$$

odnosno

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

1.3 Skalarni produkt, norma, ortogonalnost i baza

Neka su zadani vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definiramo sljedeće:

Skalarni produkt: $(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Norma: $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Ortogonalnost: $x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$

Baza: Skup od n vektora, x_1, x_2, \dots, x_n je **potpun** (baza) ako za svaki vektor y vrijedi

$$y = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i.$$

Ako su, dodatno, vektori x_i međusobno ortogonalni, onda je

$$\zeta_j = \frac{(y, x_j)}{(x_j, x_j)} \equiv \frac{(y, x_j)}{\|x_j\|^2}.$$

```
In [15]: # Primjer za vektore - ortogonalnost i norma
         U[:,1]·U[:,3], U[:,3]·U[:,3]
```

```
Out[15]: (5.551115123125783e-17, 1.0000000000000004)
```

```
In [16]: # Baza
         n=size(A,1)
         x=rand(n)
         # Računamo koeficijente po bazi stupaca od U
         ζ=Array{Float64}(n)
         for i=1:n
             ζ[i]=x·U[:,i]
         end
         # Proujera
         y=sum([ζ[i]*U[:,i] for i=1:n])
         [x y]
```

```
Out[16]: 4×2 Array{Float64,2}:
          0.900681  0.900681
          0.940299  0.940299
          0.621379  0.621379
          0.348173  0.348173
```

1.3.1 Primjer - vektorski prostor funkcija

Neka su zadane funkcije $f, g \in C[a, b]$, gdje je $C[a, b]$ skup svih funkcija neprekidnih na intervalu $[a, b]$.

Napomena. Umjesto skupa $C[a, b]$ može se uzeti i neki skup, na primjer, skup svih kvadratno integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ kojeg označavamo s $L^2[a, b]$.

Definirajmo **skalarni produkt**:

$$(f, g) = f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Oдавде slijede definicije:

$$\text{norma: } \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot f(x) dx} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

$$\text{ortogonalnost: } f \perp g \Leftrightarrow (f, g) = 0$$

baza: Skup od ∞ funkcija, f_1, f_2, \dots , je **potpun** (baza) ako za svaku funkciju g vrijedi

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(x).$$

Ukoliko su, dodatno, funkcije f_i međusobno ortogonalne, tada je

$$\xi_j = \frac{(g, f_j)}{(f_j, f_j)} \equiv \frac{(g, f_j)}{\|f_j\|^2}.$$

1.3.2 Numeričko i simboličko računanje

Julia ima više paketa pomoću kojih možemo računati određene integrale.

Najjednostavnija je funkcija `quadgk()` iz paketa [QuadGK.jl](#) (numeričko računanje).

Ovdje ćemo skalarni produkt definirati pomoću funkcije `integrate()` iz paketa `SymPy.jl` (simboličko računanje).

```
In [17]: # Učitavanje paketa
         using SymPy
```

```
In [18]: ?integrate
```

```
search: integrate deltaintegrate trigintegrate line_integrate Integral
```

Out[18]:

The integrate function has its limits specified with tuples of the type (var, a, b). This provides a simpler interface for one-dimensional integrals: `integrate(ex, var, a, b)`

Symbolically integrate a function

Symbolically integrate a function over [a,b]

integrate: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through:
<http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate>

Specific docs may also be found at [SymPy Docs for matrices](#)

integrate: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through:
<http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate>

```
In [19]: # Definirajmo skalarni produkt
         import Base
         (f,g,a,b)=integrate(f*g,(x,a,b))
```

Out[19]: dot (generic function with 12 methods)

1.3.3 Primjer - Fourierov red

Promotrimo periodične funkcije s periodom 2π na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Funkcije

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots$$

su međusobno ortogonalne, Vrijedi $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, a norma svih ostalih funkcija je $\sqrt{\pi}$. Skup je potpun, odnosno svaka periodična funkcija f se može prikazati kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i f_i(x), \quad \xi_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)},$$

u smislu teorema o konvergenciji Fourierovog reda. Ovo su standardne formule za razvoj funkcije u Fourierov red.

```
In [20]: # Definirajmo simboličku varijablu x
x=Sym("x")
```

