MPP06 Greenova funkcija

Ivan Slapničar

20. prosinca 2018.

1 Greenova funkcija

Promotrimo regularni Sturm-Liouvilleov problem:

$$
\begin{aligned}
Au &\equiv -(p(x)\,u')' + q(x)\,u = f, \quad a \leq x \leq b, \\
B_1 u(a) &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\
B_2 u(b) &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
p, p', q, f, u, u', u'' \in C[a,b], \quad p(x) > 0.
$$

Zadatak je naći rješenje $u(x)$.

Operator A je linearan, a kompletni problem (zajedno s rubnim uvjetima) možemo prikazati u obliku $Lu = f$, pri čemu je L linearan operator *koji u sebi sadrži i rubne uvjete*

Ako se radi o matricama, onda sustav jednadžbi $Lu = f$, pri čemu je matrica L ($\lambda = 0$ nije svojstvena vrijednost matrice L), možemo riješiti invertiranjem:

$$
x = L^{-1} f. \tag{1}
$$

Pitanje. Možemo li slično napraviti i za regularni SLP, odnosno možemo li naći inverzni operator L^{-1} tako da vrijedi (1)?

Odgovor je potvrdan! Inverzni operator je integralni operator

$$
u(x) \equiv (L^{-1} f)(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{2}
$$

pri čemu je *Greenova funkcija* $g(x,\xi)$ njegova jezgra.

Teorem. Neka je operator L regularan ($\lambda = 0$ nije njegova svojstvena vrijednosti). Tada L^{-1} postoji i definiran je s (2), gdje je

$$g(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & x \leq \xi, \\ -\dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, & x > \xi. \end{cases}$$

Ovdje su u_1 i u_2 linearno nezavisno rješenja homogene diferencijalne jednadžbe $Au = 0$ uz rubne uvjete $B_1 u_1(a) = 0$ i $B_2 u_2(b) = 0$, a

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2$$

je Wronskijan.

1.1 Svojstva Greenove funkcije

Heavisideova step funkcija $H(x)$ je definirana s

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Green-ovu funkciju možemo zapisati kao

$$g(x,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)W(\xi)}[u_1(x)u_2(\xi)H(\xi - x) + u_1(\xi)u_2(x)H(x-\xi)]. \tag{3}$$

Green-ova funkcija je neprekidna: u_1, u_2 i njihove derivacije su neprekidne funkcije po pretpostavci. Funkcija p je neprekidna i različita od nule, a Wronskijan je neprekidan i različit od nule jer su funkcije u_1 i u_2 linearno nezavisne. Posebno, Greenova funkcija je očito neprekidna u točki $x = \xi$.

Derivacija $g_x(x,\xi)$ ima skok u točki $x = \xi$: vrijedi

$$\begin{aligned} g_x(\xi^+,\xi) &= -\frac{1}{p(\xi)W(\xi)}[u_1'(\xi)u_2(\xi)H(0^-) + u_1(\xi)u_2(\xi)H'(0^-) \\ &\quad + u_1(\xi)u_2'(\xi)H(0^+) + u_1(\xi)u_2(\xi)H'(0^+)] \\ &= -\frac{u_1(\xi)u_2'(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}. \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili činjenice da je

$$H(0^+) = 1, \quad H(0^-) = 0, \quad H'(0^+) = 0, \quad H'(0^-) = 0.$$

Slično se pokaže da je

$$g_x(\xi^-,\xi) = -\frac{u_1'(\xi)u_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$$

pa je

$$g_x(\xi^+,\xi) - g_x(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)W(\xi)}[u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi)]$$
$$= -\frac{1}{p(\xi)W(\xi)}W(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \neq 0.$$

1.2 Primjer

Riješimo problem rubnih vrijednosti

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

pomoću Greenove funkcije.

Vrijedi $p(x) = 1$. Homogeni problem $Au = 0$ glasi $u''(x) = 0$ pa je $u = ax + b$. Tražimo dva linearno nezavisna rješenja tako da je $u_1(0) = 0$ i $u_2(1) = 0$.

