MPP04 Integralne transformacije

Ivan Slapničar

4. prosinca 2018.

1 Integralne transformacije

Integralna transformacija funkcije $f(t)$ na intervalu $[a,b]$ je

$$F(s) = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt.$$

Funkcija $K(s,t)$ je *jezgra* transformacije.

1.1 Laplaceova transformacija

Za $a=0$, $b=\infty$ i $K(s,t)=e^{-st}$ imamo *Laplaceovu transformaciju*:

$$(\mathcal{L}u)(s) \equiv U(s) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Funkcije koje su * po djelovima neprekidne na svakom konačnom intervalu i * koje su *eksponencijalnog rasta*, odnosno za koje postoje konstante $M>0$ i $a>0$ takve da je

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

sigurno imaju Laplaceovu transformaciju. Ovo su *dovoljni uvjeti*, ali ne i *nužni*.

Laplaceova transformacija je *linearni operator*.

Lapleaceova transformacija ima *inverz*:

$$\mathcal{L}^{-1}U(s) = u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} U(s)\, e^{st}\, ds.$$

Parovi transformacija i njihovih inverza se nalaze u tablicama.

Posebno su važne formule za deriviranje:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u')(s) &= sU(s) - u(0),\\
(\mathcal{L}u'')(s) &= s^2U(s) - su(0) - u'(0).
\end{aligned}$$

1.1.1 Primjer - problem početnih vrijednosti

Riješimo problem

$$u'' + u = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Laplaceova transformacija cijele jednadžbe daje

$$s^2 U(s) - su(0) - u'(0) + U(s) = 0.$$

Uvrštavanje početnih uvjeta daje

$$s^2 U(s) - 1 + U(s) = 0$$

pa je

$$U(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

Primjena inverzne transformacije daje rješenje

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) = \sin t.$$

In [1]:
```
using SymPy
```

In [2]:
```
x,t,s=symbols("x, t, s")
```

Out[2]:
```
(x, t, s)
```

In [3]:
```
u=inverse_laplace_transform(1/(1+s^2),s,t)
```

Out[3]:

$$\sin(t)\theta(t)$$

1.1.2 Primjer difuzije

Neka $u(x,t)$ daje koncentraciju kemikalije na polu-beskonačnom prostoru $x>0$ koji je u početku bez kemikalije. Neka tijekom vremena $t>0$ na rubu $x=0$ dajemo jediničnu koncentraciju kemikalije i želimo znati kako se kemikalija širi. Neka je difuzijska konstanata jednaka 1.

Matematički model je

$$
\begin{aligned}
& u_t-u_{xx}=0, \quad x>0, t>0, \\
& u(x,0)=0, \quad x>0, \\
& u(0,t)=1, \quad t>0, \\
& u(x,t) \text{ omeđena.}
\end{aligned}
$$

Laplaceova transformacija jednadžbe po vremenu t, pri čemu se prostorna varijabla x ne transformira, daje diferencijalnu jednadžbu po varijabli x:

$$
sU(x,s)-u(x,0)-U_{xx}(x,s)=0.
$$

Počeni uvjet daje jednadžbu

$$
sU(x,s)-U_{xx}(x,s)=0.
$$

Za detalje vidi J. Logan, Applied Mathematics, 2nd ed., str. 226.

In [4]:
```
s=symbols("s",real=true,positive=true)
```

Out[4]:

$$
s
$$

In [5]:
```
U = symbols("U", cls=SymFunction)
# U=SymFunction('U')
diffeq = Eq(s*U(x)-diff(U(x), x, 2), 0)
```

Out[5]:

$$
sU(x)-\frac{d^2}{dx^2}U(x)=0
$$

In [6]:
```
# Riješimo jednadžbu
sympy_meth(:dsolve,diffeq,U(x))
```

Out[6]:

$$
U(x)=C_1e^{-\sqrt{s}x}+C_2e^{\sqrt{s}x}
$$

Riješili smo jednadžbu po x pa je varijable s konstanta. Zato su C_1 i C_2 funkcije od s,

$$C_1 \equiv a(S), \quad C_2 \equiv b(s),$$

odnosno,

$$U(x,s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x} + b(s)e^{\sqrt{s}x}.$$