Out [20]:

$$x$$

```
In [21]: # Proujferimo ortogonalnost funkcija
·(sin(x), sin(x), -π, π), ·(sin(2*x), cos(3*x), -π, π)
```

Out [21]: (3.14159265358979, 0)

```
In [22]: m,n = symbols("m,n", integer=True, positive=True)
```

Out [22]: (m, n)

```
In [23]: ·(sin(m*x), sin(n*x), -PI, PI)
```

Out [23]:

$$\begin{cases} \pi & \text{for } m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Primjer: Razvijmo funkciju definiranu formulom $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ u Fourier-ov red.

```
In [24]: f=x^2
```

Out [24]:

$$x^2$$

```
In [25]: f0=x/x
```

```
Out[25]:
```

1

```
In [26]: ·(f0,f0,-1,1)
```

```
Out[26]:
```

2

```
In [27]: a0=·(f,f0,-1,1)/·(f0,f0,-1,1)
```

```
Out[27]:
```

$\frac{1}{3}$

```
In [28]: # Funkcija je parna pa imamo samo članove uz kosinuse
an=·(f,cos(n*PI*x),-1,1)/·(cos(n*PI*x),cos(n*PI*x),-1,1)
```

```
Out[28]:
```

$\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

```
In [29]: # Na primjer
an(2)
```

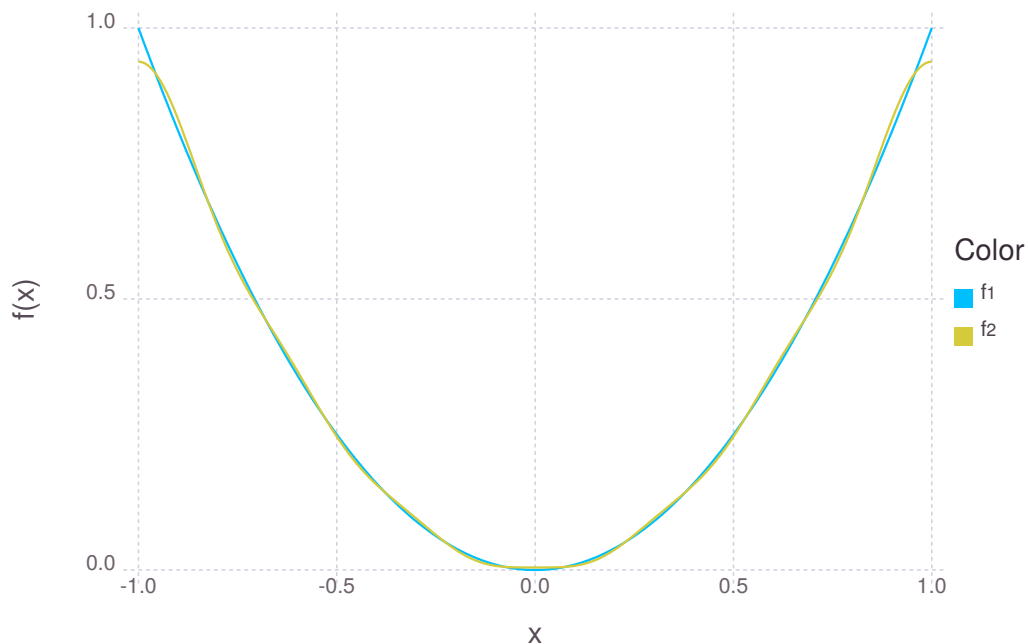
```
Out[29]:
```

$\frac{1}{\pi^2}$

```
In [30]: # Provjerimo crtanjem
using Gadfly
```

```
In [31]: plot([x->x^2,x->a0+sum([an(i)*cos(i*PI*x) for i=1:6]]),-1,1)
```

```
Out[31]:
```



1.4 Diferencijalni problem svojstvenih vrijednosti

Skup $C^2[a, b]$ je skup svih funkcija koje na intervalu $[a, b]$ imaju dvije neprekidne derivacije.

1.4.1 Primjer

Operator druge derivacije $A \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ je linearan operator.

Riješimo problem svojstvenih vrijednosti

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi = \lambda\Phi, \quad 0 < x < l, \quad \Phi(0) = \Phi(l) = 0.$$

Razlikujemo slučajeve $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ i $\lambda > 0$.

