NA07 Iterativne metode

Ivan Slapničar

24. listopada 2018.

1 Iterativne metode

Za velike sustave, a posebno za sustave s malom ispunom (malo elemenata različitih od nule), te ukoliko je matrica sustava *strogo dijagonalno dominantna*, rješenje se može brzo naći *iterativnim metodama* (vidi Numerička matematika, poglavlje 3.8):

Definicija. Funkcija $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *kontrakcija* ako postoji broj $q<1$ za koji vrijedi

$$\|F(x)-F(y)\| < q\|x-y\| \qquad \forall x,y.$$

Banachov teorem o fiksnoj točki. Ako je F kontrakcija, onda niz definiran s

$$x_{k+1}=F(x_k)$$

konvergira prema jedinstvenom vektoru $\tilde x$ za kojeg vrijedi

$$\tilde x = F(\tilde x).$$

$\tilde x$ se zove *fiksna točka* funkcije F. Za pogrešku u k-tom koraku vrijede ocjene

$$\|x_k-\tilde x\| \leq \frac{q}{1-q}\|x_k-x_{k-1}\|$$

i

$$\|x_k-\tilde x\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x_1-x_0\|,$$

pri čemu je druga ocjena bolja. Brzina konvergencije je *linearna*,

$$\|x_{k+1}-\tilde x\| \leq q\|x_k-\tilde x\|.$$

1.1 Jacobi-jeva i Gauss-Seidel-ova metoda

Neka je

$$F(x) = Bx + c,$$

pri čemu je B kvadratna matrica. Tada je

$$\|F(x) - F(y)\| = \|Bx + c - (By + c)\| = \|B(x - y)\| \leq \|B\|\|x - y\|,$$

pa je F kontrakcija ako je

$$\|B\| = q < 1.$$

Neka je zadan sustav $Ax = b$. Matricu A rastavimo kao

$$A = D\,(L + I + U)$$

pri čemu je D dijagonalna matrica, L strogo donje trokutasta matrica i U strogo gornje trokutasta matrica.

1.1.1 Jacobi-jeva metoda

Neka je

$$B = -(L + U), \quad c = D^{-1}b.$$

Ako je matrica A *strogo dijagonalno dominantna*,

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

onda je preslikavanje F kontrakcija (moguće je uzeti i druge norme) pa niz

$$x_{k+1} = -(L + U)x_k + c$$

konvergira prema rješenju sustava x.

1.1.2 Gauss-Seidel-ova metoda

Neka je

$$B = -(I + L)^{-1}U, \quad c = (I + L)^{-1}\,D^{-1}b.$$

Bez dokaza navodimo sljedeću tvrdnju: ako je matrica A strogo dijagonalno dominantna, onda je preslikavanje F kontrakcija pa niz

$$x_{k+1} = -(I + L)^{-1}Ux_k + (I + L)^{-1}D^{-1}b,$$

odnosno

$$x_{k+1} = -Lx_{k+1} - Ux_k + D^{-1}b,$$

konvergira prema rješenju sustava x.

In [1]:
```
function myjacobi(A::Array,b::Array,x::Array)
    D=diag(A)
    L=tril(A,-1)./D
    U=triu(A,1)./D
    tol=1000*eps()
    d=1.0
    B=-(L+U)
    c=b./D
    q=norm(B,Inf)
    # @show q
    while d>tol
        y=B*x+c
        d=norm(x-y,Inf)
        # @show d
        x=y
    end
    x,d
end
```

Out[1]:
```
myjacobi (generic function with 1 method)
```

In [2]:
```
srand(123)
n=8
A=rand(n,n)
# Napravimo matricu dijagonalno dominantnom
A=A+n*I
b=rand(n)
```

Out[2]:
```
8-element Array{Float64,1}:
 0.924965
 0.348939
 0.784423
 0.849775
 0.119929
 0.860143
 0.576808
 0.178059
```

In [3]:
```
# Početni vektor
x0=rand(n)
```

Out[3]: 8-element Array{Float64,1}:
```
 0.951917
 0.8781
 0.00916625
 0.595896
 0.954351
 0.841945
 0.296102
 0.855727
```

In [4]:
```
x,d=myjacobi(A,b,x0)
# Rješenje
x
```

Out[4]: 8-element Array{Float64,1}:
```
  0.0898031
  0.0143176
  0.0745687
  0.0821775
 -0.00693184
  0.0811161
  0.0568566
 -0.00569884
```

In [5]:
```
# Norma razlike dvije zadnje iteracije
d
```

Out[5]: 1.6361911825413245e-13

In [6]:
```
# Rezidual
r=A*x-b
```

Out[6]: 8-element Array{Float64,1}:
```
 -3.39839e-13
 -4.47198e-13
 -3.39839e-13
 -3.29958e-13
 -3.9721e-13
 -5.33129e-13
 -2.73004e-13
 -4.26631e-13
```

In [7]:
```
# Provjerimo i normu relativnog reziduala
norm(r)/(vecnorm(A)*norm(x))
```

Out[7]: 2.629840024669059e-13

In [8]:
```
function mygaussseidel(A::Array,b::Array,x::Array)
    D=diag(A)
    L=tril(A,-1)./D
    U=triu(A,1)./D
    tol=1000*eps()
    d=1.0
    # B=-inv(I+L)*U
    B=-(I+L)\U
    c=(I+L)\(b./D)
    # @show norm(U,Inf)
    y=Array{Float64}(n)
    while d>tol
        y=B*x+c
        d=norm(x-y)
        x=y
    end
    x,d
end
```

Out[8]:
```
mygaussseidel (generic function with 1 method)
```

In [9]:
```
x,d=mygaussseidel(A,b,x0)
# Rješenje
x
```

Out[9]:
```
8-element Array{Float64,1}:
  0.0898031
  0.0143176
  0.0745687
  0.0821775
 -0.00693184
  0.0811161
  0.0568566
 -0.00569884
```

In [10]:
```
# Norma razlike dvije zadnje iteracije
d
```

Out[10]:
```
7.736207519235691e-14
```

In [11]:
```
# Rezidual
A*x-b
```

Out[11]:
```
8-element Array{Float64,1}:
 -5.77316e-15
 -2.93654e-14
 -2.66454e-14
```

```
 -1.75415e-14
 -6.75848e-15
 -3.66374e-15
 -2.22045e-16
  0.0
```

Izmjerimo brzinu za veće matrice:

```
In [12]: n=1024
         A=rand(n,n)
         # Napravimo matricu dijagonalno dominantnom
         A=A+n*I
         b=rand(n)
         # Pocetni vektor
         x0=rand(n)
```

```
Out[12]: 1024-element Array{Float64,1}:
          0.535643
          0.766008
          0.44635
          0.305757
          0.756561
          0.159858
          0.91704
          0.64676
          0.0197729
          0.297172
          0.728198
          0.586834
          0.461064
          ⋮
          0.74365
          0.333398
          0.612098
          0.237285
          0.609827
          0.594452
          0.162617
          0.357514
          0.732225
          0.506276
          0.772186
          0.881906
```

```
In [17]: @time mygaussseidel(A,b,x0);
```

```
  0.317902 seconds (77 allocations: 64.413 MiB, 37.88% gc time)
```

```
In [18]: @time A\b;
```

```
  0.128247 seconds (12 allocations: 8.016 MiB, 11.35% gc time)
```