MPP02 Problem svojstvenih vrijednosti i SLP

Ivan Slapničar

18. listopada 2018.

1 Problem svojstvenih vrijednosti i SLP

1.1 Matrični problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratna realna matrica.

Tražimo **svojstvene vrijednosti** $\lambda \in \mathbb{R}$ i **svojstvene vektore** $x \in \mathbb{R}^n \neq 0$, takve da je

$$Ax = \lambda x.$$

Dakle, A djeluje na vektor x tako da ga produži ili skrati, eventualno promijeni orijentaciju, dok smjer ostaje isti.

Vrijedi

$$Ax - \lambda I x = (A - \lambda I)x = 0.$$

Ovo je homogeni sustav linearnih jednadžbi koji ima netrivijalna rješenja ($x \neq 0$) ako i samo ako je matrica sustava $(A - \lambda I)$ singularna, odnosno ako i samo ako je

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Izraz $\det(A - \lambda I)$ je polinom stupnja n u varijabli λ s realnim koeficijentima, koji, prema osnovnom teoremu algebre, ima n nul-točaka koje su ili realne ili dolaze u konjugirano kompleksnim parovima.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni.

Dokaz: Zaista, neka je

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y, \quad x, y \neq 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Pretpostavimo da su x i y linearno zavisni, odnosno,

$$\alpha x + \beta y, \quad |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Vrijedi

$$A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda x + \beta \mu y = A \cdot 0 = 0.$$

Množenje prve jednakosti s λ daje sustav

$$\begin{aligned} \lambda \alpha x + \lambda \beta y &= 0 \\ \alpha \lambda x + \beta \mu y &= 0. \end{aligned}$$

Oduzmanje prve jednadžbu od druge daje

$$\beta(\mu - \lambda) y = 0$$

pa je, zbog $\mu - \lambda \neq 0$ i $y \neq 0$, nužno $\beta = 0$. Uvrštavanjem u originalnu lineranu kombinaciju, zbog $x \neq 0$ slijedi $\alpha = 0$ pa su x i y linearno nezavisni.

Teorem. Ako je A simetrična matrica, $A = A^T$, tada su sve svojstvene vrijednosti realne i imaju ortogonalni skup svojstvenih vektora, osnosno postoji matrica U takva da je

$$U^T U = U U^T = I A = U \Lambda U^T, \quad A U = U \Lambda, \quad A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T.$$

In [1]:
```
# Primjer
srand(123)
A=Symmetric(rand(-8:8,6,6))
```

Out[1]:
```
6×6 Symmetric{Int64,Array{Int64,2}}:
 -4  -6   5   6  -7  -8
 -6   7   4  -5   3  -5
  5   4   7   0  -7  -4
  6  -5   0   0  -5   8
 -7   3  -7  -5  -2   7
 -8  -5  -4   8   7  -4
```

In [2]:
```
λ,U=eig(A);
```

In [3]:
```
λ
```

Out[3]:
```
6-element Array{Float64,1}:
 -19.333
 -10.0208
  -3.43984
   1.66537
  16.1117
  19.0165
```

In [4]:
```julia
U
```

Out[4]:
```
6×6 Array{Float64,2}:
  0.505624   -0.621465    0.207178   0.231883   0.186143    0.476218
  0.199786   -0.0706871   0.554191  -0.331815  -0.726553   -0.0999079
 -0.0964963  -0.0889766  -0.555649  -0.494401  -0.29631     0.584631
 -0.44412    -0.122698    0.49035   -0.53329    0.48422     0.168499
 -0.262047   -0.758628   -0.259875  -0.088005  -0.0843794  -0.522891
  0.655139    0.101468   -0.182277  -0.547315   0.328762   -0.345881
```

In [5]:
```julia
# Ortogonalnost matrice svojstvenih vektora
U'*U
```

Out[5]:
```
6×6 Array{Float64,2}:
  1.0           5.55112e-17   5.55112e-17  …  -1.11022e-16   1.66533e-16
  5.55112e-17   1.0          -3.46945e-18     -1.04083e-16  -1.59595e-16
  5.55112e-17  -3.46945e-18   1.0             -1.31839e-16  -1.80411e-16
 -5.55112e-17  -1.52656e-16   2.63678e-16     -1.94289e-16   3.33067e-16
 -1.11022e-16  -1.04083e-16  -1.31839e-16      1.0          -1.11022e-16
  1.66533e-16  -1.59595e-16  -1.80411e-16  …  -1.11022e-16   1.0
```

