

NA03 Norme

Ivan Slapničar

11. listopada 2018.

1 Norme

Norma na vektorskom prostoru X je svaka funkcija $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta)

1.1 Vektorske norme

Za $X = \mathbb{R}^n$ imamo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Posebno:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}$
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

```
In [1]: srand(122)
        x=rand(-4:4,5)
```

```
Out[1]: 5-element Array{Int64,1}:
         0
         4
         3
        -1
         3
```

```
In [2]: norm(x,1), norm(x), norm(x,Inf)
```

```
Out[2]: (11.0, 5.916079783099616, 4.0)
```

1.2 Matrične norme

Iz svake vektorske norme možemo izvesti matričnu normu (*inducirane norme*):

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Posebno:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ - najveća 1-norma stupca
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1:n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ - najveća 1-norma retka
- $\|A\|_2$ - najveća singularna vrijednost matrice A

Frobeniusova ili *Euklidska* norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

nije inducirana norma.

Matrične norme još imaju i svojstvo

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

```
In [3]: A=rand(-4:4,5,5)
```

```
Out [3]: 5×5 Array{Int64,2}:
```

```
 0  0  3 -2  0
 2  0  3  3 -3
-1  4 -4  0 -2
-2  2  1  2  2
 3 -3 -4 -4  4
```

```
In [4]: norm(A,1), norm(A), norm(A,2), norm(A,Inf), vecnorm(A)
```

```
Out [4]: (15.0, 9.286910492176554, 9.286910492176554, 18.0, 12.806248474865697)
```

1.3 Skalarni produkt, norma i ortogonalnost funkcija

Standardna vektorska norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

je definirana pomoću **skalarnog produkta** vektora,

$$x \cdot y = \sum x_i y_i.$$

Vektori x i y su međusobno okomiti (**ortogonalni**), odnosno $x \perp y$, ako je $x \cdot y = 0$.

Skalarni produkt funkcija definiramo pomoću određenog integrala:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Ostale definicije ostaju iste:

$$\|f\|_2 = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx},$$

$$f \perp g \iff f \cdot g = 0.$$