MPP02_Problem_svojstvenih_vrijednosti_i_SLP

October 19, 2017

1 Problem svojstvenih vrijednosti i SLP

1.1 Matrični problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratna realna matrica.

Tražimo **svojstvene vrijednosti** $\lambda \in \mathbb{R}$ i **svojstvene vektore** $x \in \mathbb{R}^n \neq 0$, takve da je

$$Ax = \lambda x.$$

Dakle, A djeluje na vektor x tako da ge produži ili skrati, eventualno promijeni orijentaciju, dok smjer ostaje isti.

Vrijedi

$$Ax - \lambda I x = (A - \lambda I)x = 0.$$

Ovo je homogeni sustav linearnih jednadžbi koji ima netrivijalna rješenja ($x \neq 0$) ako i samo ako je matrica sustava $(A - \lambda I)$ singularna, odnosno ako i samo ako je

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ovo je polinom stupnja n u varijabli λ s realnim koeficijentima, koji, po osnovnom teoremu algebre, ima n nultočaka koje su ili realne ili dolaze u konjugirano kompleksnim parovima.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni.

Dokaz: Zaista, neka je

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y, \quad x, y \neq 0, \quad \lambda \neq \mu.$$

Pretpostavimo da su x i y linearno zavisni, odnosno,

$$\alpha x + \beta y, \quad |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Vrijedi

$$A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda x + \beta\mu y = A \cdot 0 = 0.$$

Množenje prve jednakosti s λ daje sustav

$$\lambda\alpha x + \lambda\beta y = 0$$
$$\alpha\lambda x + \beta\mu y = 0.$$

Oduzmanje prve jednadžbu od druge daje

$$\beta(\mu - \lambda)y = 0$$

pa je, zbog $\mu - \lambda \neq 0$ i $y \neq 0$, nužno $\beta = 0$. Uvrštavanjem u originalnu lineranu kombinaciju, zbog $x \neq 0$ slijedi $\alpha = 0$ pa su x i y linearno nezavisni.

Teorem. Ako je A simetrična matrica, $A = A^T$, tada su sve svojstvene vrijednosti realne i imaju ortogonalni skup svojstvenih vektora, osnosno postoji matrica U takva da je