Zato što želimo omeđeno rješenje, mora biti $b(s) = 0$ pa je

$$U(x,s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

Sada iskoristimo početni uvjet:

$$U(0,s) = a(s) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

pa je

$$U(x,s) = \frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}.$$

Iz tablice pod (33) slijedi

$$u(x,s) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$$

```
In [7]: f=laplace_transform(t^0,t,s)
```

Out[7]:

$$\left(\frac{1}{s}, \quad 0, \quad \text{True}\right)$$

```
In [8]: inverse_laplace_transform(exp(-sqrt(s)*x)/s,s,t)
```

Out[8]:

$$\left(-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + 1\right)\theta(t)$$

Napomena. Vrijedi (vidi Error function):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt.$$

1.2 Fourierova transformacija

Za funkciju $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definiramo *Fourierovu transformaciju*:

$$(\mathcal{F}u)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{i\xi x} dx.$$

Ovo je integralna transformacija s granicama $a = -\infty$ i $b = \infty$ i jezgrom $K(\xi, x) = e^{i\xi x}$.

Fourier-ova transformacija postoji čim je u apsolutno integrabilna funkcija, odnosno $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\, dx < \infty$.

Promatrat ćemo funkcije *Schwartzove klase* koje, zajedno s derivacijama, opadaju brže od bilo koje potencije:

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty : \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^N} \right),\ |x| \to \infty,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots,\ \forall N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Inverzna Fourierova transformacija dana je formulom

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) \equiv u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi)\, e^{-i\xi x} d\xi.$$

Fourierove transformacije i inverzne Fourierove transformacije možemo naći u tablicama.

Posebno, za transformacije derivacija vrijedi

$$(\mathcal{F}u^{(k)})(\xi) = (-i\xi)^k\, \hat{u}(\xi), \quad u \in \mathcal{S}.$$

Konvolucija funkcija $u, v \in \mathcal{S}$ je funkcija

$$(u * v)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-y)\, v(y)\, dy.$$

Vrijedi

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \hat{u}(\xi)\, \hat{v}(\xi).$$

Napomena. U navedenim tablicama korištena je jezgra $K(\xi, x) = e^{-i\xi x}$ pa parove treba prilagoditi tako da transformacije navedene u tablici daju $\hat{u}(-\xi)$.

1.2.1 Primjer - računanje Fourierove transformacije

Izračunajmo transformaciju funkcije $u(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$. Vrijedi

$$\hat{u}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{i\xi x} dx.$$

Deriviranje od znakom integrala daje

$$\hat{u}'(\xi) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x\, e^{i\xi x} dx.$$

Primijenimo parcijalnu integraciju: neka je

$$u = e^{i\xi x}, \quad du = e^{i\xi x}\, i\xi\, dx, dv = \int e^{-ax^2} x\, dx, \quad v = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}.$$

```
In [9]: a=symbols("a", positive=true, real=true)
```

Out[9]:

$$a$$

```
In [10]: f=x*exp(-a*x^2)
```

Out[10]:

$$xe^{-ax^2}$$

```
In [11]: integrate(f,x)
```

Out[11]:

$$-\frac{e^{-ax^2}}{2a}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\hat{u}'(\xi) &= i\left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)\frac{1}{2a} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} i\xi\, dx \right] \\ &= \frac{i^2\xi}{2a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, dx = -\frac{\xi}{2a}\hat{u}(\xi).\end{aligned}$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\hat{u}'(\xi) = \frac{d\hat{u}}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a}\hat{u}(\xi).$$

Separacija varijabli daje

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -\frac{\xi}{2a}d\xi.$$

Integriranje daje

$$\ln|\hat{u}| = -\frac{1}{2a}\frac{\xi^2}{2} = -\frac{\xi^2}{4a}$$

pa je

$$\hat{u} = Ce^{-\xi^2/(4a)}.$$

Vrijedi

$$\hat{u}(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

pa je, konačno,

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/(4a)}.$$

In [12]:
```
g=exp(-a*x^2)
fourier_transform(g,x,s)
```

Out[12]:

$$\frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{\pi^2 s^2}{a}}}{\sqrt{a}}$$

Zašto se transformacije razlikuju?

