MPP07b Nelinearni valovi

Ivan Slapničar

11. siječnja 2019.

1 Nelinearni valovi

Nelinearni valovi su rješenje valne jednadžbe oblika

$$
\begin{aligned}
&u_t + c(u)\,u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad c'(u) > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{1}
$$

Karakteristične krivulje su definirane s

$$
\frac{dx(t)}{dt} = c(u). \tag{2}
$$

Zaista, uzduž svake krivulje koja zadovoljava (2), usmjerena derivacije je jednaka nuli pa je rješenje konstantno:

$$
\frac{du(x(t),t)}{dt} = u_x \frac{dx(t)}{dt} + u_t \frac{dt}{dt} = u_x \cdot c(u) + u_t = 0. \tag{3}
$$

Karakteristične krivulje su pravci: zbog (3) vrijedi

$$
\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt} c(u(x(t),t)) = c'(u)\frac{du(x(t),t)}{dt} = 0
$$

pa je

$$
x(t) = at + b.
$$

Nađimo rješenje: neka se točka $(x,t) \equiv (x(t),t)$ nalazi na karakteristici (pravcu) koji prolazi točkom $(\xi, 0)$. Vrijednost rješenja je konstantna uzduž karakteristike pa je

$$
u(x,t) = \phi(\xi). \tag{4}
$$

Također, vrijedi

$$
\frac{dx(t)}{dt} = c(u(x,t)) = c(u(\xi,0)) = c(\phi(\xi))
$$

pa je

$$x = x(t) = c(\phi(\xi))\, t + b.$$

Uvrštavanje $x(0) = b = \xi$ daje

$$x = x(t) = c(\phi(\xi))\, t + \xi. \tag{5}$$

Ovo je implicitna definicija za ξ koja, zajedno s (4), daje rješenje:

$$u(x,t) = \phi(\xi), \quad x = c(\phi(\xi))\, t + \xi. \tag{6}$$

Ukoliko se viša točka kreće brže od niže točke, dolazi do *opuštanja vala* (eng. *release wave*), ili do *lomljenja vala* (eng. *shock wave*).

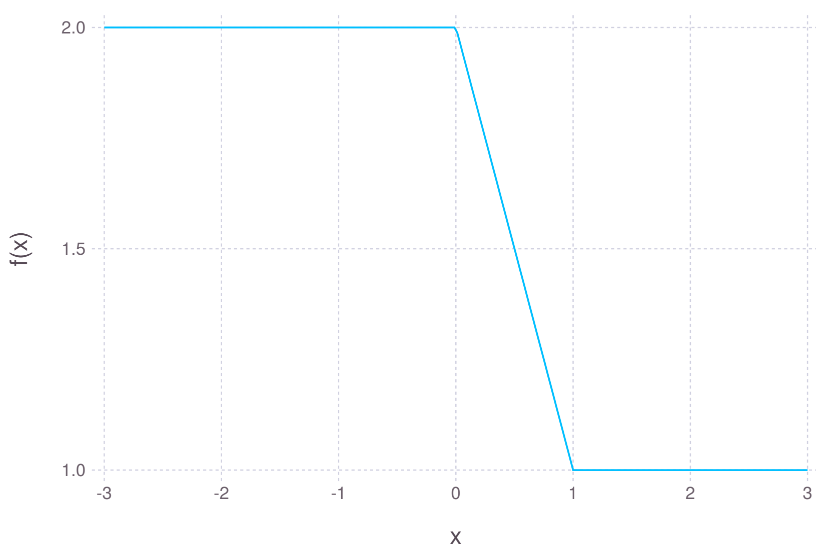
Primjer. Riješimo problem

$$\begin{aligned} u_t + u\, u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

In [1]:
```
using Gadfly
```

In [2]:
```
# Nacrtajmo početnu vrijednost
ϕ(x)=x<0 ? 2 : x>1 ? 1 : 2-x
Gadfly.plot(ϕ,-3,3)
```

Out[2]:

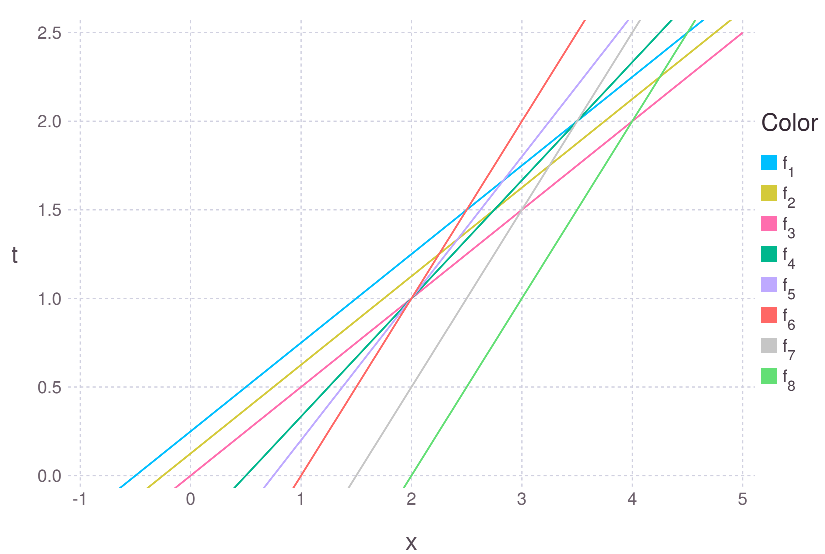


Karakteristike su

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2t+\xi, \quad \xi<0,\\
x(t) &= (2-\xi)\,t+\xi, \quad \xi\in[0,1],\\
x(t) &= t+\xi, \quad \xi>1.
\end{aligned}
$$

In [3]:
```
# Nacrtajmo karakteristike. Formule smo preradili tako da
# je x nezavisna varijabla
t(x,ξ)=ξ<0 ? (x-ξ)/2 : ξ>1 ? x-ξ : (x-ξ)/(2-ξ)
t1(x)=t(x,-0.5)
t2(x)=t(x,-0.25)
t3(x)=t(x,0)
t4(x)=t(x,0.5)
t5(x)=t(x,0.75)
t6(x)=t(x,1)
t7(x)=t(x,1.5)
t8(x)=t(x,2)
Gadfly.plot([t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8],-1,5,Coord.Cartesian(ymin=0.0,ymax=2.5),
    Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("t"))
```

Out[3]:



Vidimo da rješenje nakon $t=1$ *ne postoji* (val se prelomi). Na primjer, točka $(x,t)=(4,2)$ se nalazi na dvije različite karakteristike i to $x=2t$ (za $\xi=0$) i $x=t+2$ (za $\xi=2$). Uzduž prve karakteristike sve točke imaju vrijednost $u = \phi(0) = 2$, a uzduž druge karakteristike sve točke imaju vrijednost $u = \phi(2) = 1$. Stoga bi vrijednost $u(4,2)$ trebala imati dvije različite vrijednosti, što je nemoguće.

U ovom primjeru rješenje možemo izračunati eksplicitno. Za $\xi < 0$ vrijedi

$$x - 2t = \xi < 0 \Rightarrow x < 2t, \quad u(x,t) = \phi(\xi) = 2.$$

Za $\xi > 1$ vrijedi

$$x - t = \xi > 1 \Rightarrow x > 1 + t, \quad u(x,t) = \phi(\xi) = 1.$$

Za $\xi \in [0,1]$ je $2t \leq x \leq t+1$ i

$$u(x,t) = \phi(\xi) = \frac{2-x}{1-t}.$$

Zaista, iz

$$x = (2-\xi)\,t + \xi = 2t - \xi t + \xi$$

slijedi

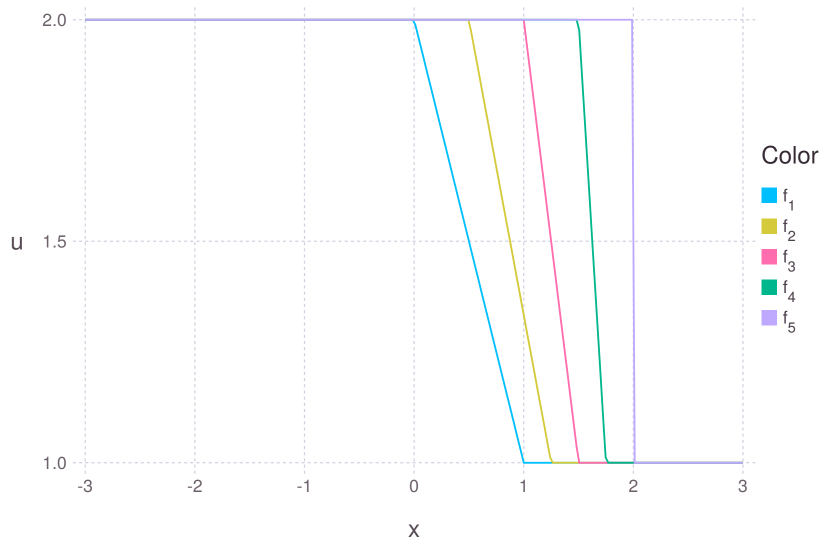
$$\phi(\xi) = 2 - \xi = 2 - \frac{x-2t}{1-t} = \frac{2-x}{1-t}.$$