$$U^T U = U U^T = I A = U \Lambda U^T, \quad AU = U\Lambda, \quad A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T.$$

```
In [43]: # Primjer
         A=Symmetric(rand(-8:8,6,6))

Out[43]: 6×6 Symmetric{Int64,Array{Int64,2}}:
          -7  6  -8  -4   0   6
           6  8   5   7   7   0
          -8  5   4  -5   3   6
          -4  7  -5   3  -7  -6
           0  7   3  -7  -1   0
           6  0   6  -6   0   6

In [44]: λ,U=eig(A)

Out[44]: ([-18.9381, -9.9433, 2.98192, 6.74406, 14.3287, 17.8267], [0.683217 -0.335871 ... 0.066

In [45]: λ

Out[45]: 6-element Array{Float64,1}:
          -18.9381
           -9.9433
            2.98192
            6.74406
           14.3287
           17.8267

In [46]: U

Out[46]: 6×6 Array{Float64,2}:
           0.683217  -0.335871   0.0755598    0.632428    0.0660323  -0.10183
          -0.381708  -0.246295  -0.00899145   0.157673    0.846879   -0.22692
           0.418296  -0.244523  -0.276391    -0.641983    0.0954024  -0.517302
           0.363632   0.459459  -0.479116    -0.0586546   0.433464    0.485577
           0.220898   0.634424   0.618219    -0.0531574   0.207461   -0.347346
          -0.177531   0.391332  -0.553236     0.395937   -0.195969   -0.560448
```

```
In [47]: U'*U
```

```
Out[47]: 6×6 Array{Float64,2}:
           1.0          -5.26043e-16  -2.6124e-16   …  -7.09367e-17  2.07645e-16
          -5.26043e-16   1.0          -1.66434e-16      4.75438e-17  3.38965e-16
          -2.6124e-16   -1.66434e-16   1.0              2.49002e-18  4.02315e-16
           1.87856e-16   8.86391e-17   9.31361e-16     -5.68134e-16  1.33724e-16
          -7.09367e-17   4.75438e-17   2.49002e-18      1.0          6.40281e-17
           2.07645e-16   3.38965e-16   4.02315e-16  …   6.40281e-17  1.0
```

```
In [48]: U*U'
```

```
Out[48]: 6×6 Array{Float64,2}:
           1.0          -3.8976e-16   -6.47721e-17  …  -6.42835e-17  -3.70698e-16
          -3.8976e-16    1.0           3.78523e-16      3.58119e-16  -2.11454e-16
          -6.47721e-17   3.78523e-16   1.0             -5.82141e-16   3.00969e-16
          -3.56237e-16  -2.97497e-17   1.95424e-16      7.90006e-17  -3.00248e-16
          -6.42835e-17   3.58119e-16  -5.82141e-16      1.0           1.88406e-16
          -3.70698e-16  -2.11454e-16   3.00969e-16  …   1.88406e-16   1.0
```

```
In [49]: U*diagm(λ)*U'
```

```
Out[49]: 6×6 Array{Float64,2}:
          -7.0          6.0          -8.0  -4.0   1.84951e-14   6.0
           6.0          8.0           5.0   7.0   7.0          -8.23788e-16
          -8.0          5.0           4.0  -5.0   3.0           6.0
          -4.0          7.0          -5.0   3.0  -7.0          -6.0
           1.8385e-14   7.0           3.0  -7.0  -1.0          -5.30606e-16
           6.0         -7.95734e-16   6.0  -6.0  -5.67657e-16   6.0
```

```
In [50]: sum([λ[i]*U[:,i]*U[:,i]' for i=1:size(A,1)])
```

```
Out[50]: 6×6 Array{Float64,2}:
          -7.0           6.0           -8.0  -4.0   1.83187e-14   6.0
           6.0           8.0            5.0   7.0   7.0          -8.88178e-16
          -8.0           5.0            4.0  -5.0   3.0           6.0
          -4.0           7.0           -5.0   3.0  -7.0          -6.0
           1.83187e-14   7.0            3.0  -7.0  -1.0          -4.44089e-16
           6.0          -8.88178e-16    6.0  -6.0  -4.44089e-16   6.0
```

1.1.1 Primjer - rješavanje algebarskih problema pomoću svojstvenih vrijednosti i vektora

Riješimo problem (prema Logan, Applied Mathematics, str. 205)

$$Ax = \mu x + f.$$

Neka je A simetrična, $A = U\Lambda U^T$ i $\mu \neq \lambda_i$. Stupci matrice U su ortogonalni i tvore bazu n-dimenzionalnog prostora, odnosno svaki vektor se može prikazati kao njihova linearna kombinacija:

$$x=\sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \quad f=\sum_{i=1}^{n} f_i u_i.$$

Imamo

$$A\cdot\big(\sum c_i u_i\big)=\mu\big(\sum c_i u_i\big)+\sum f_i u_i,$$

odnosno,

$$\sum c_i\lambda_i u_i=\mu\big(\sum c_i u_i\big)+\sum f_i u_i.$$

Izjednačavanje koeficijenata daje

$$c_i\lambda_i=\mu c_i+f_i$$

pa je

$$c_i=\frac{f_i}{\lambda_i-\mu}.$$

Riješimo problem $Ax=\mu x+f$, gdje je $\mu=2$,

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&5&6&7\\3&6&8&9\\4&7&9&10\end{bmatrix}, \quad f=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}.$$

In [51]:
```
μ=2
A=[1 2 3 4;2 5 6 7;3 6 8 9;4 7 9 10]
f=[1;2;1;2]
```

Out[51]:
```
4-element Array{Int64,1}:
 1
 2
 1
 2
```

In [52]:
```
λ,U=eig(A)
```

Out[52]:
```
([-0.805485, 0.184914, 0.558036, 24.0625], [-0.725314 0.329765 -0.56047 -0.225938; -0.3
```

In [53]:
```
# Izračunajmo koeficijente od f u bazi U
fU=[f⋅U[:,i] for i=1:4]
```

