# MPP03d Jednadzba ravnoteze

Ivan Slapničar

15. studenog 2018.

## 1 Jednadžba ravnoteže

Zadana je kvadratna ploča sa stranicama duljine $\pi$. Bočne stranice su izolirane, gornji rub se održava na temperaturi $g(x)$, a donji na temperaturi 0. Želimo naći stabilno stanje razdiobe temperature $u(x,y)$.

Ignorirajući prijelazne pojave koje ovise o vremenu dobili smo problem ravnoteže u 2D:

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x,y<\pi \\
&u_x(0,y)=0, \quad u_x(\pi,y)=0, \quad 0<y<\pi \\
&u(x,0)=0, \quad u(x,\pi)=g(x), \quad 0<x<\pi.
\end{aligned}
$$

Prema klasfikaciji, PDJ je eliptička, i može se riješiti separacijom varijabli i svođenjem na SLP.

Pretpostavimo da je

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y).$$

Jednadžba glasi

$$X''\cdot Y=-Y\cdot X'',$$

odnosno

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda.$$

Iz rubnih uvjeta vidimo da možemo definirati regularni SLP po varijabli $x$:

$$
\begin{aligned}
&X''=-\lambda X, \quad 0<x<\pi \\
&X'(0)=0, \quad X'(\pi)=0.
\end{aligned}
$$

Kao i do sada, analizirajmo posebno tri slučaja:

**Slučaj 1.** Za $\lambda = 0$ je $X = ax + b$, $X' = a$, pa rubni uvjeti povlače $a = 0$. Dakle, $\lambda_0 = 0$ je svojstvena vrijednost, a $X_0 = 1$ je pripadna svojstvena funkcija.

Druga jednadžba glasi

$$Y'' = 0,$$

pa je $Y_0(y) = a_0 y + b_0$.

**Slučaj 2.** Za $\lambda < 0$ je

$$\begin{aligned} X &= a e^{\sqrt{-\lambda} x} + b e^{-\sqrt{-\lambda} x}, \\ X' &= a\sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda} x} - b\sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda} x} \end{aligned}$$

pa prvi rubni uvjet povlači

$$X'(0) = a\sqrt{-\lambda} - b\sqrt{-\lambda} = 0,$$

odnosno $a = b$. Drugi uvjet glasi

$$X'(\pi) = a\sqrt{-\lambda}\big(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\big) = 0$$

pa je $a = b = 0$. Funkcija $X = 0$ ne može biti svojstvena funkcija pa $\lambda < 0$ nije svojstvena vrijednost.

**Slučaj 3.** Za $\lambda > 0$ je

$$\begin{aligned} X &= a\sin(\sqrt{\lambda} x) + b\cos(\sqrt{\lambda} x), \\ X' &= a\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda} x) - b\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda} x). \end{aligned}$$

Prvi rubni uvjet povlači

$$X'(0) = a\sqrt{\lambda} = 0,$$

odnosno $a = 0$. Drugi uvjet glasi

$$X'(\pi) = b\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

pa je $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$. Dakle, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, su svojstvene vrijednosti, a $X_n(x) = \cos(nx)$ su pripadne svojstvene funkcije.

Druga jednadžba sada glasi $Y'' = n^2 Y$ pa je

$$Y_n = a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}.$$

Linearna kombinacija dvaju linearno nezavisnih rješenja linearne DJ jednadžbe je također rješenje, pa umjesto ove fromule rješenje možemo zapisati u obliku

$$Y_n = a_n \sinh(ny) + b_n \cosh(ny).$$

Prema principu superpozicije vrijedi

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \\
&= a_0 y + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sinh(ny) + b_n \cosh(ny)] \cos(nx).
\end{aligned}$$

Rubni uvjet na donjem rubu daje

$$u(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(ny) = 0$$

pa je nužno $b_n = 0$, $n = 1,2,3,\ldots$. Rubni uvjet na gornjem rubu sada povlači

$$u(x,\pi) = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(n\pi)\cos(nx) = g(x).$$