Možemo uzeti $u_1 = x$. Uvjet $u_2(1) = 0$ povlači $a \cdot 1 + b = 0$ pa je $a = -b$, odnosno $u_2 = a(x-1)$. Konstanta a je proizvoljna pa uzmimo $u_2 = x - 1$. Vrijedi

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - (x-1) = 1 \neq 0,$$

pa su funkcije u_1 i u_2 linearno nezavisne.

Prema formuli (3) je (nacrtajte funkciju $g(x,\xi)$ kao funkciju od x za neki ξ)

$$g(x,\xi) = -x(\xi-1)H(\xi-x) - \xi(x-1)H(x-\xi)$$

pa je, prema (2),

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^1 x(1-\xi)H(\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi + \xi(1-x)H(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^1 [x(1-\xi)(1-H(x-\xi) + \xi(1-x)H(x-\xi)]\,f(\xi)\,d\xi \\
&= x\int_0^1 (1-\xi)\,f(\xi)\,d\xi + \int_0^1 [\xi(1-x) - x(1-\xi)]H(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi \\
&= x\int_0^1 (1-\xi)\,f(\xi)\,d\xi + \int_0^x (\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

In [1]:
```
using SymPy
```

In [2]:
```
x,y=symbols("x,y",real=true)
```

Out[2]:
```
(x, y)
```

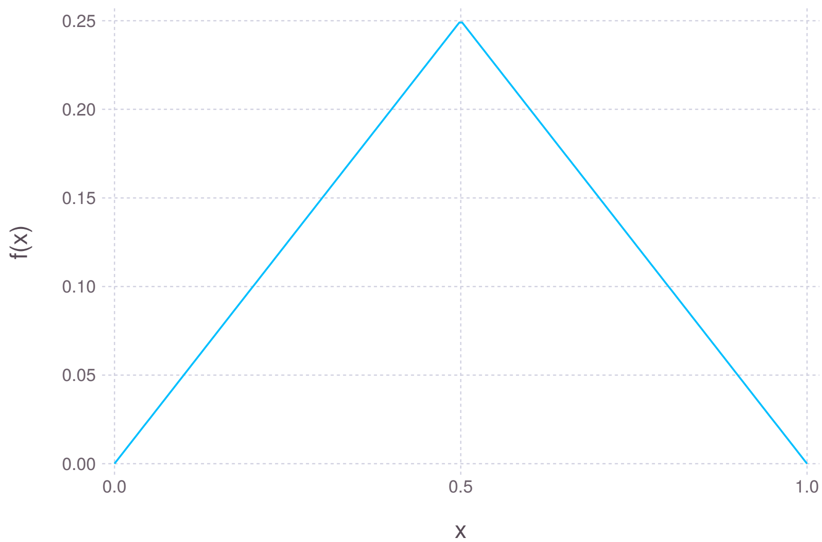
In [3]:
```
g(x)=x*(1-ζ)*Heaviside(ζ-x)+ζ*(1-x)*Heaviside(x-ζ)
```

