

NA04 Pogreska unatrag i stabilni algoritmi

Ivan Slapničar

11. listopada 2018.

1 Teorija smetnje, pogreška unatrag i stabilni algoritmi

1.1 Teorija smetnje

Odgovorimo na sljedeće pitanje:

Koliko se mijenja rezultat u ovisnosti o promjeni ulaznih podataka?

Za funkciju $f(x)$ i za neki ulazni podatak x , želimo dobiti ocjenu za **apsolutnu pogrešku** u odnosu na **promjenu** ulaznog podatka za δx ,

$$\|f(x + \delta x) - f(x)\| \leq \kappa \|\delta x\|,$$

i **relativnu pogrešku** u odnosu na **relativnu promjenu** ulaznog podatka $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$,

$$\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa \frac{\|\delta x\|}{\|x\|},$$

Vrijedi

$$\|f(x + \delta x) - f(x)\| = \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|\delta x\|} \|\delta x\| \equiv \kappa \|\delta x\|.$$

Veličina κ je **uvjetovanost** ili **kondicija**. Ona podsjeća na derivaciju, a kazuje koliko se najviše uveća smetnja u ulaznim podacima.

Slično, u izrazu

$$\frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = \frac{\|f(x + \delta x) - f(x)\| \cdot \|x\|}{\|\delta x\| \cdot \|f(x)\|} \cdot \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \equiv \kappa \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

κ nam kazuje koliko se najviše relativno uveća relativna smetnja u ulaznim podacima.

1.2 Pogreška unatrag

Neka vrijednost funkcije $f(x)$ računamo pomoću algoritma $\text{alg}(x)$. **Pogreška algoritma** je

$$\|\text{alg}(x) - f(x)\|,$$

a **relativna pogreška algoritma** je

$$\frac{\|\text{alg}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}.$$

Ove pogreške je teško ili čak nemoguće procijeniti direktno. Stoga se promatra **pogreška unatrag**,

$$\text{alg}(x) = f(x + \delta x),$$

odnosno

izračunata vrijednost funkcije f za ulazni podatak x jednaka je točnoj vrijednosti funkcije f u smetanom ulaznom podatku za neku (nepoznatu) smetnju.

1.3 Stabilni algoritmi

Algoritam je **stabilan** ako uvijek vrijedi

$$\text{alg}(x) = f(x + \delta x)$$

za neki mali δx .