Radi se o razvoju u generalizirani Fourierov red u ortonogonalnoj bazi s koeficijentima

$$\begin{aligned}
a_0\pi &= \frac{(1, g(x))}{(1,1)} = \frac{\int\limits_0^\pi g(x)\,dx}{\int\limits_0^\pi 1\cdot 1\,dx}, \\
a_n \sinh(n\pi) &= \frac{(g, \cos(nx))}{(\cos(nx), \cos(nx))} = \frac{\int\limits_0^\pi g(x)\cos(nx)\,dx}{\int\limits_0^\pi \cos^2(nx)\,dx}.
\end{aligned}$$

Konačna razdioba temperature dana je funkcijom

$$u(x,y) = a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(ny)\cos(nx),$$

gdje su koeficijenti $A_n$ izračunati iz gornjih formula.

Nacrtajmo rješenje problema za $g(x) = \sin(x)$.

Za simboličko računanje koristimo paket `SymPy.jl`, a za crtanje paket `PyPlot.jl`.

```
In [1]: using PyPlot
        using SymPy
```

```
In [2]: n=symbols("n",integer=true, positive=true)
```

Out[2]:

$$n$$

In [3]:
```
g(x)=sin(x)
```

Out[3]:
```
g (generic function with 1 method)
```

In [4]:
```
a0=integrate(x->g(x),0,pi)/pi^2
```

Out[4]:

$$0.202642367284676$$

In [5]:
```
a=integrate(x->g(x)*cos(n*x),0,pi)/integrate(x->cos(n*x)^2,0,pi)/sinh(n*pi)
```

Out[5]:

$$\frac{2\left(\begin{cases} -\frac{(-1)^n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1} & \text{for } n \neq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\right)}{\pi \sinh\left(\pi n\right)}$$

In [6]:
```
# Za neparni n je a(n)=0
N(a(3)), N(a(4))
```

Out[6]:
```
(0, -5.920296258678921e-7)
```

In [7]:
```
typeof(a0)
```

Out[7]:
```
Sym
```

In [8]:
```
# Numerička vrijednost koeficijenta a0
Na0=N(a0)
```

Out[8]:
```
0.20264236728467555
```

In [9]:
```
# Numeričke vrijednosti koeficijenata
Na=[N(a(n)) for n=1:20]
```

Out[9]:
```
20-element Array{Real,1}:
  0
 -0.001585140150285632
  0
 -5.920296258678921e-7
```

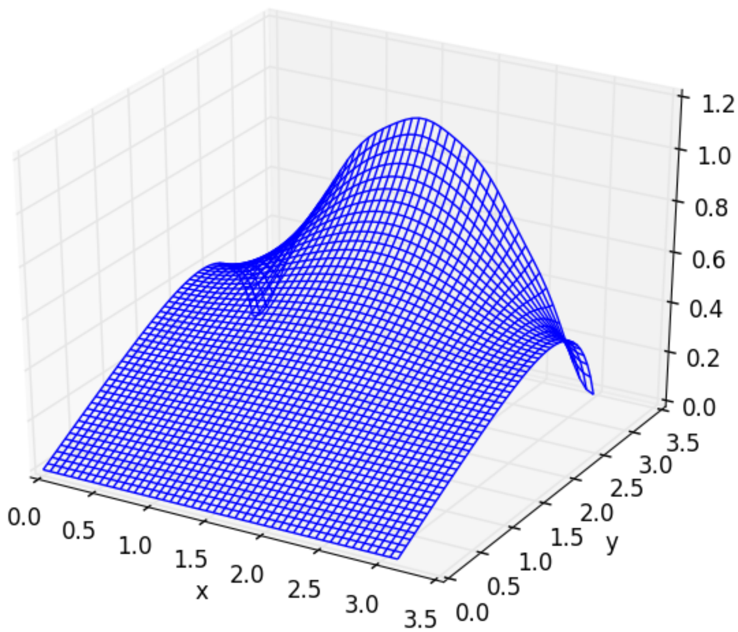
```
 0
-4.738206093297212e-10
 0
-4.915738072367991e-13
 0
-5.841728667233355e-16
 0
-7.552449512470472e-19
 0
-1.034276242901332e-21
 0
-1.4769924400586118e-24
 0
-2.1775253660329753e-27
 0
-3.2918507906874754e-30
```