Rješenje je

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < 2t, \\ \dfrac{2-x}{1-t}, & 2t \leq x \leq t+1, \\ 1, & x > t+1. \end{cases}$$

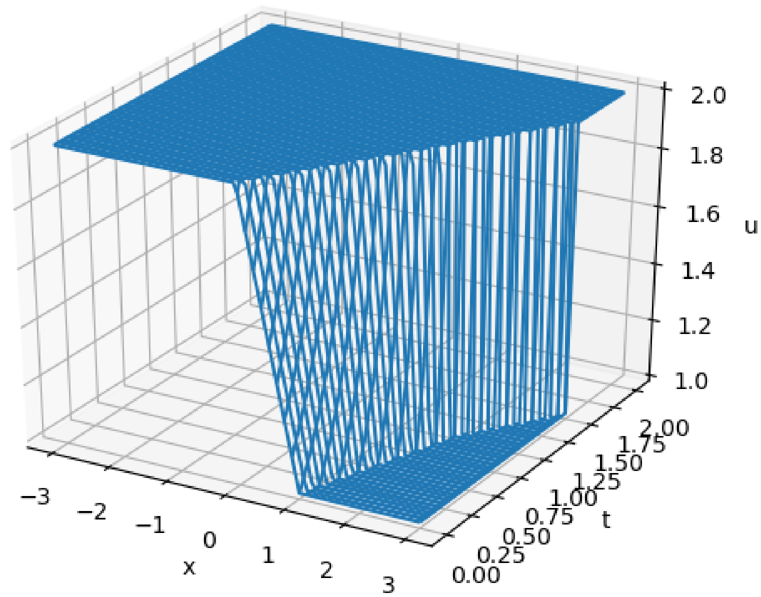
In [4]:
```
# Pogledajmo kako se val mijenja do trenutka t=1
u(x,t)=x<2*t ? 2 : x>t+1 ? 1 : (2-x)/(1-t)
u₁(x)=u(x,0)
u₂(x)=u(x,0.25)
u₃(x)=u(x,0.5)
u₄(x)=u(x,0.75)
u₅(x)=u(x,1)
Gadfly.plot([u₁,u₂,u₃,u₄,u₅],-3,3,Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[4]:



In [5]:
```
using PyPlot
```

In [6]:
```
# Cijelo rješenje
gridsize=100
X=range(-3,stop=3,length=gridsize)
T=range(0,stop=2,length=gridsize)
XT=collect(Iterators.product(X,T))
u(x,t)=x<2*t ? 2 : x>t+1 ? 1 : (2-x)/(1-t)
U=[u(XT[i,j][1],XT[i,j][2]) for i=1:gridsize,j=1:gridsize]
PyPlot.mesh(X,T,Matrix(U'))
xlabel("x")
ylabel("t")
zlabel("u")
```



1.1 Vrijeme loma

Val će se prelomiti u trenutku kada u_x postane beskonačno. Izračunajmo *vrijeme loma* (eng. *breaking time*) t_b.

Neka je u (1)

$$c'(u) > 0, \quad \phi(x) \geq 0, \quad \phi'(x) < 0.$$

Deiviranje jednakosti (5) po x daje

$$1 = c'(\phi(\xi))\,\phi'(\xi)\,\xi_x\,t + \xi_x$$

pa je

$$\xi_x = \frac{1}{1 + c'(\phi(\xi))\,\phi'(\xi)\,t}.$$

Deriviranje jednakosti (4) po x daje

$$u_x = \phi'(\xi)\,\xi_x = \frac{\phi'(\xi)}{1 + c'(\phi(\xi))\,\phi'(\xi)\,t}$$

pa je vrijeme loma najmanje vrijeme t za koje je nazivnik jednak nuli,

$$t_b = \min_{\xi} \frac{-1}{c'(\phi(\xi))\,\phi'(\xi)}.$$

Na primjer, u prethodnom primjeru je

$$c(u) = u, \quad c'(u) = 1, \quad \phi(x) = 2 - x, \quad \phi'(\xi) = -1$$

pa je vrijeme loma jednako

$$t_b = \frac{-1}{1 \cdot (-1)} = 1.$$

Primjer. Prema (6), rješenje problema

$$\begin{aligned} &u_t + u^2\, u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = \sin x + 2, \end{aligned}$$

dano je implicitnim formulama

$$u(x,t) = \sin\xi + 2, \quad x = (\sin\xi + 2)^2\, t + \xi.$$

U ovom slučaju ne možemo dobiti eksplicitno rješenje. Međutim, u zadanom trenutku t možemo lako nacrtati val. Također, za zadanu točku (x,t) možemo izračunati pripadni ξ nekom od numeričkih metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi, ali u tom slučaju moramo unaprijed znati približnu vrijednost rješenja ξ.

Izračunajmo vrijeme loma: ovdje je

$$c'(u) = 2u > 0, \quad \phi(x) = \sin x + 2 > 0, \quad \phi'(x) = \cos x < 0,\ x \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi].$$

Funkcija

$$t_b = \frac{-1}{2(\sin\xi + 2)\cos\xi}$$

poprima minimum za (izračunajte!)

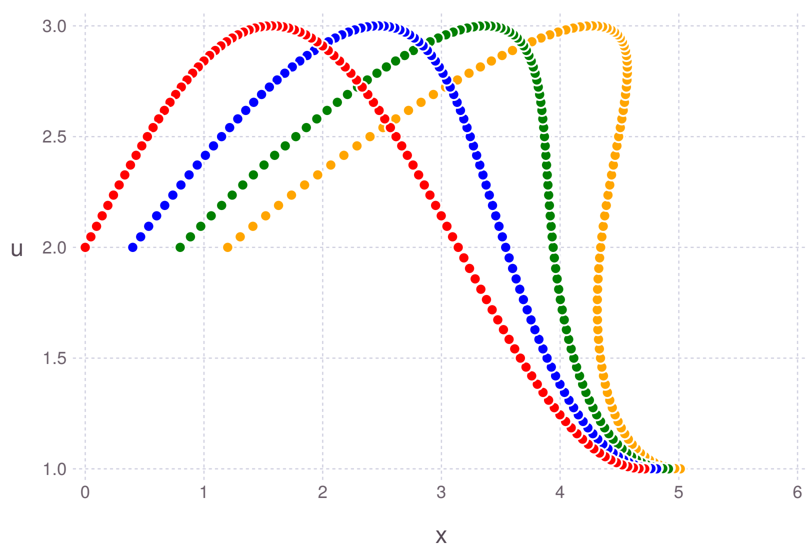
$$\sin\xi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pa je vrijeme loma

$$t_b = \frac{\sqrt{2}}{(3+\sqrt{3})\sqrt{\sqrt{3}}} \approx 0.227.$$

