MPP07a Valovi

Ivan Slapničar

7. siječnja 2019.

1 Valovi

Neka x označava položaj, t vrijeme, a u veličinu poremećaja. Funkcija

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

je *desni val*, odnosno val koji putuje udesno brzinom c. Vrijedi

$$u_x = f' \cdot \frac{d(x-ct)}{dx} = f', \quad u_t = f' \cdot \frac{d(x-ct)}{dt} = -cf',$$

što daje *advekcijsku* (advekcije je transport tvari usmjerenim gibanjem) parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_t + cu_x = 0.$$

Dakle, ako u trenutku $t = 0$ poremećaj ima profil $u(x,0) = f(x)$ (početni uvjet), onda se u trenutku $t > 0$ poremećaj pomaknu udesno za ct jedinica duljine.

Na sličan način *lijevi val*, $u(x,t) = f(x+ct)$, rješava jednadžbu $u_t - cu_x = 0$.

Za lijevi val vrijedi

$$u_x = f', \quad u_{xx} = f'', \quad u_t = cf', \quad u_{tt} = c^2 f'',$$

a za desni val vrijedi

$$u_x = f', \quad u_{xx} = f'', \quad u_t = -cf', \quad u_{tt} = c^2 f''.$$

Dakle, i lijevi i desni val zadovoljavaju *valnu jednadžbu*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Obrnuto, zaključujemo da je rješenje valne jednadžbe proizlazi iz funkcije $f(x)$ kao superpozicija (zbroj) lijevog i desnog vala.

Primjer. Rješenje problema

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = \sin \pi x,$$

je superpozicija lijevog vala

$$u_L(x,t) = \sin \pi(x + 1 \cdot t),$$

i desnog vala

$$u_R(x,t) = \sin \pi(x - 1 \cdot t),$$

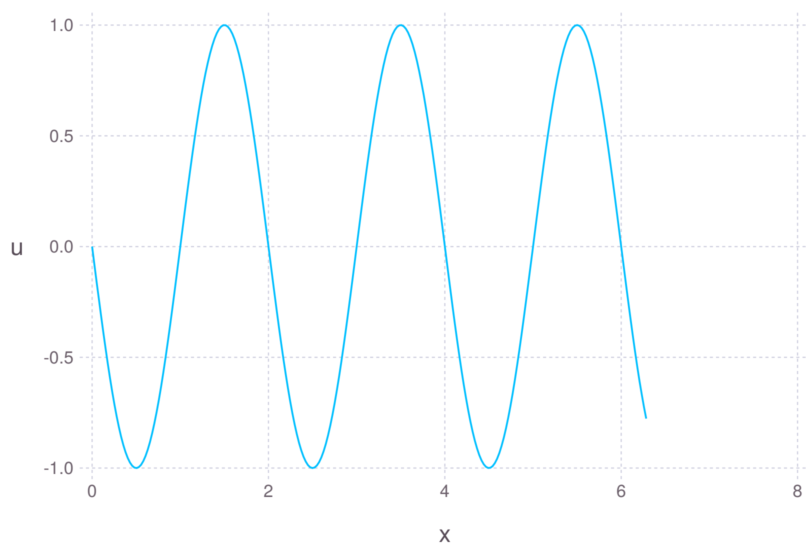
odnosno,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_L + u_R) = \frac{1}{2}[\sin \pi(x+t) + \sin \pi(x-t)] = \sin \pi x \cos \pi t.$$