In [10]:
```
# Pripremimo mrežu za crtanje
m=50
X=range(0,stop=pi,length=m)
Y=range(0,stop=pi,length=m)
XY=collect(Iterators.product(X,Y))
```

Out[10]:
```
50×50 Array{Tuple{Float64,Float64},2}:
 (0.0, 0.0)        (0.0, 0.0641141)        …  (0.0, 3.14159)
 (0.0641141, 0.0)  (0.0641141, 0.0641141)     (0.0641141, 3.14159)
 (0.128228, 0.0)   (0.128228, 0.0641141)      (0.128228, 3.14159)
 (0.192342, 0.0)   (0.192342, 0.0641141)      (0.192342, 3.14159)
 (0.256457, 0.0)   (0.256457, 0.0641141)      (0.256457, 3.14159)
 (0.320571, 0.0)   (0.320571, 0.0641141)   …  (0.320571, 3.14159)
 (0.384685, 0.0)   (0.384685, 0.0641141)      (0.384685, 3.14159)
 (0.448799, 0.0)   (0.448799, 0.0641141)      (0.448799, 3.14159)
 (0.512913, 0.0)   (0.512913, 0.0641141)      (0.512913, 3.14159)
 (0.577027, 0.0)   (0.577027, 0.0641141)      (0.577027, 3.14159)
 (0.641141, 0.0)   (0.641141, 0.0641141)   …  (0.641141, 3.14159)
 (0.705255, 0.0)   (0.705255, 0.0641141)      (0.705255, 3.14159)
 (0.76937, 0.0)    (0.76937, 0.0641141)       (0.76937, 3.14159)
 ⋮                                         ⋱
 (2.43634, 0.0)    (2.43634, 0.0641141)       (2.43634, 3.14159)
 (2.50045, 0.0)    (2.50045, 0.0641141)       (2.50045, 3.14159)
 (2.56457, 0.0)    (2.56457, 0.0641141)    …  (2.56457, 3.14159)
 (2.62868, 0.0)    (2.62868, 0.0641141)       (2.62868, 3.14159)
 (2.69279, 0.0)    (2.69279, 0.0641141)       (2.69279, 3.14159)
 (2.75691, 0.0)    (2.75691, 0.0641141)       (2.75691, 3.14159)
 (2.82102, 0.0)    (2.82102, 0.0641141)       (2.82102, 3.14159)
 (2.88514, 0.0)    (2.88514, 0.0641141)    …  (2.88514, 3.14159)
 (2.94925, 0.0)    (2.94925, 0.0641141)       (2.94925, 3.14159)
```

```
 (3.01336, 0.0)    (3.01336, 0.0641141)       (3.01336, 3.14159)
 (3.07748, 0.0)    (3.07748, 0.0641141)       (3.07748, 3.14159)
 (3.14159, 0.0)    (3.14159, 0.0641141)       (3.14159, 3.14159)
```

In [12]:
```
# Broj članova reda
l=10
u(xy)=Na0*xy[2]+sum([Na[k]*sinh.(k*xy[2]).*cos.(k*xy[1]) for k in collect(1:l)])
mesh(X,Y,Matrix(map(u,XY)'))
xlabel("x")
ylabel("y")
```




In [13]:
```
# Provjera rubnog uvjeta
x=range(0,stop=pi,length=m)
y=sin.(x)
z=Na0*pi.+sum([Na[k]*sinh.(k*pi)*cos.(k*x) for k=1:10])
```

Out[13]:
```
50-element Array{Float64,1}:
 0.05787452476068955
 0.07194838047976637
 0.1118588415858498
 0.17131735147542554
 0.24177874475811562
 0.31467406858624564
 0.3834409501726587
```

```
0.44473689684195494
0.498528775836505
0.5471506718578483
0.5937655810960227
0.6408327853540378
0.6891212064466555
⋮
0.6408327853540378
0.5937655810960228
0.5471506718578483
0.49852877583650534
0.44473689684195505
0.3834409501726587
0.3146740685862458
0.24177874475811567
0.17131735147542565
0.11185884158585002
0.0719483804797666
0.05787452476068955
```

In [14]: `plot(x,y,x,z)`