```
In [7]: # Pogledajmo kako se val mijenja u ovisnosti o vremenu t
        ξ=range(0,stop=3*pi/2,length=100)
        U=sin.(ξ).+2
        T₀=0
        X₀=U.^2*T₀+ξ
        T₁=0.1
        X₁=U.^2*T₁+ξ
        T₂=0.2
        X₂=U.^2*T₂+ξ
        T₃=0.3
        X₃=U.^2*T₃+ξ
        Gadfly.plot(layer(x=X₀,y=U,Theme(default_color=colorant"red")),
            layer(x=X₁,y=U,Theme(default_color=colorant"blue")),
            layer(x=X₂,y=U,Theme(default_color=colorant"green")),
            layer(x=X₃,y=U,Theme(default_color=colorant"orange")),
            Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"))
```

Out[7]:



Primjer. Rješenje problema

$$
\begin{aligned}
&u_t + u\, u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = e^{-x^2},
\end{aligned}
$$

je dano implicitnim formulama

$$u(x,t) = e^{-\xi^2}, \quad x = e^{-\xi^2}\, t + \xi.$$

U ovom slučaju ne možemo dobiti eksplicitno rješenje. Izračunajmo vrijeme loma: ovdje je

$$c'(u) = 1 > 0, \quad \phi(x) = e^{-x^2} > 0, \quad \phi'(x) = -2x\, e^{-x^2} < 0,\ x > 0.$$

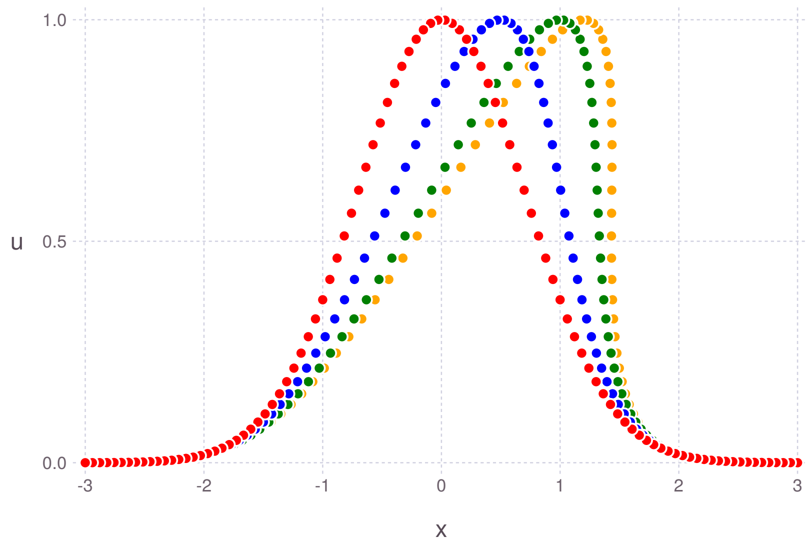
Funkcija

$$t_b = \frac{-1}{-2\xi\, e^{-\xi^2}} = \frac{e^{\xi^2}}{2\xi}$$

poprima minimum za $\xi = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ pa je vrijeme loma $t_b = \sqrt{\dfrac{e}{2}} \approx 1.166$.