Out[53]:
```
4-element Array{Float64,1}:
 -0.317782
  0.913253
  0.368942
 -2.98812
```

In [54]:
```
c=fU./(λ-μ)
```

Out[54]: 4-element Array{Float64,1}:
```
  0.113272
 -0.503146
 -0.255861
 -0.135439
```

In [55]:
```
x=sum([c[i]*U[:,i] for i=1:4])
```

Out[55]: 4-element Array{Float64,1}:
```
 -0.0740741
 -0.333333
  0.481481
  0.037037
```

In [56]:
```
# Provjera
A*x-μ*x-f
```

Out[56]: 4-element Array{Float64,1}:
```
 -6.66134e-16
 -4.44089e-16
 -1.44329e-15
  0.0
```

1.2 Linearni operatori

Operator je preslikavnje $L : X \to X$ gdje je X vektorski prostor.

Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Operator je **linearan** ako je **aditivan**,

$$L(x+y) = L(x) + L(y),$$

i **homogen**,

$$L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Oba svojstva zajedno možemo pisati kao

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

1.2.1 Primjer - matrica je linearni operator na skupu vektora

Uz definiciju

$$A(x) \equiv A \cdot x,$$

vrijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \quad A(\alpha x) = \alpha A(x),$$

odnosno

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

1.3 Skalarni produkt, norma, ortogonalnost i baza

Neka su zadani vektori $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definiramo sljedeće:

Skalarni produkt: $(x,y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Norma: $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Ortogonalnost: $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$

Baza: Skup od n vektora, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je **potpun** (baza) ako za svaki vektor y vrijedi

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i.$$

Ukoliko su, dodatno, vektori x_i međusobno ortogonalni, tada je

$$\xi_j = \frac{(y, x_j)}{(x_j, x_j)} \equiv \frac{(y, x_j)}{\|x_j\|^2}.$$

In [57]:
```
# Primjer za vektore - ortogonalnost i norma
U[:,1]⋅U[:,3], U[:,3]⋅U[:,3]
```

Out[57]:
```
(5.551115123125783e-17, 1.0000000000000004)
```

In [58]:
```
# Baza
n=size(A,1)
x=rand(n)
# Računamo koeficijente po bazi stupaca od U
ξ=Array{Float64}(n)
for i=1:n
    ξ[i]=x⋅U[:,i]
end
# Provjera
y=sum([ξ[i]*U[:,i] for i=1:n])
[x y]
```

Out[58]:
```
4×2 Array{Float64,2}:
 0.180746    0.180746
 0.301728    0.301728
 0.00980711  0.00980711
 0.696575    0.696575
```

1.3.1 Primjer - vektorski prostor funkcija

Neka su zadane funkcije $f, g \in C[a,b]$, gdje je $C[a,b]$ skup svih funkcija neprekidnih na intervalu $[a,b]$.

Napomena. Umjesto skupa $C[a,b]$ može se uzeti i neki skup, na primjer, skup svih kvadratno integrabilnih funkcija na intervalu $[a,b]$, $L^2[a,b]$.

Definirajmo **skalarni produkt**:

$$(f,g) = f \cdot g = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Odavde slijede sljedeće definicije:

norma: $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f(x)\cdot f(x)\,dx} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$

ortogonalnost: $f \perp g \Leftrightarrow (f,g) = 0$

baza: Skup od ∞ funkcija, $f_1, f_2, \ldots$ je **potpun** (baza) ako za svaku funkciju g vrijedi

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(x).$$

Ukoliko su, dodatno, funkcije f_i međusobno ortogonalne, tada je

$$\xi_j = \frac{(y, f_j)}{(f_j, f_j)} \equiv \frac{(y, f_j)}{\|f_j\|^2}.$$

1.3.2 Numeričko računanje

Julia ima više paketa pomoću kojih možemo računati određene integrale.

Najjednostavnija je funkcija `quadgk()` iz paketa QuadGK.jliz th/QuadGK.jl).