Out[3]:
```
g (generic function with 1 method)
```

In [4]:
```
using Gadfly
```

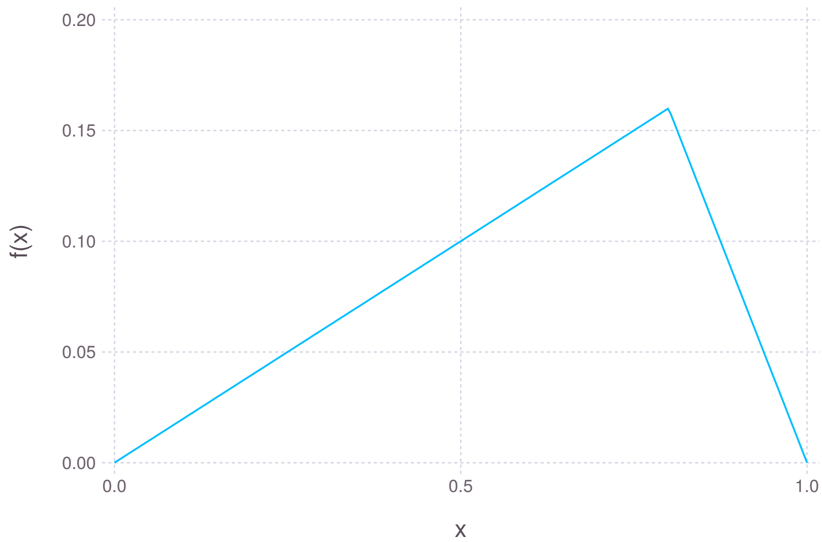
In [5]:
```
ζ=0.5
plot(g,0,1)
```

Out[5]:



In [6]:
```
ζ=0.8
plot(g,0,1)
```

Out[6]:



Fizikalna interpretacije je sljedeća:

Green-ova funkcija je odgovor linearnog operatora Au na impuls u točki $x = \xi$ (neovisno o funkciji f) koji zadovolja i rubne uvjete, pa integral (2) daje rješenje problema rubnih vrijednosti za zadanu funkciju f

Provjerimo zadovoljava li $u(x)$ diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete: Leibnitzovo pravilo daje

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \int_0^1 (1-\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^x (-1)\, f(\xi)\, d\xi + (x-x)\, f(x)\cdot 1 - (0-x)\, f(0)\cdot 0 \\
&= \int_0^1 (1-\xi)\, f(\xi)\, d\xi - \int_0^x f(\xi)\, d\xi \\
u''(x) &= 0 - \int_0^x 0\cdot d\xi - f(x)\cdot 1 + 0 = -f(x).
\end{aligned}$$

U rubovima vrijedi

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0\cdot \int_0^1 (1-\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^0 (\xi - 0)\, f(\xi)\, d\xi = 0 \\
u(1) &= 1\cdot \int_0^1 (1-\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^1 (\xi - 1)\, f(\xi)\, d\xi = 0.
\end{aligned}$$

Na primjer, za $f(x) = \sin(x)$ lako provjerimo da rješenje problema glasi

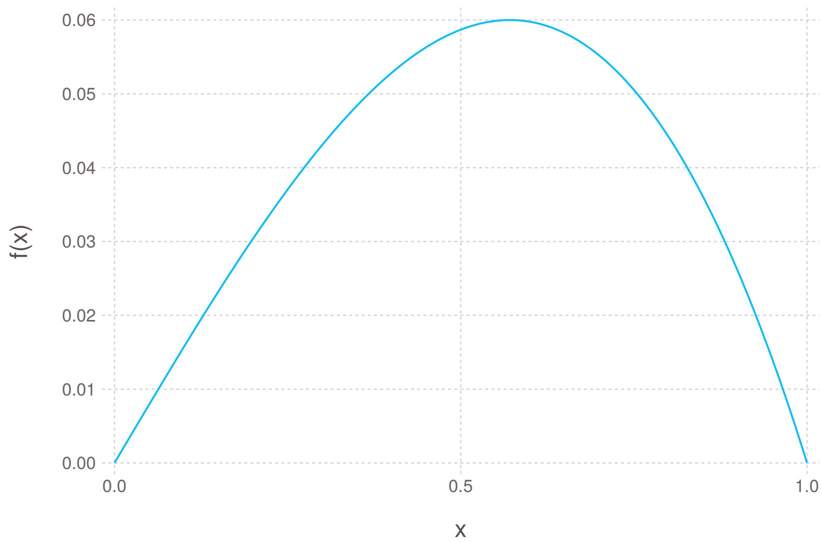
$$u(x) = \sin x - x \sin 1.$$

```
In [7]: u(x)=sin(x)-x*sin(1)
```

Out[7]: u (generic function with 1 method)

In [8]: plot(u,0,1)

Out[8]:



In [9]:
```
# Rješenje pomoću Greenove funkcije
f(x)=sin(x)
ug(x)=x*integrate((1-y)*f(y),y,0,1)+integrate((y-x)*f(y),y,0,x)
```