In [6]:
```julia
U*U'
```

Out[6]:
```
6×6 Array{Float64,2}:
  1.0          -4.85723e-17   1.66533e-16  …  -2.77556e-17  -1.66533e-16
 -4.85723e-17   1.0          -8.32667e-17     -4.85723e-17  -5.55112e-17
  1.66533e-16  -8.32667e-17   1.0             -5.55112e-17  -5.55112e-17
 -1.38778e-16  -4.09395e-16  -9.71445e-17      2.22045e-16   6.93889e-17
 -2.77556e-17  -4.85723e-17  -5.55112e-17      1.0          -3.46945e-17
 -1.66533e-16  -5.55112e-17  -5.55112e-17  …  -3.46945e-17   1.0
```

In [7]:
```julia
# Provjerimo točnost rastava
U*diagm(λ)*U'
```

Out[7]:
```
6×6 Array{Float64,2}:
 -4.0  -6.0   5.0           6.0          -7.0  -8.0
 -6.0   7.0   4.0          -5.0           3.0  -5.0
  5.0   4.0   7.0          -8.65974e-15  -7.0  -4.0
  6.0  -5.0  -8.65974e-15   2.05391e-14  -5.0   8.0
 -7.0   3.0  -7.0          -5.0          -2.0   7.0
 -8.0  -5.0  -4.0           8.0           7.0  -4.0
```

In [8]:
```julia
sum([λ[i]*U[:,i]*U[:,i]' for i=1:size(A,1)])
```

Out[8]:
```
6×6 Array{Float64,2}:
 -4.0  -6.0   5.0           6.0          -7.0  -8.0
```

```
-6.0   7.0   4.0           -5.0            3.0  -5.0
 5.0   4.0   7.0           -8.65974e-15   -7.0  -4.0
 6.0  -5.0  -8.65974e-15    2.05391e-14   -5.0   8.0
-7.0   3.0  -7.0           -5.0           -2.0   7.0
-8.0  -5.0  -4.0            8.0            7.0  -4.0
```

1.1.1 Primjer - rješavanje algebarskih problema pomoću svojstvenih vrijednosti i vektora

Riješimo problem (prema Logan, Applied Mathematics, str. 205)

$$Ax = \mu x + f.$$

Neka je A simetrična, $A = U\Lambda U^T$ i $\mu \neq \lambda_i$. Stupci matrice U su ortogonalni i tvore bazu n-dimenzionalnog prostora, odnosno svaki vektor se može prikazati kao njihova linearna kombinacija:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \quad f = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i.$$

Imamo

$$A \cdot \big(\sum c_i u_i \big) = \mu \big(\sum c_i u_i \big) + \sum f_i u_i,$$

odnosno,

$$\sum c_i \lambda_i u_i = \mu \big(\sum c_i u_i \big) + \sum f_i u_i.$$

Izjednačavanje koeficijenata daje

$$c_i \lambda_i = \mu c_i + f_i$$

pa je

$$c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \mu}.$$

Riješimo problem $Ax = \mu x + f$ za $\mu = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In [9]:
```
μ=2
A=[1 2 3 4;2 5 6 7;3 6 8 9;4 7 9 10]
f=[1;2;1;2]
```

```
Out[9]: 4-element Array{Int64,1}:
         1
         2
         1
         2
```

```
In [10]: λ,U=eig(A);
```

Izračunajmo koeficijente vektora f u bazi U

```
In [11]: fU=[f⋅U[:,i] for i=1:4]
```

```
Out[11]: 4-element Array{Float64,1}:
          -0.317782
           0.913253
           0.368942
          -2.98812
```

Izračunajmo koeficijente c rješenja x u bazi U

```
In [12]: c=fU./(λ-μ)
```

```
Out[12]: 4-element Array{Float64,1}:
           0.113272
          -0.503146
          -0.255861
          -0.135439
```

```
In [13]: # Rješenje
         x=sum([c[i]*U[:,i] for i=1:4])
```

```
Out[13]: 4-element Array{Float64,1}:
          -0.0740741
          -0.333333
           0.481481
           0.037037
```

```
In [14]: # Provjera
         A*x-μ*x-f
```

```
Out[14]: 4-element Array{Float64,1}:
          -6.66134e-16
          -4.44089e-16
          -1.44329e-15
           0.0
```