Mi ćemo za definiranje skalarnog produkta koristiti funkciju `integrate()` is paketa `SymPy.jl`.

```
In [59]: # Učitavanje paketa
         using SymPy
```

```
In [60]: ?integrate
```

```
search: integrate deltaintegrate trigintegrate line_integrate Integral
```

Out[60]:

The `integrate` function has its limits specified with tuples of the type `(var, a, b)`. This profides a simpler interface for one-dimensional integrals: `integrate(ex, var, a, b)`

Symbolically integrate a function

Symbolically integrate a function over `[a,b]`

`integrate`: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through: http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate

Specific docs may also be found at SymPy Docs for matrices

`integrate`: a SymPy function. The SymPy documentation can be found through: http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=integrate

```
In [61]: # Definirajmo skalarni produkt
         import Base.⋅
         ⋅(f,g,a,b)=integrate(f*g,(x,a,b))
```

```
Out[61]: dot (generic function with 12 methods)
```

1.3.3 Primjer - Fourierov red

Promotrimo periodične funkcije s periodom 2π na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Funkcije

$$1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots$$

su međusobno ortogonalne, Vrijedi $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, a norma svih ostalih funkcija je $\sqrt{\pi}$. Skup je potpun, odnosno svaka periodična funkcija f se može prikazati kao

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i f_i(x), \quad \xi_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)},$$

u smislu teorema o konvergenciji Fourierovog reda. Ovo su standardne formule za razvoj funkcije u Fourierov red.

In [62]:
```
# Definirajmo simboličku varijablu x
x=Sym("x")
```

Out[62]:

$$x$$

In [63]:
```
⋅(sin(x),sin(x),-π,π), ⋅(sin(2*x),cos(3*x),-π,π)
```

Out[63]:
```
(3.14159265358979, 0)
```

In [64]:
```
m,n = symbols("m,n", integer=true, positive=true)
```

Out[64]:
```
(m, n)
```

In [65]:
```
⋅(sin(m*x),sin(n*x),-PI,PI)
```

Out[65]:

$$\begin{cases} \pi & \text{for } m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Razvijmo funkciju definiranu formulom $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ u Fourier-ov red.

In [66]:
```
f=x^2
```

Out[66]:

$$x^2$$

In [67]:
```
f0=x/x
```

Out[67]:

$$1$$

```
In [68]: ·(f0,f0,-1,1)
```

Out[68]:

$$2$$

```
In [69]: a0=·(f,f0,-1,1)/·(f0,f0,-1,1)
```

Out[69]:

$$\frac{1}{3}$$

```
In [70]: # Funkcija je parna pa imamo smao članove uz kosinuse
         an=·(f,cos(n*PI*x),-1,1)/·(cos(n*PI*x),cos(n*PI*x),-1,1)
```

Out[70]:

$$\frac{4\left(-1\right)^{n}}{\pi^2 n^2}$$

1.4 Diferencijalni problem svojstvenih vrijednosti

Skup $C^2[a,b]$ je skup svih funkcija koje na intervalu $[a,b]$ imaju dvije neprekidne derivacije.

Operator druge derivacije $A \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}$ je linearan operator.

1.4.1 Primjer

Riješimo problem svojstvenih vrijednosti

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi = \lambda\Phi, \quad 0 < x < l, \quad \Phi(0) = \Phi(l) = 0.$$

Razlikujemo slučajeve $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ i $\lambda > 0$.

Slučaj $\lambda = 0$.

Vrijedi $\Phi(x) = ax + b$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = ax$. Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi $al = 0$ pa je i $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa $\lambda = 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda > 0$.

Vrijedi (vidi Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima)

$$\Phi(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $a + b = 0$ pa je $b = -a$.

Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a\left(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}\right) = 0$$

pa je $a = 0$. Dakle, $\Phi(x) = 0$, što ne može biti svojstvena funkcija, pa niti jedna $\lambda > 0$ nije svojstvena vrijednost.

Slučaj $\lambda < 0$.