Out[9]: ug (generic function with 1 method)

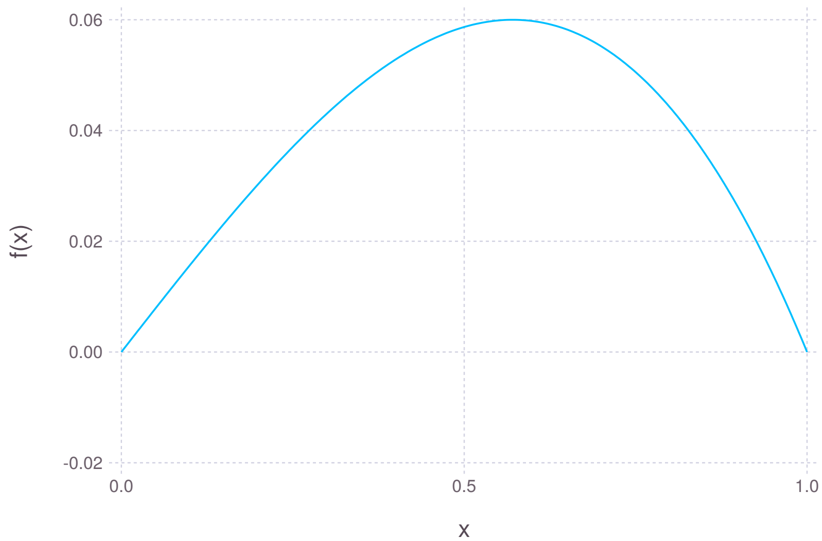
In [10]: ug(0.5)

Out[10]:

$$-0.5\sin(1) + 0.479425538604203$$

In [11]:
```
# Ovaj simbolički račun traje duže
plot(ug,0,1)
```

Out[11]:



Primjer. Riješimo problem rubnih vrijednosti

$$u'' + u' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1.$$

Rubni uvjeti nisu homogeni pa ne možemo koristiti teorem. Želimo rješenje u obliku

$$u = \int_0^1 g(x, \xi) \, f(\xi) \, d\xi + B \tag{1}$$

gdje B daje utjecaj rubnih uvjeta. Moramo odrediti problem rubnih vrijednosti koji funkcija g zadovoljava.

Diracova delta funkcija daje

$$u(x) = \int_0^1 \delta(\xi - x) \, u(\xi) \, d\xi. \tag{2}$$

Uvrštavanjem DJ u (1) imamo

$$u = \int_0^1 g(x, \xi) \, \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{d\xi} + 1 \right) u(\xi) \, d\xi + B$$

Želimo postići da diferencijalni operatori djeluju na funkciju g. Primijenimo dva puta parcijalnu integraciju: prva parcijalna integracija daje

$$u(x) = g(x, \xi) \left(\frac{d}{d\xi} + 1 \right) u(\xi) \bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{d\xi} g(x, \xi) \cdot \left(\frac{d}{d\xi} + 1 \right) u(\xi) \, d\xi + B$$

Parcijalna integracija preostalog integrala daje

$$\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{du}{d\xi}\,d\xi + \int_0^1 u\frac{\partial g}{\partial \xi}\,d\xi = \frac{\partial g}{\partial \xi}u\Big|_0^1 - \int_0^1 u\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}\,d\xi + \int_0^1 u\frac{\partial g}{\partial \xi}\,d\xi.$$

Uvrštavanjem i korištenjem (2) imamo

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - \frac{\partial g}{\partial \xi}\right) u\,d\xi + \left[g\left(\frac{du}{d\xi} + u\right) - \frac{\partial g}{\partial \xi}u\right]_0^1 + B \\ &= \int_0^1 \delta(\xi - x)\,u(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Jednakost će biti zadovoljena ako je

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - \frac{\partial g}{\partial \xi} = \delta(\xi - x) \tag{3}$$

$$B = \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}u - g\left(\frac{du}{d\xi} + u\right)\right]_0^1 \tag{4}$$