1.2 Linearni operatori

Operator je preslikavnje $L : X \to X$ gdje je X vektorski prostor.
Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Operator je **linearan** ako je **aditivan**,

$$L(x + y) = L(x) + L(y),$$

i **homogen**,

$$L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Oba svojstva zajedno možemo pisati kao

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

1.2.1 Primjer - matrica je linearni operator na skupu vektora

Uz definiciju

$$A(x) \equiv A \cdot x,$$

vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad A(\alpha x) = \alpha A(x),$$

odnosno

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

1.3 Skalarni produkt, norma, ortogonalnost i baza

Neka su zadani vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definiramo sljedeće:
Skalarni produkt: $(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Norma: $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
Ortogonalnost: $x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$
Baza: Skup od n vektora, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je **potpun** (baza) ako za svaki vektor y vrijedi

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i.$$

Ako su, dodatno, vektori x_i međusobno ortogonalni, onda je

$$\xi_j = \frac{(y, x_j)}{(x_j, x_j)} \equiv \frac{(y, x_j)}{\|x_j\|^2}.$$

In [15]:
```
# Primjer za vektore - ortogonalnost i norma
U[:,1]⋅U[:,3], U[:,3]⋅U[:,3]
```

Out[15]:
```
(5.551115123125783e-17, 1.0000000000000004)
```

In [16]:
```
# Baza
n=size(A,1)
x=rand(n)
# Računamo koeficijente po bazi stupaca od U
ξ=Array{Float64}(n)
for i=1:n
    ξ[i]=x⋅U[:,i]
end
# Provjera
y=sum([ξ[i]*U[:,i] for i=1:n])
[x y]
```

Out[16]:
```
4×2 Array{Float64,2}:
 0.900681  0.900681
 0.940299  0.940299
 0.621379  0.621379
 0.348173  0.348173
```

1.3.1 Primjer - vektorski prostor funkcija

Neka su zadane funkcije $f, g \in C[a, b]$, gdje je $C[a, b]$ skup svih funkcija neprekidnih na intervalu $[a, b]$.

Napomena. Umjesto skupa $C[a, b]$ može se uzeti i neki skup, na primjer, skup svih kvadratno integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ kojeg označavamo s $L^2[a, b]$.

Definirajmo **skalarni produkt**:

$$(f, g) = f \cdot g = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Odavde slijede definicije:

norma: $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f(x) \cdot f(x)\, dx} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\, dx}$

ortogonalnost: $f \perp g \Leftrightarrow (f, g) = 0$

baza: Skup od ∞ funkcija, $f_1, f_2, \ldots$, je **potpun** (baza) ako za svaku funkciju g vrijedi

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(x).$$

Ukoliko su, dodatno, funkcije f_i međusobno ortogonalne, tada je

$$\xi_j = \frac{(g, f_j)}{(f_j, f_j)} \equiv \frac{(g, f_j)}{\|f_j\|^2}.$$

1.3.2 Numeričko i simboličko računanje

Julia ima više paketa pomoću kojih možemo računati određene integrale.

Najjednostavnija je funkcija `quadgk()` iz paketa QuadGK.jl (numeričko računanje).

Ovdje ćemo skalarni produkt definirati pomoću funkcije `integrate()` iz paketa `SymPy.jl` (simboličko računanje).

In [17]:
```
# Učitavanje paketa
using SymPy
```

In [18]:
```
?integrate
```

```
search: integrate deltaintegrate trigintegrate line_integrate Integral
```

Out[18]:

The `integrate` function has its limits specified with tuples of the type `(var, a, b)`. This profides a simpler interface for one-dimensional integrals: `integrate(ex, var, a, b)`

Symbolically integrate a function

Symbolically integrate a function over `[a,b]`

`integrate`: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through: http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate

Specific docs may also be found at SymPy Docs for matrices

`integrate`: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through: http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate

In [19]:
```
# Definirajmo skalarni produkt
import Base.⋅
⋅(f,g,a,b)=integrate(f*g,(x,a,b))
```

Out[19]:
```
dot (generic function with 12 methods)
```

1.3.3 Primjer - Fourierov red

Promotrimo periodične funkcije s periodom 2π na intervalu $[-\pi, \pi]$.
Funkcije

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots$$

su međusobno ortogonalne, Vrijedi $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, a norma svih ostalih funkcija je $\sqrt{\pi}$. Skup je potpun, odnosno svaka periodična funkcija f se može prikazati kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i f_i(x), \quad \xi_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)},$$

u smislu teorema o konvergenciji Fourierovog reda. Ovo su standardne formule za razvoj funkcije u Fourierov red.