Slučaj $\lambda = 0$.

Vrijedi $\Phi(x) = ax + b$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = ax$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi $al = 0$ pa je $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa $\lambda = 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda > 0$.

Vrijedi (vidi [Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima](#))

$$\Phi(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $a + b = 0$ pa je $b = -a$.

Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0$$

pa je $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa niti jedna $\lambda > 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda < 0$.

Vrijedi

$$\Phi(x) = a \sin(\sqrt{-\lambda}x) + b \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = a \sin(\sqrt{-\lambda}x)$.

Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$$

pa je ili $a = 0$, što opet ne daje svojstvenu funkciju, ili

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a pripadne svojstvene funkcije su

$$\Phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcije $\Phi_n(x)$ su međusobno ortogonalne i čine bazu promatranog prostora.

1.5 Regularni Sturm-Liouvilleov problem (SLP)

Problem glasi:

$$\begin{aligned} A(\Phi) &\equiv -(p(x)\Phi')' + q(x)\Phi = \lambda\Phi, \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha_1\Phi(a) + \alpha_2\Phi'(a) &= 0, \\ \beta_1\Phi(b) + \beta_2\Phi'(b) &= 0, \end{aligned}$$

gdje je

$$\Phi \in C^2[a, b], \quad p \in C^1[a, b], \quad q \in C^0[a, b], \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}.$$

Operator A je linearan (provjerite!).

Teorem. Za regularni SLP vrijedi:

1. Postoji beskonačno mnogo svojstvenih vrijednosti λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, koje su sve realne i vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

2. Svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalne.
3. Skup svih svojstvenih funkcija $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ je potpun u smislu da se svaka funkcija $f \in L^2[a, b]$ može razviti u red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \Phi_n(x), \quad \xi_n = \frac{(f, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)}$$

koji konvergira u $L^2[a, b]$.

Konvergencija u $L^2[a, b]$ znači

$$\|f - \sum_{n=1}^N \xi_n \Phi_n\| \equiv \int_a^b (f - \sum_{n=1}^N \xi_n \Phi_n)^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{kada} \quad N \rightarrow \infty.$$

Na primjer, teorem vrijedi za regularni SLP iz prethodnog primjera, gdje je

$$p(x) = -1, \quad q(x) = 0, \quad a = 0, \quad b = l, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0.$$

Dokaz 2. tvrdnje (prema [Logan, Applied Mathematics, str. 209](#))

Neka su λ i μ dvije različite svojstvene vrijednosti sa svojstvenim funkcijama ϕ i ψ , redom. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} -(p\phi')' + q\phi &= \lambda\phi, \\ -(p\psi')' + q\psi &= \mu\psi. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu sa ψ i drugu sa ϕ te ih oduzmimo:

$$\phi(p\psi')' - \psi(p\phi')' = (\lambda - \mu)\phi\psi.$$

Integriranje od a do b daje

$$\int_a^b (\phi(p\psi')' - \psi(p\phi')') dx = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Parcijalna integracija daje

$$\int_a^b \phi(p\psi')' dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \phi, \quad du = \phi' dx \\ dv = (p\psi')' dx, \quad v = p\psi' \end{array} \right\} = \phi(p\psi') \Big|_a^b - \int_a^b p\psi'\phi' dx,$$

i, slično,

$$\int_a^b \psi(p\phi')' dx = \psi(p\phi') \Big|_a^b - \int_a^b p\psi'\phi' dx.$$

Dakle,

$$p(\phi\psi' - \psi\phi') \Big|_a^b = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Iz rubnih uvjeta slijedi da je lijeva strana jednaka nuli: na primjer, ako su sva dijeljenja definirana, onda je

$$\frac{\phi(a)}{\phi'(a)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\psi(a)}{\psi'(a)}$$

pa je $\phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) = 0$. Slično se analiziraju i ostali slučajevi.

Dakle,

$$0 = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Ako je $\lambda \neq \mu$, onda je $(\phi, \psi) = 0$, odnosno, $\phi \perp \psi$.

Primjere rješavanja regularnog SLP dati ćemo kasnije.