Paket `SymPy.jl` transformaciju definira koristeći jezgru $K(\xi,x) = e^{-2\pi i\xi x}$ pa parove treba prilagoditi.

In [13]:
```
?fourier_transform
```

```
search: fourier_transform inverse_fourier_transform
```

Out[13]:

No documentation found.

`SymPy.fourier_transform` is a `Function`.

Dokumentacija se nalazi na adresi https://docs.sympy.org/latest/search.html?q=fourier_transform.

1.2.2 Primjer - problem rubnih vrijednosti

Za funkciju $f \in \mathcal{S}$ nađimo $u \in \mathcal{S}$ za koju je

$$u'' - u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Transfomacije jednadžbe daje

$$(-i\xi)^2 \hat{u} - \hat{u} = \hat{f}$$

pa je

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{1+\xi^2}\hat{f}(\xi).$$

Iz tablica vidimo da je

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

pa je po teoremu o konvoluciji

$$u(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|} * f(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}f(y)dy.$$

1.2.3 Primjer - jednadžba difuzije

Riješimo problem

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Pretpostavljamo da je $f \in \mathcal{S}$. Fourier-ova transformacija jednadžbe po x daje populacijsku jednadžbu

$$\hat{u}_t = -\xi^2 k\hat{u}$$

pa je

$$\hat{u}(\xi, t) = Ce^{-\xi^2 kt}.$$

Početni uvjet daje

$$\hat{u}(\xi, 0) = C = \hat{f}(\xi)$$

pa je

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\, e^{-\xi^2 kt}.$$

Iz tablica vidimo da je

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\xi^2 kt}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{-x^2/(4kt)}$$

pa je po teoremu o konvoluciji

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4kt)}\, f(y)\, dy.$$

1.2.4 Primjer - Laplaceova jednadžba

Riješimo problem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

uz dodatni uvijet da je rješenje omeđeno kada $y \to \infty$.
Pretpostavljamo da je $f \in \mathcal{S}$. Fourier-ova transformacija jednadžbe po x daje jednadžbu

$$\hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0,$$

pa je

$$\hat{u}(\xi, y) = a(\xi)\, e^{-\xi y} + b(\xi)\, e^{\xi y}.$$

Dodatni uvijet omeđenosti rješenja povlači $b(\xi) = 0$ pa je

$$\hat{u}(\xi, y) = a(\xi)\, e^{-\xi y}.$$

Međutim, i ovo rješenje će rasti kada je $\xi < 0$ pa stoga uzimamo

$$\hat{u}(\xi, y) = a(\xi)\, e^{-|\xi| y}.$$

Rubni uvijet daje

$$\hat{u}(\xi, 0) = a(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

pa je rješenje problema u transformiranoj domeni

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi| y}.$$

Iz tablica vidimo da je

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi| y}\right) = \frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$$

odakle, koristeći teorem o konvoluciji, slijedi

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2} * f = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^2+y^2}.$$

```
In [14]: inverse_fourier_transform(exp(-abs(t)*s),t,x)
```

```
Out[14]:
```

$$\frac{2s}{s^2+4\pi^2x^2}$$

Moramo provjeriti kako je definirana inverzna Fourier-ova transformacija u paketu `SymPy.jl`, vidi http://docs.sympy.org/latest/search.html?q=inverse_fourier_transform.

1.2.5 Plancharel-ova jednakost

Vrijedi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|u(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi.$$