In [1]:
```
using Gadfly
```

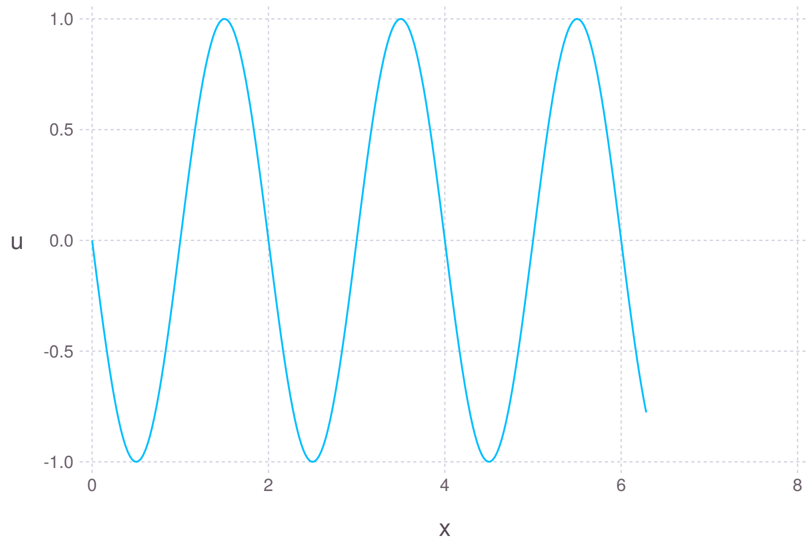
In [2]:
```
# Desni val - probajte razna vremena t od 0 do 3
t=1
u(x)=sin(pi*(x-t))
Gadfly.plot(u,0,2*pi,Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[2]:



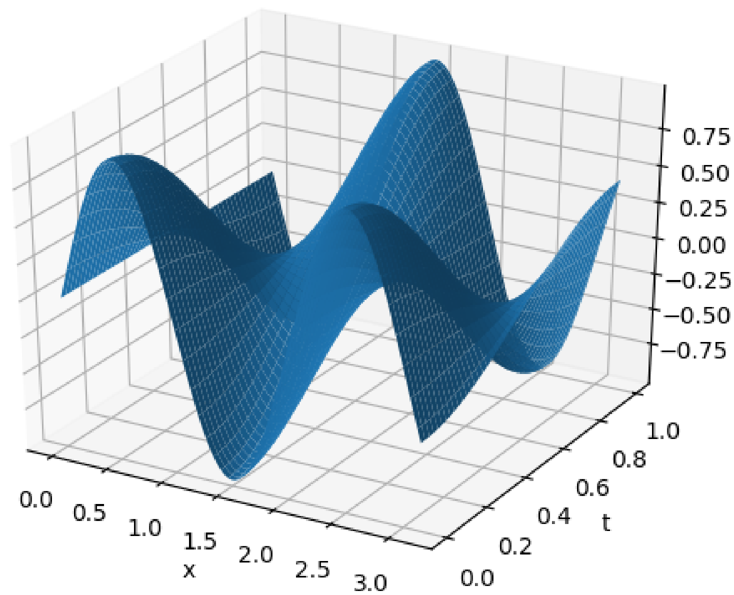
In [3]:
```
# Rješenje - probajte razna vremena t od 0 do 3
t=1
u(x)=sin(pi*x)*cos(pi*t)
Gadfly.plot(u,0,2*pi,Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[3]:



In [4]:
```
using PyPlot
```

In [5]:
```
# Cijelo rješenje
gridsize=100
X=range(0,stop=pi,length=gridsize)
T=range(0,stop=1,length=gridsize)
XT=collect(Iterators.product(X,T))
u(x)=sin.(pi*x[1])*cos.(pi*x[2])
U=Matrix(map(u,XT)')
surf(X,T,U)
xlabel("x")
ylabel("t")
```



Definirajmo još neke pojmove vezane uz valnu funkciju

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t).$$

A je *amplituda*.

k je *valni broj*, odnosno broj oscilacija u 2π jedinica prostora u danom trenutku t.

ω je *kutna frekvencija*, odnosno broj oscilacija u 2π jedinica vremena na zadanom mjestu x.

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ je *valna duljina*, odnosno udaljenost između susjednih kresta.

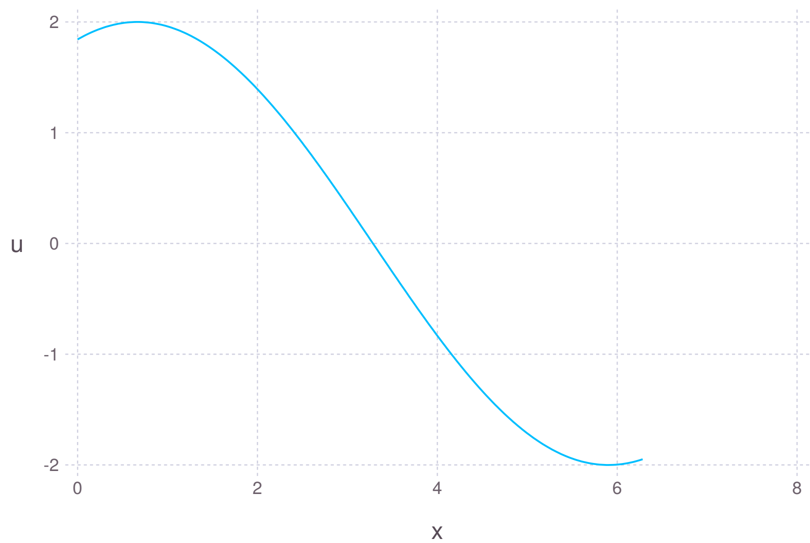
$P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ je vremenski period, odnosno vrijeme nakon kojeg se na mjestu x ponavlja isti obrazac poremećaja.

$c = \dfrac{\omega}{k}$ je *brzina* kojom val putuje udesno.

Napomena. Može se koristiti i Eulerov oblik $u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ i promatrati realni ili imaginarni dio kako bi se dobilo realno rješenje.

