NA03 Norme

Ivan Slapničar

15. listopada 2018.

1 Norme

Norma na vektorskom prostoru X je svaka funkcija $\| \quad \| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $\|x\| = 0\| \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta)

1.1 Vektorske norme

Za $X = \mathbb{R}^n$ imamo

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$$

Posebno:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}$
- $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

In [1]:
```
srand(122)
x=rand(-4:4,5)
```

Out[1]:
```
5-element Array{Int64,1}:
  0
  4
  3
 -1
  3
```

In [2]:
```
norm(x,1), norm(x), norm(x,Inf)
```

Out[2]:
```
(11.0, 5.916079783099616, 4.0)
```

1.2 Matrične norme

Iz svake vektorske norme možemo izvesti matričnu normu (*inducirane norme*):

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Posebno:

- $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1:n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ - najveća 1-norma stupca
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1:n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ - najveća 1-norma retka
- $\|A\|_2$ - najveća singularna vrijednost matrice A

Frobeniusova ili *Euklidska* norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

nije inducirana norma.

Matrične norme još imaju i svojstvo

$$\|A\cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

```
In [3]: A=rand(-4:4,5,5)
```

```
Out[3]: 5×5 Array{Int64,2}:
          0   0   3  -2   0
          2   0   3   3  -3
         -1   4  -4   0  -2
         -2   2   1   2   2
          3  -3  -4  -4   4
```

```
In [4]: norm(A,1), norm(A), norm(A,2), norm(A,Inf), vecnorm(A)
```

```
Out[4]: (15.0, 9.286910492176554, 9.286910492176554, 18.0, 12.806248474865697)
```

1.3 Skalarni produkt, norma i ortogonalnost funkcija

Skalarni produkt na vektorskom prostoru X je svako preslikavanje $\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $x \cdot x \geq 0$
2. $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $x \cdot y = y \cdot x$

4. $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$
5. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Ukoliko je na vektorskom prostoru definiran skalarni produkt, normu možemo definirati kao

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Također, ako je $x \cdot y = 0$ kažemo da su vektori x i y *međusobno ortogonalni (okomiti)*.
Na primjer, standardna vektorska norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

je definirana pomoću skalarnog produkta vektora,

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

a vektori x i y su ortogonalni, odnosno $x \perp y$, ako je $x \cdot y = 0$.
Skalarni produkt funkcija definiramo pomoću određenog integrala:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Ostale definicije ostaju iste:

$$\|f\|_2 = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\, dx},$$

$$f \perp g \iff f \cdot g = 0.$$