Vrijednosti $u(0)$ i $u(1)$ su zadane, dok $u'(0)$ i $u'(1)$ nisu, pa stavimo

$$g(x,0) = 0, \quad g(x,1) = 0, \tag{5}$$

dok ćemo vrijednosti $g_\xi(x,0)$ i $g_\xi(x,1)$ izračunati.
Integriranje (3) daje

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} - g = K_1 + H(\xi - x).$$

Ovo je linearna diferencijaalna jednadžba prvog reda čije rješenje glasi

$$g(x,\xi) = e^\xi[K_2 + \int e^{-\xi}(K_1 + H(\xi - x))\,d\xi].$$

Osnovni teorem integralnog računa, $\int f(x)\,dx = \int_0^x f(t)\,dt$, daje

$$\begin{aligned} g(x,\xi) &= e^\xi[K_2 + \int_0^\xi e^{-\zeta}(K_1 + H(\zeta - x))\,d\zeta] \\ &= e^\xi\big[K_2 + K_1\big(-e^{-\zeta}\Big|_0^\xi\big) + \int_0^\xi e^{-\zeta}H(\zeta - x)\,d\zeta\big] \\ &= K_2e^\xi + K_1(e^\xi - 1) + \frac{1}{2}e^\xi\big[|e^{-x} - e^{-\xi}| + e^{-x} - e^{-\xi}\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Iz (5) slijedi

$$
\begin{aligned}
0 &= g(x,0) = K_2 \cdot 1 + K_1(1-1) + \frac{1}{2} \cdot 1[|e^{-x}-1| + e^{-x} - 1] = K_2 \\
0 &= g(x,1) = K_1(e-1) + e(e^{-x} - e^{-1}) = K_1(e-1) + e^{1-x} - 1
\end{aligned}
$$

pa je

$$
K_1 = \frac{1-e^{1-x}}{e-1}.
$$

Uvrštavanje u (6) daje

$$
g(x,\xi) = \frac{1-e^{1-x}}{e-1}(e^{\xi}-1) + \frac{1}{2}e^{\xi}\big[|e^{-x}-e^{-\xi}| + e^{-x} - e^{-\xi}\big]. \tag{7}
$$

Da bismo odredili B iz (4) trebamo još izračunati $g_\xi(x,0)$ i $g_\xi(x,1)$. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
g_\xi(x,\xi) &= \frac{1-e^{1-x}}{1-e}e^{\xi} + \frac{1}{2}e^{\xi}\big[|e^{-x}-e^{-\xi}| + e^{-x} - e^{-\xi}\big] \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{\xi}\left[\frac{e^{-x}-e^{-\xi}}{|e^{-x}-e^{-\xi}|}e^{-\xi} + e^{-\xi}\right]
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
g_\xi(x,0) &= \frac{1-e^{1-x}}{e-1} + \frac{1}{2}[|e^{-x}-1| + e^{-x}-1] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}-1}{|e^{-x}-1|} + 1\right] \\
&= \frac{1-e^{1-x}}{e-1} \\
g_\xi(x,1) &= e\frac{1-e^{1-x}}{e-1} + e(e^{-x}-e^{-1}) + \frac{1}{2}e(e^{-1}+e^{-1}) \\
&= e\frac{1-e^{1-x}}{e-1} + e^{1-x}.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u (4) konačno slijedi

$$
u(x) = \int_0^1 g(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + u_1\left(e\frac{1-e^{1-x}}{e-1} + e^{1-x}\right) - u_0\frac{1-e^{1-x}}{e-1},
$$

gdje je $g(x,\xi)$ dano sa (7).