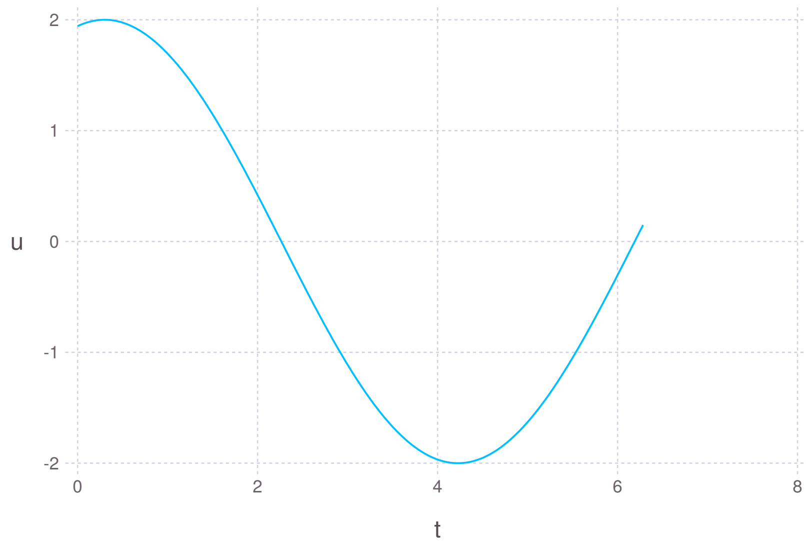
In [6]:
```
# Probajte za razne vrijednosti t, A, k i ω
t=0.5
A=2.0
k=0.6
ω=0.8
u(x)=A*cos(k*x-ω*t)
Gadfly.plot(u,0,2*pi,Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[6]:



In [7]:
```
# Probajte za razne vrijednosti x, A, k i ω
x=0.4
A=2.0
k=0.6
ω=0.8
u(t)=A*cos(k*x-ω*t)
Gadfly.plot(u,0,2*pi,Guide.xlabel("t"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[7]:



1.1 Linearni valovi

Linearni valovi su rješenja valnih jednadžbi koje su linearne u rješenju u. Linearni val uvijek ima isti oblik.

Karakteristične krivulje su krivulje uzduž kojih je rješenje konstantno.

1.1.1 Primjer

Rješenje problema početnih vrijednosti

$$
\begin{aligned}
&u_t + c\,u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

je

$$u(x,t) = \phi(x - ct).$$

Karakteristične krivulje su pravci oblika

$$x - ct = k, \quad k = konst.$$

i uzduž njih je rješenje očito konstantno, odnosno početna vrijednost se propagira bez promjene.

Alternativno, možemo provjeriti da je usmjerena derivacija uzduž karakteristične krivulje jednaka nuli: uz oznaku

$$x(t) = ct + k$$

vrijedi

$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = u_x \frac{dx(t)}{dt} + u_t \frac{dt}{dt} = u_x \cdot c + u_t = 0.$$

Brzina kojom se val kreće jednaka je

$$\frac{dx(t)}{dt} = c.$$

1.1.2 Primjer

Promotrimo slučaj kada je $c = c(x,t)$. Problem glasi

$$\begin{aligned} &u_t + c(x,t)\, u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Karakteristične krivulje su definirane s

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(x,t). \tag{1}$$

Zaista, uzduž svake krivulje koja zadovoljava (1), usmjerena derivacije je jednaka nuli pa je rješenje konstantno:

$$\frac{du(x(t),t)}{dt} = u_x \frac{dx(t)}{dt} + u_t \frac{dt}{dt} = u_x \cdot c(x,t) + u_t = 0.$$

Brzina kojom se val kreće (kojom se početne vrijednosti propagiraju uzduž katakterističnih krivulja) dana je s (1).

Zadatak. Riješimo problem

$$\begin{aligned} &u_t + 2t\, u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Karakteristične krivulje su definirane jednadžbom

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t,$$

čije rješenje je familija krivulja

$$x(t) = t^2 + k.$$

Točka (x, t) se nalazi na njoj pripadnoj karakterističnoj krivulji pa je vrijednost rješenje jednaka početnoj vrijednosti u točki $x = x(0) = k$. Dakle,

$$u(x, t) = e^{-k^2} = e^{-(x-t^2)^2}.$$

U točki (x, t) val se kreće brzinom $2t$ te ubrzava s vremenom, ali uvijek ima isti oblik.

```
In [8]: # Rješenje
        gridsize=100
        X=range(-2,stop=2,length=gridsize)
        T=range(0,stop=3,length=gridsize)
        XT=collect(Iterators.product(X,T))
        u(x)=exp.(-(x[1]-x[2].^2).^2)
        U=Matrix(map(u,XT)')
        surf(X,T,U)
        xlabel("x")
        ylabel("t")
```