Vrijedi

$$\Phi(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Iz rubnog uvjeta $\Phi(0) = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $\Phi(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x)$.
Iz rubnog uvjeta $\Phi(l) = 0$ slijedi

$$a\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$$

pa je ili $a = 0$, što opet ne daje svojstvenu funkciju, ili

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a pripadne svojstvene funkcije su

$$\Phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcije $\Phi_n(x)$ su međusobno ortogonalne i čine bazu promatranog prostora.

1.5 Regularni Sturm-Liouvilleov problem (SLP)

Problem glasi:

$$\begin{aligned}
&A(\Phi) \equiv -(p(x)\,\Phi')' + q(x)\,\Phi = \lambda\,\Phi, \quad a \le x \le b,\\
&\alpha_1\Phi(a) + \alpha_2\Phi'(a) = 0,\\
&\beta_1\Phi(b) + \beta_2\Phi'(b) = 0,
\end{aligned}$$

gdje je

$$\Phi \in C^2[a,b], \quad p \in C^1[a,b], \quad q \in C^0[a,b], \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}.$$

Operator A je linearan (provjerite!).
Teorem. Za regularni SLP vrijedi:

1. Postoji beskonačno mnogo svojstvenih vrijednosti λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$, koje su sve realne i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

2. Svojstvene funkcije koje odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalne.

3. Skup svih svojstvenih funkcija $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ je potpun u smislu da se svaka funkcija $f \in L^2[a,b]$ može razviti u red

$$f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \Phi_n(x), \quad \xi_n = \frac{(f,\Phi_n)}{(\Phi_n,\Phi_n)}$$

koji konvergira u $L^2[a,b]$.

Konvergencija u $L^2[a,b]$ znači

$$\|f-\sum_{n=1}^{N}\xi_n\Phi_n\| \equiv \int_a^b \big(f-\sum_{n=1}^{N}\xi_n\Phi_n\big)^2 dx \to 0 \quad \text{kada} \quad N\to\infty.$$

Na primjer, teorem vrijedi za regularni SLP iz prethodnog primjera, gdje je

$$p(x)=-1, \quad q(x)=0, \quad a=0, \quad b=l, \alpha_1=1, \quad \alpha_2=0, \quad \beta_1=1, \quad \beta_2=0.$$

Dokaz 2. tvrdnje (prema Logan, Applied Mathematics, str. 209)

Neka su λ i μ dvije različite svojstvene vrijednosti sa svojstvenim funkcijama ϕ i ψ, redom. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}-(p\phi')'+q\phi&=\lambda\phi,\\ -(p\psi')'+q\psi&=\mu\psi.\end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu sa ψ i drugu sa ϕ te ih oduzmimo:

$$\phi(p\psi')'-\psi(p\phi')'=(\lambda-\mu)\phi\psi.$$

Integriranje od a do b daje

$$\int_a^b (\phi(p\psi')'-\psi(p\phi')')\,dx=(\lambda-\mu)(\phi,\psi).$$

Parcijalna integracija daje

$$\int_a^b \phi(p\psi')'\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\phi, & du=\phi'\,dx\\ dv=(p\psi')'\,dx, & v=p\psi'\end{matrix}\right\}=\phi(p\psi')\big|_a^b-\int_a^b p\psi'\phi'q\,dx,$$

i, slično,

$$\int_a^b \psi(p\phi')'\,dx=\psi(p\phi')\big|_a^b-\int_a^b p\psi'\phi'q\,dx.$$

Dakle,

$$p(\phi\psi'-\psi\phi')\big|_a^b=(\lambda-\mu)(\phi,\psi).$$

Iz rubnih uvjeta slijedi da je lijeva strana jednaka nuli: na primjer, ako su sva dijeljenja definirana, tada je

$$\frac{\phi(a)}{\phi'(a)}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\psi(a)}{\psi'(a)}$$

pa je $\phi(a)\psi'(a)-\phi'(a)\psi(a)=0$. Slično se analiziraju i ostali slučajevi.

Dakle,

$$0=(\lambda-\mu)(\phi,\psi).$$

Ako je $\lambda\neq\mu$, onda je $(\phi,\psi)=0$, odnosno, $\phi\perp\psi$.

Primjere rješavanja regularnog SLP ćemo dati kasnije.

```
In [ ]:
```