Nacrtajmo rješenje za $f(x) = \sin(2x)$. Rješenje ćemo nacrtati pomoću numeričke integracije koristeći paket QuadGK.jl.

```
In [12]: using QuadGK
```

In [13]:
```
x=Float64
y=Float64
f(x)=sin(2*x)
u0=1
u1=2
```

Out[13]: 2

In [14]:
```
using Base.MathConstants
```

In [15]:
```
g(x,y)=(1-exp(1-x))*(exp(y)-1)/(e-1) +
    exp(y)*(abs(exp(-x)-exp(-y))+exp(-x)-exp(-y))/2
```

Out[15]: g (generic function with 2 methods)

In [16]:
```
# Provjerimo rubne uvjete za g
g(0.7,0),g(0.7,1)
```

Out[16]: (0.0, -1.1102230246251565e-16)

In [17]:
```
# Rješenje
u(x)=quadgk(y->g(x,y)*f(y),0,1)[1]+u1*(e*(1-exp(1-x)) /
    (e-1)+exp(1-x))-u0*(1-exp(1-x))/(e-1)
```

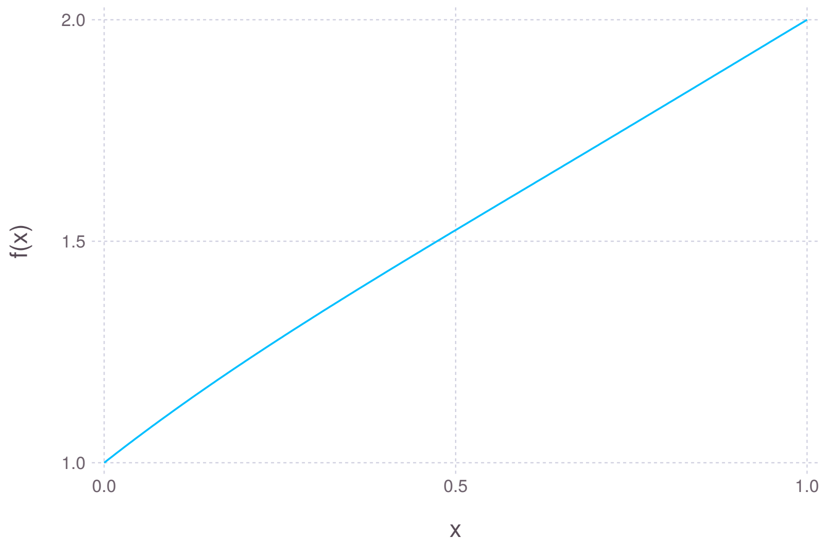
Out[17]: u (generic function with 1 method)

In [18]:
```
# Provjerimo zadovoljava li rješenje rubne uvjete
u(0),u(1)
```

Out[18]: (1.0, 2.0)

In [19]:
```
# Nacrtajmo rješenje
plot(u,0,1)
```

Out[19]:



Zadatak. Nacrtajte rješenja za razne funkcije $f(x)$.

1.3 Bilinearni razvoj

Regularni Sturm-Liouvilleov problem glasi

$$Lu = f, \quad a < x < b$$

pri čemu operator L uključuje diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete. Operator L ima beskonačno svojstvenih vrijednosti λ_n i pripadnih ortonormiranih svojstvenih funkcija $\phi_n(x)$, tako da vrijedi

$$L\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x).$$

Funkcije ϕ_n imaju normu jedan i tvore bazu prostora. Greenova funkcija jednaka je

$$g(x,\xi) = \sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Dokažimo ovu tvrdnju. Funkcija f se može prikazati pomoću elemenata baze:

$$f(x) = \sum f_n \phi_n(x), \quad f_n = (f, \phi_n) \equiv \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx.$$

Neka je

$$u(x) = \sum c_n \phi_n(x)$$

rješenje. Zbog linearnosti operatora L vrijedi

$$Lu = L\big(\sum c_n\phi_n\big) = \sum c_n L(\phi_n) = \sum c_n \lambda_n \phi_n = \sum f_n \phi_n$$

pa izjednačavanje koeficijenata uz ϕ_n daje

$$c_n = \frac{f_n}{\lambda_n}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} u(x) = \sum c_n\phi_n(x) &= \sum \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b f(\xi)\phi_n(\xi)\,d\xi\right)\phi_n(x) \\ &= \int_a^b \left(\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n}\right) f(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

pa je Green-ova funkcija $g(x, \xi)$ dana izrazom u zagradama.

1.3.1 Primjer Greenove funkcije u 2D