In [20]:
```
# Definirajmo simboličku varijablu x
x=Sym("x")
```

Out[20]:

$$x$$

In [21]:
```
# Provjerimo ortogonalnost funkcija
⋅(sin(x),sin(x),-π,π), ⋅(sin(2*x),cos(3*x),-π,π)
```

Out[21]:
```
(3.14159265358979, 0)
```

In [22]:
```
m,n = symbols("m,n", integer=true, positive=true)
```

Out[22]:
```
(m, n)
```

In [23]:
```
⋅(sin(m*x),sin(n*x),-PI,PI)
```

Out[23]:

$$\begin{cases} \pi & \text{for}\ m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Primjer: Razvijmo funkciju definiranu formulom $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ u Fourier-ov red.

In [24]:
```
f=x^2
```

Out[24]:

$$x^2$$

In [25]:
```
f0=x/x
```

Out[25]:

$$1$$

In [26]:
```
⋅(f0,f0,-1,1)
```

Out[26]:

$$2$$

In [27]:
```
a0=⋅(f,f0,-1,1)/⋅(f0,f0,-1,1)
```

Out[27]:

$$\frac{1}{3}$$

In [28]:
```
# Funkcija je parna pa imamo samo članove uz kosinuse
an=⋅(f,cos(n*PI*x),-1,1)/⋅(cos(n*PI*x),cos(n*PI*x),-1,1)
```

Out[28]:

$$\frac{4\left(-1\right)^{n}}{\pi^{2}n^{2}}$$

In [29]:
```
# Na primjer
an(2)
```

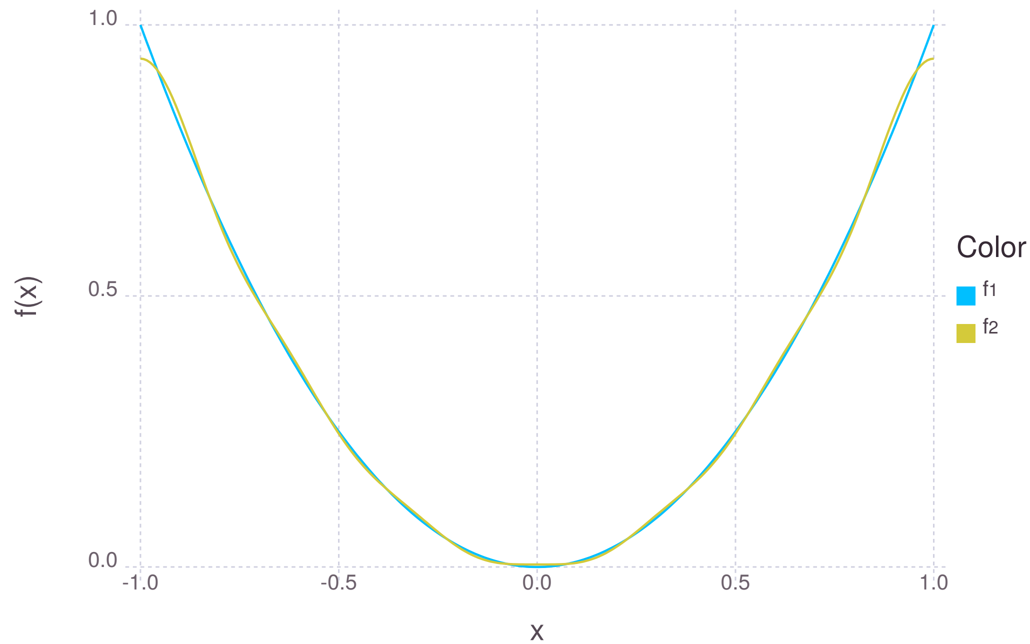
Out[29]:

$$\frac{1}{\pi^{2}}$$

In [30]:
```
# Provjerimo crtanjem
using Gadfly
```

In [31]:
```
plot([x->x^2,x->a0+sum([an(i)*cos(i*PI*x) for i=1:6])],-1,1)
```

Out[31]:



1.4 Diferencijalni problem svojstvenih vrijednosti

Skup $C^2[a,b]$ je skup svih funkcija koje na intervalu $[a,b]$ imaju dvije neprekidne derivacije.

1.4.1 Primjer

Operator druge derivacije $A \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}$ je linearan operator.

Riješimo problem svojstvenih vrijednosti

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi = \lambda\Phi, \quad 0 < x < l, \quad \Phi(0) = \Phi(l) = 0.$$

Razlikujemo slučajeve $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ i $\lambda > 0$.