```
In [8]: # Pogledajmo kako se val mijenja u ovisnosti o vremenu t
        ξ=range(-3,stop=3,length=100)
        U=exp.(-ξ.^2)
        T₀=0
        X₀=U*T₀+ξ
        T₁=0.5
        X₁=U*T₁+ξ
        T₂=1.0
        X₂=U*T₂+ξ
        T₃=1.2
        X₃=U*T₃+ξ
        Gadfly.plot(layer(x=X₀,y=U,Theme(default_color=colorant"red")),
            layer(x=X₁,y=U,Theme(default_color=colorant"blue")),
            layer(x=X₂,y=U,Theme(default_color=colorant"green")),
            layer(x=X₃,y=U,Theme(default_color=colorant"orange")),
            Guide.xlabel("x"),Guide.ylabel("u"),
            Coord.Cartesian(xmin=-3.0,xmax=3.0))
```

Out[8]:



1.2 Burgerova jednadžba

Burgerova jednadžba je zbroj valne jednadžbe (advekcija u linearnom slučaju) i toplinske jednadžbe (difuzija). Primjer linearne Burgerove jednadžbe je

$$u_t + cu_x - \nu u_{xx} = 0.$$

Ako početni uvjet ima oblik

$$u(x, 0) = Ae^{ikx},$$

onda tražmo rješenje oblika $u(x, t) = f(t)e^{ikx}$. Uvrštavanje u jednadžbu daje

$$e^{ikx}\left[f'(t) + cf(t)ik + \nu f(t)k^2\right] = 0.$$

Izjednačavanje izraza u zagradi s nulom daje populacijsku jednadžbu

$$f'(t) = f(t)(-cik - \nu k^2)$$

pa je, uz korištenje početnog uvjeta,

$$f(t) = Ae^{(-cik - \nu k^2)\,t}.$$

Rješenje jednadžbe je

$$u(x,t) = Ae^{-\nu k^2 t} e^{ik(x-ct)},$$

odnosno njen realni ili imaginarni dio, na primjer

$$u(x,t) = Ae^{-\nu k^2 t} \cos k(x-ct).$$

Radi se o gušenom desnom valu s valnim brojem k i brzinom c, s time što valovi s manjim valnim duljinama opadaju brže.

```
In [9]: # Nacrtajmo rješenje
        c=1
        ν=1
        A=1
        k=1
        gridsize=100
        X=range(-pi,stop=pi,length=gridsize)
        T=range(0,stop=3,length=gridsize)
        XT=collect(Iterators.product(X,T))
        u(x,t)=A*exp(-ν*k^2*t)*cos(k*(x-c*t))
        U=[u(XT[i,j][1],XT[i,j][2]) for i=1:gridsize,j=1:gridsize]
        PyPlot.mesh(X,T,Matrix(U'))
        xlabel("x")
        ylabel("t")
        zlabel("u")
```