Slučaj $\lambda = 0$.

Vrijedi $\Phi(x) = ax + b$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = ax$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi $al = 0$ pa je i $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa $\lambda = 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda > 0$.

Vrijedi (vidi Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima)

$$\Phi(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $a + b = 0$ pa je $b = -a$.

Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a\big(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}\big) = 0$$

pa je $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa niti jedna $\lambda > 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda < 0$.

Vrijedi

$$\Phi(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x)$.

Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$$

pa je ili $a = 0$, što opet ne daje svojstvenu funkciju, ili

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a pripadne svojstvene funkcije su

$$\Phi_n(x) = \sin\big(\frac{n\pi}{l}x\big).$$

Funkcije $\Phi_n(x)$ su međusobno ortogonalne i čine bazu promatranog prostora.

1.5 Regularni Sturm-Liouvilleov problem (SLP)

Problem glasi:

$$\begin{aligned}
&A(\Phi) \equiv -(p(x)\,\Phi')' + q(x)\,\Phi = \lambda\,\Phi, \quad a \le x \le b,\\
&\alpha_1\Phi(a) + \alpha_2\Phi'(a) = 0,\\
&\beta_1\Phi(b) + \beta_2\Phi'(b) = 0,
\end{aligned}$$

gdje je

$$\Phi \in C^2[a,b], \quad p \in C^1[a,b], \quad q \in C^0[a,b], \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}.$$

Operator A je linearan (provjerite!).

Teorem. Za regularni SLP vrijedi:

1. Postoji beskonačno mnogo svojstvenih vrijednosti λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$, koje su sve realne i vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$
2. Svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalne.
3. Skup svih svojstvenih funkcija $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ je potpun u smislu da se svaka funkcija $f \in L^2[a,b]$ može razviti u red
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \Phi_n(x), \quad \xi_n = \frac{(f, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)}$$
koji konvergira u $L^2[a,b]$.

Konvergencija u $L^2[a,b]$ znači

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} \xi_n \Phi_n\|^2 \equiv \int_a^b \big(f - \sum_{n=1}^{N} \xi_n \Phi_n\big)^2 dx \to 0 \quad \text{kada} \quad N \to \infty.$$

Na primjer, teorem vrijedi za regularni SLP iz prethodnog primjera, gdje je

$$p(x) = -1, \quad q(x) = 0, \quad a = 0, \quad b = l, \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0.$$

Dokaz 2. tvrdnje (prema Logan, Applied Mathematics, str. 209)

Neka su λ i μ dvije različite svojstvene vrijednosti sa svojstvenim funkcijama ϕ i ψ, redom. Tada vrijedi

$$-(p\phi')' + q\phi = \lambda\phi,$$
$$-(p\psi')' + q\psi = \mu\psi.$$

Pomnožimo prvu jednadžbu sa ψ i drugu sa ϕ te ih oduzmimo:

$$\phi(p\psi')' - \psi(p\phi')' = (\lambda - \mu)\phi\psi.$$

Integriranje od a do b daje

$$\int_a^b (\phi(p\psi')' - \psi(p\phi')')\, dx = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Parcijalna integracija daje

$$\int_a^b \phi(p\psi')'\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u=\phi, \quad du=\phi'\,dx \\ dv=(p\psi')'\,dx, \quad v=p\psi' \end{array} \right\} = \phi(p\psi')\big|_a^b - \int_a^b p\psi'\phi'\,dx,$$

i, slično,

$$\int_a^b \psi(p\phi')'\,dx = \psi(p\phi')\big|_a^b - \int_a^b p\psi'\phi'\,dx.$$

Dakle,

$$p(\phi\psi' - \psi\phi')\big|_a^b = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Iz rubnih uvjeta slijedi da je lijeva strana jednaka nuli: na primjer, ako su sva dijeljenja definirana, onda je

$$\frac{\phi(a)}{\phi'(a)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\psi(a)}{\psi'(a)}$$

pa je $\phi(a)\psi'(a) - \phi'(a)\psi(a) = 0$. Slično se analiziraju i ostali slučajevi.

Dakle,

$$0 = (\lambda - \mu)(\phi, \psi).$$

Ako je $\lambda \neq \mu$, onda je $(\phi, \psi) = 0$, odnosno, $\phi \perp \psi$.

Primjere rješavanja regularnog SLP dati ćemo kasnije.